УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ВОРОБЬЕВ
Николай Николаевич

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2013

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Научный консультант: **Скиба Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии

Официальные оппоненты: **Мазуров Виктор Данилович**, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, советник РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория теории групп

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Белорусский государственный университет, кафедра высшей алгебры и защиты информации

Пальчик Эдуард Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, учреждение образования «Полоцкий государственный университет», научно-исследовательский сектор

Оппонирующая организация — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко.

Защита состоится «24» мая 2013 года в 14^{00} часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Автореферат разослан 23 апреля 2013 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д.А. Ходанович

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Решеткой называют частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента имеют точную верхнюю и точную нижнюю грани. Возникновение теории решеток восходит к концу XIX столетия и, благодаря основополагающим трудам Буля[1], Шредера[2] и Дедекинда[3], привело к интенсивному развитию математической логики и алгебры. В последующем теория решеток стала эффективным инструментом в доказательстве многих основных структурных теорем теории групп и алгебраических систем вцелом, что нашло свое отражение в работах Оре[4,5], Бэра, Дж. фон Неймана (см.[6]), Судзуки[7] и др.

Во второй половине XX столетия новым мощным стимулом для дальнейшего развития теории решеток и ее приложений явились задачи, возникшие естественным образом в общей теории классов алгебраических систем. Напомним, что *классом алгебраических систем* называют всякую совокупность однотипных алгебраических систем, замкнутую относительно изоморфизмов. Следует отметить, что в «чистом» виде такая теория начинает свое развитие лишь в 30-е годы прошлого столетия с выходом работ Г. Биркгофа[8] и Б.Х. Неймана[9], связанных с изучением многообразий групп. В дальнейшем наряду с многообразиями были выделены и изучались и другие классы алгебраических систем (реплично полные классы, квазимногообразия и др.). Значительное влияние на процесс становления теории классов оказал, как

[1]Boole, G. An investigation into the Laws of Thought / G. Boole. – Chicago : Open Court Publishing Co., 1854 (original edition) ; Reprinted edition. – 1940.

[2]Schröder, E. Algebra der Logik / E. Schröder. – 3 volumes. - Leipzig, 1890 (original edition) ; Reprinted edition. – 1995.

[3]Dedekind, R. Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler / R. Dedekind. – Braunschweig : Festschrift der Herzogl. technische Hochschule zur Naturforscher-Versammlung, 1897 (original edition) ; Reprinted edition. – Chelsea–New York, 1968. – P. 103–148. – (Gesammelte mathematische Werke ; vol. 2).

[4]Ore, O. On the foundations of abstract algebra I / O. Ore // Ann. Math. – 1935. – Vol. 36. – P. 406–437.

[5]Ore, O. Structures and group theory I / O. Ore // Duke Math. Journ. - 1937. – Vol. 3. – P. 149–173.

[6]Холл, М. Теория групп / М. Холл ; пер. с англ. Н.В. Дюмина, З.И. Жилинской ; под ред. Л.А. Калужнина. – М. : изд-во иностранной литературы, 1962. – 468 с.

[7]Suzuki, M. Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups / M. Suzuki. – Berlin : Springer-Verlag, 1956.

[8]Birkhoff, G. On structure of algebras / G. Birkhoff // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1935. – Vol. 31. – P. 433–454.

[9]Neumann, B.H. Identical relations in groups I / B.H. Neumann // Math. Ann. – 1937. – Vol. 114. – P. 506–525.

известно, А.И. Мальцев[10,11,12].

Напомним, что *многообразие групп* можно определить как непустой класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и поддекартовых произведений[13]. *Формацией* называют всякий класс конечных групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и поддекартовых произведений (с конечным числом сомножителей). Двойственным объектом по отношению к формации является *класс Фиттинга*, т. е. класс конечных групп, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп и их произведений. Очевидное родство в определениях многообразия и формации приводит к тому, что теория формаций близка в определенных аспектах теории многообразий. Вместе с тем следует отметить, что методы исследований, разработанные в теориях классов Фиттинга и формаций, практически не имеют пересечений с методами теории многообразий.

Особое место в теории классов алгебраических систем занимают исследования операций на классах и сопутствующих им объектов — полугрупп и решеток классов алгебраических систем. Наиболее ярко это проявилось в теории классов групп, в частности, в теории многообразий групп, поскольку теория расширений групп играет определяющую роль в теории расширений алгебраических систем. Было доказано, что полугруппа многообразий свободна, а решетка многообразий групп модулярна и не является дистрибутивной; изучение такой решетки тесно связано с изучением относительно свободных групп. В дальнейшем А.Н. Скибой[14] (см. также[15,16]) было доказано, что *полугруппа всех многообразий вкладывается в полугруппу всех наследственных формаций, а решетка всех локально конечных многообразий вкладывается в решетку всех наследственных формаций.*

Отметим, что первоначально теория классов конечных групп рассматривались исключительно как аппарат исследования непростых конечных

---

[10] Мальцев, А.И. Некоторые вопросы теории классов моделей / А.И. Мальцев // Труды IV Всесоюзн. матем. съезда. Т. 1 : Пленарные докл. / Ленинградский гос. ун-т, Ленинградское математическое общество, Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; под ред. А.Д. Александрова. – Ленинград, 1963. – С. 188–198.

[11] Мальцев, А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики / А.И. Мальцев // Труды Междунар. конгр. математиков : сб. науч. тр. / Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; под ред. И.Г. Петровского. – М. : Мир, 1968. – С. 217–231.

[12] Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1970. – 392 с. – (Соврем. алгебра).

[13] Нейман, Х. Многообразия групп / Х. Нейман. – М. : Мир, 1969. – 264 с.

[14] Скиба, А.Н. О подформациях многообразий алгебраических систем / А.Н. Скиба // Докл. АН БССР. – 1986. – Т. 30, № 1. – С. 9–12.

[15] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

групп[17,18,19,20]. По мере развития такого направления возникла необходимость изучения самих классов (классов Фиттинга, формаций, классов Шунка, классов Локетта и др.) и, в частности, изучения алгебры таких классов, связанной в основном с исследованием полугрупп и решеток классов конечных групп. На этом этапе развития теории классов открылся ее второй прикладной аспект, а именно: в рамках теорий формаций и классов Фиттинга стали успешно разрабатываться методы построения решеток и полугрупп с различными заданными свойствами. И, наконец, следует отметить, что в последние годы появился новый и несколько неожиданный аспект применения теории классов в рамках теории формальных языков[21,22,23].

Особую роль в общей теории решеток и различных ее приложениях играют алгебраические решетки, т. е. решетки, у которых каждый элемент является объединением некоторого множества компактных элементов решетки и решетки, удовлетворяющие каноническим системам тождеств (тождествам модулярности, дистрибутивности, булевости и др.). Это обстоятельство делает особо актуальной задачу нахождения и описания алгебраических решеток классов конечных групп и их тождеств.

В 70–80-х гг. прошлого столетия были получены замечательные результаты, связанные с изучением решеток классов Фиттинга, что дало существенный дальнейший импульс к развитию всей алгебры классов конечных групп

[17] Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1967. – 796 s. – (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete ; Band 134).

[18] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

[19] Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [at all] ; edited by M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishing House, 1982. – 231 p.

[20] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[21] Behle, Ch. An Approach to characterize the Regular Languages in TC^0 with Linear Wires / Ch. Behle, A. Krebs, S. Reifferscheid // Electronic Colloquium on Computational Complexity. – 2009. – Vol. 16, № 85. – P. 1–7.

[22] Ballester-Bolinches, A. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivà // Forum Math. (in Press).

[23] Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivà // Forum Math. (in Press).

вцелом (см. книги[24,20], а также работы[25,26,27,28,29,30]). В частности, Лаушем[31] было установлено, что *решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга изоморфна решетке подгрупп некоторой бесконечной абелевой группы* (и поэтому является алгебраической[32]), которая в теории классов известна как *группа Лауша.*

Следует отметить, что вопрос об алгебраичности решеток формаций, наиболее часто встречающихся в математической практике, был впервые поставлен Б.И. Плоткиным в 1984 году на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного пленарного доклада Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы «Алгебра классов конечных групп». Такая задача была положительно решена А.Н. Скибой в монографии[16] относительно решетки всех насыщенных формаций. В дальнейшем были найдены и другие бесконечные серии алгебраических решеток классов конечных групп и описаны их компактные элементы (см., например,[33,34,35,36]).

В 1986 г. А.Н. Скибой[37] была установлена модулярность решетки всех насыщенных формаций. Впоследствии этот факт нашел много приложений

---

[24] Gaschütz, W. Selected topics in the theory of soluble groups. Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Australian Math. Soc. Notes by J. Looker / W. Gaschütz. – Canberra, 1969.

[20] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[25] Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – S. 337–339.

[26] Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.

[27] Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Bd. 131. – S. 103–115.

[28] Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

[29] Hauck, P. On products of Fitting classes / P. Hauck // J. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 20, № 2. – P. 423–434.

[30] Bryce, R.A. Subgroup closed Fitting classes are formations / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Proc. Cambrige Philos. Soc. – 1982. – Vol. 91. – P. 225–258.

[31] Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.

[32] Курош, А.Г. Общая алгебра (лекции 1969–1970 учебного года) / А.Г. Курош. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1974. – 160 с.

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[33] Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

[34] Шабалина, И.П. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций / И.П. Шабалина // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18. – 2002. – № 5 (14). – С. 59–67.

[35] Сафонов, В.Г. Об алгебраичности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 5. – С. 620–626.

[36] Камозина, О.В. О неоднопорожденных кратно ω-веерных классах Фиттинга конечных групп / О.В. Камозина // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, вып. 3. – С. 396–408.

[37] Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. М.И. Салука. Минск : Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

при исследовании структуры насыщенных формаций[15,16,38]. Поэтому этот результат получил развитие в исследованиях многих авторов. В частности, в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы[15] было доказано, что решетка всех n-кратно насыщенных формаций модулярна при любом n. Позднее Баллестер-Болинше и Л.А. Шеметков[39] установили модулярность решетки всех p-насыщенных формаций. В это же время в монографях[16,40] было соответственно доказано, что решетка всех функторно замкнутых n-кратно насыщенных формаций модулярна, а решетка всех классов Шунка дистрибутивна. А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков[41,33] установили модулярность решеток n-кратно ω-насыщенных формаций и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций. Впоследствии И.П. Шабалина[42] установила модулярность решетки всех функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а В.Г. Сафоновым была доказана модулярность, а затем и дистрибутивность решетки всех тотально насыщенных формаций[43,44,45].

Отметим также, что в работе Го Вэньбиня и К.П. Шама[46] были описаны тотально насыщенные формации с булевой решеткой всех тотально насыщенных подформаций, а в работе Го Вэньбиня[47] получено описание n-кратно насыщенных формаций, у которых решетка всех n-кратно насыщенных подформаций является решеткой с дополнениями.

Отметим наконец, что некоторые из упомянутых выше результатов получили развитие в рамках оригинальной теории расслоенных формаций, по-

---

[15] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[38] Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Science Press/ Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 505).

[39] Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

[40] Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

[41] Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

[33] Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

[42] Шабалина, И.П. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2003. – № 1. – С. 28–30.

[43] Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502.

[44] Сафонов, В.Г. О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Украинский матем. журн. – 2006. – Т. 58, № 6. – С. 852–858.

[45] Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128.

[46] Guo, Wenbin. On totally local formations of groups / Wenbin Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – Vol. 30, № 5. – P. 2117–2131.

[47] Го, Вэньбинь. Об одном вопросе теории кратно локальных формаций / Вэньбинь Го // Сибирский матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1263–1270.

строенной В.А. Ведерниковым и его учениками (см., например[48,49,50]).

Таким образом, в теории групп сформировалось новое активно развивающееся направление, связанное с исследованием алгебры классов конечных групп, которое приводит к необходимости целостного и систематического изучения, анализа алгебраических решеток классов групп и их применения к решению ряда открытых вопросов и проблем, сформулированных в разное время Дерком, Хоуксом, Лаушем, Локеттом, Б.И. Плоткиным, Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой. На реализацию этой актуальной задачи и направлено данное диссертационное исследование.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных программ:

«Структурная теория формаций и других классов алгебр» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь. План утвержден решением Президиума НАН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995 г. (номер госрегистрации в БелИСА – 19963987). Тема выполнялась в 1996–2000 гг.;

– «Структурная теория классов групп и других алгебр» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь. План утвержден решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г. Государственная программа фундаментальных исследований «Математические структуры» (номер госрегистрации в БелИСА – 20011225). Тема выполнялась в 2001–2005 гг.;

– составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова». Задание входило в Государственную программу фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»). Тема входила в план важнейших научно-исследовательских

[48] Ведерников, В.А. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.

[49] Ведерников, В.А. Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга / В.А. Ведерников // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7, № 2. – С. 55–71.

[50] Ведерников, В.А. Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина // Сибирский матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г. (номер госрегистрации в БелИСА 20062003), тема выполнялась в 2006–2010 гг.;

- в рамках составной части задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011–2015 гг. «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы»). Номер госрегистрации в БелИСА – 20111880;

– с 1998 по 1999 гг. автором работы был получен грант аспиранта на выполнение научно-исследовательской работы Министерства образования Республики Беларусь (номер госрегистрации в БелИСА – 19981116);

– с 2001 по 2003 гг. являлся научным руководителем проекта БРФФИ «Решеточные методы в теории классов конечных групп» (договор № Ф00М-073 от 1 апреля 2001 г.);

– в 2007 г. осуществлял научное руководство грантом «Применение методов общей теории решеток при исследовании классов конечных групп», выделенным Министерством образования Республики Беларусь студенту А.А. Цареву. Работа проводилась в рамках ГПФИ «Математические модели 04» задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003);

– с 2008 по 2010 гг. являлся исполнителем по проекту БРФФИ «Решеточные и локальные методы исследования классов конечных групп» (договор с БРФФИ № Ф08М-118 от 01.04.2008 г.);

– с 2010 по 2012 гг. являлся исполнителем по проекту БРФФИ – РФФИ «Распознавание классов конечных групп» (договор с БРФФИ № Ф10Р-231 от 01.05.2010 г.);

– в 2011 году автором работы был получен грант докторанта на выполнение научно-исследовательской работы Министерства образования Республики Беларусь по теме М 11–67 «Алгебраические решетки классов конечных групп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20111009). Начало темы: 1 марта 2011 г., окончание темы: 31 декабря 2011 г.;

– в 2012 году автором работы был получен грант докторанта на выполнение научно-исследовательской работы Министерства образования Республики Беларусь по теме М 12–06 «Решетки и произведения классов конечных групп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20120919). Начало темы: 3 января 2012 г., окончание темы: 31 декабря 2012 г.

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является создание новых методов изучения решеток классов конечных групп и их применение к описанию структуры классов Фиттинга и формаций конечных групп. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

– установить основные свойства решеток классов Фиттинга и формаций, в том числе, булевость подрешеток частично локальных классов Фиттинга (проблема А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова, 1999 г.), индуктивность решетки функторно замкнутых тотально насыщенных формаций (проблема А.Н. Скибы, 1997 г.), дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга (проблема А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова, 1999 г.), сюръективность канонических отображений секций Локетта (проблема Лауша, 1984 г.);

– описать тождества решеток формаций, в том числе, функторно замкнутых частично насыщенных формаций и частично разрешимо насыщенных формаций (проблема А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова, 2000 г.);

– установить алгебраичность решетки функторно замкнутых кратно разрешимо насыщенных формаций (вопрос Б.И. Плоткина, 1984 г.);

– описать прямые разложения классов Фиттинга и формаций посредством атомов решеток;

– исследовать структуру компактных элементов решетки частично насыщенных формаций, в том числе, описать их несократимые факторизации (проблема А.Н. Скибы, 2000 г.).

Объектом исследования являются алгебра классов Фиттинга и алгебра формаций.

Предметом исследования являются решетки классов Фиттинга и формаций и их тождества.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации разработаны новые методы исследования классов конечных групп, на основе которых установлены основные структурные закономерности и свойства алгебры классов групп, включающие в себя:

1. Исследование свойств решеток классов Фиттинга и формаций:

– решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о булевости подрешеток частично локальных классов Фиттинга, теорема 2.2.3 [5-А];

– решение проблемы А.Н. Скибы об индуктивности решетки функторно замкнутых тотально насыщенных формаций, теорема 2.4.1 [4-А];

– решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, теорема 2.4.12 [3-А];

- решение проблемы Лауша о сюръективности канонических отображений секций Локетта, теорема 2.7.8 [16-А];

– решение проблемы Б.И. Плоткина об алгебраичности решетки функторно замкнутых кратно разрешимо насыщенных формаций, теорема 3.6.12 [18-А];

2. Описание тождеств решеток формаций:

– взаимосвязь систем тождеств решеток функторно замкнутых частично насыщенных формаций, теоремы 3.4.1 и 3.4.2 [14-А, 15-А];

– решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о совпадении систем тождеств решеток частично разрешимо насыщенных формаций, теоремы 3.7.13 и 3.7.16 [22-А, 23-А];

3. Описание прямых разложений классов Фиттинга и формаций посредством атомов решеток, теорема 3.2.17 [20-А] и их применение при построении стоуновых решеток с заданными свойствами, теоремы 2.3.1 и 2.3.2 [12-А], теоремы 3.3.2 и 3.3.7 [13-А, 28-А];

4. Исследование структуры компактных элементов решетки частично насыщенных формаций:

– решение проблемы А.Н. Скибы о структуре сомножителей произведения формаций, вложимого в компактный элемент решетки всех насыщенных формаций, теорема 4.1.12 [1-А, 32-А].

Все результаты диссертации впервые получены автором и являются новыми.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты и разработанные в диссертации методы принадлежат соискателю. В совместно опубликованных работах [3-А, 20-А, 18-А, 23-А, 21-А, 24-А, 28-А] результаты получены авторами на равноправных началах.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

– на научном семинаре «Теория групп» под руководством А.Л. Шмелькина, А.Ю. Ольшанского и А.А. Клячко кафедры высшей алгебры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (7 декабря 2012 г., Москва, Россия);

– на научном семинаре «Алгебра и логика» отдела алгебры Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (12 октября 2011 г., Новосибирск, Россия);

– на алгебраическом семинаре университета Наварры (29 марта 2007 г., Памплона, Испания);

– на Киевском алгебраическом семинаре под руководством Ю.А. Дрозда, В.В. Кириченко и А.П. Петравчука кафедры алгебры и геометрии Киевского национального университета имени Тараса Шевченко (24 ноября 2011 г., Киев, Украина);

– на Гомельском алгебраическом семинаре под руководством Л.А. Шеметкова кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»;

– на VIII Белорусской математической конференции (19–24 июня 2000 г., Минск);

– на IV Международной алгебраической конференции, посвященной 60-летию проф. Ю.И. Мерзлякова (7–11 августа 2000 г., Новосибирск, Россия);

– на Международной научной конференции «Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем», посвященной 80-летию проф. В. Гашюца (16–21 октября 2000 г., Гомель);

– на Третьей международной алгебраической конференции в Украине (2–8 июля 2001 г., Сумы, Украина);

– на Украинском математическом конгрессе-2001, «Алгебра и теория чисел», посвященном 200-летию со дня рождения М.В. Остроградского (21–23 августа 2001 г., Киев, Украина);

– на Международной математической конференции, посвященной столетию начала работы Д.А. Граве (1863–1939) в Киевском университете (17–22 июня 2002 г., Киев, Украина);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти З.И. Боревича (17–23 сентября 2002 г., Санкт-Петербург, Россия);

– International Conference "Groups and Group Rings-X" (June 10–14, 2003, Ustron, Poland);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (17–21 мая 2004 г., Москва, Россия);

– на IX Белорусской математической конференции (3–6 ноября 2004 г., Гродно);

– на Пятой международной алгебраической конференции в Украине (20–27 июля 2005 г., Одесса, Украина);

– на Международной алгебраической конференции «Классы групп и алгебр», посвященной 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина (5–7 октября 2005 г., Гомель);

– на V Международной научной конференции «Ломоносовские чтения» (3–5 мая 2006 г., Севастополь, Украина);

– на Шестой международной алгебраической конференции в Украине (1–7 июля 2007 г., Каменец-Подольский, Украина);

– на Международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова (9–11 июля 2007 г., Гомель);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (24–29 сентября 2007 г., Санкт-Петербург, Россия);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша (28 мая–3 июня 2008 г., Москва, Россия);

– на X Белорусской математической конференции (3–7 ноября 2008 г., Минск);

– на Республиканской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (24–25 марта 2009 г., Витебск);

– на Седьмой международной алгебраической конференции в Украине (18–23 августа 2009 г., Харьков, Украина);

– на Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения», посвященной 80-летию со дня рождения Р.И. Тышкевич (19–22 октября 2009 г., Минск);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева (19–24 июня 2010 г., Санкт-Петербург, Россия);

– на IV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной 75-летию заслуженного деятеля науки Российской Федерации профессора В.А. Белоногова (5–10 июля 2010 г., Нальчик, Россия);

– на XI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (16–17 марта 2011 г., Витебск);

– на Международной научно-практической Интернет-конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук Н.Т. Воробьева (21–22 июня 2011 г., Витебск);

– на 8-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной памяти профессора В.М. Усенко (5–12 июля 2011 г., Луганск, Украина);

– на Международной конференции по алгебре и геометрии, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Старостина (22–27 августа 2011 г., Екатеринбург, Россия);

– на Международной конференции «Мальцевские чтения», посвященной 60-летию со дня рождения С.С. Гончарова (11–14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия);

– на Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация», посвященной 100-летию С.Н. Черникова (14–19 мая 2012 г., Екатеринбург, Россия);

– на Международной математической конференции, посвященной 70-летию со дня рождения проф. В.В. Кириченко (13–19 июня 2012 г., Николаев, Украина);

– на Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию С.Н. Черникова (20–26 августа 2012 г., Киев, Украина);

– на XI Белорусской математической конференции (4–9 ноября 2012 г., Минск).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в одной монографии, 32 статьях в научных журналах и в 41 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов — 34,24 авторских листа, в том числе: монография — 16,36 авторских листа, статьи в научных журналах — 15,77 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций — 2,11 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 240 наименований использованных источников и 73 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 223 страницы, из них 19 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному консультанту — доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе за постоянное внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. Используются стандартные определения и обозначения[15,20,41,33].

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка.

Глава 1 «Аналитический обзор литературы» содержит обзор основных литературных источников по теме диссертации. В данной главе приводятся основные этапы развития теорий решеток классов Фиттинга и формаций. На основе проведенного анализа литературы формулируются основные задачи диссертационной работы. Базовым понятием диссертационной работы являются понятие алгебраической решетки. Элемент c полной решетки L называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leqslant \sup_L X_0$. Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как решеточное объединение некоторого множества компактных элементов.

В главе 2 изучаются решетки классов Фиттинга. Напомним, что для каждого множества простых чисел π через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\pi$ и $\mathfrak{N}_p$ обозначают соответственно класс всех групп, класс всех π-групп и класс всех p-групп. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, символ $G_{\mathfrak{F}}$ обозначает произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Пусть $\mathfrak{G}_{\omega d}$ — класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.
Полагают $G_{\omega d} = G_{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{G}_{\omega d}}$, $F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}}$.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$LR_\omega(f) = \big(G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big).$$

---

[15]Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

[20]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[41]Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

[33]Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга с ω-локальной H-функцией* f. Если в приведенном определении $\omega = \mathbb{P}$, то символ ω опускается, и мы получаем определение *локального класса Фиттинга*.

Всякий класс Фиттинга считается *0-кратно ω-локальным*, а при $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга, который n-кратно ω-локален для всех натуральных n, называется *тотально ω-локальным*.

Для произвольной совокупности n-кратно ω-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\vee_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ обозначают пересечение всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, содержащих $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Совокупность l_ω^n всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга относительно включения $\subseteq$ образует полную решетку. В этой решетке

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \quad \text{и} \quad \vee_\omega^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$$

являются, соответственно, точной нижней и точной верхней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из l_ω^n. Символом $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех n-кратно ω-локальных классов Фиттинга, содержащихся в $\mathfrak{F} \in l_\omega^n$.

Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба [2-А]), если:

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и

2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$.

Отметим, что всякая ортогональная система классов Фиттинга (формаций) является ортогональной системой элементов решетки всех классов Фиттинга (решетки всех формаций соответственно) в обычном смысле (см. с. 238 книги[51]).

Следуя[16], для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (в частности, пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$) мы обозначаем совокупность всех групп изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является ортогональной системой классов, и $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Прямые произведения классов групп оказались полезными при решении некоторых открытых вопросов теории классов групп и при построении

[51] Общая алгебра : в 2 т. / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.] ; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1991. – Т. 2. – 480 с. – (Справ. матем. б-ка).

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

классов Фиттинга (формаций) с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим замечательные работы[52,53], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля–Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку в каждой конечной группе и книгу А.Н. Скибы[16], в которой прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых вопросов теории формаций.

А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе[41] была поставлена следующая

Проблема 1. *Описать булевы подрешетки решетки l_ω^n, где $n \geqslant 0$.*

Такое описание получено в разделе 2.2. В частности, доказана

2.2.27 Теорема ([5-А, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – неединичный n-кратно ω-локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ булева;*

2) $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех атомов решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый подкласс Фиттинга, который является атомом решетки $L_\omega^n(\mathfrak{F})$.*

В разделе 2.3 найдены методы построения стоуновых решеток с заданными свойствами в рамках теории кратно локальных классов Фиттинга. Для произвольного n-кратно локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $L^n(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех n-кратно локальных подклассов Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Если же класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально локален, то через $L^\infty(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех его тотально локальных подклассов Фиттинга.

2.3.1 Теорема ([12-А, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L^n(\mathfrak{F})$ стоунова, если класс $\mathfrak{F}$ нильпотентен.*

2.3.2 Теорема ([12-А, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка $L^\infty(\mathfrak{F})$ стоунова, если класс $\mathfrak{F}$ нильпотентен.*

---

[52] Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.

[53] Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[41] Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ сопоставим некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* (в смысле А.Н. Скибы[16]), если

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*[16], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G из $\mathfrak{F}$.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ и пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{1}$$

Функции f вида (1) сопоставляют класс групп

$$LF_{\omega}(f) = \big(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)\big)$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называется ***ω-насыщенной*** или ***ω-локальной формацией*** с ***ω-локальным спутником*** f.[41]

Всякая формация считается *0-кратно ω-насыщенной*, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-насыщенной*[41], если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω-насыщенной*[41], если она n-кратно ω-насыщена для всех целых неотрицательных n.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Спутник f называется *Θ-значным*, если все его значения принадлежат решетке Θ. Символом Θ^{ω_l} обозначают совокупность всех таких формаций, которые обладают ω-локальным Θ-значным спутником. Легко видеть, что Θ^{ω_l} — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ^{ω_l} через $\vee_{\Theta^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ обозначают пересечение всех таких формаций из Θ^{ω_l}, которые содержат $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных спутников. Тогда через $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(a) = \Theta\mathrm{form}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} f_i(a)\Big)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Полная решетка формаций Θ^{ω_l} называется *индуктивной*[16], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \subset \Theta^{\omega_l}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$

---

[16]Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[41]Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

внутренних Θ-значных ω-локальных спутников f_i, где f_i — ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_l}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)).$$

Аналогично определяются индуктивные решетки классов Фиттинга.

Заметим, что индуктивность решетки Θ^{ω_l} по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^{\omega_l}}$ на множестве Θ^{ω_l} можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ.

Ключевым моментом для установления свойства дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга явилось решение следующей проблемы.

Проблема 2 (А.Н. Скиба[16], вопрос 4.1.8). *Индуктивна ли решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ ?*

Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы групп, то *произведение классов* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G \text{ обладает нормальной подгруппой } N \in \mathfrak{F}$$

$$\text{такой, что } G/N \in \mathfrak{H}).$$

Полная решетка формаций (классов Фиттинга) Θ называется *частичной алгеброй формаций* (*классов Фиттинга*), если для любого простого числа p и для любой формации (любого класса Фиттинга) $\mathfrak{F} \in \Theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \Theta$ (соответственно $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p \in \Theta$).

Положительное решение проблемы 2 дает следующая

2.4.1 Теорема ([4-А, теорема]). *Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.*

А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе[41] была сформулирована следующая задача:

Проблема 3. *Дистрибутивна ли решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга?*

Решение такой задачи является одной из главных целей данной диссертации и достигается следующей теоремой, доказанной в разделе 2.4.

2.4.12 Теорема ([3-А, теорема]). *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент отличный от* (1) *и* $\mathfrak{S}$ *не дополняем в ней.*

[16]Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[41]Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Следует отметить, что доказательству этой теоремы предшествует много вспомогательных утверждений, часть из которых имеет и самостоятельное значение. Это прежде всего относится к упомянутой выше теореме 2.4.1.

Отметим, что другими методами проблема 3 была решена позднее в работе Рейфершейд[54].

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \triangleleft G$, $K \subseteq H \subseteq G$ и H/K — p-группа (p — простое число), следует $H \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ класс всех групп G таких, что фактор-группа G по ее $\mathfrak{F}$-радикалу разрешима. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Подгруппа V группы G называется *$\mathfrak{F}$-инъектором* группы G, если $V \cap N$ является максимальной подгруппой группы N среди подгрупп, входящих в $\mathfrak{F}$ для любой субнормальной подгруппы N группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — такие классы Фиттинга, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *$\mathfrak{X}$-нормальным* или *нормальным в классе* $\mathfrak{X}$ и обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор является нормальной подгруппой группы G.

В теории нормальных классов Фиттинга известна следующая

Проблема 4 (Дерк, Хоукс[20], 1992, с. 716). *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ — класс Фиттинга. Является ли решетка классов Фиттинга нормальных в $\mathfrak{X}$ полной?*

Ответ на этот вопрос для частично разрешимого класса Фишера $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$ дает

2.5.5 Теорема ([6-А, теорема 2.1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фишера и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга.*

Заметим, что при $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ — классу всех конечных разрешимых групп из теоремы 2.5.5 следует известный результат Блессеноля–Гашюца[26] о полноте решетки всех разрешимых нормальных классов Фиттинга, который представляет

2.5.6 Следствие (Блессеноль–Гашюц[26]). *Пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга является неединичным разрешимым нормальным классом Фиттинга.*

В 70-е годы XX века в теории конечных разрешимых групп сформировался ряд проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место занимала общая проблема определения

---

[54] Reifferscheid, S. A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Group Theory. – 2003. – Vol. 6, № 3. – P. 331 – 345.

[20] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[26] Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.

структуры класса Фиттинга, известная в теории классов под названием «гипотеза Локетта». Ее возникновение обусловлено основополагающими результатами Блессеноля-Гашюца[26] и Локетта[28], которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: $\mathfrak{S}$-нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Определяющую роль в описании решеточной структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп играют операторы «*» и «$_*$», которые были определены Локеттом[28].

Напомним, что оператор «*» сопоставляет каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ наименьший из классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H, а оператор «$_*$» — класс Фиттинга

$$\mathfrak{F}_* = \cap\{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \text{ — класс Фиттинга и } \mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}.$$

Секцией Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$. Ее обозначают символом $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Следуя[20], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \tag{2}$$

из $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{H})$ в $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$. Для $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных разрешимых и класс всех конечных групп соответственно, отображение (2) является сюръективным (см. предложение 6.1 главы X книги[20]); другими словами, секция Локетта $\mathfrak{S}$ определяется секцией Локетта $\mathfrak{G}$. В работе[28] Локетт поставил проблему: *верно ли, что отображение* (2) *сюръективно всегда, когда* $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$? Впоследствии эту проблему стали называть гипотезой Локетта.

Примечателен тот факт, что первоначально были построены сюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной следующими отдельными случаями локального класса Фиттинга: наследственного[55] (Брайс, Косси; 1975), классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$[56] (Бейдлеман, Хаук; 1979), классов с постоянной H-функцией,

---

[26] Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. - 1970. - Bd. 118. - S. 1-8.

[28] Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. - 1974. - Bd. 137, № 2. - S. 131-136.

[20] Doerk. K. Finite Soluble Groups / K. Doerk. T. Hawkes. Berlin - New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. - 891 p. - (De Gruyter Expo. Math.. vol. 4).

[55] Bryce, R.A. A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. - 1975. - Bd. 141. № 2. - S. 99-110.

[56] Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. - 1979. - Bd. 167. № 2. - S. 161-167.

т. е. классов вида $\mathfrak{X}\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_i'}\right)$[20] (Дерк, Хоукс; 1992). Для произвольных локальных классов Фиттинга указанное отображение было построено в 1988 году Н.Т. Воробьевым[57].

В связи с этим актуальна задача отыскания нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, т. е. таких нелокальных классов Фиттинга, в решетку секции Локетта которых сюръективно отображается решетка всех нормальных классов Фиттинга.

Вместе с тем, Бергер и Косси[58] построили пример нелокального класса Фиттинга, который не удовлетворяет гипотезе Локетта (см., например, пример 6.16 главы X книги[20]. Кроме примера Бергера-Косси[58] до настоящего времени не был известен ни один из классов Фиттинга, для которого гипотеза Локетта была бы неверна. Заметим также, что Бейдлеманом и Хауком[56] поставлена проблема отыскания других примеров классов Фиттинга, не удовлетворяющих гипотезе Локетта:

существуют ли другие несюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, класса Фиттинга?

Напомним, что оригинальный вопрос Локетта был расширен Дерком и Хоуксом[20] следующим образом:

Обобщенная гипотеза Локетта. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если отображение* (2) *из* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{H})$ *в* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ *сюръективно.*

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы будем называть *$\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$-классом.* Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, то $\mathcal{L}_{\mathfrak{H}}$-класс назовем просто *$\mathcal{L}$-классом.* Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathcal{L}$-классом, то мы будем называть его *$\overline{\mathcal{L}}$-классом.*

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то через $\mathfrak{F}\vee\mathfrak{H}$ обозначают пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}\cup\mathfrak{H}$.

В разделе 2.6 мы используем операцию решеточного объединения «$\vee$» для определения нового достаточно широкого семейства классов Фиттинга, которое, в частности, содержит все локальные классы Фиттинга. Более того, для таких классов нами подтверждена гипотеза Локетта.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга с условием Локетта*

[20] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. - Berlin – New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. - 891 p. - (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[57] Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. - 1988. - Т. 43, вып. 2. - С. 161–168.

[58] Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.

[56] Beidleman, J.C. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. - Bd. 167, № 2. - S. 161–167.

в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$[59], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_*$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{X}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда для $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. *Характеристику класса* $\mathfrak{X}$ определяют следующим образом:

$$\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } Z_p \in \mathfrak{X}\}.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. Тогда:

1) *класс* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α_i) для $i \in I$, если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{G}_{\pi'(i)} \cap \mathfrak{X}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{G}_{\pi(i)} = \mathfrak{X}$.

2) *класс* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α), если $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию (α_i) для всех $i \in I$.

Основным результатом раздела 2.6 является следующая теорема и следствие, которые доказаны в универсуме $\mathfrak{S}^\pi$ всех конечных π-разрешимых групп.

2.6.11 Теорема ([1-А, теорема 3.6.11];[31-А, теорема 2]). *Каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$, *удовлетворяющий условию* (α) *и содержащийся в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$, *является классом Фиттинга с условием Локетта в классе* $\mathfrak{H}$.

2.6.12 Следствие ([1-А, 31-А]). *Каждый класс Локетта* $\mathfrak{F}$ *с условием* (α) *в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

В разделе 2.7 найдены p-локальные $\mathcal{L}$-классы, которые не являются классами Локетта.

2.7.3 Теорема ([16-А, теорема 1]). *Пусть* $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$. *Тогда* $\mathfrak{Y}$ *p-локальный класс Фиттинга, который не является классом Локетта, и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$ *сюръективно.*

Помимо этого в разделе 2.7 найдены новые примеры несюръективных отображений решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта класса Фиттинга.

Символом $\mathfrak{B}$ будем обозначать класс Бергера Косси[58].

2.7.4 Теорема ([16-А, теорема 2]). *Существует такое простое p, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку сек-*

[59]Савельева, Н.В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411–1419.

[58]Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.

ции Локетта p-локального класса Фиттинга $\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ не является сюръективным.

Галлего[60] было построено сюръективное отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{G})$ в решетку секции Локетта произвольного локального класса Фиттинга.

Все полученные ранее результаты, подтверждающие гипотезу Локетта, включает как следствия

2.7.5 Теорема ([16-А, теорема 3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс Фиттинга. Если* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, *то отображение решетки* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ *в решетку* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ *сюръективно.*

Напомним, что в «Коуровской тетради»[61] под номером 8.30 помещена

Проблема 4 (Лауш, 1982). *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_*$ и $\mathfrak{H}_* = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{S}_*$. Верно ли, что $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*$?*

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, из общего результата, описывающего широкие семейства классов Фиттинга с условием Локетта (теорема 2.7.5), получаем следствие, которое дает утвердительный ответ на проблему 4 для частично локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

2.7.8 Следствие ([16-А]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-локальные классы Фиттинга, характеристики которых содержатся в ω. Тогда*

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*.$$

Третья глава диссертации «Решетки формаций» посвящена описанию основных свойств решеток формаций. Основной результат раздела 3.2 — описание булевых подрешеток функторно замкнутых кратно частично насыщенных формаций.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — подформации формации $\mathfrak{F}$ и τ — подгрупповой функтор. Тогда $\mathfrak{H}$ называют *τ-дополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$*, если $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая подформация. Здесь символом $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Подформация формации $\mathfrak{F}$ называется *τ-дополняемой в $\mathfrak{F}$*, если к ней имеется τ-дополнение в $\mathfrak{F}$.

[60] Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. 1996. – Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.

[61] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики СО АН СССР ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : изд-во Института математики СО АН СССР, 1990. – 126 с.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Используя конструкцию прямого разложения класса групп, нами доказана следующая

3.2.17 Теорема ([20-А, теорема]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ булева;*

2) $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *набор всех атомов решетки* $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$;

3) *в $\mathfrak{F}$ τ-дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$.*

Заметим, что специальными случаями указанной теоремы являются соответствующие результаты В.А. Ведерникова[62], Го Вэньбиня[38], Н.Г. Жевновой[63], А.Н. Скибы[64,16] и М.И. Эйдинова[65] которые приведем в качестве следствий.

Развитая в разделе 3.2 техника исследований булевых решеток и теория прямых разложений формаций используются в разделе 3.3 для описания стоуновых решеток формаций.

Пусть L — решетка с нулем. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a ($\in L$), если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует, что $x \leqslant a^*$. Решетка с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Напомним, что дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1,$$

называется *стоуновой решеткой*. Описание стоуновых решеток функторно замкнутых кратно насыщенных формаций представляет

---

[62]Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – Минск : изд-во «Университетское», 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.

[38]Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London : Science Press/ Kluwer Academic Publishers, 2000. – 261 p. – (Mathematics and Its Applications ; vol. 505).

[63]Жевнова, Н.Г. p-Насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 5 (420). – С. 23–29.

[64]Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба / Известия вузов. Сер. Математика. – 1994. – № 10 (389). – С. 75–80.

[16]Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[65]Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // IX Всесоюзн. симпозиум по теории групп : тезисы докл., Москва, 18–20 сентября 1984 г. / Московский гос. педаг. ин-т им. В.И. Ленина. Ин-т математики им. В.А. Стеклова АН СССР ; оргкомитет (пред.) : Л.Я. Куликов [и др.]. – М., 1984. – С. 101.

3.3.2 Теорема ([28-А, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна.*

Для функторно замкнутых тотально насыщенных формаций имеет место

3.3.7 Теорема ([28-А, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ нильпотентна.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то получаем следующее утверждение.

3.3.8 Следствие ([13-А, теорема 2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Поскольку решетка всех τ-замкнутых формаций модулярна для любого подгруппового функтора τ, то возникает следующий естественный вопрос:

является ли решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций подрешеткой решетки всех τ-замкнутых формаций?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема раздела 3.4.

3.4.1 Теорема ([14-А, теорема 2];[19-А, теорема]). *Пусть ω – множество простых чисел, $m > n \geqslant 0$, где m и n – целые числа и $|\omega| > 1$. Тогда решетка всех τ-замкнутых m-кратно ω-насыщенных формаций не является подрешеткой решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.*

Таким образом, ответ на вышеупомянутый вопрос отрицателен.

Напомним, что полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Вопрос об алгебраичности решеток формаций, наиболее часто встречающихся в математической практике, был впервые поставлен Б.И. Плоткиным в 1984 году на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного пленарного доклада Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы «Алгебра классов конечных групп». Такая задача была положительно решена А.Н. Скибой в монографии[16] для решетки всех насыщенных формаций. В дальнейшем были найдены и другие бесконечные серии алгебраических решеток классов конечных групп и описаны их компактные эле-

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

менты (см., например,[33,34,35,36]). Вопрос Б.И. Плоткина в классе τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций представляет

Проблема 6. *Является ли решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций алгебраической?*

Напомним, что разделе 2.4 доказана алгебраичность решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга (теорема 2.4.12). Дополняя этот результат, мы доказываем в разделе 3.5 следующий факт, из которого вытекает положительный ответ на вопрос Б.И. Плоткина.

3.5.12 Теорема ([18-А, теорема 3.1]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций алгебраична и модулярна.*

Отметим, что эта теорема усиливает соответствующий результат работы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова[33].

В заключительной четвертой главе диссертации «Тождества и компактные элементы решеток» получено описание тождеств и компактных элементов решеток насыщенных и разрешимо насыщенных формаций.

В теории классов групп известен результат о том, что решетка всех насыщенных формаций модулярна[15]. В дальнейшем этот результат был развит в различных направлениях. В книге[16] была установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций для каждого подгруппового функтора τ; в работе[39] А. Баллестером-Болинше и Л.А. Шеметковым показано, что решетка всех p-насыщенных формаций модулярна; А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков доказали[41,33] модулярность решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, соответственно; И.П. Шабалина доказала[42] модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

---

[33] Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

[34] Шабалина, И.П. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций / И.П. Шабалина // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры 18. – 2002. – № 5 (14). – С. 59–67.

[35] Сафонов, В.Г. Об алгебраичности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 5. – С. 620–626.

[36] Камозина, О.В. О неоднопорожденных кратно ω-веерных классах Фиттинга конечных групп / О.В. Камозина // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, вып. 3. – С. 396–408.

[15] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

[16] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[39] Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

[41] Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

[42] Шабалина, И.П. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-матэм. навук. – 2003. – № 1. – С. 28–30.

Ввиду модулярности решетки всех формаций[37] следующая теорема 4.1.1 показывает, что все вышеназванные результаты являются проявлением лишь одной закономерности и вытекают из нее.

4.1.1 Теорема ([14-А, 15-А, теорема 1]). *Пусть $n > 0$. Тогда всякое тождество решетки всех τ-замкнутых формаций справедливо в решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.*

Отметим основные следствия из теоремы 4.1.1.

4.1.10 Следствие (А.Н. Скиба[37]). *Решетка всех насыщенных формаций является модулярной.*

4.1.11 Следствие (Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба[15]). *Решетка всех n-кратно насыщенных формаций является модулярной.*

4.1.12 Следствие (Баллестер-Болинше, Л.А. Шеметков[39]). *Решетка всех p-насыщенных формаций является модулярной.*

4.1.13 Следствие (А.Н. Скиба[16]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является модулярной.*

4.1.14 Следствие ([14-А, 15-А]). *Решетка всех ω-насыщенных формаций является модулярной.*

4.1.15 Следствие (И.П. Шабалина[42]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций является модулярной.*

Следующая теорема даст дальнейшую информацию о решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

4.1.2 Теорема ([14-А, теорема 3];[15-А, теорема 2]). *Пусть $n > 0$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решетки всех τ-замкнутых формаций и решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают.*

В монографии[16] А.Н. Скиба доказал, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ-замкнутых m-кратно насыщенных формаций и у решетки

[37] Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. М.И. Салука. – Минск : Наука и техника. 1986. – С. 135–149.

[15] Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

[39] Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

[16] Скиба. А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. - 240 с.

[42] Шабалина, И.П. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2003. - № 1. – С. 28–30.

всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее Го Вэньбинь и А.Н. Скиба[66] показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [15 А] этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Если $k \in \{0\} \cap \mathbb{N}$, то символом c_k^ω обозначают решетку всех k-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций.

Среди открытых задач в указанном направлении исследований известен следующий вопрос, поставленный А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе[33]:

Проблема 7. *Верно ли, что для любых целых неотрицательных m, n и произвольного непустого множества простых чисел ω у решеток c_m^ω и c_n^ω системы тождеств совпадают?*

В разделе 4.2 данная проблема решена в случае бесконечного множества простых чисел ω.

4.2.16 Теорема ([22-А, 23-А, теорема 2]). *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решеток всех формаций c_0^ω и всех n-кратно разрешимо ω-насыщенных формаций c_n^ω совпадают.*

Разделы 4.3 и 4.4 раскрывают новый аспект применения алгебраических решеток для описания структуры формаций — здесь исследовано вложение формаций и произведений формаций в компактные элементы решеток формаций. В разделе 4.3 такая задача реализуется для ω-насыщенных формаций. Доказана

4.3.3 Теорема ([1-А, теорема 4.8.3]). *Всякая разрешимо ω-насыщенная формация, вложимая в компактный элемент решетки всех ω-насыщенных формаций, вкладывается также в некоторый компактный элемент решетки всех разрешимо ω-насыщенных формаций.*

При $\omega = \mathbb{P}$ получаем

4.3.4 Следствие. *Всякая разрешимо насыщенная формация, вложимая в компактный элемент решетки всех насыщенных формаций, вкладывается также в некоторый компактный элемент решетки всех разрешимо насыщенных формаций.*

---

[66] Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5 (480). – С. 14–22.

[33] Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

Основной результат в этом направлении исследований получен в разделе 4.4.

Вначале напомним, что *факторизацией* формации $\mathfrak{F}$ называется представление $\mathfrak{F}$ в виде произведения

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t \quad (t \geqslant 2)$$

некоторых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$. Факторизацию $\mathfrak{F}$ называют *несократимой*, если

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$$

при любом $i \in \{1, ..., t\}$.

В 2000 году на Гомельском алгебраическом семинаре А.Н. Скибой была сформулирована следующая

Проблема 8. *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – формационное произведение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, и эта факторизация $\mathfrak{R}$ несократима. Предположим, что $\mathfrak{R}$ вложимо в некоторый компактный элемент решетки всех наследственных насыщенных формаций. Верно ли, что формация $\mathfrak{M}$ разрешима?*

При некоторых дополнительных ограничениях на $\mathfrak{R}$ (например, если $\mathfrak{R}$ насыщенная (А.Н. Скиба, 1992, 1997); разрешимо насыщенная (Го Вэньбинь, А.Н. Скиба, К.П. Шам, 2000, 2001, 2003); разрешимо ω-насыщенная (Го Вэньбинь, В.М. Селькин, К.П. Шам, 2007); $\mathfrak{X}$-насыщенная формация (А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Р. Эстебан-Ромеро, 2004, 2009) и др.) ответ на этот вопрос положителен.

Полное решение проблемы 8 дает

4.4.12 Теорема ([1-А, теорема 2.2.12]; [32-А, теорема, с. 1088]). *Пусть произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ вложимо в компактный элемент решетки всех наследственных насыщенных формаций. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любая простая группа в $\mathfrak{M}$ абелева;*

2) *если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ разрешима.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации разработаны новые методы исследования решеток классов конечных групп и найдены их применения к решению проблем описания структуры классов Фиттинга и формаций. Основные результаты диссертации следующие.

Во второй главе устанавливаются основные свойства решеток классов Фиттинга.

В разделе 2.2 получено полное описание булевых подрешеток частично локальных классов Фиттинга, теорема 2.2.3 [5-А]. Данный результат дает положительное решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова (проблема 1). Посредством атомов решеток описаны прямые разложения классов Фиттинга.

Эти результаты применяются в разделе 2.3 для описания свойства стоуновости решеток классов Фиттинга, теоремы 2.3.1 и 2.3.2 [12-А].

В разделе 2.4 выявлены свойства индуктивности (решение проблемы А.Н. Скибы (проблема 2)) и дистрибутивности решеток классов Фиттинга. В частности, доказано, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является алгебраической и дистрибутивной, теорема 2.4.12 [3-А]. Это дает утвердительный ответ на проблему А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова (проблема 3) и позволяет применить результаты общей теории решеток при описании структуры классов групп.

Раздел 2.6 посвящен установлению сюръективности канонических отображений секций Локетта, теорема 2.7.5 [16-А], что позволяет описать в терминах радикалов общую структуру новых бесконечных семейств классов Фиттинга посредством подтверждения для них гипотезы Локетта, а также дает утвердительный ответ на проблему Лауша (проблема 5) для частично локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

В третьей главе диссертации установлены основные свойства решеток формаций.

В разделах 3.2 и 3.3 доказаны свойства булевости и стоуновости решеток функторно замкнутых частично насыщенных формаций и основной результат здесь – описание прямых разложений таких формаций посредством атомов решеток и их применение для доказательства свойства стоуновости, теоремы 3.3.2 и 3.3.6 [13-А, 28-А], теорема 3.2.17 [20-А].

В разделе 3.5 получено положительное решение проблемы Б.И. Плоткина (проблема 6) – доказана алгебраичность решетки функторно замкнутых кратно разрешимо насыщенных формаций, теорема 3.5.12 [18-А]. Таким образом, такая решетка является компактно порожденной, а однопорожденные функторно замкнутые кратно разрешимо насыщенные формации являются ее компактными элементами.

Одно из важных направлений теории решеток классов — описание тождеств и компактных элементов решеток формаций, представлено в четвертой главе диссертации.

В разделах 4.1 и 4.2 получено полное описание тождеств решеток функторно замкнутых насыщенных формаций, теоремы 4.1.1 и 4.1.2 [14-А, 15-А] и частично разрешимо насыщенных формаций, теоремы 4.2.13 и 4.2.16 [22-А, 23-А], что дает положительное решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о тождествах (проблема 7).

Заключительные разделы четвертой главы диссертации посвящены описанию структуры компактных элементов решетки частично насыщенных формаций. Основной результат здесь — положительное решение проблемы А.Н. Скибы (проблема 8), теорема 4.3.12 [1-А, 32-А], где получено описание структуры сомножителей произведения формаций, вложимого в компактный элемент решетки всех насыщенных формаций.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при построении алгебраических, модулярных, дистрибутивных, булевых и стоуновых решеток групп, в вопросах классификации конечных групп по свойствам классов групп, порожденных ими, в дальнейших исследованиях по теории классов конечных групп и других алгебраических систем, проводимых в Белорусском государственном университете, в Гомельском, Витебском, Брестском, Полоцком госуниверситетах; в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Новосибирском государственном университете, Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко; в унивеверситете Науки и Технологии Китая; университетах Памплоны, Сарагоссы и Валенсии (Испания); университетах Тюбингена и Майнца (Германия).

Отметим, что основные результаты диссертации опубликованы либо в англоязычных [6-А, 15-А, 19-А, 32-А, 33-А], либо российских и украинских переводных журналах [3-А, 12-А, 16-А, 17-А, 18-А, 23-А, 27-А], что делает их доступными для использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами.

Результаты диссертации могут быть использованы при изучении решеток и полугрупп классов алгебраических систем, при исследовании алгебры классов конечных групп, в теории формальных языков, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Алгебра классов конечных групп : монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

Статьи в научных журналах

2-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.

3-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.

4-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.

5-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.

6-A. SHPAKOV, V.V. On intersection of normal Fitting classes of finite groups / V.V. Shpakov, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae. – 2003. – Vol. 30. – P. 167–171.

7-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Об одном свойстве порожденных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (17). – С. 35–38.

8-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О решёточных свойствах разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 4. – С. 12–14.

9-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О свойствах разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2006. – № 2 (40). – С. 116–120.

10-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2007. – № 2 (44). – С. 105–108.

11-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Отделимые решетки тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 25–28.

12-А. SKIBA, A.N. On Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – № 4. – P. 138–146.

13-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О кратно локальных формациях со стоуновой решеткой подформаций / Н.Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 23–27.

14-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О тождествах решеток частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 15–18.

15-А. SHEMETKOV, L.A. On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.

16-А. ЗАЛЕССКАЯ, Е.Н. О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Сибирский матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1319–1327.

17-А. MEKHOVICH, A.P. Hall operators on the set of formations of finite groups / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Algebra and discrete mathematics. – 2010. – Vol. 9, № 1. – P. 72–78.

18-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.

19-А. SHEMETKOV, L.A. On lattices of formations of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra Colloquium. – 2010. – Vol. 17, № 4. – P. 557–564.

20-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О булевых решетках частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, В.О. Побойнев // Весці НАН Беларусі. – 2010. – № 4. – С. 37–42.

21-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О прямых разложениях n-кратно ω-насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 48–51.

22-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О тождествах решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 10–14.

23-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журн. – Т. 22, № 5. – С. 1011–1024.

24-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Об одном классе прямо разложимых обобщенно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 34–38.

25-А. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.

26-А. Воробьев, Н.Н. О тождествах решеток функторно замкнутых частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 23–27.

27-А. Воробьев, Н.Н. О прямых произведениях классов конечных групп / Н.Н. Воробьев // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 67–74.

28-А. Воробьев, Н.Н. О стоуновых решетках кратно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 4 (70). – С. 20–23.

29-А. Воробьев, Н.Н. Композиционные формации с условием дополняемости / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2012. – № 5 (71). – С. 15–18.

30-А. Воробьев, Н.Н. О произведениях формаций, вложимых в однопорожденную насыщенную формацию / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 21–24.

31-А. Воробьев, Н.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами решеточных объединений / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 27–30.

32-А. Vorob'ev, N.N. On factorizations of subformations of one-generated saturated finite varieties / N.N. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2013. – Vol. 41, № 3. – P. 1087–1093.

33-А. Tsarev, A.A. On a question of the theory of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Algebra Colloquium. – 2013. – Vol. 21, № 4. – P. 357–364.

Тезисы докладов конференций

34-А. Воробьев, Н.Н. О свойствах порожденных локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // VIII Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф., Минск, 19–24 июня 2000 г. / Белорусск. матем. общ-во, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси, Госкомитет по науке и технологиям, Мин-во обр. Республики Беларусь. – Минск, 2000. – Ч. 2. – С. 25.

35-А. Skiba, A.N. Multiply local Fitting classes with Stone lattice of multiply local Fitting subclasses / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Proceedings of IV International Conference on Algebra dedicated to the 60th Birthday of prof. Yu.I. Merzlyakov, Novosibirsk, Russia, August 7–11, 2000 / Sobolev Institute of

Mathematics, Siberian Branch of Russian Academy of Scinces ; V.G. Bardakov, editor. – Novosibirsk, 2000. – P. 131.

36-A. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О решетках нормальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Гашюцова теория классов групп и др. алгебраических систем : тез. докл. междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию проф. В. Гашюца, Гомель, 16–21 октября 2000 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; под общ. ред. Л.А. Шеметкова. – Гомель, 2000. – С. 16–17.

37-A. VOROB'EV, N.N. On Lausch's question in the theory of normal Fitting classes / N.N. Vorob'ev // 3d International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts, Sumy, July 2–8, 2001 / Sumy Makarenko State Pedagogical University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; V.V. Kirichenko, editor. – Sumy, 2001. – P. 51.

38-A. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О пересечении $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Алгебра и теория чисел : тез. докл. Украинск. математич. конгресса–2001, посвящ. 200-летию со дня рождения М.В. Остроградского, Киев, 21–23 августа 2001 г. / Ин-т математики НАН Украины. – Киев, 2001. – Секция 1. – С. 18.

39-A. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О полных решетках локально нормальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Труды Междунар. математич. конф., посвящ. столетию начала работы Д.А. Граве (1863–1939) в Киевском ун-те : тез. докл., Киев, 17–22 июня 2002 г. / Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Ин-т математики НАН Украины ; редкол.: В.В. Кириченко [и др.]. – Киев, 2002. – С. 76–77.

40-A. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$-инъекторов частично разрешимых групп / Н.Н. Воробьев // Междунар. алгебр. конф., посвящ. памяти З.И. Боревича : тез. докл., Санкт-Петербург, 17–23 сентября 2002 г. / Санкт-Петербургск. гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математич. ин-та им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Междунар. математич. институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербургск. математич. общ-во, ТПО «Северный очаг». – СПб., 2002. – С. 25–26.

41-A. VOROB'EV, N.N. Lattices of Fitting classes / N.N. Vorob'ev // International Conference «Groups and Group Rings-X» : Abstracts, Ustron, Poland, June 10–14, 2003 / Silesian University of Tekhnology ; W. Golubowsky, editor. – Ustron, 2003. – P. 54–55.

42-A. VOROB'EV, N.N. $\mathfrak{G}$-Separability of the lattices of Fitting classes / N.N. Vorob'ev // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Московского ун-та и 75-летию кафедры высшей алгебры : тез. докл., Москва, 17–21 мая

2004 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – М., 2004. – С. 301–302.

43-А. Воробьев, Н.Н. О решетке локально нормальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, Н.Т. Воробьев // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф., Гродно, 3–6 ноября 2004 г. : в 3 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Белорусск. матем. общ-во, Ин-т математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т, Гродненский гос. ун-т им. Янки Купалы ; ред. комитет : Ю.С. Харин [и др.]. – Гродно, 2004. – Ч. 2. – С. 29.

44-А. Vorob'ev, N.N. On the lattice of soluble totally ω-local Lockett's classes / N.N. Vorob'ev // 5th International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts, Odessa, July 20–27, 2005 / Odessa I.I. Mechnikov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Odessa A.S. Popov National Academy of Telecommunications, Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University ; V.V. Kirichenko, editor. – Odessa, 2005. – P. 151.

45-А. Воробьев, Н.Н. Об $\mathfrak{S}$-отделимости решетки разрешимых тотально ω-локальных классов Локетта / Н.Н. Воробьев // Классы групп и алгебр : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 октября 2005 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси, Луганский национальный педагогический ун-т им. Тараса Шевченко ; редкол. : Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 51–52.

46-А. Воробьев, Н.Н. О решетке разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Ломоносовские чтения : материалы V Междунар. научн. конф. «Ломоносов–2006», Севастополь, 3–5 мая 2006 г. / Черноморский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова ; редкол.: В.А. Трифонова [и др.]. – Севастополь, 2006. – С. 53–54.

47-А. Skiba, A.N. Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // 6th International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts, Kamyanets-Podilsky, July 1–7, 2007 / Odessa I.I. Mechnikov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Odessa A.S. Popov National Academy of Telecommunications, Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University ; V.V. Kirichenko, editor. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 194–195.

48-А. Mekhovich, A.P. Local formations defined by Hall subgroups / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev // Классы групп, алгебр и их приложения : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июля 2007 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.С. Монахов (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 20–21.

49-А. TSAREV, A.A. On generated Fischer formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Классы групп, алгебр и их приложения : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июля 2007 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.С. Монахов (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 31–32.

50-А. TSAREV, A.A. Generated Fischer formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева : тез. докл., Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 г. / Санкт-Петербургск. гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математич. ин-та им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Междунар. математич. институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербургск. математич. общ-во. – СПб., 2007. – С. 166–167.

51-А. MEKHOVICH, A.P. τ-closed local formations defined by Hall subgroups / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева : тез. докл., Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 г. / Санкт-Петербургск. гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математич. ин-та им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Междунар. математич. институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербургск. математич. общ-во. – СПб., 2007. – С. 138–139.

52-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. Об одном свойстве формаций Фишера / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС – 2006» : в 2 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь. – Минск, 2007. – Ч. I. – С. 15–17.

53-А. SHEMETKOV, L.A. On lattices of ω-saturated formations of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая–3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; оргком.: Э.Б. Винберг [и др.]. Прогр. ком.: В.А. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 354–355.

54-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О холловых операторах π-разрешимых формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая–3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; оргком.: Э.Б. Винберг [и др.]. Прогр. ком.: В.А. Артамонов [и др.]. – Москва, 2008. – С. 64–65.

55-А. ВОРОБЬЕВ, Н.Н. О решетках формаций конечных групп / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // X Белорусская матем. конф.:

тез. докл. междунар. научн. конф., Минск. 3–7 ноября 2008 г. : в 2 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 16–17.

56-А. Воробьев, Н.Н. О решеточных свойствах классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, Е.Н. Залесская // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. научн. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. : в 2 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 30–31.

57-А. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // III Машеровские чтения : материалы респ. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 марта 2009 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.Л. Гладков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2009. – Математика. Информатика. Философия. Экономика. Юриспруденция. – С. 22–24.

58-А. Skiba, A.N. On one property of the lattice of all n-multiply ω-composition formations / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // 7th International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts of talks, Kharkov, August 18–23, 2009 / Karazin Kharkov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; G.N. Zholtkevich, editor. – Kharkov, 2009. – P. 133.

59-А. Воробьев, Н.Н. Об индуктивности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения Р.И. Тышкевич, Минск, 19–22 октября 2009 г. / Ин-т матем. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В.В. Лепин [и др.]. – Минск, 2009. – С. 16.

60-А. Tsarev, A.A. Algebraic lattices of formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Междунар. алгебраической конф., посв. 70-летию А.В. Яковлева : тез. докл., Санкт-Петербург, 19–24 июня 2010 г. / Санкт-Петербургский гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математич. ин-та им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Междунар. математич. институт им. Л. Эйлера, Фонд Эйлера, Санкт-Петербургск. математич. общ-во ; под ред. А.И. Генералова. – СПб., 2010. – С. 160–161.

61-А. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки $\mathfrak{X}$-локальных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // IV Междунар. школа-конференция по теории групп, посвящ. 75-летию заслуж. деятеля науки РФ проф. В.А. Белоногова : тез. докл. междунар. научн. конф., Нальчик. 5–10 июля 2010 г. / Кабардино-Балкарский гос. ун-т, Институт математики и меха

ники УрО РАН ; оргком.: В.В. Кабанов (председ.) [и др.]. Програм. ком.: А.А. Махнев (председ.) [и др.]. – Нальчик, 2010. – С. 48.

62-А. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16–17 марта 2011 г. : в 2 т. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред) [и др.]. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 51–53.

63-А. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Инновационные технологии обучения физ.-матем. дисциплинам : материалы междунар. научно-практ. Интернет-конф., посвящ. 60-летию доктора физ.-мат. наук Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: Л.А. Шеметков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – С. 25–27.

64-А. Воробьев, Н.Н. О решетке частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Инновационные технологии обучения физ.-матем. дисциплинам : материалы междунар. научно-практ. Интернет-конф., посвящ. 60-летию доктора физ.-мат. наук Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Витебск. гос. ун-т ; редкол.: Л.А. Шеметков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – С. 27–28.

65-А. Mekhovich, A.P. On direct decompositions of partially saturated formations / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko : Book of abstracts, Lugansk, July 5–12, 2011 / Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; Yu.A. Drozd, V.V. Kirichenko, B.V. Novikov, editors. – Lugansk, 2011. – P. 115.

66-А. Skiba, A.N. On laws of lattices of partially composition formations / A.N. Skiba, A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko : Book of abstracts, Lugansk, July 5–12, 2011 / Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; Yu.A. Drozd, V.V. Kirichenko, B.V. Novikov, editors. – Lugansk, 2011. – P. 133.

67-А. Tsarev, A.A. On separated lattices of partially composition formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko : Book of abstracts, Lugansk, July 5–12, 2011 / Lugansk Taras Shevchenko National

Pedagogical University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; Yu.A. Drozd, V.V. Kirichenko, B.V. Novikov, editors. – Lugansk, 2011. – P. 136.

68-A. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Алгебра и геометрия : тез. докл. Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящ. 80-летию со дня рождения А.И. Старостина : сб. тез. докл., Екатеринбург, 22–27 августа 2011 г. / Институт математики и механики УрО РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; оргком.: А.А. Махнев (председ.) [и др.]. – Екатеринбург, 2011. – С. 43–45.

69-A. Воробьев, Н.Н. Решетки формаций и классов Фиттинга конечных групп / Н.Н. Воробьев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения», посвящ. 60-летию со дня рождения С.С. Гончарова : тез. докл., Новосибирск, 11–14 октября 2011 г. / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский гос. ун-т. – Новосибирск, 2011. – С. 35.

70-A. Tsarev, A.A. On a question of A.N. Skiba / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Алгебра и линейная оптимизация : тез. докл. Междунар. конф. «Алгебра и линейная оптимизация», посвящ. 100-летию С.Н. Черникова, Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г. / Институт математики и механики УрО РАН ; оргком.: И.И. Еремин (председ.), А.А. Махнев (сопредсед.) [и др.]. – Екатеринбург, 2012. – С. 169–171.

71-A. Воробьев, Н.Н. О стоуновых решетках кратно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Междунар. матем. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения проф. В.В. Кириченко : тез. докл., Николаев, 13–19 июня 2012 г. / Мин-во обр. и науки, молодежи и спорта Украины, Институт математики НАН Украины, Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Николаевский национальный ун-т им. В.А. Сухомлинского ; редкол.: Ю.А. Дрозд (гл. ред.) [и др.]. – Николаев, 2012. – С. 84.

72-A. Vorob'ev, N.N. On Lockett condition in the class of all finite π-soluble groups / N.N. Vorob'ev // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov : Book of abstracts, Kyiv, August 20–26, 2012 / Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv Taras Shevchenko National University, Dragomanov National Pedagogical University ; Org. com.: V. Andrushchenko (chairman) [and others]. Progr. com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. – Kyiv, 2012. – P. 171.

73-A. Mekhovich, A.P. On lattices p-composition formations / A.P. Mekhovich, N.N. Vorob'ev // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov : Book of abstracts, Kyiv,

August 20–26, 2012 / Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv Taras Shevchenko National University, Dragomanov National Pedagogical University ; Org. com.: V. Andrushchenko (chairman) [and others]. Progr. com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. – Kyiv, 2012. – P. 93.

74-А. Воробьев, Н.Н. Частично композиционные формации с условием дополняемости / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // XI Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. научн. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 5. – С. 17–18.

РЭЗЮМЭ

Вараб'ёў Мікалай Мікалаевіч

Алгебраічныя рашоткі класаў канечных груп

Ключавыя словы: група, канечная група, рашотка, алгебраічная рашотка, клас Фітынга, фармацыя груп, тоеснасць рашоткі, рашотка класаў Фітынга, рашотка фармацый.

У дысертацыі распрацаваны новыя метады даследвання рашотак класаў канечных груп, на аснове якіх вызначаны асноўныя структурныя заканамернасці алгебр класаў Фітынга і фармацый. Вырашаны шэраг адкрытых праблем тэорыі рашотак класаў: А.М. Скібы і Л.А. Шамяткова апісання булевых падрашотак часткова лакальных класаў Фітынга; А.М. Скібы аб індуктыўнасці рашоткі ўсіх функтарна замкнёных татальна насычаных фармацый; А.М. Скібы і Л.А. Шамяткова аб дыстрыбутыўнасці рашоткі ўсіх вырашальных татальна лакальных класаў Фітынга; Лаўша аб сюр'ектыўнасці кананічных адлюстраванняў секцый Локета; Б.І. Плоткіна аб алгебраічнасці рашоткі ўсіх функтарна замкнёных кратна вырашальна насычаных фармацый; А.М. Скібы і Л.А. Шамяткова аб апісанні сістэм тоеснасцяў рашотак функтарна замкнёных кратна вырашальна насычаных фармацый; А.М. Скібы аб апісанні структуры сумножнікаў здабытку фармацый, укладзенага ў кампактны элемент рашоткі ўсіх насычаных фармацый.

Усе асноўныя рэзультаты дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі рашотак груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, дысертацый.

РЕЗЮМЕ

Воробьев Николай Николаевич

Алгебраические решетки классов конечных групп

Ключевые слова: группа, конечная группа, решетка, алгебраическая решетка, класс Фиттинга, формация групп, тождество решетки, решетка классов Фиттинга, решетка формаций.

В диссертации разработаны новые методы исследования решеток классов конечных групп, на основе которых установлены основные структурные закономерности и свойства алгебр классов Фиттинга и формаций. Решен ряд открытых проблем теории решеток классов: А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова описания булевых подрешеток частично локальных классов Фиттинга; А.Н. Скибы об индуктивности решетки всех функторно замкнутых тотально насыщенных формаций; А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова о дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга; Лауша о сюръективности канонических отображений секций Локетта; Б.И. Плоткина об алгебраичности решетки всех функторно замкнутых кратно разрешимо насыщенных формаций; А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова об описании систем тождеств решеток кратно частично разрешимо насыщенных формаций; А.Н. Скибы об описании структуры сомножителей произведения формаций, вложимого в компактный элемент решетки всех насыщенных формаций.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории решеток групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах, написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

SUMMARY

Vorob'ev Nikolay Nikolayevich

Algebraic lattices of classes of finite groups

Keywords: group, finite group, lattice, algebraic lattice, Fitting class, formation of groups, law of lattice, lattice of Fitting classes, lattice of formations.

In the dissertation new research methods for lattices of classes of finite groups are developed. These methods make possible to study structure regularities and properties of the algebra of Fitting classes and the algebra of formations. A number of open problems of lattice theory of classes is solved: the problem of A.N. Skiba and L.A. Shemetkov about Boolean sublattices of partially local Fitting classes description; the problem of A.N. Skiba about an inductance of the lattice of all functor-closed totally saturated formations; the problem of A.N. Skiba and L.A. Shemetkov about a distributivity of the lattice of all soluble totally local Fitting classes; the problem of Lausch about a surjective canonical mappings of Lockett sections; the problem of B.I. Plotkin about algebraic lattices of functor-closed multiply solubly saturated formations; the problem of A.N. Skiba and L.A. Shemetkov about law systems description of lattices of partially multiply solubly saturated formations; the problem of A.N. Skiba about factors structure of a formation product embedded in a compact element of the lattice of all saturated formations.

All main results of the dissertation are new. They have a theoretical character and may be used in investigations on the lattice theory of groups and their classes, and also while special courses teaching in universities.

Научное издание

ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 22.04.2013. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,79.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 60 экз. Заказ 261.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель