**Министерство образования Республики Беларусь**
**Учреждение образования**
**"Гомельский государственный университет**
**имени Франциска Скорины"**

УДК 512.542

**Залесская Елена Николаевна**

# КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ФУНКЦИЙ ХАРТЛИ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

**Автореферат диссертации**
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Гомель 2004

Работа выполнена в Учреждении образования "Витебский государственный университет им. П.М.Машерова"

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
**Воробьев Николай Тимофеевич,**
Учреждение образования "Витебский государственный университет им. П.М.Машерова", кафедра алгебры и методики преподавания математики

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
**Мельников Олег Владимирович,**
Учреждение образования "Белорусский государственный университет", кафедра высшей алгебры

доктор физико-математических наук, доцент
**Семенчук Владимир Николаевич,**
Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины", кафедра высшей математики

Оппонирующая организация Учреждение образования "Сумский государственный педагогический университет имени А.С.Макаренко"

Защита состоится 14 октября 2004 года в $14^{00}$ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Учреждении образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"по адресу: 246019, г.Гомель, ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: +10 375 232 573 791

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале №1 Учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Автореферат разослан 10 сентября 2004 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Ф.Васильев

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Идея изучения классов конечных групп, замкнутых относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп (классов Фиттинга или радикальных классов), восходит к широкомасштабной программе структурного анализа конечных групп, которая была предложена Х.Фиттингом [31] в 1938 году. Систематическое изучение таких классов было начато в 1967 году благодаря основополагающей работе Гашюца, Фишера, Хартли [30], в которой в классе всех конечных разрешимых групп в терминах классов Фиттинга было найдено изящное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла. Уже в 1969 году Хартли [37] был предложен локальный метод изучения конечных разрешимых групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (функциями Хартли) множества P всех простых чисел во множество классов Фиттинга. Важность такого подхода заключается в следующем. Во-первых, теория классов Фиттинга развивается по модулю p-групп и многие часто встречающиеся в исследованиях классы групп определяются локально методом Хартли. Во-вторых, при таком подходе задача исследования классов групп редуцируется к задаче исследования значений функций Хартли. Долгое время метод Хартли и его роль в теории конечных разрешимых групп не подвергались достаточному исследованию. Вместе с тем актуальность и перспективность такого подхода была подтверждена многими известными результатами Локетта, Брайса, Косси, Дерка, Хоукса и др. (см., например, главы IX-X книги [28]), связанными с исследованием общей структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп для специальных случаев классов Фиттинга, определяемых локально методом Хартли. Значительный прогресс в этом направлении был достигнут Н.Т.Воробьевым, в серии работ которого [1-12] систематически отражены основы теории локальных классов Фиттинга и ее применение к решению указанных задач.

В 1999 году Л.А.Шеметковым и А.Н.Скибой [16] в теории классов Фиттинга была предложена концепция частичной локализации, которая состоит в изучении классов конечных групп посредством отображений: $\omega \cap \{\omega'\} \to \{$ классы Фиттинга$\}$ и $\omega$-локальных классов Фиттинга ($\emptyset \neq \omega \subseteq P$). Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется $\omega$-локальным [16], если $lFit\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega$. При этом $lFit\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{F}$, и $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega$ — класс всех тех групп, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-

радикалам которых являются нильпотентными $\omega'$-группами. Заметим, что в случае $\omega = P$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным.

Первоочередным вопросом, который возникает при исследовании $\omega$-локальных (в частности, локальных) классов Фиттинга, является задача характеризации таких классов посредством заданных свойств функций Хартли. Ориентиром для таких исследований служит известная теорема Брайса-Косси [27] о том, что каждая разрешимая локальная формация является наследственной (нормально наследственной, в частности, формацией Фиттинга) в точности тогда, когда указанными свойствами обладают соответственно все значения ее наибольшего приведенного спутника.

В 70-е годы в теории конечных разрешимых групп сформировался ряд проблем связанных с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место занимала общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием "гипотеза Локетта". Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля-Гашюца [24] и Локетта [42], которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта. Напомним, что если для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой группы G $\mathfrak{F}$-радикал G содержит ее коммутант, то $\mathfrak{F}$ называют нормальным и если $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ для всех групп G, то $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта. Пристальное внимание к изучению внутренней структуры таких классов и их взаимосвязи привело к следующей гипотезе.

**Гипотеза (Локетт, 1974, [42]).** Каждый ли класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного $\mathfrak{F}$?

Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для следующих отдельных случаев локального класса Фиттинга: наследственного (Брайс, Косси, 1975г., [26]), классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман, Хаук, 1979г., [22]), классов вида $\mathfrak{X}(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'})$ (Дерк, Хоукс, 1992г., X.6.10 [28]). Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т.Воробьевым [1] и в произвольном случае в 1996 году Галледжи [34]. Вместе с тем Бергер и Косси [23] установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга. В связи с этим актуален вопрос (см. проблему 2 [46]) о справедливости гипотезы Локетта для $\omega$-локальных классов Фиттинга.

Задачи изучения структуры классов Фиттинга тесно переплетаются с задачами изучения внутренней структуры самих групп. Еще в 60-е годы с помощью радикалов Фишером и Хартли [37] была решена задача описания строения $\mathfrak{H}$-инъекторов конечных разрешимых групп для отдельных случаев классов Хартли: $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$($\mathfrak{N}$ класс всех конечных нильпотентных групп) и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}$ соответственно. Решение указанной задачи для класса Хартли $\mathfrak{H}$ в общем случае было осуществлено Н.Т.Воробьевым [45]. В связи с этим представляет интерес решение указанной задачи в неразрешимом случае.

Таким образом, задача развития концепции частичной локализации Шеметкова-Скибы в теории классов Фиттинга и ее применения к решению указанных выше вопросов является актуальной. Ее реализации и посвящена данная диссертация.

**Связь работы с крупными научными программами, темами.** Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

"Структурная теория формаций и других классов алгебр"Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси №88 от 23 ноября 1995г. (номер госрегистрации в БелИСА 19963987), тема выполнялась в 1996-2000гг.;

"Структурная теория классов групп и других алгебр"Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси №94 от 5 июля 2001г. Государственная программа фундаментальных исследований "Математические структуры"(номер госрегистрации в БелИСА 20011225), выполнение темы запланировано на 2001-2005гг.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертации является развитие метода Хартли посредством применения идеи частичной локализации Шеметкова-Скибы для описания структуры классов Фиттинга, их классификации и описания строения канонических подгрупп. Для достижения этой цели в диссертации решены следующие задачи:

классифицированы $\omega$-локальные классы Фиттинга посредством заданных свойств функций Хартли [68];

подтверждена гипотеза Локетта о структуре класса Фиттинга для $\omega$-локальных классов Фиттинга заданной характеристики и опровергнута данная гипотеза для таких классов в общем случае [48, 49, 68];

найдены новые классы сопряженных инъекторов в классах Фиттинга всех конечных и всех конечных $\pi$-разрешимых групп [50, 51, 68].

- описано строение инъекторов для классов Хартли частично разрешимых групп [68].

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования являются $\omega$-локальные классы Фиттинга. Предмет исследования – структура $\omega$-локальных классов Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли.

**Методология и методы проведенного исследования.** В диссертации используются методы абстрактной теории конечных групп, общей теории решеток, а также методы теории классов групп, в частности, методы теории классов Фиттинга.

**Научная новизна и значимость полученных результатов.** Все полученные результаты в диссертации являются новыми. В диссертации впервые классифицированы $\omega$-локальные классы Фиттинга посредством заданных свойств функций Хартли. Подтверждена гипотеза Локетта о структуре классов Фиттинга для $\omega$-локальных классов Фиттинга заданной характеристики. Впервые построен пример $\omega$-локального класса Фиттинга, опровергающий гипотезу Локетта. Найдены новые классы сопряженных инъекторов в произвольных конечных и конечных $\pi$-разрешимых группах. Описано строение инъекторов частично разрешимых групп для классов Хартли.

Значение данной диссертации заключено в том, что она предлагает новую, основанную на понятии функции Хартли, методику построения, классификации и изучения структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп конечных групп.

**Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов.** Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при исследованиях классов конечных групп, проводимых в Гомельском, Новополоцком, Витебском государственных университетах, Московском городском педагогическом университете, Белорусском государственном университете транспорта, Могилевском технологическом университете, Сюйчжоуском нормальном университете (КНР), а также при чтении спецкурсов и написании курсовых, дипломных проектов и магистерских дис сертаций на математических факультетах высших учебных заведений.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

1. Классификация $\omega$-локальных классов Фиттинга посредством заданных свойств функций Хартли.

**3.1.4, 3.2.1. Теорема [68].** *Пусть $\mathfrak{F}$ – $\omega$-локальный класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является $\tau$-замкнутым для оператора замыкания $\tau \in \{Q, R_0, S\}$ тогда и только тогда, когда каждое значение его наибольшей приведенной $\omega$-локальной $H$-функции $F$ $\tau$-замкнуто.*

2. Описание структуры $\omega$-локальных классов Фиттинга заданной характеристики (подтверждение гипотезы Локетта о структуре $\omega$-локального класса Фиттинга заданной характеристики) и построение примера $\omega$-локального класса Фиттинга, опровергающего гипотезу Локетта.

**4.3.1. Теорема [68].** *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс Фиттинга. Тогда каждый $\omega$-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.*

**4.2.1. Теорема [49, 68].** *Существуют разрешимые классы Фиттинга, которые $p$-локальны и не являются $\mathcal{L}$-классами.*

3. Описание новых классов сопряженных инъекторов произвольных конечных групп и конечных $\pi$-разрешимых групп для произведений классов Фиттинга.

**5.1.3. Теорема [50, 51, 68].** *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{Y}$ – доминантный класс Фиттинга, и $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Тогда для любой конечной группы $G$ такой, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{Y}$-скована, и ее подгруппы $V$ справедливы следующие утверждения:*

*1) $V$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы $G$ тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{Y}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{X}}$;*

*2) $\mathfrak{F}$-инъекторы группы $G$ – это в точности все те ее $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$;*

*3) в любой группе $G$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$.*

4. Строение инъекторов для классов Хартли.

**5.3.5. Теорема [68].** *Для любой группы $G$ из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi}$ (в частности, любой $\pi$-разрешимой группы) справедливы следующие утверждения:*

*1) в $G$ существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$;*

*2) каждый $\mathfrak{H}$-инъектор $V$ из $G$ – подгруппа вида $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где $L$*

*такая подгруппа группы $G$, что $L/G_{\mathfrak{X}}$ – некоторый $\mathfrak{N}_\pi$-инъектор холловской $\pi$-подгруппы группы $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

**Личный вклад соискателя.** Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В опубликованных совместно с научным руководителем работах идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация – соискателю.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины и кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им.П.М.Машерова; на 4-ой научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов ВГУ им.П.М.Машерова (Витебск, 28 марта-24 апреля 2000г.); на Международной математической конференции, посвященной 80-летию проф.В.Гашюца (Гомель, 16-21 октября 2000г.); на Украинском Математическом конгрессе (Киев, 21-23 августа 2001г.); на III Международной алгебраической конференции в Украине (Сумы, 2-8 июля 2001г.); на VI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Беларуси (Витебск, 16-19 октября 2001г.); на 5-ой научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов ВГУ им.П.М.Машерова (Витебск, 12-26 апреля 2001г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти З.И.Боревича (Санкт-Петербург, 17-23 сентября 2002г.); на Международной математической конференции, посвященной 100-летию начала работы Д.А.Граве в Киевском университете (Киев, 17-22 июня 2002г.); на VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Беларуси (Витебск, 22-23 октября 2002г.); на 6-ой научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов ВГУ им.П.М.Машерова (Витебск, 24-25 апреля 2002г.); на V Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения"(Тула, 19-24 мая 2003г.); на IV Международной алгебраической конференции в Украине (Львов, 4-9 августа 2003г.); на VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Беларуси (Минск, 9-10 декабря 2003г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского государственного университета (Москва, 26 мая - 2 июня 2004г.).

**Опубликованность результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях, 1 препринте и в 16 тезисах докладов. Общее количество страниц опубликованных материалов – 100 с.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и списка использованных источников в алфавитном порядке в количестве 87 наименований. Объем диссертации 87 страниц.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьеву за внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Рассматриваются только конечные группы. Вся терминология стандартна и заимствована из [16, 19, 28].

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам.

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и списка использованных источников в алфавитном порядке.

Данная диссертация посвящена изучению структуры и классификации $\omega$-локальных классов Фиттинга с различными заданными свойствами функций Хартли, а также применению локального метода для нахождения новых классов сопряженных подгрупп конечных групп.

Глава 1 содержит обзор основных результатов диссертации.

В главе 2 приводятся некоторые известные результаты, используемые в основном тексте диссертации.

Глава 3 "Операторы замыкания и функции Хартли"состоит из двух разделов. Напомним, что если из того, что группа G принадлежит классу групп $\mathfrak{F}$ и H - ее подгруппа, следует, что H принадлежит $\mathfrak{F}$, то класс групп $\mathfrak{F}$ называется наследственным или S-замкнутым. Класс групп называется формацией Фиттинга, если он является одновременно формацией и классом Фиттинга.

Одним из основополагающих результатов о взаимосвязи разрешимых корадикальных и радикальных классов (формаций и классов Фиттинга) в теории формаций групп является теорема Брайса-Косси [27] о том, что локальная формация является $\tau$-замкнутым классом для оператора $\tau \in \{S, S_n, N_0\}$, в частности, формацией Фиттинга, тогда и только тогда, когда все значения ее наибольшего приведенного спутника $\tau$-замкнуты. В последующем этот результат был доказан для случая локальной формации произвольных групп Подуфаловой и Сленовой (см., например, теоремы 4.7 и 4.10 [19]).

В теории классов Фиттинга возникает дуальная задача задача характеризации локального $\tau$-замкнутого класса Фиттинга для оператора замыкания $\tau \in \{S, Q, R_0\}$ посредством наличия свойства $\tau$-замкнутости у всех значений наибольшей приведенной функции Хартли, которая его определяет.

Решение указанной задачи для $\omega$-локальных (в частности, локальных) классов Фиттинга основной результат главы 3.

Напомним, что если $\emptyset \neq \omega \subseteq P$, где P - множество всех простых чисел, то отображение f: $\omega \cup \{\omega'\} \to$ {классы Фиттинга} называется $\omega$-локальной функцией Хартли или $\omega$-локальной H-функцией [16]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется $\omega$-локальным [16], если существует некоторая $\omega$-локальная H-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. При этом класс $LR_\omega(f) = (G \mid G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, где $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}, F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_{\omega d}$ - класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является $\omega d$- группой. $\omega$-Локальная H-функция f называется приведенной, если $f(a) \subseteq LR_\omega(f)$ для всех a $\in \omega \cup \{\omega'\}$.

**3.1.4. Теорема [68].** *Пусть $\mathfrak{F}$ $\omega$-локальный класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является $\tau$-замкнутым для оператора замыкания $\tau \in \{Q, R_0\}$ тогда и только тогда, когда каждое значение его наибольшей приведенной $\omega$-локальной H-функции $F$ $\tau$-замкнуто.*

**3.1.5. Следствие.** *$\omega$-Локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной $\omega$-локальной H-функции являются формациями.*

В случае $\omega = P$ мы получаем

**3.1.6. Следствие.** *Локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной H-функции являются формациями.*

**3.2.1. Теорема [68].** *Тогда и только тогда $\omega$-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является наследственным, когда каждое значение его наибольшей приведенной $\omega$-локальной H-функции $F$ наследственно.*

Напомним, что согласно [16] всякий класс Фиттинга является 0-кратно $\omega$-локальным, а при $n > 0$ класс Фиттинга называется n-кратно $\omega$-локальным, если он имеет $\omega$-локальную H-функцию, все значения которой являются (n 1)-кратно $\omega$-локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется тотально $\omega$-локальным, если он n-кратно

$\omega$-локален для всех n.

Из теоремы 3.2.1 получаем

**3.2.2. Следствие.** *Разрешимый $\omega$-локальный класс Фиттинга тотально локален тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной $\omega$-локальной H-функции тотально локальны.*

В случае $\omega = P$ из теоремы 3.2.1 мы получаем

**3.2.3. Следствие.** *Локальный класс Фиттинга является наследственным тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной H-функции являются наследственными.*

Глава 4 "Структура $\omega$-локальных классов Фиттинга"является основной и включает в себя четыре раздела. Решение многих задач описания структуры классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта "$*$" и "$_*$" [42]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [42] сопоставляет класс $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта [42], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G для любой группы G.

Как установлено [42], для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы включения: $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга.

В связи с этим Локеттом была сформулирована следующая проблема, которая в настоящее время известна как

**Гипотеза Локетта ([42]).** *Каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^*$.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий гипотезе Локетта, мы будем называть $\mathcal{L}$-классом. Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathcal{L}$-классом, то мы будем называть его $\overline{\mathcal{L}}$-классом.

Учитывая результаты [42], легко видеть, что любой нормальный класс Фиттинга является $\mathcal{L}$-классом. Заметим, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена Брайсом и Косси [26] для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. В [26] также установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является в точности $\mathcal{L}$-классом, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. В последующем указанная гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств ненормальных классов Фиттинга: разрешимых локальных вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [22]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев [1]), произвольных локальных (Галледжи [34]). Хотя в работе [23] Бергером и Косси построен пример разрешимого $\mathcal{L}$-класса Локетта, который не является классом Фишера (в частности, нелокален), проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, до настоящего времени весьма актуальна (см. проблему 1 [46]).

Заметим, что до настоящего времени оставались открытыми два следующих вопроса: вопрос о существовании ненормальных $\mathcal{L}$-классов Фиттинга, которые не являются классами Локетта (см. проблему 2 [46]), и вопрос о существовании ненормальных разрешимых частично локальных $\mathcal{L}$-классов Фиттинга. Положительное решение этих вопросов — основной результат данной главы. Эти результаты доказаны в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп и представлены теоремами 4.1.3 и 4.2.1.

**4.1.3. Теорема [68].** *Для каждого простого $p$ класс Фиттинга $(\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$ $p$-локален, не является классом Локетта и является $\mathcal{L}$-классом.*

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то секция Локетта $Locksec(\mathfrak{F})$ класса $\mathfrak{F}$ [28] определяется следующим образом:

$$Locksec(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} - \text{класс Фиттинга и } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}.$$

Ввиду X.1.19 [28] из теоремы 4.1.3 получаем

**4.1.4. Следствие.** *Пусть $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$. Тогда решетка всех нормальных классов Фиттинга сюръективно отображается в решетку $Locksec(\mathfrak{Y})$ классов Фиттинга секции Локетта $\mathfrak{Y}$.*

**4.2.1. Теорема [49, 68].** *Существуют разрешимые классы Фиттинга, которые $p$-локальны и не являются $\mathcal{L}$-классами.*

Естественное обобщение гипотезы Локетта было предложено Дерком и Хоуксом [28].

**$\mathcal{L}_\mathfrak{X}$-гипотеза (X.6.1 [28]).** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$.*

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы будем называть $\mathcal{L}_\mathfrak{X}$-классом.

Следующая теорема выделяет широкое семейство $\omega$-локальных классов Фиттинга, которые удовлетворяют $\mathcal{L}_\mathfrak{X}$-гипотезе.

**4.3.1. Теорема [68].** *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс Фиттинга. Тогда каждый $\omega$-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$*

*является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.*

Легко видеть, что разрешимый $\omega$-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ локален. В связи с этим возникает вопрос о существовании в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп $\omega$-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, которые нелокальны. Положительным решением этого вопроса является следующий

**4.3.2. Пример [48].** *Пусть $E$ - простая неабелева группа, $\mathfrak{X} = FitE$ – класс Фиттинга, порожденный $E$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ и $\omega = \{p\}$, где $p$ - простое число. Тогда $\mathfrak{F}$ – $\omega$-локальный класс Локетта с $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, который ненормален и нелокален.*

Таким образом, в случае $\omega = P$ из теоремы 4.3.1 вытекает результат Пилар Галледжи [34], который приведем в качестве следствия.

**4.3.3. Следствие [34].** *Любой локальный класс Фиттинга является $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, из теоремы 4.3.1 получаем

**4.3.4. Следствие.** *Если $\omega$-локальные классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ или $Char(\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, то $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_*$.*

Заметим, что следствие 4.3.4 дает утвердительный ответ на проблему Лауша (проблема 8.30 [13]) для случая $\omega$-локальных классов Фиттинга, характеристика которых является подмножеством множества $\omega$.

В последнем разделе главы 4 мы выделяем семейства $\omega$-локальных классов Фиттинга, для которых верно модулярное тождество.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Тогда через $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X} \vee_{\omega l} \mathfrak{Y}$) обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ (соответственно наименьший $\omega$-локальный класс Фиттинга, содержащий классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$).

Напомним, если $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{F}$ – $\omega$-локальные классы Фиттинга и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то для них выполняется модулярное тождество, если:

$$(\mathfrak{X} \vee_{\omega l} \mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega l} (\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{F}).$$

В частности, доказана

**4.4.3. Теорема [47].** *Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ - $\omega$-локальные классы Фиттинга и $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ - такие гомоморфы, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{F}, \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{H}$. Тогда если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то*

$$(\mathfrak{X} \vee_{\omega l} \mathfrak{Y}) \bigcap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_{\omega l} (\mathfrak{Y} \bigcap \mathfrak{F}).$$

Один из основополагающих результатов в теории классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп – обобщение теорем Силова и

Холла, которое представляет теорема Гашюца-Фишера-Хартли [30], о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется ее $\mathfrak{F}$-инъектором [28], если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Расширение этого результата на случай класса $\mathfrak{E}$ всех конечных групп в общем случае невозможно (например, уже для $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ и $G = A_5$ это неверно). Однако в этом направлении известна серия результатов Л.А.Шеметкова [20, 21, 44], В.Г.Сементовского [15], Го Вэньбиня [35, 36], которые выделяют классы сопряженных инъекторов в случае, когда группа G частично разрешима. Задача существования и сопряженности инъекторов для специальных случаев классов Фиттинга в произвольных группах также рассматривалась многими авторами. В частности, Форстером [32] доказано существование $\mathfrak{N}$-инъекторов, где $\mathfrak{N}$ — локальный класс всех нильпотентных групп, Блессенолем и Лаус [25] доказано существование и сопряженность, а также получена характеризация инъекторов для композиционного класса $\mathfrak{N}^*$ квазинильпотентных групп. Некоторые результаты при дополнительных ограничениях либо на класс Фиттинга либо на группу в этом направлении можно найти в работах Иранцо и Переса Моназора [38]-[41]. В.С.Монаховым [14] доказано существование инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ для классов всех разрешимых $\pi$-групп $\mathfrak{S}_\pi$ и всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$.

Заключительная глава диссертации посвящена применению метода Хартли для изучения классов сопряженных инъекторов в частично разрешимых и произвольных группах и их характеризации. Основной результат первого раздела главы 5 — теорема 5.1.3, описывающая классы сопряженных инъекторов $\mathfrak{F}$-скованных групп для произведений классов Фиттинга.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то группа G называется $\mathfrak{F}$-скованной, если $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{X} = S_n\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ называется доминантным в $\mathfrak{X}$ [28], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ каждые две $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы G, содержащие $\mathfrak{F}$-радикал $G_\mathfrak{F}$ группы G, сопряжены в G. Из того, что класс $\mathfrak{F}$ доминантен в $\mathfrak{X}$, ввиду леммы IX.4.2 [28] следует, что каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов, которые являются в точности $\mathfrak{F}$-максимальными подгруппами G, содержащими $G_\mathfrak{F}$. Если

$\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют просто доминантным.

**5.1.3. Теорема [50, 51, 68].** *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{Y}$ – доминантный класс Фиттинга, и $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Тогда для любой конечной группы $G$ такой, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{Y}$-скована, и ее подгруппы $V$ справедливы следующие утверждения:*

*1) $V$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы $G$ тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{Y}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{X}}$;*

*2) $\mathfrak{F}$-инъекторы группы $G$ – это в точности все те ее $\mathfrak{F}$- максимальные подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$;*

*3) в любой группе $G$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$.*

Заметим, что из теоремы 5.1.3 получены в качестве следствий как новые результаты, так и многие известные результаты Блессеноля-Лауе, Хартли, Фишера, Манна, Локетта, Франца, посвященные описанию инъекторов для локальных и композиционных классов Фиттинга. Укажем только некоторые из них.

**5.2.5. Следствие.** *В любой группе $G$ существуют $\mathfrak{X}\mathfrak{N}^*$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = (1)$, из следствия 5.2.5 вытекает

**5.2.6. Следствие (Блессеноль-Лауе, [25]).** *В любой группе $G$ существуют квазинильпотентные инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$.*

**5.2.7. Следствие.** *В любой группе $G$ такой, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ $\mathfrak{N}$-скована, существуют $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$.*

**5.2.8. Следствие (Хартли, [37]).** *В каждой разрешимой группе $G$ ее $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъекторы – это в точности $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-максимальные подгруппы $G$, содержащие ее $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-радикал.*

Если же $\mathfrak{X} = (1)$, то из следствия 5.2.7 вытекает

**5.2.9. Следствие (Манн, [43]).** *Каждая $\mathfrak{N}$-скованная группа обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{N}$-инъекторов.*

**5.2.10. Следствие (Фишер, [29]).** *В каждой разрешимой группе $G$ ее нильпотентные инъекторы – это в точности все те из максимальных нильпотентных подгрупп $G$, которые содержат подгруппу Фиттинга $F(G)$.*

Ориентиром для поиска разрешимых $\mathfrak{X}$-инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ служит следующая

**Проблема (Л.А.Шеметков, проблема 11.117 [13]).** Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ – класс Фиттинга. Верно ли, что каждая конечная неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором ?

Понятно, из указанных выше результатов следует, что проблема Л.А.Шеметкова положительно решена для локального класса Фиттинга $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{N}\}$.

Вместе с тем самостоятельный интерес представляет также задача отыскания классов сопряженных инъекторов в $\pi$-разрешимых группах. Ориентиром здесь является известная в теории групп теорема С.А.Чунихина [17, 18] о существовании и сопряженности холловских $\pi$-подгрупп ($\mathfrak{E}_\pi$-инъекторов) в $\pi$-разрешимой группе.

Классы сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в $\pi$-разрешимых группах впервые были найдены Л.А.Шеметковым [21]. Из результата Л.А.Шеметкова [21] следует, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$ в любой $\pi$-разрешимой ($\pi = \pi(\mathfrak{F})$) группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Более того, Л.А.Шеметковым доказано [20], что в любой $\pi$-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\pi$-разложимых инъекторов.

Заключительный раздел диссертации посвящен применению локального метода Хартли к решению задачи описания строения классов сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов $\pi$-разрешимых групп.

Пусть $\pi$ – непустое множество простых чисел и $LH(h) = \bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где h – функция Хартли. Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ называют классом Хартли [45], если $\mathfrak{H} = LH(h)$ для некоторой H-функции h. Если $\mathfrak{H}$ – класс Хартли, который определяется локально постоянной H-функцией h такой, что $h(p) = \mathfrak{X}$ для всех простых $p \in \pi$ ($\pi = Supp(h) \neq \emptyset$), где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга, и $\mathfrak{S}^\pi$ – класс Фиттинга всех $\pi$-разрешимых групп, то имеет место

**5.3.5. Теорема [68].** *Для любой группы $G$ из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^\pi$ (в частности, любой $\pi$-разрешимой группы) справедливы следующие утверждения:*

*1) в $G$ существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в $G$;*

*2) каждый $\mathfrak{H}$-инъектор $V$ из $G$ – подгруппа вида $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где $L$ такая подгруппа группы $G$, что $L/G_\mathfrak{X}$ – некоторый $\mathfrak{N}_\pi$-инъектор холловской $\pi$-подгруппы группы $G/G_\mathfrak{X}$.*

**5.3.6. Следствие.** *В любой конечной $\pi$-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{X}\mathfrak{N}^\pi$-инъекторов. В частности, любая конечная $\pi$-разрешимая группа имеет инъекторы ограниченной $\pi$-нильпотентной длины и любые два из них сопряжены.*

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены следующие задачи:

классифицированы $\omega$-локальные классы Фиттинга посредством заданных свойств функций Хартли [68];

подтверждена гипотеза Локетта о структуре класса Фиттинга для $\omega$-локальных классов Фиттинга заданной характеристики и опровергнута данная гипотеза для таких классов в общем случае [48, 49, 68];

найдены новые классы сопряженных инъекторов в классах Фиттинга всех конечных и всех конечных $\pi$-разрешимых групп [50, 51, 68];

описано строение инъекторов для классов Хартли $\pi$-разрешимых групп [68].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Воробьев Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т.43, №2. С. 161 168.
2. Воробьев Н.Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН БССР. 1991. Т.35, №6. – С. 485 489.
3. Воробьев Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли // Известия Гомельского гос. ун-та. 1999. - №1 (15). – С. 8 13.
4. Воробьев Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж-л. 1996. – Т.37, №6. С. 1296–1302.
5. Воробьев Н.Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры. Минск: Университетское. - 1986. №2. – С. 41 50.
6. Воробьев Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР. Сер. фіз. матэм. навук. – 1991. №6. – С. 22 26.
7. Воробьев Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга // Матем. заметки. 1992. Т.51, вып.3. С. 3 8.
8. Воробьев Н.Т. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. – 1992. - №7. С. 60–69.
9. Воробьев Н.Т. Об аналоге проблемы Гашюца // YII Белорусская матем. конференция: Тез.докл.Ч.1. - Минск. 1996. С. 97-98.
10. Воробьев Н.Т. Метод Хартли для инъекторов // YII Белорусская матем. конференция: Тез.докл.Ч.1. Минск. 1996. С. 98-99.
11. Воробьев Н.Т., Дудкин И.В. О произведении $\omega$-локальных классов Фиттинга // Материалы 1-ой Международной научной конференции "Вычислительные методы и производство: реальность, проблемы, перспективы". Гомель. 1998. С. 37–38.
12. Воробьев Н.Т., Скиба А.Н. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. 1995. №8. С. 55-58.
13. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Институт математики. СОРАН . – 1999. – №14. – С. 134.

14. Монахов В.С. Существование разрешимых инъекторов в конечных группах // Докл. АН Беларуси. - 1992. – Т.36. №6. – С. 494–496.

15. Сементовский В.Г. $\Delta$-нильпотентные инъекторы конечных групп // В сб.: Вопросы алгебры. – Минск: Университетское. – 1985. – №1. – С. 72–86.

16. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно $\omega$-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. – 1999. – Т.2, №2. – С. 114–147.

17. Чунихин С.А. О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. – 1950. – Т.73, №1. – С. 29–32.

18. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника. – 1964. – 168 с.

19. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука. – 1978. – 278 с.

20. Шеметков Л.А. Некоторые свойства инъекторов конечных групп // Известия Гомельского гос. ун-та им.Ф.Скорины, Вопросы алгебры. – 1999. – №1 (15). – С. 5–13.

21. Шеметков Л.А. О подгруппах $\pi$-разрешимых групп. В кн. Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.

22. Beidleman J.C., Hauck P. Uber Fittingklassen und die Lockett-Vermutung // Math. Z. – 1979. - Bd.167, №2. – S. 161–167.

23. Berger T.R., Cossey J. An example in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. – 1977. – Vol.154. – P. 287–293.

24. Blessenohl D., Gaschutz W. Uber normale Schunk und Fittingklassen // Math. Z. - 1970. – Bd.148, №1. – S. 1–8.

25. Blessenohl D., Laue H. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind. // J. Algebra. – 1979. – №56. – S. 516–532.

26. Bryce R.A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. – 1975. - Vol.141, №2. – P. 99–110.

27. Bryce R.A., Cossey J. Fitting formation of finite solvable groups // Math. Z. – 1972. – Bd.127, №3. – S. 217–223.

28. Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups. Walter de Grycter. New York. Berlin. – 1992.

29. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. Habilitationschrift. Universitat Frankfurt (M). 1966.

30. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen // Math.Z. 1967. Bd.102, №5. – S. 337–339.

31. Fitting H. Beitrage zur Theorie der endlicher Gruppen // Jaresber. Deutsch. Math. Verein. - 1938. – Bd.48. S. 141.

32. Forster P. Nilpotent injectors in finite groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1985. Vol.32, №4. P. 293 297.

33. Frantz W. Spezielle Fittingklassen und ihre Injektoren. Diplomarbeit, Kiel. 1970.

34. Gallego M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra. – 1996. Vol.24, №6. – P. 2011 2023.

35. Guo W. Classes of finite groups. Science Press-Kluwer Academic Publishers. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London. 2000. 258 p.

36. Guo W. Injectors of finite groups // Chiness Ann. Math. Ser. A. - 1997. – Vol.18, №2. – P. 145–148.

37. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London. Math. Soc. – 1969. Vol.3, №2. – P. 193 207.

38. Iranzo M.J., Perez Monasor F. $\mathfrak{F}$-constraint with respect to a Fitting class // Arch. Math. 1986. – №46. – P. 205 210.

39. Iranzo M.J., Perez Monasor F. A class of finite groups having nilpotent injectors // J. Austral. Math. Soc. 1986. Vol.41, №4. – P. 361 365.

40. Iranzo M.J., Perez Monasor F. Existence of $\mathfrak{N}$-injectors in a not central normal Fitting class // Isr. J. Math. – 1984. Vol.48, №2–3. P. 123–128.

41. Iranzo M.J., Perez Monasor F., Madina J. A new injective Fitting class // Problems in Algebra: Gomel Univ. 2000. - №3 (16). P. 80–83.

42. Lockett P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Vol.137, №2. P. 131 136.

43. Mann A. Injectors and normal subgroups of finite groups // Israel. J. Math. – 1971. – №9. – P. 554–558.

44. Shemetkov L.A. Injectors in finite groups // Problems in Algebra: Gomel Univ. – 2000. – №3 (16). – P. 186–187.

45. Vorob'ev N.T. Gaschutz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Problems in Algebra: Gomel Univ. – 2000. – №3 (16). – P. 155–166.

46. Vorob'ev N.T., Grytczuk A. On Lockett's conjecture for finite groups // Tsukuba J. Math. – 1994. – Vol.1, №1. – P. 63–67.

# СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


**Статьи в журналах:**

47. Залесская Е.Н., Воробьев Н.Т. О свойстве модулярности решетки частично локальных классов Фиттинга // Веснік ВДУ. – 2001. – №1 (19). – С. 62–64.

48. Залесская Е.Н. О нелокальных классах Локетта // Веснік ВДУ. – 2002. – №1 (23). – С. 84–88.

49. Воробьев Н.Т., Го Вэньбинь, Залесская Е.Н. О контрпримере к гипотезе Локетта // Веснік ВДУ. – 2002. – №4 (26). – С. 106–108.

50. Залесская Е.Н. Инъекторы конечных групп для произведений классов Фиттинга // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат.навук. – 2004. – №1. – С. 55–58.

51. Залесская Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп // Дискретная математика. – 2004. – Т.16, вып.2. – С. 125–137.

**Тезисы докладов:**

52. Залесская Е.Н. О модулярности решетки $\omega$-локальных классов Фиттинга // IV научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов ВГУ им.П.М.Машерова: Тез. докл. науч. конф., Витебск, 28 марта–24 апреля 2000г. / Витебский государственный университет им.П.М.Машерова. – Витебск, 2000. – С. 72.

53. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О модулярном тождестве для $\omega$-локальных классов Фиттинга // Международная научная конференция, посвященная 80-летию проф.В.Гашюца: Тез. докл. науч. конф., Гомель, 16–21 октября 2000г. / Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель, 2000. – С. 18–20.

54. Залесская Е.Н. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга // V научная конференция студентов, магистрантов, аспирантов ВГУ им.П.М.Машерова: Тез. докл. науч. конф., Витебск, 12–26 апреля 2001г. / Витебский государственный университет им.П.М.Машерова. – Витебск, 2001. – С. 97.

55. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О гипотезе Локетта для p-локальных классов Фиттинга // III Международная алгебраическая конференция в Украине: Тез. докл. науч. конф., Сумы, 2–8 июля 2001 г. / СумГПУ им. А.С.Макаренко. – Сумы, 2001. – С. 147–148.

56. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О решетках $\omega$-локальных классов Фиттинга // Украинский математический конгресс, посвященный 200-летию М.В.Остроградского: Тез. докл. науч. конф., Киев, 21–23 августа 2001 г. / Институт математики НАН Украины. – Киев, 2001. – С. 18–19.

57. Залесская Е.Н. О контрпримере к гипотезе Локетта // VI Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Беларуси: Тез. докл. науч. конф., Витебск, 16–19 октября 2001г. / Витебский государственный университет им.П.М.Машерова. – Витебск, 2001. – С. 42–43.

58. Залесская Е.Н. О нелокальных классах Фиттинга // VI научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов: Тез. докл. науч. конф., Витебск, 24–25 апреля 2002г. / Витебский государственный университет им.П.М.Машерова. – Витебск, 2002. – С. 161.

59. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О частично локальных классах Фиттинга // Международная математическая конференция, посвященная 100-летию начала работы Д.А.Граве в Киевском университете: Тез. докл. науч. конф., Киев, 17–22 июня 2002г. / Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко. – Киев, 2002. – С. 77–78.

60. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О композиционных функциях Хартли // Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти З.И.Боревича: Тез. докл. науч. конф., Санкт-Петербург, 17–23 сентября 2002 г. / Санкт-Петербургский государственный университет. – Санкт-Петербург, 2002. – С. 27–28.

61. Залесская Е.Н. Об $\omega$-локальных классах Локетта // Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти З.И.Боревича: Тез. докл. науч. конф., Санкт-Петербург, 17–23 сентября 2002 г. / Санкт-Петербургский государственный университет. – Санкт-Петербург, 2002. – С. 35–36.

62. Залесская Е.Н. Инъекторы для классов Фиттинга // VII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Беларуси: Тез. докл. науч. конф., Витебск, 22 23 октября 2002г. / Витебский государственный университет им.П.М.Машерова. Витебск, 2002. С. 72 73.

63. Залесская Е.Н. О сопряженных классах инъекторов F-скованных групп // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения": Тез. докл. науч. конф., Тула, 19–24 мая 2003г. / Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н.Толстого. Тула, 2003. – С. 35.

64. Воробьев Н.Т., Залесская Е.Н. О новых сопряженных классах инъекторов конечных групп // V-ая Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения": Тез. докл. науч. конф., Тула, 19 24 мая 2003г. / Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н.Толстого. – Тула, 2003. С. 33 34.

65. Vorob'ev N.T., Zalesskaya E.N. Classes of conjugate injectors of finite groups // IV International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts, Lviv, August 4 9, 2003 / Ivan Franko National University of Lviv. Lviv, 2003. P. 234 235.

66. Залесская Е.Н. Новые классы сопряженных инъекторов // VIII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов Беларуси: Тез. докл. науч. конф., Минск, 9 10 декабря 2003г. / Белорусский национальный технический университет. – Минск, 2003. С. 68 69.

67. Zalesskaya E.N. On the $\omega$-local non-local Lockett classes // International Algebraic Conference in the occasion of 250 anniversary of the Moscow State University: Abstracts, Moscow, 26 May 2 June 2004 / Moscow State University. Moscow, 2004. P. 306 307.

**Препринты:**

68. Залесская Е.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли. Гомель, 2003. 45 с. (Препринт / Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины; №60).

# Р Э З Ю М Э

**Залеская Алена Мікалаеўна**

## Класы Фітынга з дадзенымі ўласцівасцямі функцый Хартлі

Ключавыя словы: канечная група, клас Фітынга, $\omega$-лакальны клас Фітынга, функцыя Хартлі, $\omega$-лакальная функцыя Хартлі.

У дысертацыі класіфікаваны $\omega$-лакальныя класы Фітынга з дадзенымі ўласцівасцямі функцый Хартлі; пацверджана гіпотэза Локета аб структуры класа Фітынга для $\omega$-лакальных класаў Фітынга дадзенай характарыстыкі і абвергнута гэта гіпотэза для такіх класаў у агульным выпадку; апісаны новыя класы спалучаных ін'ектараў у класах Фітынга ўсіх канечных і ўсіх канечных $\pi$-вырашальных груп; апісана будова ін'ектараў для класаў Хартлі $\pi$-вырашальных груп.

Усе асноўныя вынікі працы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў у дзяржуніверсітэтах і пядінстытутах.

# РЕЗЮМЕ

**Залесская Елена Николаевна**

## Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, $\omega$-локальный класс Фиттинга, функция Хартли, $\omega$-локальная функция Хартли.



В диссертации классифицированы $\omega$-локальные классы Фиттинга посредством заданных свойств функций Хартли; подтверждена гипотеза Локетта о структуре класса Фиттинга для $\omega$-локальных классов Фиттинга заданной характеристики и опровергнута данная гипотеза для таких классов в общем случае; найдены новые классы сопряженных инъекторов в классах Фиттинга всех конечных и всех конечных $\pi$-разрешимых групп; описано строение инъекторов для классов Хартли $\pi$-разрешимых групп.

Все основные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в госуниверситетах и пединститутах.

# SUMMARY

**Zalesskaya Elena Nikolaevna**

## Fitting classes with given properties of Hartley functions

Key words: finite group, Fitting class, $\omega$-local Fitting class, Hartley function, $\omega$-local Hartley function.

The classification of $\omega$-local Fitting classes with the help of the given properties of Hartley functions is obtained. A Lockett conjecture about a structure of a Fitting class for $\omega$-local Fitting classes with given characteristic is affirmed. The negative answer for the Lockett conjecture in the case of $\omega$-local Fitting classes is obtained. The new classes of conjugate injectors in all finite and finite $\pi$-soluble groups are described. The structure of injectors for Hartley classes of $\pi$-soluble groups is described.

All the main results of this thesis are new. They have a theoretical significance and may be used in the investigations in the theory of finite groups, and also while teaching special courses at universities and pedagogical institutions.