Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

УДК 512.542

ВОРОБЬЕВ Николай Тимофеевич

Развитие локального метода Хартли в теории конечных разрешимых групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра
и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Гомель, 1997 г.

Работа выполнена в Витебском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
КАЗАРИН ЛЕВ СЕРГЕЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор
ЛИМАН ФЕДОР НИКОЛАЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор
СКИБА АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

Оппонирующая организация — Институт математики СО РАН

Защита состоится "___" __________ 1997 года в ____ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 в Гомельском государственном университете имени Ф.Скорины по адресу: 246699, г.Гомель, ул.Советская, 104.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины.

Автореферат разослан "___" __________ 1997 года

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
кандидат физико-математических наук,
профессор

В.С.МОНАХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Идея локализации — одна из ведущих в теории групп. На протяжении трех последних десятилетий ряд глубоких и содержательных результатов в теории конечных разрешимых групп был получен благодаря систематическому развитию локального метода, предложенного в 1963 году В.Гашюцом [1], что нашло свое отражение в серии современных монографических и учебных изданий [2 - 6]. При этом основным инструментом в исследованиях стало понятие локальной формации — класса групп, замкнутого относительно гомоморфных образов, конечных подпрямых произведений и фраттиниевых расширений.

Со второй половины 60-х годов важное место в теории конечных разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с радикальными классами (классами Фиттинга), т.е. классами групп, замкнутыми относительно нормальных подгрупп и их произведений. Идея изучения таких классов восходит к долгосрочной программе структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х.Фиттингом [7]. Яркий результат в теории конечных разрешимых групп был получен в 1967 году Гашюцом, Фишером и Хартли в основополагающей работе [8], где в терминах классов Фиттинга найдено изящное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла.

Одно из ключевых понятий в теории групп — понятие радикала. Для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}$-радикал группы — это произведение всех ее нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Используя локальный метод Гашюца, Л.А.Шеметков [9 - 10] дал описание $\mathfrak{F}$-радикалов групп для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Принципиально новый локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и радикальных классов был предложен в 1969 году Хартли [11]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (функциями Хартли) множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множество радикальных классов. Важность такого подхода обусловлена прежде всего следующими обстоятельствами. Во-первых, теория формаций и радикальных классов развиваются по модулю p-групп и многие часто встречающиеся в исследованиях классы групп определяются локально методом Хартли. Во-вторых, при таком подходе задача исследования классов групп редуцируется к задаче исследования значений функций Хартли.

Однако долгое время метод Хартли и его роль в теории конечных разрешимых групп не подвергалась достаточному исследованию. Только отдельные результаты в этом направлении были получены Хартли, Дарси, Шнакенбергом, Бейдлеманом и Брюстером. Все они относились к изучению некоторых свойств инъекторов. В знаменитом докладе на Международной конференции по теории групп (Канберра, 1973 г.) Косси [12] специально подчеркивал трудность и важность развития локального метода Хартли в теории конечных разрешимых групп.

В 70-е годы в теории конечных разрешимых групп сформировался ряд проблем, связанных с построением структурной теории радикальных классов. Среди них центральное место занимала общая проблема определения структуры радикального класса, известная в теории классов под названием "гипотеза Локетта". Ее возникновение обусловлено фундаментальными результатами Блессеноля-Гашюца [13] и Локетта [14], которые в терминах радикалов определили два обширных семейства радикальных классов: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта. Напомним, что если для радикального класса $\mathfrak{F}$ и любой группы G $\mathfrak{F}$-радикал G содержит ее коммутант, то $\mathfrak{F}$ называют нормальным и если $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ для всех групп G, то $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта. Пристальное внимание в изучению внутренней структуры таких классов и их взаимосвязи привело к следующей гипотезе.

Гипотеза (Локетт, 1974, [14]). Каждый ли радикальный класс $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение некоторого нормального радикального класса и класса Локетта, порожденного $\mathfrak{F}$?

Примечателен тот факт, что в последующем гипотеза Локетта была подтверждена для следующих отдельных случаев локального радикального класса: наследственного (Брайс, Косси, 1975 г.), классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман, Хаук, 1979 г.), классов вида $\mathfrak{X}(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'})$ (Дерк, Хоукс, 1992 г., X.6.10 [4]). Вместе с тем Бергер и Косси установили, что это предположение неверно для нелокальных радикальных классов. В связи с этим оставалось актуальным подтверждение или опровержение гипотезы Локетта для локальных радикальных классов в общем случае.

В дальнейшем усилия многих исследователей были направлены на поиск радикальных классов, удовлетворяющих гипотезе Локетта и изучение структуры нормальных радикальных классов. Причиной этого явились выдающийся результат Лауша [15] о том, что решетка всех нормальных радикальных классов изоморфна решетке подгрупп бесконечной абелевой группы (группы Лауша), и две его проблемы, сформулированные в “Коуровской тетради”.

Проблемы Лауша. (а) (1982 г., 8.30 [16]). Если радикальные классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условию Локетта, то будет ли удовлетворять условию Локетта их пересечение $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$?

(б) (1984 г., 9.18 [16]). Существуют ли максимальные радикальные подклассы в минимальном нормальном радикальном классе ?

Заметим, что положительное решение вопроса (а) предполагает описание структуры пересечений радикальных классов. Естественность вопроса (б) обусловлена известным результатом Косси о том, что если радикальный класс $\mathfrak{F}$ максимален в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, то он нормален. Дальнейшее развитие вопроса (б) при отрицательном его решении, на что обратил внимание Л.А.Шеметков, приводит к предположению о том, что максимальные радикальные подклассы в нормальных радикальных классах, нормальны.

Многие задачи теории конечных разрешимых групп редуцируются к задаче характеризации наследственных радикальных классов (радикальных классов, замкнутых относительно взятия подгрупп) и изучения структуры таких классов. Хоуксом [17] было высказано предположение о том, что примитивные насыщенные формации (то же, что и тотально локальные в смысле терминологии А.Н.Скибы [18]) являются в точности замкнутыми относительно подгрупп формациями Фиттинга. Брайс и Косси подтвердили это предположение Хоукса. Л.А.Шеметковым было предложено применение концепции кратной локализации А.Н.Скибы для радикальных классов и сформулирована проблема.

Проблема Л.А.Шеметкова (1993 г., аналог проблемы Хоукса [17]) Являются ли тотально локальные радикальные классы в точности наследственными радикальными классами ?

Заметим, что положительное решение проблемы Л.А.Шеметкова представляет интерес как классификация наследственных радикальных классов, которая даст возможность определения их структуры посредством описания значений функций Хартли.

Один из наиболее трудных и важных вопросов в построении структурной теории радикальных классов — это задача классификации радикальных классов.

В этом направлении ориентиром могла бы служить знаменитая теорема Гашюца-Любезедер-Шмида о том, что формация определяется локально в точности тогда, когда она насыщена (формацию $\mathfrak{F}$ называют насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$). Однако, как показал Хартли [11] , аналога этой теоремы для радикальных классов получить невозможно. В 80-е годы серия известных результатов Дёрка, Хаука, Ормерод, Косси привела к новым полезным характеризациям отдельных семейств локальных радикальных классов посредством фраттиниевой двойственности в следующем смысле. Пусть τ оператор замыкания и $\Psi_\tau(G)$ —наименьшая нормальная подгруппа группы G такая, что $\tau(\Psi_\tau(G) \cap M) \supseteq \tau(M)$ для всех $M \lhd\lhd G$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется τ-насыщенным, если из $\Psi_\tau(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Известно, что если $\mathfrak{F}$ τ-замкнутый, то $\mathfrak{F}$ τ-насыщенный. В связи с этим актуальна следующая проблема.

Проблема фраттиниевой двойственности в классе разрешимых групп (Дерк, Хоукс,1992 г.,[4] с.829). Для данного оператора замыкания τ такого, что $S_n \leq \tau$, какие радикальные классы являются τ-насыщенными ?

При построении и изучении внутренних свойств радикальных классов и формаций во многих принципиальных случаях основным инструментом являются произведения классов групп. Изучению свойств произведений радикальных классов и формаций посвящен ряд глубоких и содержательных результатов Л.А.Шеметкова, А.Н.Скибы, Гашюца, Бейдлемана, Хаука, Косси и др. Важный аспект в изучении произведений — решение задачи о возможности представления локальных радикальных классов (локальных формаций) в виде произведения нелокальных радикальных классов (нелокальных формаций). Такую задачу определил следующий круг вопросов в "Коуровской тетради".

Проблемы факторизации (а) (1990 г., 11.25 а) [16]). Существуют ли локальные произведения (отличные от класса $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$) радикальных классов, каждый из которых нелокален и не является формацией ?

(б) (Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, 1984 г. [16]). Существуют ли локальные произведения нелокальных формаций конечных групп ?

Задачи изучения структуры радикальных классов тесно переплетаются с задачами изучения внутренней структуры самих групп. Еще в 60-е годы с помощью радикалов Фишером и Хартли [11] было получено решение задачи строения $\mathfrak{H}$-инъекторов групп для отдельных случаев класса Хартли: $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — класс всех конечных нильпотентных групп) и $\mathfrak{H}=\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ соответственно. В связи с этим представляет интерес решение указанной задачи для класса Хартли $\mathfrak{H}$ в общем случае.

<u>Связь работы с научными программами и темами</u>. Диссертация выполнена в рамках госбюджетной темы Гомельского госуниверситета "Развитие формационных методов теории групп и других алгебраических систем", входящей в перечень важнейших по Республике Беларусь.

Настоящая работа была выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской Программы Образования в области точных наук.

Цель и задачи исследования. Развитие локального метода Хартли и его применение к решению указанных выше проблем теории конечных разрешимых групп.

Научная новизна полученных результатов. Все основные результаты диссертации являются новыми, впервые полученные автором.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории радикалов и радикальных классов групп, теории классов Фиттинга и формаций конечных групп, а также при чтении спецкурсов в университетах и пединститутах. Отдельные результаты диссертации неоднократно цитировались и применялись в статьях других авторов (см., например, [23-26]) и монографиях [2-4].

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Развитие и применение локального метода Хартли в теории конечных разрешимых групп:

1. Решение следующих проблем структуры радикальных классов.

1.1) проблемы Локетта [14] о строении радикального класса для локальных радикальных классов;

1.2) проблемы Лауша (“Коуровская тетрадь” [16], вопрос 9.18) о существовании максимальных радикальных подклассов в минимальном нормальном радикальном классе;

1.3) проблемы Лауша (“Коуровская тетрадь” [16], вопрос 8.30) о строении пересечения радикальных классов, удовлетворяющих гипотезе Локетта: для локальных радикальных классов и в неразрешимом случае;

1.4) проблемы Л.А.Шеметкова (аналог проблемы Хоукса [17]) классификации и строения наследственных радикальных классов.

2. Решение проблемы Дёрка-Хоукса (проблема 1, XI.6 [4]) о фраттиниевой двойственности для кратно локальных радикальных классов.

3. Решение проблем факторизации классов:

3.1) существования нетривиальных локальных произведений нелокальных радикальных классов (“Коуровская тетрадь” [16], вопрос 11.25. а));

3.2) проблемы Л.А.Шеметкова и Н.А.Скибы существования локальных произведений нелокальных формаций (“Коуровская тетрадь” [16], вопрос 9.58).

4. Решение задачи Хартли описания инъекторов.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в работах без соавторов.

Апробация результатов диссертации. Результаты настоящей диссертационной работы неоднократно докладывались ее автором на семинаре по теории групп кафедры алгебры и геометрии Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины, на семинаре “Алгебра и логика” (Новосибирск), на региональном семинаре Польского математического общества (Зелена Гура (Польша)). Автор выступал с докладами на VI-XI Всесоюзных симпозиумах по теории групп (Черкассы, 1978 г., Шушенское, 1980 г., Сумы, 1982 г., Москва, 1984 г.; Гомель, 1986 г.; Свердловск, 1989 г.), на XIV, XVI-XIX Всесоюзных алгебраических конференциях (Новосибирск, 1977; Ленинград, 1981 г.; Минск, 1983 г.; Кишинев, 1985 г; Львов, 1987 г.), на II-III Международных конференциях по алгебре (Барнаул, 1991 г.; Красноярск, 1993 г.), на Международной математической конференции (Кальск (Польша), 1988 г.), на Международной математической конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского (Минск, 1992 г.), на Международной математической конференции, посвященной 25-летию Гомельского госуниверситета (Гомель, 1994 г.), на Международной конференции по алгебре и кибернетике, посвященной памяти С.А.Чунихина (Гомель, 1995 г.), на VI-VII конференциях математиков Беларуси (Гродно, 1992 г.; Минск, 1996 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 статьях в научных изданиях, 19 из которых выполнены без соавторов, а также в 19 тезисах конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, обзора результатов, трех глав основной части, выводов и списка использованных источников, расположенных в алфавитном порядке, содержащего

167 наименований. Объем диссертации — 202 страницы машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Ниже охарактеризованы основные результаты диссертации по главам. Отметим, что все рассматриваемые группы предполагаются конечными и разрешимыми, если не оговорено противное. В книгах Л.А.Шеметкова [2], Л.А.Шеметкова, А.Н.Скибы [3] и Дёрка, Хоукса [4] можно найти все необходимые определения и обозначения, которые мы не приводим.

Глава 1 "Основы метода Хартли" имеет вспомогательный характер. Ее основная цель - нахождение общих закономерностей построения радикальных классов методом, предложенным Хартли [11]. Напомним, что произведением радикальных классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называют класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ всех тех групп, факторгруппы по $\mathfrak{X}$-радикалам которых принадлежат $\mathfrak{Y}$. Хорошо известно, что $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — радикальный класс и умножение радикальных классов ассоциативно.

Функцию $f: \mathbb{P} \longrightarrow$ {радикальные классы} назовем функцией Хартли или просто H-функцией.

Пусть $\pi = Supp(f) = \{p \in \mathbb{P}: f(p) \neq \emptyset\}$ — носитель H-функции f. Обозначим через $LR(f)$ радикальный класс $\mathfrak{S}_{\pi} \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$ (если $\pi = \emptyset$, то положим $LR(f) = (1)$, где (1) класс единичных групп. Класс $\mathfrak{F}$ называют локальным радикальным классом или иначе локальным классом Фиттинга, если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f. В этом случае будем говорить, что $\mathfrak{F}$ локально определяется H-функцией f. Мы также будем предполагать, по определению, что пустой класс является локальным радикальным классом.

Многие классы групп, часто встречающиеся в исследованиях, являются локальными радикальными классами. Таковыми, например, являются класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, класс $\mathfrak{N}_{\pi}$ всех нильпотентных π-групп, класс $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{N}_{\pi}$ всех π-нильпотентных групп, классы групп вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$, где $\mathfrak{X}$ —радикальный класс. Кроме того, обширность семейства локальных радикальных классов подтверждает тот факт [47,55], что всякий наследственный радикальный класс локален.

Заметим, что Хартли [11] рассматривал функцию $h: \Sigma \longrightarrow$ { радикальные классы }, где $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P})$ и радикальный класс $LH(h) = \bigcap_{\pi \in \Sigma} h(\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_{\pi}$. Такой класс локален. Это подтверждает лемма 5 раздела 1.1. Класс $LH(h)$ назовем классом Хартли. В частности, если $h(\pi) = \phi$ для некоторого $\pi \in \Sigma$, то положим $LH(h) = \phi$.

Укажем еще один из универсальных способов построения классов с помощью H-функцией, который мы будем использовать. Пусть f H-функция и $SLR(f) = \bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{S}_{p'}$, где $\pi = Supp(f)$ (если $\pi = \phi$, то $SLR(f) = \phi$). Если $\mathfrak{F} = SLR(f)$, то будем говорить, что $\mathfrak{F}$ определяется полулокально H-функцией f.

Очевидно, $\mathfrak{F} = SLR(f)$ для каждого радикального класса $\mathfrak{F}$ и H-функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Однако существуют нелокальные радикальные классы, которые определяются полулокально H-функциями f с $\phi \subset Supp(f) \subset \mathbb{P}$. Например, если $\mathfrak{F} = \{G : Soc_3(G) \subseteq Z(G)\}$, то класс $\mathfrak{H} = \{G :$ $\mathfrak{F}$-инъекторы G имеют 2-индекс в $G\}$ является нелокальным, хотя определяются полулокально H-функцией f такой, что $f(p) = Fit\{G \in \mathfrak{H} : G \cong O^{p'}(G)$ для $H \in \mathfrak{H}\}$ для всех $p \in \mathbb{P}$ (через $Fit\,\mathfrak{X}$ обозначают радикальный класс, порожденный множеством $\mathfrak{X}$).

Ключевым моментом раздела 1.1 является следующая классификация H-функций, определяющих локально класс $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ локально определяется H-функцией f. Тогда функцию f назовем: 1) внутренней, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$; 2) полной, если $f(p)\mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$; 3) полной внутренней, если f одновременно полная и внутренняя. Такая классификация оказалась полезной для всех дальнейших исследований, так как ввиду лемм 1.1.8 и 1.1.9 каждый локальный радикальный класс определяется внутренней и даже полной внутренней H-функцией. Заметим, что это свойство является аналогом хорошо известного базисного свойства, полученного Картером, Хоуксом и Шмидом о том, что каждая локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется единственным полным внутренним локальным экраном (максимальным внутренним локальным экраном) f таким, что $f(p)=\mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Однако как и для локальных классов Шунка (см.III.5 [4]) единственности полной внутренней H-функции в радикальных классах не наблюдается.

В разделах 1.2 и 1.3 главы продолжается описание общих закономерностей построения локальных радикальных классов с помощью операции умножения радикальных классов.

Назовем произведение радикальных классов $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — локальный радикальных класс.

Основополагающий результат Гашюца-Шеметкова [5 , 19] в теории формаций групп о том, что произведение двух любых локальных формаций локально явился полезным ориентиром для дальнейших исследований.

В разделе 1.3 доказан аналог этого результата для радикальных классов.

1.3.7. Лемма. Произведение двух любых локальных радикальных классов является локальным радикальным классом.

Кроме того, описываются общие закономерности построения локальных произведений радикальных классов с помощью H-функций и изучаются локальные радикальные классы, представимые в виде произведения двух радикальных классов, один из которых локален. Для этой цели используется идея частичной локализации, которая была предложена Л.А.Шеметковым [20] . Обозначим через $\ell Fit\mathfrak{X}$ локальный радикальный класс, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ (по предложению Л. А. Шеметкова) назовем π-локальным, если $\ell Fit\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_{\pi'}$ (здесь $\pi \subseteq \mathbb{P}$).

Основополагающей для построения локальных произведений радикальных классов является лемма 1.3.12, где доказано, что если радикальные классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{H}=LR(h)$ и $\pi=Supp(h)$,то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально в точности тогда, когда класс $\mathfrak{F}$ π'-локален.

Пусть $\{\mathfrak{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ - некоторое множество радикальных классов. Тогда их локальным объединением назовем класс $\ell Fit(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_\lambda)$, который мы обозначаем через $\vee_\ell \ \mathfrak{F}_\lambda$.

С использованием указанной выше характеризации локальных произведений и операции $\vee_\ell$ в заключение раздела 1.3 выявляются новые методы построения локальных радикальных классов. Это подтверждается построением серии примеров локальных радикальных классов, которые состоят из всех тех групп, которые факторизуются их радикалами. Например, $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^n \vee_\ell (\mathfrak{H}\mathfrak{F})^n = \{G : G = G_{(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^n} G_{(\mathfrak{H}\mathfrak{F})^n}\}$, где $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — Q-замкнутые локальные радикальные классы, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = (1)$, $n \in \mathbb{N}$.

В разделе 1.4 продолжается классификация H-функций и рассматриваются общие закономерности построения локальных радикальных классов посредством H-функций, определяемых свойствами прямых произведений радикалов групп. В отличие от свойства прямых произведений корадикалов в теории разрешимых формаций, если $\mathfrak{F}$ — радикальный класс, то $\mathfrak{F}$-радикал прямого произведения двух групп в общем случае не совпадает с прямым произведением $\mathfrak{F}$-радикалов этих групп. Учитывая этот факт, Локетт [14] определил класс $\mathfrak{F}^*$, который является наименьшим радикальным классом, содержащим $\mathfrak{F}$ таким что для любых групп X и Y имеет место $(X \times Y)_{\mathfrak{F}^*} = X_{\mathfrak{F}^*} \times Y_{\mathfrak{F}^*}$. Локетт определяет также радикальный класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение тех радикальных классов $\mathfrak{X}$ для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Заметим, что в теории классов групп операторы Локетта оказались ключевым инструментом во многих глубоких исследованиях структуры классов и групп (см.главы **X-XI** [4]). Это оказалось возможным благодаря ряду их замечательных свойств и тому факту, что семейство радикальных классов $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ (классов Локетта) является обширным. Так, радикальные классы, замкнутые хотя бы относительно одной из операций S_F (в частности, S) Q , R_0 , — классы Локетта.

Пусть f — H-функция. Определим H-функции f_* и f^* следующим образом: $f_*(p) = (f(p))_*$ и $f^*(p) = (f(p))^*$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Основополагающим для всех дальнейших исследований явился тот факт, что каждый локальный радикальный класс является классом Локетта и определяется локально посредством операторов Локетта. А именно, нами доказывается

1.4.10. Лемма Если $\mathfrak{F} = LR(f)$, то $\mathfrak{F} = LR(f_*) = LR(f^*) = \mathfrak{F}^*$.

Дальнейшее применение операторов Локетта связано с описанием минимальных и максимальных H-функций. Заметим, что в общем случае, радикальный класс может иметь многие локальные и полулокальные задания. Поэтому, следуя терминологии Л.А.Шеметкова [2] будем считать любое множество H-функцией Ω частично упорядоченным отношением $\leqslant$ следующим образом: если $f_1, f_2 \in \Omega$, то $f_1 \leqslant f_2$ в том и только в том случае, когда $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Возникает проблема описания минимальных и максимальных элементов Ω.

Пусть Ω — множество всех H-функций, которые определяют локально $\mathfrak{F}$. Тогда Ω имеет минимальный элемент - H-функцию $\underline{f}$ такую, что $\underline{f}(p) = \bigcap \{g(p) : \mathfrak{F} = LR(g)\}$, $p \in \mathbb{P}$.

Обозначение $\mathfrak{F} = LR(\underline{f})$ будет всегда означать, что $\underline{f}$ — минимальное локальное задание $\mathfrak{F}$.

Минимальное полулокальное задание радикального класса определяется аналогично. В этом случае обозначение $\mathfrak{F} = SLR(\underline{f})$ будет всегда означать, что $\underline{f}$ — минимальное полулокальное задание $\mathfrak{F}$.

Полезным наблюдением, которое используется в дальнейшем для классификации радикальных классов, является описание минимальных и максимальных H-функций, полученное в 1.4.14.

1.4.14. Лемма. Каждый локальный радикальный класс определяется максимальной H-функцией $\overline{f}$ и единственной минимальной H-функцией $\underline{f}$ такими, что $\overline{f}(p) = \{G : (G \times G)_{\overline{f}(p)}$ входит подпрямо в $G \times G\}$ и $\underline{f}(p) = Fit\{G \in \mathfrak{F} : G \cong H^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}(H \in \mathfrak{F})\} = \underline{f}_*(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Заметим, что если $\mathfrak{F} = SLR(\underline{f})$ и $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то

$$\underline{f}(p) = Fit\{G \in \mathfrak{F} : G \cong H^{\mathfrak{S}_{p'}}(H \in \mathfrak{F})\}.$$

Указанная лемма представляет интерес и с точки зрения двойственности ее результатов хорошо известным результатом в теории формаций о максимальных и минимальных экранах, которым были посвящены работы Дерка, Шеметкова, Скибы, Соломона, Форстера и автора [24 — 30, 33-34]

Глава 2 диссертации " Развитие структурной теории радикальных классов" является основной. Она посвящена применению локального метода Хартли к решению проблем структуры и классификации радикальных классов.

Первый блок открытых вопросов (решается в разделе 2.1 данной главы) связан с общей проблемой структуры радикальных классов, которая хорошо известна в теории классов групп как "гипотеза Локетта". Напомним, что радикальный класс $\mathfrak{F}$ называют нормальным, если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. В теории радикальных классов известен следующий результат Локетта [14] : тогда и только тогда радикальный класс $\mathfrak{F}$ нормален, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$. С учетом этого и свойства операторов Локетта [14], для любого радикального класса $\mathfrak{F}$ и любого нормального радикального класса $\mathfrak{X}$ выполняются соотношения:
$\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Локетт (1974г., [14], с.135) выдвинул гипотезу о том, что для любого радикального класса $\mathfrak{F}$ существует нормальный радикальный класс $\mathfrak{X}$ такой ,что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$.

Брайс и Косси (1975 г., [22]) и другими методами Бергер (1978г.) подтвердили справедливость гипотезы Локетта для примитивных насыщенных формаций (локальных наследственных радикальных классов). Однако позднее Бергер и Косси построили пример нелокального радикального класса, для которого эта гипотеза неверна. В связи с этим приобрела актуальность проблема подтверждения ее для локальных радикальных классов в общем случае. В 1979 году Бейдлеман и Хаук подтверждают гипотезу Локетта для локальных радикальных классов двух типов: $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$. Следующая теорема подтверждает гипотезу Локетта и ее обобщенный вариант для любых локальных радикальных классов.

Теорема 2.1.14. Если радикальные классы $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F} = LR(f)$, то $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$. В частности, $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.

Заметим, что справедливость равенства $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$ (справедливость обобщенного варианта гипотезы Локетта (см.X.6. [4]) была установлена ранее только для трех отдельных случаев локального радикального класса $\mathfrak{F}$ и содержащего его, радикального класса $\mathfrak{H}$: наследственных $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — Брайсом, Косси (1975 г.), для локального $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ — Бризоном (1977г.,), для локального $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}(\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{S}_{\pi'})$, локального наследственного $\mathfrak{H}$ — Дерком, Хоуксом (1992г., X.6.10 [4]). Отметим также, что при некоторых ограничениях на класс $\mathfrak{F}$ теорема 2.1.1.4 получила развитие в классе всех конечных групп в недавно вышедшей работе П.Галледжи [23].

Самостоятельный интерес представляют следствия из полученного результата, связанные с решетками секций и подсекций Локетта. Напомним, если $\mathfrak{F}$ радикальный класс, то $Locksec \mathfrak{F} = \{\mathfrak{X} : \mathfrak{X}$ радикальный класс и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$ называют секцией Локетта $\mathfrak{F}$ и $Locksub \mathfrak{F} = \{\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y} \in Locksec \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{F}\}$ называют подсекцией Локетта $\mathfrak{F}$.

2.1.1.6. Следствие. Для любого локального радикального подкласса $\mathfrak{F}$ радикального класса $\mathfrak{H}$ решетка радикальных классов $Locksub(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}_*)$ является полной , модулярной и атомарной. В частности, решетка нормальных радикальных подклассов нормального радикального класса порожденного локальным радикальным классом, является полной, модулярной и атомарной.

Заметим [60], что аналог известной теоремы Брайанта-Брайса-Хартли о конечности решетки подформаций однопорожденной формации является верным для нормальных радикальных классов.

А именно,если $\mathfrak{F} = Fit\, G$, то решетка всех нормальных радикальных подклассов нормального радикального класса, порожденного $\mathfrak{F}$ является конечной. В частности, конечна решетка всех нормальных радикальных подклассов однопорожденного нормального радикального класса.

Применение теоремы 2.1.1.4 наблюдается и во второй части раздела 2.1. Она, посвящена решению проблем Лауша 8.30 и 9.18 из "Кауровской тетради" [16] , связанных также с изучением решеток радикальных классов.

Будем считать, что для радикального класса $\mathfrak{F}$ выполняется условие Локетта в радикальном классе $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_*$.

Легко видеть, что если для $\mathfrak{F}$ выполняется гипотеза Локетта, то для $\mathfrak{F}$ выполняется условие Локетта в $\mathfrak{S}$, но не наоборот. Заметим, что радикальный класс $\mathrm{Fit}\, S_3$, порожденный симметрической группой из трех символов, является примером такого класса.

2.1.2.5. Теорема (1) Если $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ —локальные радикальные классы с условием Локетта в классе $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — радикальный класс с условием Локетта в $\mathfrak{X}$;

(2) существуют неразрешимые радикальные классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ такие, что $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_*$ и $\mathfrak{H}_* = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{E}_*$, но $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* \neq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_*$ ($\mathfrak{E}$ —класс всех конечных групп).

Из утверждения (1) указанной теоремы для $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ мы получаем положительный ответ на вопрос Лауша 8.30 [16] для локальных радикальных классов, из (2) — мы имеем отрицательный ответ на этот вопрос в классе всех разрешимых и неразрешимых конечных групп.

Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется максимальным радикальным подклассом радикального класса $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X},$$

где $\mathfrak{M}$ – радикальный класс, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$. В теории нормальных радикальных классов известны результат Косси о том, что если $\mathfrak{F}$ максимальный радикальный класс в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ нормален и проблема Лауша (9.18 [16]) о существовании максимальных радикальных подклассов в $\mathfrak{S}_*$ минимальном нормальном радикальном классе. Отрицательный ответ на этот вопрос дает

2.1.2.6. Теорема В $\mathfrak{S}_*$ нет максимальных радикальных подклассов

Заметим, что с помощью характеризаций нормальных радикальных классов, полученных Локеттом и Косси, теорема 2.1.2.6 получает следующее развитие: если $\mathfrak{F}$ максимальный радикальный подкласс в некотором нормальном радикальном классе $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ нормален. Кроме того, ее аналог является верным для максимальных по сильному вложению радикальных подклассов в некотором радикальном классе. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется сильно вложенным в радикальном классе

$\mathfrak{H}$, если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$- инъектор содержится в некотором $\mathfrak{H}$-инъекторе G. В 2.1.2.7 доказано, что в $\mathfrak{T}_*$ нет максимальных по сильному вложению радикальных подклассов.

В разделе 2.2 локальный метод Хартли применяется для изучения структуры и классификации наследственных радикальных классов. Мы используем концепцию А.Н.Скибы [18], связанную с кратной локальностью. В соответствии с этой концепцией, будем считать каждый радикальный класс 0-кратно локальным. Назовем радикальный класс $\mathfrak{F}$: 1) n-кратно локальным ($n \in \mathbb{N}$), если $\mathfrak{F}$ локально определяется такой H-функцией, все непустые значения которой ($n-1$)-кратно локальны; 2)тотально локальным, если $\mathfrak{F}$ n-кратно локален для всех $n \in \mathbb{N}$.

Хоукс доказал, что каждая примитивная насыщенная формация (то же, что тотально локальная формация по терминологии А.Н.Скибы) является наследственной формацией Фиттинга и высказал предположение о том, что примитивные насыщенные формации это, в точности, наследственные формации Фиттинга. Брайс и Косси подтвердили это предположение Хоукса.

Л.А.Шеметков предложил следующий аналог проблемы Хоукса: являются ли тотально локальные радикальные классы, в точности, наследственными радикальными классами ?

Обозначим через $S\,\mathrm{Fit}\,\mathfrak{X}$ наследственный радикальный класс, порожденный множеством групп $\mathfrak{X}$. Следующая теорема классифицирует наследственные радикальные классы посредством H-функций и дает утвердительный ответ на вопрос Л.А.Шеметкова.

2.2.1.10. Теорема. (1) Радикальный класс $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = LR(f)$ для H-функции f такой, что

$$f(p)=\begin{cases}(S\,\mathrm{Fit}\{G\in\mathfrak{F} : G = O^{p'}(G)\})\,\mathfrak{N}_p, & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F})\\ \varnothing, & \text{если } p\in\pi'(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

(2) Радикальный класс $\mathfrak{F}$ тотально локален в точности тогда, когда он наследственен.

В разделе 2.2 мы также описываем процедуру построения семейств ненаследственных локальных радикальных классов. Заметим, что условие разрешимости в 2.2.1.10 существенно. Завершается раздел 2.2 построением серии семейств локальных наследственных радикальных классов с помощью методов теории формаций. Ориентиром для таких исследований стала известная теорема Альперина-Томпсона о изоморфном вложении любой разрешимой группы в некоторую $\mathfrak{SC}$-группу (группу, в которой ее системной нормализатор Холла ($\mathfrak{N}$-нормализатор) и ее подгруппа Картера ($\mathfrak{N}$-проектор) совпадают, из которой вытекает, что класс всех $\mathfrak{SC}$-групп ненаследственнен. В сравнение с этим представляет интерес, построенный нами, пример 2.2.2.8 из которого следует,что класс всех групп, в которых p-нильпотентные нормализаторы и

p-нильпотентные проекторы совпадают, является локальным наследственным радикальным классом.

В разделе 2.3 продолжена классификация локальных радикальных классов посредством фраттиниевой двойственности. В теории групп идея изучения фраттиниевой двойственности восходит к работам Ито и Гашюца, в которых была определена и изучалась подгруппа $\Psi_0(G)$ группы G, двойственная ее подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ как подгруппа, порожденная всеми минимальными подгруппами группы G. Знаменитый результат в теории формаций теорема Гашюца-Любеседер-Шмида о том, что формация локальна в точности тогда, когда она E_Φ-замкнута. Оператор E_Φ называется фраттиниевым и его действие на класс групп $\mathfrak{X}$ определяется следующим образом: $E_\Phi\mathfrak{X}=\{G: \exists N \trianglelefteq G, N \subseteq \Phi(G)$ и $G/N \in \mathfrak{X}\}$. Это послужило ориентиром для поиска операторов , двойственных фраттиниевым и выяснению их роли в теории радикальных классов. Такие операторы были введены Дёрком и Хауком [2 1]. Однако оказалось, что E^{Ψ_0}-замкнутый радикальный класс $(E^{\Psi_0}\mathfrak{X}=\{G: \exists K \trianglelefteq\trianglelefteq G, K \in \mathfrak{X}$ и $\Psi_0(G) \subseteq K\}$ это в точности класс всех π-групп ($\pi \subseteq \mathbb{P}$) и поэтому для характеризации радикальных классов Дёрк и Хаук предложили использовать фраттиниеву двойственность в следующем смысле. Пусть τ –оператор замыкания и $\Psi_\tau(G)$ наименьшая нормальная подгруппа группы G такая, что $\tau(\Psi_\tau(G) \cap M)$

$\geq \tau(M)$ для всех $M \lhd\lhd G$. Радикальный класс $\mathfrak{F}$ называется E^{Ψ_τ}-замкнутым или τ-насыщенным, если из $\Psi_\tau(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Общая проблема нахождения и характеризации τ-насыщенных радикальных классов в классе $\mathfrak{Y}$ была сформулирована Дёрком и Хоуксом в XI.6 [4] для $S_n \leq \tau$, где S_n –оператор нормальной наследственности.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и τ_m — оператор, сопоставляющий каждому классу групп $\mathfrak{X}$ пересечение всех тех m-кратно локальных радикальных классов, которые являются формациями и содержат $\mathfrak{X}$. Следующая теорема дает ответ на проблему Дерка-Хоукса (проблема 1, [4] ,с.829) для счетного множества радикальных классов и классифицирует локальные радикальные классы посредством формаций.

2.3.4. Теорема. Если $\mathfrak{F}$ m-кратно локальный радикальный класс, то $\mathfrak{F}$ является формацией в том и только в том случае, когда он τ_m-насыщен.

В разделе 4 главы 2 изучается структура и свойства произведений радикальных классов. Идея таких исследований восходит к классической ситуации в теории групп, когда изучаются классы групп, которые обладают заданным свойством и представляются в виде произведения своих подклассов, каждый из которых обладает или не обладает этим свойством. Исследованию этой ситуации в теории формаций была посвящена серия известных результатов Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы, в теории нормальных радикальных классов – Бейдлемана,Косси, Хаука, классов Локетта Дерка, Хоукса, Бризона.Стимулом изучения указанной ситуации для локальных радикальных классов послужил вопрос 11.25а) [16] о существовании нетривиальных локальных произведений радикальных классов, каждый из которых нелокален и не является формацией. Заметим, что если $\mathfrak{X}$ нетривиальный нормальный радикальный класс, то по теореме Косси $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}_*$ и $\mathfrak{Y}$ – локальное произведение нелокальных радикальных классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}_*$ и этим обусловлено требование нетраивиальности локальных произведений в формулировке указанного вопроса. Вначале используя конструкцию радикального класса, предложенную Бергером и Косси, строится пример 2.4.4, который дает утвердительный ответ на этот вопрос. В последующем описываются общие закономерности построения локальных произведений, определяемых вопросом. Для этой цели мы используем радикальные классы, определяемые полулокально H-функциями. При этом, в частности, полезной оказалась следующая характеризация таких классов: радикальный класс $\mathfrak{F} = SLR(f)$, для некоторой H-функции f с $\emptyset \subset \pi = Supp(f) \subset \mathbb{P}$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'} = \mathfrak{F}$.

2.4.6. Теорема. Существует континуальное множество локальных радикальных классов $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{S}$ таких, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_i$ определяется полулокально H-функцией f_i с $\emptyset \subset Supp(f_i) \subset \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}_i$ нелокален и не является формацией $(i=1,2)$.

Естественной является постановка вопроса двойственного 11.25 а).

Л.А.Шеметковым и А.Н.Скибой был сформулирован следующий вопрос: существуют ли локальные произведения нелокальных формаций конечных групп (вопрос 9.58. [16]).

В разделе 2.4 получено положительное решение и этого вопроса. Мы находим серию примеров в классе $\mathfrak{S}$ локальных формаций, представленных в виде произведения двух нелокальных формаций. Для этой цели мы используем понятие функтора, которое в классе $\mathfrak{S}$ было введено Барнесом и Кегелем. Напомним, что отображение τ класса $\mathfrak{S}$ во множество классов групп называют функтором, если для любой группы G выполняются условия: 1) $\tau(G)$ – класс сопряженных подгрупп группы G ; 2) $U^{\varphi} \in \tau(G^{\varphi})$ для любой группы G и любого гомоморфизма φ группы G .

Обозначим через τ_{π} функтор, сопоставляющий каждый группе G класс ее сопряженных холловских π- подгрупп. Пусть $l\,form\,\mathfrak{X}$ локальная формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп. Положительный ответ на указанный вопрос Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы, в частности, дает

2.4.15. Теорема. Пусть $\emptyset \subset \pi \subset \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{A}_{\pi'}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\mathfrak{X}$ –непустая формация, τ –функтор и $\mathfrak{H} = \{G : \tau(G) \in \mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{X}\}$, то формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локальна; $\mathfrak{F}$ нелокальна и $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (l\,form\,\mathfrak{F})\mathfrak{H}$;

2) если $\mathfrak{H} = \{G : \tau_\pi(G) \in \mathfrak{M}\}$, то формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (l\,form\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{H}$ локальна, а формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ нелокальны.

Так как π — произвольное множество простых чисел, то из 2.4.15 следует, что существует континуальное множество локальных произведений нелокальных формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таких, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (l\,form\,\mathfrak{F})\,\mathfrak{H}$.

Третья, заключительная глава, диссертации посвящена групповым аспектам применения локального метода Хартли. Здесь решается задача характеризации $\mathfrak{F}$-инъекторов для локальных радикальных классов. Такая задача впервые рассматривалась и была решена для отдельных случаев локальных радикальных классов Хартли [11]. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ —радикальный класс, то подгруппа V группы G называется ее $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \cap N$ максимальная из подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G) для любой нормальной подгруппы N группы G.

Изящная характеризация инъекторов для локального радикального класса $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп была получена Фишером, где доказано, что $\mathfrak{F}$-инъекторы группы это в точности все те ее $\mathfrak{N}$-максимальные подгруппы, которые содержат радикал Фиттинга.

Аналогичная характеризация $\mathfrak{H}$-инъекторов была получена Хартли [11] для случая класса Хартли $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}$ как обобщение указанного результата Фишера.

В разделе 3.1 мы описываем инъекторы для класса Хартли в общем случае. Пусть $\Sigma = \{\pi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство попарно различных подмножеств π_λ множества $\mathfrak{P}(\mathbb{P})$ таких, что $\mathbb{P} = \cup_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda$ и $\mathfrak{H} = LH(h)$ — класс Хартли. Как показано в лемме 3.1.2, функцию h, определяющую $\mathfrak{H}$ всегда можно выбрать таким образом, что $h(\pi_\lambda) \subseteq \mathfrak{H}$, $h(\pi_\mu) \subseteq h(\pi_\lambda)\mathfrak{S}_{\pi_\lambda'}$, где $h(\pi_\lambda), h(\pi_\mu)$ — непустые радикальные классы. Пусть G группа и G_h — произведение $h(\pi_\lambda)$-радикалов группы G для всех $\lambda \in \Lambda$ таких, что $h(\pi_\lambda) \neq \emptyset$. С учетом предыдущих обозначений, справедлива

3.1.7. Теорема. Пусть $\mathfrak{H} = LH(h)$ — класс Хартли.

(1) V является $\mathfrak{H}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда подгруппа V/G_h является $\mathfrak{D}$-инъектором группы G/G_h,

где $\mathfrak{D} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\pi_\lambda'} \mathfrak{S}_{\pi_\lambda}$;

(2) $\mathfrak{H}$-инъекторы группы G это в точности все те подгруппы из G, которые содержат ее $\mathfrak{H}$-радикал и $\mathfrak{H}$-максимальны в G.

В случае класса Хартли $\mathfrak{H} = \bigcap_p h(p)\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$ самостоятельный интерес представляет

3.1.8. Следствие. Подгруппа V является $\mathfrak{H}$-инъектором группы G в том и только в том случае, если V/G_h нильпотентный инъектор группы G/G_h.

Как показывают примеры, характеризация $\mathfrak{F}$-инъекторов, аналогичная характеризации Фишера в общем случае, когда $\mathfrak{F}$ — произвольный локальный радикальный класс, невозможна. В связи с этим поиск таких характеризаций реально осуществить только для некоторых семейств локальных радикальных классов (по возможности, достаточно обширных).

Такая задача реализуется в разделе 3.2.

Пусть f H-функция, $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$ и $G_f = \prod_{p \in \pi} G_{f(p)}$. Назовем H-функцию f постоянной, если $f(p) = f(q)$ для всех $p, q \in \pi$.

3.2.8. Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = SLR(f)$ для некоторой полной постоянной H-функции f с $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$. Подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда V/G_f холловская π'-подгруппа G/G_f

Широкий спектр возможностей построения $\mathfrak{F}$-инъекторов для конкретных значений $\mathfrak{F}$ представляет

3.2.9. Следствие. Для каждого радикального класса $\mathfrak{F} = SLR(f)$ с полной постоянной H-функцией f и $\pi = Supp(f) \neq \emptyset$ и любой группы G подгруппы вида $G_{\pi'} G_f$, где $G_{\pi'}$ холловская π'-подгруппа группы G являются ее $\mathfrak{F}$-инъекторами.

Заметим также, что $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G для локальных радикальных классов, определяемых условием теоремы 3.2.8, это в точности $\mathfrak{F}$-максимальные в G подгруппы, содержащие ее $\mathfrak{F}$-радикал.

ВЫВОДЫ

В диссертации развит локальный метод Хартли и с помощью его в теории конечных разрешимых групп решены:

1. **Проблемы структуры радикального класса**:

- 1.1) проблема Локетта [14] о строении радикального класса для локальных радикальных классов ;
- 1.2) проблема Лауша ("Коуровская тетрадь", задача 9.18) о существовании максимальных подклассов в минимальном нормальном радикальном класса;
- 1.3) проблема Лауша ("Коуровская тетрадь", задача 8.30) о строении пересечений радикальных классов, удовлетворяющих гипотезе Локетта: для локальных радикальных классов (положительное решение), в неразре-шимом случае (отрицательное решение);
- 1.4) проблема Л.А.Шеметкова (аналог проблемы Хоукса [17]) классификации и описания строения наследственных радикальных классов.

2. Задача Дёрка-Хоукса (проблема 1, XI. [4]) о фраттиниевой двойственности для кратно локальных радикальных классов.

3. **Проблемы факторизации**:

- 3.1) проблема существования нетривиальных локальных произведений нелокальных радикальных классов ("Коуровская тетрадь", задача 11.25 а)) и , двойственная ей;
- 3.2) проблема Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы существования локальных произведений нелокальных формаций ("Коуровская тетрадь", задача 9.58).

4. Задача Хартли описания инъекторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen //Math.Z.-1963. -Bd.80, N 4. -S.300-305.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. -272с.
3. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. -256 с.
4. Doerk K., Hawkes T.O. Finite Soluble Groups //De Gruyter Exp. in Math. -Vol.4. -Berlin-New York, 1992. -891 p.
5. Gaschütz W.Lectures on subgroups of Sylow type in finite solvable groups //Notes on Pure Math. -1979. -Vol.11. -Austral.Nat.Univ. - Canberra. -100 pp.
6. Zappa G.Topics on finite solvable groups. Istituto Nazionale di alta Matematica Franceso Severi, Roma. 1982-100 pp.
7. Fitting H. Beitrage zur Theorie der endlicher Gruppen. //Jaresber. Deutsch.Math. -Verein. -1938. -Bd.48. -S.141.
8. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen //Math.Z. -1967. -Bd.102, N 5. -S.337-339.
9. Шеметков Л.А. О f-радикалах конечных групп // Докл.АН БССР.-1981.- Т.25, N 10. -С.869-872.
10. Шеметков Л.А. Композиционные формации и радикалы конечных групп // Укр.матем.ж. -1988. -Т.40. N 3. -С.369-374.
11. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory //Proc.London Math.Soc. -1969. -Vol.3, N 2. - P.193-207.
12. Cossey J. Classes of finite soluble groups //Proc.Intern.Conf.on Theory of Groups. -Canberra. -P.226-237.
13. Blessenohl D., Gaschütz W. Über normale Schunk und Fittingklassen // Math.Z. -1970. -Bd.148, N 1. -S.1-8.
14. Lockett P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ //Math.Z. -1974. -Bd.137, N 2. -S.131-136.
15. Lausch H. On normal Fitting classes //Math.Z. -1973. -Bd.130, N 1. -S.67-72.
16. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: ИМ РАН. Изд-е 11. -1990. -125с.

17.Hawkes T.O. Sceletal classes of soluble groups //Arch.Math. -1971.- Bd.22, N 6. -S.577-589.

18.Скиба А.Н. Кратно локальные формации //10-й Всесоюз.симпозиум по теории групп: Тез.докл. -Минск, 1986. -С.211.

19.Шеметков Л.А. Экраны произведения формаций // Докл.АН БССР.-1981. - Т.25, N 8. С.677-680.

20.Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. -1984.-Т.28, N 2. -С.101-103.

21.Doerk K., Hauck P. Frattiniduale und Fittingklassen endlicher auflosbarer Gruppen //J.Algebra. -1981. -Vol.69, N 4. -P.402-415.

22.Bryce R.A., Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes //Math.Z. -1975. -Bd.141, N 2. -S.99-110.

23.Gallego M.P.Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture //Commun.Algebra. -1996. -Vol.24, N 6. -P.2011-2032.

24.Erichcon R.P. Products of saturated formations // Commun. Algebra. - 1982. - V01.10, № 18. - P. 1911-1917.

25.Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзн. симпозиум по теории групп. - Киев. Навукова думка. - 1980. С. 37-50.

26.Гойко В.И. $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп - Минск: Наука и техника, 1986. - С. 34-42.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

27.Воробьев Н.Т. Максимальные экраны и характеризация f-проекторов //Докл. АН БССР. - 1978. -Т. 22, N 1. -С.9-11.

28.Воробьев Н.Т. Максимальные экраны формаций //Докл. АН БССР.-1978. -Т. 22, N 7. С. 584-587.

29 Воробьев Н.Т. Максимальные экраны порожденных формаций //Докл АН БССР. -1979. -Т.23, N 2. -С. 115-117.

30 Воробьев Н.Т. Максимальные экраны локальных формаций //Алгебра и логика. -1979. -Т.18, N 2. -С.137-161.

31.Воробьев Н.Т. Вложение локальных экранов //Матем.заметки.-1981.-Т.30, вып.2. С.305-311.

32.Воробьев Н.Т. О максимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга //8-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез. докл. - Киев. -1982. -С.51.

33.Воробьев Н.Т. Об одном признаке локальности формационных произведений // Матем. заметки. -1983. -Т.34, вып.2. -С.165-170.

34.Воробьев Н.Т. О локальных классах Фиттинга // 17-я Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. сообщ. Ч.II. -Минск, 1983. - С.43.

35.Воробьев Н.Т. О признаках локальности радикальных классов и формаций // 9-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез.докл.-Москва,1984. - С.88-89.

36.Воробьев Н.Т. О построении некоторых классов формаций // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. -Минск: Наука и техника, 1984. С.39-47.

37.Воробьев Н.Т. Признаки локальности формационных произведений // Вопросы алгебры. -Минск: Университетское, 1985.- № 1. С.39-47.

38.Воробьев Н.Т. Максимальные экраны порожденных локальных формаций // Весці АН БССР. Сер. фіз.матэм.навук. -1985. -3. С.31-35.

39.Воробьев Н.Т. Об одном предположении Локетта //18-я Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. сообщ.Часть вторая. -Кишинев, 1985. - С.99.

40 Воробьев Н.Т. О построении формаций и классов Фиттинга при помощи операторов Локетта // 10-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез.докл. -Минск, 1986. - С.48.

41.Воробьев Н.Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры -Минск: Университетское, 1986. - № 2. - С.41-50.

42.Воробьев Н.Т. О проблеме построения классов Фиттинга //19-я Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез.сообщ. Часть вторая. - Львов. - 1987. -С.78.

43.Воробьев Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. -1988 -Т.43, вып.2 . -С.161-168.

44.Воробьев Н.Т. О факторизациях произведений нелокальных формаций конечных групп //11-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез. сообщ. -Свердловск, 1989. -С.32-33.

45.Vorob'ev N.T. On the factorization of local and non-local products of finite groups of non-lokal formations // Proc. Intern. Math. Conf.- Kalsk (Poland): T. Cotarbinskiego, 1990. P.9-13.

46.Воробьев Н.Т. О вопросе Лауша в теории нормальных классов Фиттинга //Межд. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп. - Новосибирск, 1990. - С.19.

47.Воробьев Н.Т., Скиба А.Н. О локальных произведениях нелокальных классов Фиттинга // Межд .конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп. - Новосибирск, 1990. -С.96.

48.Воробьев Н.Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН БССР. -1991. - Т.35, N 6. - С. 485-487.

49.Воробьев Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР. Сер. фіз. матэм. навук. -1991. -№ 6. -С.22-26.

50.Воробьев Н.Т. Локальность разрешимых наследственных классов Фиттинга // Матем. заметки. -1992. -Т.51, вып.3. - С.3-8.

51.Воробьев Н.Т. О нелокальных классах Фиттинга с условиях Локетта //Конф. математиков Беларуси: Тез. докл. Ч.1. -Гродно. -1992. С.13.

52.Воробьев Н.Т. О групповых функциях локальных классов Фиттинга //Межд. матем. конф.: Тез. докл. Ч.1. -Минск. -С.9.

53.Воробьев Н.Т. О максимальных и минимальных групповых функциях локальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. -Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. 1992. - № 7. -С.60-69.

54.Воробьев Н.Т. О факторизациях нелокальных формаций конечных групп //Сб. Вопросы алгебры. -Минск.: Университетское, 1993. -Вып.6. - С.21-24.

55.Воробьев Н.Т. Характеризация кратно локальных классов Фиттинга посредством формаций //Межд. конф. по проблемам матем. и информатики: Тез. докл. -Гомель. -1994. -С.28.

56.Воробьев Н.Т., Толкачева А.Ф. О локальных порожденных классах Фиттинга // Междун. конф. по проблемам матем. и информатики. Тез. докл. - Гомель. - 1994. - С.30

57.Vorob'ev N.T., A.Grytczuk. On Lockett's conjecture for finite groups // Tsukuba J. Math. -1994. -Vol. 18. N 1. -P.63-67.

58.Воробьев Н.Т. О наследственных классах Фиттинга // Междун. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории групп. -Красноярск, 1993. -С.42

59.Воробьев Н.Т. Классы Хартли и иньекторы конечных разрешимых групп // Науч. матем. конф.: Тез. докл. -Минск. -1995. -С. 120.

60.Воробьев Н.Т., Скиба А.Н. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. -Гомель: Изд-во Гомельского университета 1995. - № 8. -С. 55-58.

61. Воробьев Н.Т. О гипотезе Локетта в теории радикальных классов //Матер.Межд.конф.,посвященной памяти академика С.А.Чунихина. Ч.1. -Гомель. 1995. -С.42-43.

62.Воробьев Н.Т. О строении иньекторов в П-разрешимых группах // Матер. Межд. конф. посв. памяти академика С.А.Чунихина Ч.1. -Гомель, 1995. -С.44

63.Воробьев Н.Т. Об аналоге проблемы Гашюца // YII Белорусская матем. конф.: Тез. докл. Ч.1. -Минск. -1996. -С.97-98.

64.Воробьев Н.Т. Метод Хартли для инъекторов //YII Белорусская матем. конф.: Тез.докл. Ч.1. -Минск. -1996. -С.98-99.

65.Воробьев Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб.матем. Ж. -1996. -Т. 37, N 6. С. 1296-1302

66.Vorob'ev N.T. The devolepment of the local Hartle'ys method in the theory of finite solvable groups // Сб. научн. трудов аспирантов и докторантов. - Витебск: Изд-во Витебского ун-та. -1996. -С.137-156.

Р Э З Ю М Е

Вараб'еў Мікалай Цімафеевіч

Развіцце лакальнага метада Хартлі ў тэорыі канечных вырашальных груп

<u>Ключавыя словы</u>: канечная вырашальная група, радыкал, радыкальны клас, лакальны радыкальны клас, функцыя Хартлі, клас Хартлі, ін'ектар, фармацыя.

У дысертацыі для пабудовы структурнай тэорыі радыкальных класаў канечных вырашальных груп (класаў Фітынга) развіты і выкарастаны лакальны метад Хартлі. С дапамогай гэтага метада вырашаны шэраг вядомых праблем тэорыі класаў канечных вырашальных груп: падцверджана гіпотыза Локета аб структуры радыкальнага класа для лакальных радыкальных класаў , дзве праблемы Лауша аб рашотачных уласцівасцях нармальных радыкальных класаў, Л.А.Шеметкова структуры і класіфікацыі спадчынных радыкальных класаў, праблема Дзерка-Хоукса аб фратынеевай двоіснасці для кратна лакальных радыкальных класаў, праблемы фактарызацыі радыкальных класаў і лакальных фармацый. Вырашана задача Хартлі апісання ин'ектараў з дапамогай радыкалаў.

Усе асноўныя вынікі работы з'яўляюцца новымі, маюць тэарэтычны характэр і могуць быць выкарастаны ў даследаваннях па тэорыі радыкалаў и радыкальных класаў груп, па тэорыі класаў Фітынга і фармацый канечных груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў ва універсітэтах і пединстытутах.

Р Е З Ю М Е

Воробьев Николай Тимофеевич

Развитие локального метода Хартли
в теории конечных разрешимых групп

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, радикал, радикальный класс, локальный радикальный класс, функция Хартли, класс Хартли, инъектор, формация.

В диссертации для построения структурной теории радикальных классов конечных разрешимых групп (классов Фиттинга) развит и применен локальный метод Хартли С помощью этого метода решен ряд известных проблем теории классов конечных разрешимых групп: подтверждена гипотеза Локетта о структуре радикального класса для локальных радикальных классов, две проблемы Лауша о решеточных свойствах нормальных радикальных классов, проблема Л.А.Ше-меткова структуры и классификации наследственных радикальных классов, проблема Дёрка-Хоукса о фраттиниевой двойственности для кратно локальных классов, проблемы факторизации локальных радикальных классов и локальных формаций Решена задача Хартли описания инъекторов посредством радикалов.

Все основные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории радикалов и радикальных классов групп, по теории классов Фиттинга и формаций конечных групп, а также при чтении спецкурсов в университетах и пединститутах.

SUMMARY

Vorobyov Nikolay Timofeevich

The development of the local Hartley's method in the theory of finite solvable groups

Key words: finite solvable groups, radical class, Harley's function, Hartley's class, injector, formation.

In the thesis the local Hartley's method has been developed and applied for a construction of structural theory of the radical classes of finite sobvable groups (Fitting classes). With the help of this method the series of famous problems of the theory of classes of finite solvable groups have been solved (Lockett conjecture about a structure of a radical class for local radical classes, two Lausch problems about lattice properties of normal radical classes, Shemetkov problem of a structure and classification of subgroup-closed radical classes, Doerk-Hawkes problem about Frattini duality for multiply local radical classes, the problems of factorizations of local radical classes and local formations have been solved). The Hartley's problem of the description of injectors by means of radicals has been solved.

All the main results of the thesis are new. They are of great theoretical value and can be used in the investigations connected with radicals and radical classes theory of groups and Fitting classes and formations theory of finite groups as well as for teaching students at universities.