УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ВИТЬКО

Елена Анатольевна

ФИТТИНГОВЫ ФУНКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2013

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Научный руководитель: **Воробьев Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова», кафедра алгебры и методики преподавания математики

Официальные оппоненты: **Беняш-Кривец Валерий Вацлавович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Белорусский государственный университет, кафедра высшей алгебры и защиты информации

Васильева Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры, учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», кафедра высшей математики

Оппонирующая организация – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко.

Защита состоится 29 ноября 2013 года в 14^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: + 375 232 5737 91, e-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 25 октября 2013 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Ходанович Д.А.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Понятие подгруппового функтора как функции, согласованной с изоморфизмами групп, которая выделяет в группах некоторые системы подгрупп, восходит к известным работам А.Г. Куроша[1] и Амицура[2,3] по теории радикала. В связи с выходом основополагающих работ Бэра[4] и Б.И. Плоткина[5], подгрупповые функторы стали изучать как самостоятельные объекты. Уже в середине 60-х годов прошлого столетия в теории конечных разрешимых групп Зудброком[6], Барнесом и Кегелем[7] было найдено применение таких функторов для обобщения фундаментальных теорем Силова и Холла. В последующем стала формироваться алгебра подгрупповых функторов и значимость понятия функтора была подтверждена рядом глубоких и содержательных результатов по описанию структуры формаций конечных групп и их классификации, а также подгруппового строения самих групп. Такое направление исследований нашло свое отражение в серии современных монографий[8,9,10,11]. В частности, А.Н. Скибой[9] был развит функторный метод и найдены его приложения для описания насыщенных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, а применение функторного метода С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным[8,10] в теории классов Шунка позволило выявить ряд новых свойств максимальных подгрупп и их пересечений.

В 1967 г. Гашюцом, Фишером и Хартли[12] были определены объекты, дуальные формациям, которые в настоящее время называют классами Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Ключевыми объектами теории классов Фиттинга являются понятия радикала и инъектора, аналога подгрупп Силова и Холла. Синтез этих понятий привел к

---

[1] Курош, А.Г. Радикалы колец и алгебр / А.Г. Курош // Матем. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 13–26.
[2] Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1952. – Vol. 74, № 4. – P. 774–786.
[3] Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 100–125.
[4] Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
[5] Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И. Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики : сб., посв. памяти А.И. Мальцева / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики ; под ред. А.И. Ширшова (гл. ред.). – Новосибирск : Наука, 1973. – С. 205–244.
[6] Sudbrock, W. Sylowfunktionen in endlichen Gruppen / W. Sudbrock // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1966. – Vol. 36, №1. – P. 158–184.
[7] Barnes, D.W. Gaschütz functors on finite soluble groups / D.W. Barnes, O.H. Kegel // Math. Z. – 1966. – Bd. 94, № 2. – S. 134–142.
[8] Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
[9] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
[10] Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 254 с.
[11] Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.
[12] Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.

определению фиттингова функтора[13]. Отображение f, которое каждой конечной разрешимой группе G ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, называют разрешимым фиттинговым функтором или фиттинговым $\mathfrak{S}$-функтором в случае, когда выполняются следующие условия: (i) если $\alpha: G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$; (ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$. Заметим, что для непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ отображения $f = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $g = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$, сопоставляющие каждой конечной разрешимой группе G множества $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее $\mathfrak{F}$-радикалов, являются фиттинговыми $\mathfrak{S}$-функторами[14].

Уже в 80-е годы прошлого столетия в серии крупных работ Бейдельмана, Брюстера и Хаука[13,15], Хаука и Кинзла[16], Бейдельмана и Галлего[17], Бейдельмана и Хаука[18] и др. стала формироваться алгебра фиттинговых $\mathfrak{S}$-функторов. Глубокий интерес исследователей к изучению таких функторов был обусловлен, прежде всего, следующими их прикладными аспектами. Во-первых, при помощи фиттинговых функторов были найдены[13] общие методы построения разрешимых классов Фиттинга. Во-вторых, применение таких функторов позволило описать в терминах классов Фиттинга строение радикалов конечных разрешимых групп[19]. Это с необходимостью приводит к решению следующих двух задач. Первая из них состоит в *разработке функторных методов построения новых семейств классов Фиттинга в общем случае – в некотором универсуме $\mathfrak{X}$ произвольных конечных групп.* Вторая задача – *задача описания в терминах фиттинговых функторов радикалов конечных групп, в частности, радикалов холловых π-подгрупп конечных π-разрешимых групп.*

Примечателен тот факт, что основным инструментом в развитии структурной теории классов Фиттинга стали операторы, которые были впервые определены Локеттом[20] посредством заданных свойств прямых произведений радикалов. В частности, применение операторов Локетта позволило решить ряд крупных задач теории классов Фиттинга: классифицировать классы Фиттинга, обладающие свойствами нормальности, перестановочности и нормальной вложен-

[13] Beidleman, J.C. Fittingfunktoren in endlichen auflosbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.
[14] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
[13] Beidleman, J.C. Fittingfunktoren in endlichen auflosbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.
[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.
[16] Hauck, P. Modular Fitting functors in finite groups / P. Hauck, R. Kienzle // Bull. Austral. Math. Soc. – 1987. – Vol. 36. – P. 475–483.
[17] Beidleman, J.C. Conjugate π-normally embedded Fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.
[18] Beidleman, J.C. Closure properties for Fitting functors / J.C. Beidleman, P. Hauck // Mh. Math. – 1989. – Vol. 108, № 1. – P. 1–22.
[19] Gallego, M.P. The radical of the Fitting class defined by a Fitting functor and a set of primes / M.P. Gallego // Arch. Math. – 1987. – Vol. 48. – P. 36–39.
[20] Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

ности[11,14], а также описать в терминах радикалов структуру разрешимых локальных классов Фиттинга[21]. Напомним, что оператор «*»[20] – отображение, сопоставляющее каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{F}^*$ – наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и «$_*$» – класс $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Введение таких операторов позволило определить разбиение множества всех классов Фиттинга на классы эквивалентности, которые называют секциями Локетта классов Фиттинга. Одним из замечательных свойств секции Локетта является тот факт, что наибольший по включению ее элемент – это класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, а наименьший - класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*$.

Так как радикалы для классов Фиттинга являются значениями фиттингова функтора $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$, то возникает общая задача нахождения аналогов операторов Локетта и секций Локетта для фиттинговых функторов и их применение как для построения алгебры функторов, так и для изучения структуры групп и их классов. Такая задача впервые рассматривалась в разрешимом случае в работе Бейдельмана, Брюстера и Хаука[15]. Это привело к разбиению множества всех разрешимых фиттинговых функторов на классы эквивалентности, которые называют[15] секциями Локетта фиттинговых функторов. Вместе с тем в этом новом направлении исследований для фиттинговых функторов в классе произвольных конечных групп оставалось актуальным решение следующих двух взаимосвязанных задач: *нахождение условий существования наибольшего и наименьшего элементов секции Локетта* и *описания структуры наименьшего элемента секции Локетта*. Заметим, что решению первой из этих задач для фиттинговых $\mathfrak{S}$-функторов была посвящена работа Бейдельмана, Брюстера, Хаука[15], а второй, известной как проблема Бейдельмана – Брюстера – Хаука[15] (проблема 8.7), – работа Бейдельмана и Галлего[17].

Таким образом, ранее все исследования фиттинговых функторов относились только к алгебре разрешимых фиттинговых функторов. В связи с этим весьма актуальным является изучение алгебры фиттинговых функторов и ее применение к решению отмеченных выше задач в некотором универсуме $\mathfrak{X}$ произвольных конечных групп. Реализации этого и посвящена данная диссертация.

---

[11] Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.
[14] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
[21] Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, № 2. – С. 161–167.
[20] Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.
[17] Beidleman, J.C. Conjugate π-normally embedded Fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных программ:

– составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Задание входило в Государственную программу фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»). Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г., тема выполнялась в 2006–2010 гг. (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003);

– составной части задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»), подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы») (номер госрегистрации в БелИСА – 20111880);

– гранта БРФФИ на 2011–2012 гг. «Классы конечных групп с заданными свойствами канонических подгрупп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20114649);

– гранта Министерства образования Республики Беларусь для аспирантов на 2011 г. «Фиттинговы функторы конечных групп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20111285).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является построение общей теории фиттинговых функторов конечных групп и ее применение для нахождения новых семейств классов Фиттинга и описания структуры радикалов конечных групп. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи:

– разработать функторные методы построения новых семейств классов Фиттинга;

– описать строение радикалов групп для классов Фиттинга, заданных посредством фиттинговых функторов в классе частично разрешимых групп;

– определить условия существования наибольшего и наименьшего элементов секции Локетта фиттингова функтора;

– описать строение наименьшего элемента секции Локетта для π-разрешимых сопряженных нормально вложенных фиттинговых функторов (обобщенная версия проблемы Бейдельмана – Брюстера – Хаука[15]).

Объектом исследования является алгебра фиттинговых функторов конечных групп.

Предмет исследования – свойства фиттинговых функторов и их приложения для построения классов Фиттинга и описания радикалов конечных групп.

Положения, выносимые на защиту

1. Функторный метод построения новых семейств классов Фиттинга, теорема 4.1.2 [2-А, 4-А].

2. Описание в терминах фиттинговых функторов радикалов конечных π-разрешимых групп и его применение для изучения структуры частично локальных классов Фиттинга (подтверждение аналога гипотезы Л.А. Шеметкова[22] для π-разрешимых частично локальных классов Фиттинга), теоремы 4.2.2 [2-А, 4-А] и 4.3.6 [3-А].

3. Теоремы о существовании наибольшего и наименьшего элементов секции Локетта сопряженного фиттингова функтора, теоремы 5.2.3 [5-А] и 5.2.7 [5-А].

4. Описание строения наименьшего элемента секции Локетта для π-разрешимых сопряженных нормально вложенных фиттинговых функторов (положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана – Брюстера – Хаука[15] об описании наименьшего элемента секции Локетта сопряженного фиттингова функтора), теорема 5.3.3 [6-А, 7-А].

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством профессора, доктора физико-математических наук Воробьева Николая Тимофеевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [3-А, 4-А, 11-А, 14-А, 15-А, 21-А] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация – соискателю. В научной статье [1-А] основные идеи принадлежат

[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

[22] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

Н.Т. Воробьеву и Н.В. Ивановой, а реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

– на научном семинаре кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;

– на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»;

– на X(55) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета (24–25 апреля 2008 г., Витебск);

– на X Республиканской научно-методической конференции молодых ученых (15–16 мая 2008 г., Брест);

– на XV(62) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике», посвященной 100-летию со дня основания УО «ВГУ им. П.М. Машерова» (3–5 марта 2010 г., Витебск);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева (19–24 июня 2010 г., Санкт-Петербург, Россия);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «IV Машеровские чтения» (28–29 октября 2010 г., Витебск);

– на XVI(63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (16–17 марта 2011 г., Витебск);

– на Международной научно-практической Интернет-конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева (21–22 июня 2011 г., Витебск);

– на 8-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной памяти профессора В.М. Усенко (5–12 июля 2011 г., Луганск, Украина);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «V Машеровские чтения» (29–30 сентября 2011 г., Витебск);

– на XVII(64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (14–15 марта 2012 г., Витебск);

– на Международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В.В. Кириченко (13–19 июня 2012 г., Николаев, Украина);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Н. Черникова (20–26 августа 2012 г., Киев, Украина);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VI Машеровские чтения» (27–28 сентября 2012 г., Витебск);

– на Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (5–9 ноября 2012 г., Минск).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в научных журналах и в 14 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов – 4,21 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах – 3,16 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций – 1,05 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 74 наименований использованных источников и 21 наименования публикаций соискателя. Объем диссертации – 84 страницы, из них 7 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьеву за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем[14,22].

Глава 1 «Аналитический обзор литературы» содержит обзор основных источников по теме диссертации. В данной главе приводятся основные этапы раз-

[14] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
[22] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

вития теории фиттинговых функторов, дается описание объектов исследования диссертационной работы, формулируются нерешенные вопросы и задачи.

Глава 2 «Предварительные сведения» содержит известные исходные понятия и результаты, которые используются в доказательствах на протяжении последующих глав диссертации.

Напомним некоторые из основных понятий, которые мы будем использовать. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-инъектором группы G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N группы G. Подгруппу H группы G называют: 1) пронормальной, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены в $\langle H, H^x \rangle$; 2) π-нормально вложенной, если холлова π-подгруппа группы H является холловой π-подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G; 3) π-связанной, если либо порядок подгруппы H, либо ее индекс в G является π-числом.

Следуя[14] (см. также[22,23]), холловой системой π-разрешимой группы G будем называть такое множество Σ холловых подгрупп из G, что выполняются следующие условия:

1) для всякого множества ρ из π множество Σ содержит в точности одну холлову ρ-подгруппу и в точности одну холлову $(\rho \cup \pi')$-подгруппу;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Пусть R – подгруппа π-разрешимой группы G. Через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R : S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холлова система группы R, то говорят, что Σ редуцируется в подгруппу R и обозначают $\Sigma \searrow R$.

Основное содержание диссертации представлено в третьей, четвертой и пятой главах.

Глава 3 «Основы функторного метода» посвящена классификации фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов и определению операций на множестве таких функторов.

В разделе 3.1 введено понятие фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора, где $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Кроме того, предложена классификация фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов, приведены примеры фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов, которые используются на протяжении последующих глав.

3.1.1 Определение [2-А, 4-А]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Отображение f, которое каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее подгрупп $f(G)$, назовем фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором, если выполняются следующие условия:*

(i) если $\alpha: G \to \alpha(G)$ *– изоморфизм, то*

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X) : X \in f(G)\};$$

[14] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
[22] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
[23] Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Коротко множество $\{\alpha(X): X \in f(G)\}$ будем обозначать через $\alpha(f(G))$, а множество $\{X \cap N: X \in f(G)\}$ – через $f(G) \cap N$.

3.1.2 Определение [7-А]. *Пусть f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Множество всех простых чисел p, для которых существуют такие группа $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем порядка подгруппы X, назовем характеристикой функтора f и обозначим* Char f.

В зависимости от подгрупповых свойств и значений класса групп $\mathfrak{X}$ классифицируем фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы следующим образом.

3.1.3 Определение [2-А, 4-А, 7-А]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Тогда фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор назовем:*

1) *разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;

2) *π-разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^{\pi}$ – класс всех π-разрешимых групп;

3) *сопряженным*, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G;

4) *π-нормально вложенным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-нормально вложенной подгруппой группы G;

5) *пронормальным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G;

6) *π-связанным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-связанной подгруппой группы G;

7) *наследственным*, если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор будем называть *фиттинговым функтором* для случая, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ – класс всех групп.

3.1.4 Примеры. а) Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G) = \{G_{\mathfrak{F}}\}$. Тогда $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$ является сопряженным фиттинговым функтором, который мы будем называть радикальным фиттинговым функтором.

б) Пусть f – π-разрешимый фиттингов функтор такой, что каждой группе $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ он сопоставляет множество всех её холловых π-подгрупп. Тогда по теореме С.А. Чунихина[23] функтор f является сопряженным. Такой функтор назовем холловым π-функтором и обозначим через Hall_{π}.

В разделе 3.2 определены операции произведения и решеточного объединения на множестве фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов.

3.2.1 Определение [2-А, 4-А]. *Произведением фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов f и g назовем отображение $f \circ g$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество подгрупп $\{X : X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)\}$.*

---

[23] Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

3.2.6 Определение [6-А, 7-А]. *Пусть I – множество индексов, $\{f_i : i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и* $\mathrm{Char}\, f_i \cap \mathrm{Char}\, f_j = \varnothing$ *для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Определим операцию $\vee$ следующим образом:*

$$\left(\underset{i \in I}{\vee} f_i\right)(G) = \Big\{ X : X = \prod_{i \in I} X_i,\ X_i \in f_i(G), \text{ существует холлова система группы } G, \text{ которая редуцируется в подгруппу } X_i \text{ для всех } i \in I \Big\}.$$

Построение фиттинговых функторов посредством операций $\circ$ и $\vee$ описывают следующие две теоремы.

3.2.2 Теорема [2-А, 4-А]. *Пусть f, g – наследственные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) произведение $f \circ g$ – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор,

2) если f и g – сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то их произведение $f \circ g$ – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.

3.2.7 Теорема [6-А, 7-А]. *Пусть $\{f_i : i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и* $\mathrm{Char}\, f_i \cap \mathrm{Char}\, f_j = \varnothing$ *для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Тогда $\underset{i \in I}{\vee} f_i$ – пронормальный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.*

Основные результаты четвертой главы диссертации «Фиттинговы функторы и радикалы групп» посвящены построению новых классов Фиттинга и описанию радикалов групп посредством фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов.

В первом разделе найдены общие закономерности построения новых семейств классов Фиттинга посредством фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов.

4.1.1 Определение [2-А, 4-А]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга, f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π – множество простых чисел. Определим класс групп $\mathcal{H}_\pi(f)$ следующим образом: $G \in \mathcal{H}_\pi(f)$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$ и индекс $|G : X|$ является π'-числом для всех $X \in f(G)$.*

Если $\pi = \varnothing$, то положим $\mathcal{H}_\varnothing(f) = \mathfrak{X}$. В случае, когда $\pi = \{p\}$, обозначим класс $\mathcal{H}_\pi(f)$ через $\mathcal{H}_p(f)$. Если $\pi = \mathbb{P}$, то $\mathcal{H}_\mathbb{P}(f) = \cap_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{H}_p(f)$ обозначим через $\mathcal{H}(f)$.

4.1.2 Теорема [2-А, 4-А]. Пусть $\mathfrak{X}$ – *непустой класс Фиттинга, f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда для любого множества простых чисел π класс групп $\mathcal{H}_\pi(f)$ является классом Фиттинга.*

Пусть f – π-разрешимый фиттингов функтор и $f = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F} \circ \mathrm{Hall}_\pi$. Тогда класс $\mathcal{H}_\pi(f)$ обозначим символом $\mathcal{H}_\pi(\mathfrak{F})$ и это класс всех тех π-разрешимых групп G, в которых холлова π-подгруппа G является $\mathfrak{F}$-группой.

Во втором разделе главы доказана теорема, которая описывает общие закономерности построения радикалов π-разрешимых групп в терминах

π-разрешимых фиттинговых функторов и класса $\mathcal{H}_\pi(f)$ и представляет один из основных результатов диссертации.

4.2.2 Теорема [2-A, 4-A] *Пусть π – непустое множество простых чисел, f – π-разрешимый фиттингов функтор такой, что для любой группы G выполняется равенство $|A_\pi| = |B_\pi|$ для всех групп A_π, $B_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$. Тогда для любой π-разрешимой группы G и любой подгруппы X из $f(G)$ таких, что $X_\pi \le G_\pi$ и $C = \mathrm{Core}_{G_\pi}(X_\pi)$, справедливы утверждения:*

1) $G_\pi \cap G_{\mathcal{H}_\pi(f)} = C$;

2) если $K/\langle C^G\rangle = O_{\pi'}(G/\langle C^G\rangle)$, то $K = G_{\mathcal{H}_\pi(f)}$.

При конкретных заданиях π-разрешимого фиттингова функтора доказанная теорема позволяет описать радикалы холловых π-подгрупп π-разрешимых групп, что подтверждает

4.2.4 Следствие [1-A]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – непустое множество простых чисел, H – холлова π-подгруппа π-разрешимой группы G и класс Фиттинга $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S}^\pi : \mathrm{Hall}_\pi(G) \subseteq \mathfrak{F})$. Тогда $H \cap G_\mathfrak{H} = H_\mathfrak{F}$ и $G_\mathfrak{H}/\langle H_\mathfrak{F}^G\rangle = O_{\pi'}(G/\langle H_\mathfrak{F}^G\rangle)$.*

Третий раздел четвертой главы посвящен построению семейств частично локальных классов Фиттинга посредством произведения холлового и радикального π-разрешимых фиттинговых функторов.

Для этой цели мы будем использовать концепцию частичной локализации Шеметкова – Скибы[24].

Пусть $\varnothing \ne \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\omega' = \mathbb{P}\setminus\omega$. Всякое отображение

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией. Для каждой ω-локальной H-функции f полагаем $\mathrm{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} : f(a) \ne \varnothing\}$ – носитель f.

Положим

$$LR_\omega(f) = \left(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}^\pi_{p'}\right) \bigcap \left(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}^\pi_{p'}\right) \bigcap f(\omega')\mathfrak{S}^\pi_{\omega},$$

где $\pi_1 = \mathrm{Supp}(f) \cap \omega$, $\pi_2 = \omega\setminus\pi_1$, $\mathfrak{S}^\pi_\omega$ – класс всех π-разрешимых ω-групп и $\mathfrak{S}^\pi_{p'}$ – класс всех π-разрешимых p'-групп.

---

[24] Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-локальным, если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f. В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, ω-локальный класс Фиттинга называют локальным.

Л.А. Шеметковым в работе[22] была сформулирована следующая

Гипотеза (Л.А. Шеметков[22], проблема 19). *Доказать, что формация всех конечных групп, каждая из которых обладает единственным классом сопряженных холловых подгрупп, принадлежащих локальной формации $\mathfrak{F}$, является локальной.*

Следующая теорема представляет подтверждение аналога указанной гипотезы Л.А. Шеметкова для π-разрешимых частично локальных классов Фиттинга.

4.3.6 Теорема [3-А]. *Если $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то класс групп $\mathcal{H}_{\pi\omega}(\mathfrak{F})$ – ω-локальный класс Фиттинга.*

В главе 5 «Функторы Локетта» найдены функторные аналоги известных в теории классов операторов Локетта. В ней определяется понятие секции Локетта для фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора и исследуется ее строение.

Если f и g – сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то функтор f назовем сильно вложенным в g и обозначим $f \ll g$ в том и только в том случае, когда для любой подгруппы $X \in f(G)$ существует такая подгруппа $Y \in g(G)$, что $X \leq Y$.

По аналогии с[15] для сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f введем определение $\mathfrak{X}$-функтора f^* в общем случае, когда $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга.

5.1.6 Определение [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Определим функтор f^* следующим образом:*

$$f^*(G) = \{\pi_1(T) \colon T \in f(G \times G)\}$$

для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, где π_1 – проекция первой компоненты на G.

Примечателен тот факт, что для оператора «*» на множестве фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов справедливы свойства, аналогичные известным свойствам операторов Локетта[20] в теории классов Фиттинга. Это подтверждает

5.1.8 Теорема [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *f^* – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор;*

2) *если $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, то $f^*(G) = \{\pi_i(T) \colon T \in f(G^m)\}$;*

3) $(f^*)^* = f^*$.

---

[22] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

[20] Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

В разделе 5.2 для сопряженных фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов определено понятие секции Локетта.

5.2.1 Определение [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда секцией Локетта назовем множество*

$$\mathrm{Locksec}(f) = \{g: g - \textit{сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\textit{-функтор и } f^* = g^*\}.$$

Один из основных результатов раздела 5.2 – доказательство существования наибольшего по сильному вложению элемента секции Локетта для сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора. Справедлива

5.2.3 Теорема [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда $g \ll f^*$ для всех $g \in \mathrm{Locksec}(f)$.*

Реализация задачи существования наименьшего элемента секции Локетта и его описания в общем случае для произвольного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора невозможна (см.[15] с. 47, проблема 8.7). Однако нами найдено достаточно широкое семейство фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов, содержащее, в частности, все пронормальные фиттинговы $\mathfrak{S}$-функторы, для которых такая задача решается положительно.

5.2.4 Определение [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда:*

(1) функтор f назовем удовлетворяющим нормализаторному условию, если $V \trianglelefteq N_G(\pi_1(T))$ для всех групп $G \in \mathfrak{X}$, $T \in f(G \times G)$ таких, что $T \cap (G \times 1) = V \times 1$ и $V \in f(G)$;

(2) секцию Локетта $\mathrm{Locksec}(f)$ назовем удовлетворяющей нормализаторному условию или N-секцией, если каждый функтор $g \in \mathrm{Locksec}(f)$ удовлетворяет нормализаторному условию.

5.2.7 Теорема [5-А]. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и $\mathrm{Locksec}(f)$ является N-секцией. Тогда $\mathrm{Locksec}(f)$ содержит наименьший по сильному вложению элемент f_*.*

Основной результат пятой главы – положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана, Брюстера и Хаука[15] (проблема 8.7) об описании наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных Λ-нормально вложенных π-разрешимых фиттинговых функторов.

Пусть I – множество индексов, π – некоторое непустое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$ – система попарно непересекающихся непустых подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$. Фиттингов π-разрешимый функтор f назовем Λ-нормально вложенным, если функтор f является π_i-нормально вложенным для всех $\pi_i \in \Lambda$.

---

[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

В теории разрешимых фиттинговых функторов известна

Проблема (Бейдельман, Брюстер, Хаук[15], проблема 8.7). *Описать строение наименьшего элемента* f_* *секции Локетта для нормально вложенного сопряженного фиттингова функтора* f. *В частности, является ли* f_* *произведением фиттинговых функторов* f *и* $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{S}_*}$, *если* $f = \mathrm{Hall}_\pi$?

Решение обобщенного варианта указанной проблемы представляет следующая теорема.

5.3.3 Теорема [6-А, 7-А]. *Пусть* f *– сопряженный* Λ*-нормально вложенный* π*-разрешимый фиттингов функтор,* f_* *– наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора* f. *Тогда*

$$f_* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{H}_{\pi_i}(f))_*} \right)$$

5.3.4 Следствие [6-А, 7-А]. *Пусть* π *– множество простых чисел,* π*-разрешимый фиттингов функтор* $f = \mathrm{Hall}_\pi$. *Тогда наименьший элемент секции Локетта* $f_* = f \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{E}^\pi)_*}$.

В случае разрешимых фиттинговых функторов получаем

5.3.5 Следствие (Бейдельман, Галлего[17]). *Пусть* f *– сопряженный* Λ*-нормально вложенный разрешимый фиттингов функтор,* f_* *– наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора* f. *Тогда*

$$f_* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{H}_{\pi_i}(f))_*} \right).$$

5.3.6 Следствие (Бейдельмана, Галлего[17]). *Пусть* π *– множество простых чисел, разрешимый фиттингов функтор* $f = \mathrm{Hall}_\pi$. *Тогда наименьший элемент секции Локетта* $f_* = f \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{S}_*}$.

---

[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

[17] Beidleman, J.C. Conjugate π-normally embedded Fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертация посвящена построению общей теории фиттинговых функторов конечных групп и ее применению для нахождения новых семейств классов Фиттинга и описания структуры радикалов конечных групп. Основные результаты диссертации следующие.

В произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{X}$ введено понятие фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора, произведена классификация и определены операции на множестве таких функторов. Доказано, что для любых наследственных фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов f и g их произведение $f \circ g$ – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор (теорема 3.2.2 (1) [2-А, 4-А]). Кроме того, установлена замкнутость по умножению множества всех сопряженных наследственных фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов (теорема 3.2.2 (2) [2-А, 4-А]). Определена операция $\vee$ на множестве пронормальных (теорема 3.2.7 [6-А, 7-А]) и Λ-нормально вложенных (теорема 3.2.12 [7-А]) π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов.

Найдены общие закономерности построения новых семейств классов Фиттинга посредством заданных свойств фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов (теорема 4.1.2 [2-А, 4-А]). Доказано, что если f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то класс $\mathcal{H}_\pi(f)$ всех групп G, в которых все подгруппы $X \in f(G)$ имеют в G π'-индекс, является классом Фиттинга. При конкретных заданиях фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора данный метод позволяет получить семейства классов Фиттинга, определяемых заданными свойствами холловых подгрупп, которые были известны лишь в разрешимом случае.

Описаны радикалы конечных π-разрешимых групп для классов Фиттинга с заданными свойствами фиттинговых функторов (теорема 4.2.2 [2-А, 4-А]). В частности, установлено, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и любой π-разрешимой группы G справедливо, что $\mathfrak{F}$-радикал холловой π-подгруппы H из G равен пересечению H и радикала G для класса Фиттинга всех π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых являются $\mathfrak{F}$-группами (следствие 4.2.4 [1-А]).

Построены новые семейства частично локальных классов Фиттинга посредством заданных свойств холлового и радикального π-разрешимых фиттинговых функторов. Доказано, что класс всех тех π-разрешимых групп, $(\pi \cap \omega)$-холловы подгруппы которых принадлежат ω-локальному классу Фиттинга, является ω-локальным (теорема 4.3.6 [3-А]). Тем самым получено подтверждение аналога гипотезы Л.А. Шеметкова[22] (проблема 19) для π-разрешимых частично локальных классов Фиттинга.

[22] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

Определены аналоги известных в теории классов Фиттинга операторов «*», «$_*$» и секций Локетта для фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов ($\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга). Доказано, что для любого сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f секция Локетта содержит наибольший по сильному вложению элемент (теорема 5.2.3 [5-А]) и для любого сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f секция Локетта, удовлетворяющая нормализаторному условию, содержит наименьший по сильному вложению элемент (теорема 5.2.7 [5-А]).

Получено решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана – Брюстера – Хаука[15]: описано строение наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных π-разрешимых Λ-нормально вложенных фиттинговых функторов (теорема 5.3.3 [6-А, 7-А]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для описания радикалов групп и изучения структуры классов конечных групп посредством свойств фиттинговых функторов для исследований, проводимых в Белорусском государственном университете, Гомельском, Витебском, Брестском, Полоцком госуниверситетах; Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Новосибирском государственном университете, Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко; Сюйчжоуском нормальном университете (КНР); университете Науки и Технологии Китая; университетах Памплоны, Сарагоссы и Валенсии (Испания); университетах Тюбингена и Майнца (Германия). В частности, описанные в диссертации функторные методы позволяют строить новые семейства классов Фиттинга и описывать структуру радикалов конечных групп. Решенные в диссертации задачи могут быть использованы в решении открытых вопросов теории фиттинговых функторов конечных групп, связанных с изучением структуры классов групп и строения секций Локетта фиттинговых функторов.

Результаты диссертации могут быть применены в учебном процессе при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей высших учебных заведений, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

---

[15] Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1-А. Воробьев, Н.Т. О свойствах радикалов холловых подгрупп π-разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.А. Витько, Н.В. Иванова // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2008. – № 2 (48). – С. 125–129.

2-А. Витько, Е.А. О теории фиттинговых функторов конечных групп / Е.А. Витько // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2010. – № 2 (56). – С. 48–51.

3-А. Витько, Е.А. О классах Фиттинга и холловых подгруппах конечных π-разрешимых групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 37–42.

4-А. Витько, Е.А. Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.

5-А. Витько, Е.А. О наименьших и наибольших элементах секции Локетта фиттингова функтора / Е.А. Витько // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 69–74.

6-А. Витько, Е.А. О проблеме Бейдельмана – Брюстера – Хаука в теории фиттинговых функторов / Е.А. Витько // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 4 (70). – С. 16–19.

7-А. Витько, Е.А. О строении наименьшего элемента секции Локетта π-разрешимого фиттингова функтора / Е.А. Витько // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 48–57.

Тезисы докладов конференций

8-А. Витько, Е.А. О радикалах холловых π-подгрупп / Е.А. Витько // X(55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета : сб. ст., Витебск, 24–25 апр. 2008 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.Л. Гладков (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2008. – С. 11–13

9-А. Витько, Е.А. Радикалы холловых π-подгрупп / Е.А. Витько // X Республиканская научно-методическая конференция молодых ученых : сб. тез. докл., Брест, 15–16 мая 2008 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Брест. гос ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. К.К. Красовского. – Брест, 2008. – С. 8.

10-А. Витько, Е.А. Классы Фиттинга, определяемые фиттинговыми функторами / Е.А. Витько // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XV(62) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, посвященной 100-летию со дня основания УО «ВГУ им. П.М. Машерова», Витебск, 3–5 марта 2010 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2010. – С. 17–19.

11-А. Витько, Е.А. Радикалы групп, определяемые фиттинговыми функторами / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию А.В. Яковлева : сб. тез. докл., Санкт-Петербург, 19–24 июня 2010 г. / Санкт-Петербургский государственный университет ; под ред. А.И. Генералова. – СПб., 2010. – С. 15–17.

12-А. Витько, Е.А. Функторы Локетта конечных групп / Е.А. Витько // IV Машеровские чтения : материалы междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 28–29 октября 2010 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2010. – С. 11–12.

13-А. Витько, Е.А. О секции Локетта фиттинговых функторов / Е.А. Витько // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XVI(63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16–17 марта 2011 г. : в 2 т. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 50–51.

14-А. Витько, Е.А. О фиттинговых функторах с нормализаторным условием / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы междунар. науч.-практ. Интернет-конф., посвящ. 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: Л.А. Шеметков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – С. 19–21.

15-А. Vitko, E.A. On the structure of the Lockett section of Fitting functors / E.A. Vitko, N. T. Vorobyov // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko : Book of abstracts, Lugansk, July 5–12, 2011 / Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University ; Yu.A. Drozd, V.V. Kirichenko, B.V. Novikov, editors. – Lugansk, 2011. – P. 141.

16-А. Витько, Е.А. О сопряженных фиттинговых функторах конечных групп / Е.А. Витько // V Машеровские чтения : материалы междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 29–30 сентября 2011 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск. 2011. – С. 5–6.

17-А. Витько, Е.А. О пронормальных фиттинговых функторах / Е.А. Витько // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XVII(64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14–15 марта 2012 г. в 2 т. / Витебск.

гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2012. – Т. 1. – С. 3–4.

18-А. Витько, Е.А. О свойствах функторов Локетта / Е.А. Витько // Междунар. матем. конф., посвящ. 70-летию проф. В.В. Кириченко : тез. докл., Николаев, 13–19 июня 2012 г. / Николаевский национальный университет им. В.О. Сухомлинского ; редкол.: Ю.А. Дрозд [и др.]. – Николаев, 2012г. – С. 81.

19-А. Vitko, E.A. On strong containment of Fitting functors / E.A. Vitko // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov : Book of abstracts. Kyiv, August 20–26, 2012 / Dragomanov National Pedagogical University ; Progr. com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. – Kyiv, 2012. – P. 169.

20-А. Витько, Е.А. О критерии сильного вложения фиттинговых функторов / Е.А. Витько // VI Машеровские чтения : материалы междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 27–28 сентября 2012 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков [и др.]. – Витебск, 2012. – С. 16–17.

21-А. Витько, Е.А. О проблеме описания наименьшего элемента секции Локетта фиттингова функтора / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 5. – С. 16–17.

Р Э З Ю М Э

Віцько Алена Анатольеўна

Фітынгавы функтары канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, клас Фітынга, ω-лакальны клас Фітынга, радыкал, падгрупа Хола, аператар Локета, секцыя Локета, фітынгаў $\mathfrak{X}$-функтар.

У дысертацыі даследуюцца фітынгавы функтары канечных груп. Апісаны функтарны метад пабудовы новых сямействаў класаў Фітынга. Атрымана апісанне радыкалаў канечных π-вырашальных груп у тэрмінах фітынгавых функтараў. Пацверджаны аналаг гіпотэзы Л.А. Шамяткова для π-вырашальных часткова лакальных класаў Фітынга: пабудаваны новыя сямействы часткова лакальных класаў Фітынга з дапамогай зададзеных уласцівасцей холавага і радыкальнага π-вырашальных фітынгавых функтараў. Даказана, што секцыя Локета змяшчае найбольшы элемент для любога спалучанага фітынгава $\mathfrak{X}$-функтара, і вызначаны ўмовы, пры якіх яна змяшчае найменшы элемент. Вырашана абагульненая версія праблемы Бейдэльмана – Брустэра – Хаўка: апісана будова найменшага элемента секцыі Локета для π-вырашальных спалучаных Λ-нармальна ўкладзеных фітынгавых функтараў. Установлена, што найменшы па моцным укладанні элемент секцыі Локета f_* з'яўляецца здабыткам π-вырашальных фітынгавых функтараў f і $\mathrm{Rad}_{(\mathfrak{E}^{\pi})}$, калі π-вырашальны фітынгаў функтар $f = \mathrm{Hall}_{\pi}$.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

Р Е З Ю М Е

Витько Елена Анатольевна

Фиттинговы функторы конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, ω-локальный класс Фиттинга, радикал, подгруппа Холла, оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.

В диссертации исследуются фиттинговы функторы конечных групп. Описан функторный метод построения новых семейств классов Фиттинга. Получено описание радикалов конечных π-разрешимых групп в терминах фиттинговых функторов. Подтвержден аналог гипотезы Л.А. Шеметкова для π-разрешимых частично локальных классов Фиттинга: построены новые семейства частично локальных классов Фиттинга посредством заданных свойств холлового и радикального π-разрешимых фиттинговых функторов. Доказано, что секция Локетта содержит наибольший элемент для любого сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора, и определены условия, при которых она содержит наименьший элемент. Решена обобщенная версия проблемы Бейдельмана – Брюстера – Хаука: описано строение наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных π-разрешимых Λ-нормально вложенных фиттинговых функторов. Установлено, что наименьший по сильному вложениию элемент секции Локетта f_* является произведением π-разрешимых фиттинговых функторов f и $\mathrm{Rad}_{(\mathfrak{E}^{\pi})_*}$, если π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Hall}_\pi$.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Vitko Elena Anatolievna

Fitting functors of finite groups

Key words: finite group, Fitting class, ω-local Fitting class, radical, Hall subgroup, Lockett's operation, Lockett section, Fitting $\mathfrak{X}$-functor.

In the dissertation Fitting functors of finite groups are investigated. A functor method for generating new families of Fitting classes is described. A description of the radicals of finite π-soluble groups in terms of Fitting $\mathfrak{X}$-functors is obtained. The analogue of the hypothesis of L.A. Shemetkov for π-soluble partially local Fitting class is confirmed: new families of partially local Fitting classes with given properties of Hall and radical π-soluble Fitting functor are constructed. It is proved that the Lockett section of a conjugate Fitting $\mathfrak{X}$-functor contains the largest element and describe conditions under which the Lockett section contains the smallest element. The generalized version of the problem of Beidleman – Brewster – Hauck is solved: a structure of the smallest element of the Lockett section of a conjugate Λ-normally embedded π-soluble Fitting functor is described. It is proved that the smallest element f_* by strong containment of the Lockett section is the product of π-soluble Fitting functors f and $\mathrm{Rad}_{(\mathfrak{E}^{\pi})_*}$ if π-soluble Fitting functor $f = \mathrm{Hall}_{\pi}$.

All main results of the dissertation are new. They have theoretical character and may be used in the investigations of the theory of finite groups and their classes, and also while teaching special courses in universities.

Научное издание

ВИТЬКО Елена Анатольевна

ФИТТИНГОВЫ ФУНКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 22.10.2013. Формат 60 ×84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 60 экз. Заказ № 564.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель