МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

О СВОЙСТВАХ ИНЪЕКТОРОВ ВО МНОЖЕСТВАХ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьев, Т.К. Петрова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы конечны. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется множеством Фиттинга G, если выполняются: 1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S$ и $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; 2) если S, $T \in \mathcal{F}$ и S, $T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; 3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Подгруппа V группы G называется: 1) $\mathcal{F}$-максимальной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $V \in \mathcal{F}$; 2) если $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathcal{F}$, то $U = V$; 2) $\mathcal{F}$-инъектором G, если $V \cap N$ — $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа N, для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Пусть $\mathfrak{S}$ – класс Фиттинга разрешимых групп и $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G. Тогда $\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$ – множество подгрупп $\{H \leq G \mid H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{S}\}$.

Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называют: 1) π-насыщенным, если $\mathcal{F} \odot \mathcal{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$; 2) наследственным, если $G \in \mathcal{F}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathcal{F}$.

Цель исследования – описание $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп для фиттингового множества группы G, которая в общем случае не разрешима.

Материал и методы. *Используются терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов и множеств Фиттинга.*

Результаты и их обсуждение. *Доказана*

Теорема А. *Пусть $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга G и $N \trianglelefteq G$. Тогда: 1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N}$= {SN/N: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN} группы G/N является множеством Фиттинга G/N; 2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором G/N.*

Теорема Б. *Пусть $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда: 1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N}$= {SN/N: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN} группы G/N является множеством Фиттинга G/N; 2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то VN/N является $\mathcal{F}$-инъектором G/N.*

Заключение. *Описан метод построения $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп в случае, когда $\mathcal{F}$ — наследственное или π-насыщенное множество Фиттинга частично разрешимой группы.*

Ключевые слова: *группа, класс Фиттинга, множество Фиттинга, $\mathcal{F}$-инъектор.*

ON PROPERTIES OF INJECTORS IN FITTING SETS

N.T. Vorobyev, T.K. Petrova
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

All the considered groups are finite. A non-empty set $\mathcal{F}$ of subgroups of a group G is called a Fitting set of G if the following three conditions are satisfied: 1) if $T \trianglelefteq\trianglelefteq S$ and $S \in \mathcal{F}$, then $T \in \mathcal{F}$; 2) if S, $T \in \mathcal{F}$ and S, $T \trianglelefteq ST$, then $ST \in \mathcal{F}$; 3) if $S \in \mathcal{F}$ and $x \in G$, then $S^x \in \mathcal{F}$.

Let $\mathcal{F}$ be a Fitting set of a group G. A subgroup V of G is called: 1) $\mathcal{F}$-maximal if the following conditions are satisfied: 1) $V \in \mathcal{F}$; 2) if $V \leq U \leq G$ and $U \in \mathcal{F}$, then U=V; 2) $\mathcal{F}$-injector G, if $V \cap N$ is an $\mathcal{F}$-maximal subgroup N, for any subnormal subgroup N of G.

Let $\mathfrak{S}$ be the Fitting class of soluble groups and $\mathcal{F}$ the Fitting set of G. Then $\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$ is the set of subgroups $\{H \leq G \mid H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{S}\}$.

The Fitting set $\mathcal{F}$ of the group G is called: 1) π-saturated if $\mathcal{F} \odot \mathcal{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$; 2) hereditary, if $G \in \mathcal{F}$ and $H \leq G$, then $H \in \mathcal{F}$.

The purpose of the research is a description of $\mathcal{F}$-injectors of factor groups for a fitting set of a group G, which in the general case is not soluble.

***Material and methods.** The terminology and methods of abstract group theory are used, in particular, methods of the theory of classes and Fitting sets.*

***Findings and their discussion.** Proven*

***Theorem A.** Let $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ — hereditary Fitting set of group G and $N \trianglelefteq G$. Then: 1) the set $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N : S$ is an $\mathcal{F}$-injector of $SN\}$ is a Fitting set of G/N; 2) if V is an $\mathcal{F}$-injector of G, then VN/N is an $\mathcal{F}$-injector of G/N.*

***Theorem B.** Let $\mathcal{F}$ be a π-saturated Fitting set of π-soluble group G and $N \trianglelefteq G$. Then: 1) the set $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N : S$ is an $\mathcal{F}$-injector of SN$\}$ is a Fitting set of G/N; 2) if V is an $\mathcal{F}$-injector of G, then VN/N is an $\mathcal{F}$-injector of G/N.*

***Conclusion.** A method is described for constructing $\mathcal{F}$-injectors of factor groups in the case when $\mathcal{F}$ is a hereditary or π-saturated Fitting set of a partially soluble group.*

***Key words:** group, Fitting class, Fitting set, $\mathcal{F}$-injector.*

В работе все рассматриваемые группы конечны. В отличие от теории классов Фиттинга в теории фиттинговых множеств можно описать $\mathcal{F}$-инъекторы факторгрупп в терминах $\mathcal{F}$-инъекторов групп. Андерсеном было определено понятие $\mathcal{F}$-инъектора группы G как подгруппы этой группы, которая является $\mathcal{F}$-инъектором для некоторого множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G. В [1, теорема 3.1] описаны инъекторы факторгрупп в классе всех разрешимых групп. В связи с этим возникает задача, решение которой является основной целью настоящей работы.

Цель исследования – описание $\mathcal{F}$-инъекторов факторгрупп для фиттингового множества группы G, которая в общем случае неразрешима.

Материал и методы. В работе используются терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов и множеств Фиттинга.

Напомним, что класс групп $\mathcal{F}$ называется *классом Фиттинга* [2, с. 286], если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп.

Пусть $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга. Произведение всех нормальных $\mathcal{F}$-подгрупп группы *G* называется *$\mathcal{F}$-радикалом G* и обозначается через $G_{\mathcal{F}}$ [3, с. 288].

Определение 0.1 [4, VIII, (2.1)]. *Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется множеством Фиттинга группы G, если выполняются:*

(1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S$ и $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Подгруппа *V* группы *G* называется:

(1) *$\mathcal{F}$-максимальной*, если она удовлетворяет следующим условиям: i) $V \in \mathcal{F}$; ii) если $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathcal{F}$, то $U = V$ [4, VIII, (2.5)];

(2) *$\mathcal{F}$-инъектором*, если $V \cap K$ является $\mathcal{F}$ максимальной подгруппой в *K* для любой субнормальной подгруппы *K* группы *G* [4, VIII, (2.6)].

Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы *G*, то символом $Inj_{\mathcal{F}}(G)$ будем обозначать множество всех $\mathcal{F}$-инъекторов *G.*

В [5, с. 2] было определено понятие произведения множества Фиттинга и класса Фиттинга. Доказано, что множество подгрупп $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X} = \{H \leq G \mid H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ является множеством Фиттинга группы *G*, если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга *G* и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга.

В частности, в случае когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$ – множество всех подгрупп группы *G*, факторгруппы которых по их $\mathcal{F}$-радикалам разрешимы.

Результаты и их обсуждение. Множество Фиттинга называется *наследственным*, если $G \in \mathcal{F}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathcal{F}$.

Доказана

Теорема А. *Пусть $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N$: S – $\mathcal{F}$-инъектор SN$\}$ группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N – $\mathcal{F}$-инъектор группы G/N.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}/\pi$. Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы *G* называют *π-насыщенным*, если $\mathcal{F} \odot \mathcal{E}_{\pi'} = \mathcal{F}$, где $\mathcal{E}_{\pi'}$ – класс всех π'-групп [5, с. 3].

Доказана

Теорема Б. *Пусть $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга π-разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S$ – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$ группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) если V – $\mathcal{F}$-инъектор G, то подгруппа VN/N – $\mathcal{F}$-инъектор группы G/N.

1. Предварительные сведения. Для доказательства основных результатов приведем некоторые известные утверждения, которые мы будем использовать.

Лемма 1.1 [4, VIII, (2.6)]. *Если подгруппа K субнормальна в группе G и $V\in Inj_{\mathcal{F}}(G)$, то $K \cap V$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы K.*

Лемма 1.2 [5, с. 1] (см. также [3, 7.2.1]). *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы $G\in\mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$. Тогда в G существует единственный класс сопряженных $\mathcal{F}$-инъекторов.*

Лемма 1.3 [6, с. 168]. *Пусть $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга. Если $G/G_{\mathcal{F}}$ – разрешимая группа, то в группе G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Лемма 1.4 [5, с. 3]. *Если G – π-разрешимая группа и $\mathcal{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга G, то в G существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

2. Признаки $\mathcal{F}$-инъекторов.

Лемма 2.1. *Пусть N и V – нормальные подгруппы разрешимой группы G и $\mathfrak{N}$ – класс нильпотентных групп. Если $G/N\in \mathfrak{N}$ и $V\cap N=1$, то V содержится в картеровской подгруппе группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму докажем индукцией по порядку группы G. Очевидно, $V\in \mathfrak{N}$. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Так как для факторгруппы G/M все условия леммы выполняются, то по индукции подгруппа VM/M содержится в картеровской подгруппе CM/M из G/M, где C – картеровская подгруппа группы G. Следовательно, $VM\leq CM$. Так как $V\cap M=1$ и $CM/M\in \mathfrak{N}$, то из $|CM| < |G|$ по индукции значит, что $V\leq C$. Итак, $G=CM$, и можно считать $N=M$. Поскольку подгруппа M будет p-группой для некоторого простого делителя p порядка группы G, $G=C_pM\times C_{p'}$, где $C_{p'}\in \mathfrak{N}$. Обозначим $S=V_pM\times C_{p'}$. Картеровской подгруппой подгруппы S, очевидно, является $N_S(C_{p'})$. Так как для S все условия леммы справедливы, то из $|S|<|G|$ следует, что V содержится в $N_S(C_{p'})$. Таким образом, $V\leq N_G(C_{p'})=C$ и лемма доказана.

Итак, $G=V_pM\times C_{p'}$. Тогда из $G/M \in \mathfrak{N}$ следует, что подгруппы V_pM/M и $C_{p'}M/M$ поэлементно перестановочны. Значит, $[V_p, C_{p'}] \leq M$. Так как V_p нормальна в G, то $[V_p, C_{p'}] \leq V_p$ и, следовательно, $[V_p, C_{p'}] \leq V_p\cap M=1$. Подгруппы V_p и $C_{p'}$ поэлементно перестановочны и $V\leq N_G(C_{p'})=C$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$ $\mathcal{F}$ — множество Фиттинга группы G. Если $G/N\in \mathfrak{N}$, V_1 и V_2 – $\mathcal{F}$-максимальные подгруппы G такие, что $V_1\cap N=V_2\cap N$ — $\mathcal{F}$-подгруппы Фишера подгруппы N, то V_1 и V_2 сопряжены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму докажем индукцией по порядку группы G. Обозначим $W=V_i \cap N$, где i=1, 2. Тогда $V_i\leq N_G(W)$, $N_G(W)/N_N(W) \in \mathfrak{N}$ и $V_i \cap N_N(W)=W$ является $\mathcal{F}$-подгруппой Фишера группы $N_N(W)$. Поскольку группа $G/N_{\mathcal{F}}$ разрешима и $N_{\mathcal{F}}\leq W$, $N_G(W)/N_{\mathcal{F}}$ – разрешимая группа. Так как $N_{\mathcal{F}}\leq (N_G(W))_{\mathcal{F}}$, то и группа $N_G(W)/(N_G(W))_{\mathcal{F}}$ разрешима. Для $N_G(W)$ все условия леммы выполняются, и если $|N_G(W)|<|G|$, то по индукции V_1 и V_2 сопряжены в $N_G(W)$.

Итак, W нормальна в G и группа W/G разрешима. Обозначим $M_i/W= N_{G/W}(V_i/W)$. Пусть C_i/W – картеровская подгруппа из M_i/W. Так как $M_i \cap N/W$ нормальна в M_i/W, $M_i/W/M_i\cap N/W\cong M_iN/N\in \mathfrak{N}$ и $M_i\cap N/W \cap V_i/W=W/W$, то по лемме 2.1 V_i/W содержится в C_i/W. Докажем, что C_i/W будет картеровской подгруппой группы G/W. Пусть для некоторого g_iW из G/W справедливо равенство $(C_i/W)^{g_iW}=C_i/W$. Тогда $C_i^{g_i}/W=C_i/W$. Следовательно, $C_i^{g_i}=C_i$. Поскольку V_i и $V_i^{g_i}$ нормальны в C_i, $\mathcal{F}$-подгруппа $V_iV_i^{g_i}$ содержится в C_i. Ввиду $\mathcal{F}$-максимальности V_i в C_i получим $V_i^{g_i}=V_i$. Отсюда $V_i^{g_i}/W=V_i/W$ и $g_iW\in M_i/W$. Значит, $g_iW\in C_i/W$. Итак, все элементы группы G/W, нормализующие подгруппу C_i/W, содержатся в C_i/W. Следовательно, C_i/W – картеровская подгруппа группы G/W. Пусть $V_1/W\leq C_1/W$ и $V_2/W\leq C_2/W$. Так как $C_1/W= C_2^x/W$, где $x\in G$, то $V_1=V_2^x$, и лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $S\leq G$. Если N – нормальная $\mathcal{F}$-подгруппа группы S и S/N – нильпотентная группа, то всякая, содержащая N, $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа V из S является $\mathcal{F}$-инъектором в S и $V=S_{\mathcal{F}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как V/N субнормальна в S/N, то V субнормальна в S. Итак, $V=S_{\mathcal{F}}$. Поскольку V – $\mathcal{F}$-максимальная подгруппа группы S, то она является $\mathcal{F}$-инъектором группы S. Действительно, если K – некоторая субнормальная подгруппа группы S, то из $KN/N \cong K/K\cap N\in \mathfrak{N}$ и $K\cap N\in \mathcal{F}$ следует, что $K_{\mathcal{F}}$ будет $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой K. Значит, $V=S_{\mathcal{F}}$ – $\mathcal{F}$-инъектор группы S.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга группы G и $G\in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$. Если V – $\mathcal{F}$-инъектор группы G и $V\leq A\leq G$, то V — $\mathcal{F}$-инъектор A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1=G_0\leq G_1\leq G_2\leq \ldots \leq G_n=G$ – ряд нормальных подгрупп группы G, в котором либо $G_1 \in \mathcal{F}$, либо $G_1 \in N$, а для всех i>1 $G_i/G_{i-1}\in \mathfrak{N}$. Пусть V^* – такая подгруппа группы G, что для всех i=1, 2, .., n подгруппа $V^*\cap G_i$ будет $\mathcal{F}$-максимальной в G_i. Пусть V – некоторый $\mathcal{F}$-инъектор группы G. Тогда для любого i $V\cap G_i$ будет $\mathcal{F}$-инъектором в G_i. Если $G_1\in \mathcal{F}$, то $V\cap G_1= G_1= V^*\cap G_1$. Если $G_1\in \mathfrak{N}$, то $V\cap G_1= (G_1)_{\mathcal{F}}$, и тогда по лемме 2.3

$V\cap G_1 = (G_1)_{\mathcal{F}} = V^*\cap G_1$. В каждом случае для G_1 условие леммы выполняется, и поэтому $V\cap G_1$ является $\mathcal{F}$-подгруппой Фишера подгруппы G_1. Теперь по лемме 2.2 $V^*\cap G_2=V^{g_2}\cap G_2$, где $g_2\in G_2$ и по условию леммы $V^*\cap G_2$ будет $\mathcal{F}$-подрупппой Фишера подгруппы G_2. Рассуждая аналогично, имеем $V^*= V^g$, где $g\in G$. Таким образом, доказано, что всякая подгруппа V^*такая, что $V^*\cap G_i$ является $\mathcal{F}$-максимальной подгруппой в G_i, будет $\mathcal{F}$-инъектором группы G.

Пусть теперь $V\leq A\leq G$ и $A_i=A\cap G_i$. Тогда подгруппа $V\cap A_i$ $\mathcal{F}$-максимальна в A_i для всех i. Так как $G_F\leq A_{\mathcal{F}}$, то группа $A/A_{\mathcal{F}}$ разрешима. Следовательно, V — $\mathcal{F}$-инъектор подгруппы A. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы А.

Определение 3.1 [7]. *Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется наследственным, если из условий $H\leq G$ и $G\in\mathcal{F}$ следует, что $H\in\mathcal{F}$.*

Лемма 3.2. *Если $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{X}$ – непустая наследственная формация Фиттинга, то $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ – наследственное множество Фиттинга G.*

Доказательство. Покажем, что из $G\in\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ и $S\leq G$ следует, $S\in\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$.

Пусть $S\in\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$. Так как $S\in\mathcal{F}$, то $S_{\mathcal{F}}=S$. Тогда $1= S/S_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}$ и $S\in\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$.

Предположим, что $S\notin\mathcal{F}$. Тогда $S_{\mathcal{F}}< S$. Так как $G_{\mathcal{F}}\in\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга, то $S\in\mathcal{F}$. Следовательно, из $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}\cap\mathfrak{X}$ имеем $S\in\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$.

Если $S\nleq G_{\mathcal{F}}$, то $SG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}\leq G/G_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}$. Ввиду наследственности класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ $SG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}$. Ввиду изоморфизма $SG_{\mathcal{F}}/G_{\mathcal{F}}\cong S/S\cap G_{\mathcal{F}}$ имеем $S/S\cap G_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}$. Поскольку $S\cap G_{\mathcal{F}}\leq G_{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ — наследственное множество Фиттинга, то $S\cap G_{\mathcal{F}}\in\mathcal{F}$. Так как $S\cap G_{\mathcal{F}}\trianglerighteq S$, то $S\cap G_{\mathcal{F}}\leq S_{\mathcal{F}}$. Теперь ввиду изоморфизма $(S/S\cap G_{\mathcal{F}})/(S_{\mathcal{F}}/S\cap G_{\mathcal{F}})\cong S/S_{\mathcal{F}}$ и того, что $\mathfrak{X}$ – формация, следует $S/S_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}$, отсюда $S\in\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Пусть $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга группы G. Тогда, согласно лемме 3.2, множество Фиттинга $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ наследственно. Построим множество подгрупп группы G/N: $\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S$ – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$.

Предположим, что $K/N\trianglelefteq SN/N$, где $S\in Inj_{\mathcal{F}}(SN)$. Так как $K\trianglelefteq SN$, то $S\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}(K)$ по лемме 1.1. Кроме того, $K=SN\cap K=(S\cap K)N$, и, таким образом, $K/N= (S\cap K)N/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Из этого следует, что $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет первому условию определения 0.1.

Допустим, что $S_iN/N\in\mathcal{F}_{G/N}$, $S_i\in Inj_{\mathcal{F}}(S_iN)$ и $S_iN\trianglelefteq(S_1N)(S_2N)$ для $i\in\{1,2\}$. Пусть $T=(S_1N)(S_2N)$ и W – $\mathcal{F}$-инъектор T и $R_i=W\cap S_iN$ для $i\in\{1,2\}$. Так как $S_iN\trianglelefteq T$, то $R_i\in Inj_{\mathcal{F}}(S_iN)$. Следовательно, R_i и S_i сопряжены в S_iN по лемме 1.3. В частности, получаем $R_iN = S_iN$. Значит, $T = S_1NS_2N = R_1NR_2N = R_1R_2N\leq WN\leq T$. Отсюда $T/N=WN/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Из этого следует, что $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет второму условию определения 0.1.

Так как $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга, то $\mathcal{F}=\mathcal{F}^g$, для любого $g\in G$. Из этого следует, что $S^g\in Inj_{\mathcal{F}}(S^gN)$ и множество $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет третьему условию определения 0.1. Итак, $\mathcal{F}_{G/N}$ – множество Фиттинга группы G/N и утверждение (1) теоремы доказано.

Пусть $K/N\trianglelefteq\trianglelefteq G/N$. Тогда $V\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}(K)$ по лемме 1.1. Таким образом, $V\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}((V\cap K)N)$, поскольку $KN=K$. Значит, группа $(V\cap K)N/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Покажем, что эта группа $\mathcal{F}_{G/N}$-максимальна в K/N.

Очевидно, что SN/N есть $\mathcal{F}_{G/N}$-подгруппа группы K/N, содержащая $(V\cap K)N/N$, ввиду $S\in Inj_{\mathcal{F}}(SN)$. По лемме 1.2 подгруппа $V\cap K$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы SN, а значит, $V\cap K$ и S сопряжены в SN. Следовательно, $(V\cap K)N= SN$. Это доказывает, что $(V\cap K)N/N=VN/N\cap K/N$ является $\mathcal{F}_{G/N}$-максимальной в K/N. Итак, подгруппа VN/N— $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектор группы G/N. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы Б. Пусть G — π-разрешимая группа. Так как $SN\leq G$, то группа SN π-разрешима. Следовательно, по лемме 1.4 в SN существуют $\mathcal{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Построим множество подгрупп группы G/N:$\mathcal{F}_{G/N}=\{SN/N: S$ – $\mathcal{F}$-инъектор $SN\}$.

Предположим, что $K/N\trianglelefteq SN/N$, где $S\in Inj_{\mathcal{F}}(SN)$. Так как $K\trianglelefteq SN$, то $S\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}(K)$ по лемме 1.1. Кроме того, $K=SN\cap K=(S\cap K)N$, и, значит, что $K/N= (S\cap K)N/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Из этого следует, что $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет первому условию определения 0.1.

Допустим, что $S_iN/N\in\mathcal{F}_{G/N}$, $S_i\in Inj_{\mathcal{F}}(S_iN)$ и $S_iN\trianglelefteq(S_1N)(S_2N)$ для $i\in\{1,2\}$. Пусть $T=(S_1N)(S_2N)$ и W – $\mathcal{F}$-инъектор T, $R_i=W\cap S_iN$ для $i\in\{1,2\}$. Так как $S_iN\trianglelefteq T$, то $R_i\in Inj_{\mathcal{F}}(S_iN)$. Таким образом, R_i и S_i сопряжены в S_iN по лемме 1.3. В частности, получаем $R_iN = S_iN$. Значит, $T = S_1NS_2N = R_1NR_2N = R_1R_2N\leq WN\leq T$. Отсюда $T/N=WN/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Из этого следует, что $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет второму условию определения 0.1.

Так как $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга, то $\mathcal{F}=\mathcal{F}^g$, для любого $g\in G$. Из этого следует, что $S^g\in Inj_{\mathcal{F}}(S^gN)$. Получаем, что $\mathcal{F}_{G/N}$ удовлетворяет третьему условию определения 0.1. Итак, $\mathcal{F}_{G/N}$ – множество Фиттинга группы G/N и утверждение (1) теоремы доказано.

Пусть $K/N\trianglelefteq\trianglelefteq G/N$. По лемме 1.1 $V\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}(K)$. Поскольку $KN=K$, то $V\cap K\in Inj_{\mathcal{F}}((V\cap K)N)$. Следовательно, группа $(V\cap K)N/N\in\mathcal{F}_{G/N}$. Докажем, что группа $(V\cap K)N/N$ $\mathcal{F}_{G/N}$-максимальна в K/N.

Очевидно, что SN/N есть $\mathcal{F}_{G/N}$-подгруппа группы K/N, содержащая подгруппу $(V\cap K)N/N$. По лемме 1.2 подгруппа $V\cap K$ является $\mathcal{F}$-инъектором группы SN. Следовательно, по лемме 1.4 подгруппы $V\cap K$ и S сопряжены в SN. Отсюда имеем равенство $(V\cap K)N=SN$. Это доказывает, что подгруппа $(V\cap K)N/N=VN/N\cap K/N$ $\mathcal{F}_{G/N}$ -максимальна в K/N и VN/N – $\mathcal{F}_{G/N}$-инъектор G/N. Теорема доказана.

Заключение. В данной работе описан метод построения $\mathcal{F}$-инъектора факторгруппы в случаях, когда множество Фиттинга частично разрешимой группы либо наследственно, либо π-насыщено.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 3(19). – P. 333–338.
2. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие / В.С. Монахов. – Минск: Высшая школа, 2006. – 207 с.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 306 p.
4. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
5. Vorob'ev, N.T. On F-injectors of Fitting set of a Finite groups / N.T. Vorob'ev, Nanying Yang, W. Guo // Com. in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
6. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
7. Bryce, R.A. A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, Heft 2. – P. 99–110.

R E F E R E N C E S

1. Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 3(19). – 333–338 p.
2. Monakhov V.S. *Vvedeniye v teoriyu konechnykh grup i ikh klassov: ucheb. posobiye* [Introduction to the Theory of Finite Groups and their Classes: Textbook], Minsk: Vysshaya shkola, 2006, 207 p.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. Esquerro. – Amsterdam: Springer, 2006. – 306 p.
4. Doerk K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
5. Vorob'ev N.T., Nanying Yang, W. Guo. On F-injectors of Fitting set of a Finite groups // Com. in Algebra, 2018, Vol. 46, № 1. – 217–229 p.
6. Sementovsky V.G. *Issledovaniye normalnogo i podgruppovogo stroyeniya konechnykh grupp* [Investigation of the Normal and Subgroup Structure of Finite Groups], Minsk: Nauka i tekhnika, 1984, pp. 166–170.
7. Bryce R.A., Cossey J. A problem in theory of normal Fitting classes // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, Heft 2. – 99–110 p.

Поступила в редакцию 21.05.2020

Адрес для корреспонденции: e-mail: vorobyovnt@tut.by – Воробьев Н.Т.