УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ВОРОБЬЕВ
Сергей Николаевич

КЛАССЫ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2014

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Научный руководитель: **Залесская Елена Николаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета, учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова», математический факультет

Официальные оппоненты: **Гальмак Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия», кафедра высшей математики

Селькин Вадим Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии

Оппонирующая организация – Белорусский государственный университет.

Защита состоится 24 мая 2014 года в 14^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 24 апреля 2014 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д.А. Ходанович

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных направлений исследований в теории групп и их классов является развитие и обобщение силовской теории. Это, прежде всего, приводит к задаче нахождения новых канонических классов сопряженных подгрупп в конечных группах — аналогов подгрупп Силова и Холла. Крупный вклад в построение неарифметической силовской теории (силовская теория базировалась ранее на свойствах порядков подгрупп) — обобщение в терминах формаций фундаментальных теорем Силова[1], Холла[2] и Картера[3] – представляет теорема Гашюца[4] о том, что *в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в каждой группе существуют $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы и любые две из них сопряжены.*

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то подгруппу $E \in \mathfrak{F}$ группы G называют *$\mathfrak{F}$-покрывающей*, если E покрывает каждый фактор из $\mathfrak{F}$ всякой промежуточной группы между E и G, т.е. из $E \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{F}$ следует $H = EK$.

Продолжая развитие силовской теории, Фишер[5] определил класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, и подгруппу $F \in \mathfrak{F}$ группы G, которая содержит все нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы каждой промежуточной группы между F и G. Такие объекты в теории классов называют *классами Фиттинга* и *$\mathfrak{F}$-подгруппами Фишера*. Было установлено[5], что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ в любой группе $G \in \mathfrak{S}$ существуют $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены в случае, когда класс $\mathfrak{F}$ частично наследственен, т.е. замкнут относительно подгрупп вида PN, где P — силовская и N — нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$.

Дальнейшее развитие силовской теории привело к новому изящному обобщению теорем Силова и Холла: Гашюцом, Фишером, Хартли[6] было доказано, *что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ в каждой группе $G \in \mathfrak{S}$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

При этом *$\mathfrak{F}$-инъектор* G – такая ее подгруппа V, что $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N

[1]Sylow, M.L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M.L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.

[2]Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

[3]Carter, R.W. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups / R.W. Carter // Math. Z. – 1961. – Bd. 75. – S. 136–139.

[4]Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

[5]Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen: Habilitationschrift. – Universität Frankfurt (M). – B. Fischer – Frankfurt (M). 1966.

[6]Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337-339.

группы G.

По предложению Хартли[7], частично наследственные классы из работы[5] стали называть *классами Фишера*. Важная роль таких классов обусловлена, прежде всего, теоремой Хартли[7] о том, что для любого класса Фишера $\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{S}$ в группе $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера — это, в точности, $\mathfrak{F}$-инъекторы G. Вместе с тем, Дарк[8] показал, что существуют такие разрешимые классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и группы $G \in \mathfrak{S}$, для которых $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера G не являются $\mathfrak{F}$-инъекторами G. В связи с этим актуальна *задача описания классов Фиттинга (в частности, классов Фишера), для которых $\mathfrak{F}$-инъекторы группы (в общем случае неразрешимой) и ее $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера совпадают.*

Начиная с 70-х годов прошлого столетия, благодаря результатам Локетта[9], Хоукса[10] и Дерка-Хоукса[11] стала формироваться алгебра разрешимых классов Фишера. В частности, в классе $\mathfrak{S}$ было установлено[9,10], что произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера, а сам класс Фишера $\mathfrak{F}$ состоит из всех тех групп, нильпотентные корадикалы которых субнормально вложены в группы из $\mathfrak{F}$. Кроме того, было показано[11], что разрешимая насыщенная формация является классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника — классы Фишера. Все это приводит к *задаче изучения свойств произведений классов Фишера и нахождения их характеризаций в классе $\mathfrak{E}$ произвольных конечных групп.*

Одной из важных задач при изучении алгебры классов групп является задача описания методов построения классов Фиттинга и формаций при помощи заданных свойств холловых подгрупп (см. например, главы IX X книги[11]). Ориентиром для таких исследований служит следующая

Гипотеза (Л.А. Шеметков[12], проблема 19). *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда $C_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация ($C_\pi\mathfrak{F}$ — класс всех конечных групп, в которых холловы π-подгруппы существуют, сопряжены и являются $\mathfrak{F}$-подгруппами).*

[7]Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

[5]Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen: Habilitationschrift. – Universität Frankfurt (M). / B. Fischer – Frankfurt (M), 1966.

[8]Dark, R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups / R. Dark // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – S. 145–156.

[9]Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups : Ph.D, thesis: University of Warwick./ F.P. Lockett. – Warwick, 1971.

[10]Hawkes, T.O. A Fitting Class Construction / T.O. Hawkes // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1976. – Vol. 80. – P. 437–446.

[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[12]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит. 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

В теории локальных классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ справедливость аналога гипотезы Шеметкова подтверждена[13]. Известно, что всякий локальный класс Фиттинга является классом Фишера, хотя обратное, в общем случае, неверно. В связи с этим представляет интерес следующий

Аналог гипотезы Шеметкова. *Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – класс Фишера. Доказать, что класс $C_\pi\mathfrak{F}$ – класс Фишера.*

Многие исследования по теории конечных групп связаны с изучением таких классов Фиттинга в классе $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, для которых $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами в каждой группе $G \in \mathfrak{X}$. Такие классы называют *нормальными в* $\mathfrak{X}$. Основополагающей в этом направлении исследований является работа Блессеноля–Гашюца[14], где существенное различие между теорией формаций и классов Фиттинга подтверждено построением серии нетривиальных примеров разрешимых нормальных классов Фиттинга, которые не являются формациями, а также доказано, что пересечение любого множества нормальных классов Фиттинга в классе Фишера $\mathfrak{S}$ является нормальным классом Фиттинга в $\mathfrak{S}$. Это приводит к постановке следующей общей задачи: *доказать, что пересечение любого множества классов Фиттинга, нормальных в классе Фишера* $\mathfrak{X}$, *является классом Фиттинга, нормальным в* $\mathfrak{X}$. Данная задача для класса Фиттинга $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ известна как **проблема Дерка-Хоукса** (см. проблема[11], с. 716).

Следует отметить, что все ранее известные исследования классов Фишера ограничивались лишь рамками универсума $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Таким образом, актуальным является изучение алгебры классов Фишера и ее применение к решению указанных выше задач в классе конечных (в общем случае неразрешимых) групп. Этому и посвящена настоящая диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационное исследование выполнялось в рамках:

– составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова», входящего

[13]Загурский, В. Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами холловых подгрупп / В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев // Математические заметки. – 2005. – Т. 78, – Выпуск 2. – С. 234–240.

[14]*Blessenohl, D.* Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.

[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

в Государственную программу фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»), тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г., выполнялась в 2006-2010 гг, регистрационный номер БелИСА — 20062003;

составной части задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в государственную программу научных исследований на 2011-2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»), подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы»), регистрационный номер БелИСА — 20111880;

гранта БРФФИ на 2011-2012 гг. «Классы конечных групп с заданными свойствами канонических подгрупп», номер госрегистрации в БелИСА — 20114649;

гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов на 2009 г. «Классы Фишера конечных групп», номер государственной регистрации БелИСА — 2009019 и гранта Министерства образования Республики Беларусь для аспирантов на 2013 г. «Инъекторы и подгруппы Фишера конечных групп», регистрационный номер БелИСА — 20130805.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является разработка новых методов исследования классов конечных групп и их применение к нахождению основных структурных свойств и закономерностей алгебры классов Фишера конечных групп. Для достижения этой цели было необходимо решить следующие *задачи*:

определить на множестве классов Фишера алгебраические операции замыкания, умножения и посредством этих операций описать структуру классов Фишера и формаций Фишера;

разработать общие методы построения классов Фишера при помощи холловых операторов, на основе которых подтвердить аналог гипотезы Шеметкова для классов Фишера в случае их π-разрешимости (см. гипотезу о построении насыщенных формаций[12], проблема 19);

[12]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит. 1978. — 272 с. — (Соврем. алгебра).

решить проблему Дерка-Хоукса (1992 г.) о пересечении классов Фиттинга, нормальных в идемпотентном классе Фиттинга, для частично разрешимого класса Фишера $\mathfrak{X}$ без условия его идемпотентности: доказать, что в этом случае пересечение любого множества классов Фиттинга, нормальных в $\mathfrak{X}$, – класс Фиттинга, нормальный в $\mathfrak{X}$;

– описать необходимое и достаточное условие совпадения подгруппы Фишера и инъектора во множестве Фишера конечной группы (в общем случае неразрешимой) и найти в ней новый канонический класс сопряженных подгрупп Фишера.

Объектом исследования является алгебра классов Фишера конечных групп.

Предмет исследования – структурные свойства классов Фишера и их применение для построения классов конечных групп и канонических классов сопряженных подгрупп конечных групп.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание структуры классов Фишера и формаций Фишера при помощи операций умножения и замыкания (теоремы 2.2.9 [2-А] и 2.3.6 [3-А]).

2. Подтверждение аналога гипотезы Шеметкова (Л.А. Шеметков[12], проблема 19) в случае π-разрешимых классов Фишера: доказательство теоремы о том, что для любого множества простых чисел π и класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех π- разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, является классом Фишера (теорема 3.3.4 [4-А]).

3. Положительное решение проблемы Дерка-Хоукса (см. проблема[11], с. 716) об алгебраичности операции пересечения на множестве подклассов Фиттинга, нормальных в идемпотентном классе Фиттинга, для частично разрешимого класса Фишера без условия его идемпотентости (теорема 4.3.7 [5-А]).

4. Описание необходимого и достаточного условия совпадения $\boldsymbol{F}$-подгруппы Фишера с $\boldsymbol{F}$-инъектором во множестве Фишера $\boldsymbol{F}$ конечной группы с разрешимой факторгруппой по ее $\boldsymbol{F}$-радикалу и нахождение в этой группе нового канонического класса сопряженных $\boldsymbol{F}$-подгрупп Фишера (теорема 5.3.2 и следствие 5.3.9 [6-А]).

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

[12]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит. – 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных с научным руководителем работах [1-А, 2-А, 4-А, 7-А, 9-А, 10-А, 12-А, 14-А, 16-А, 24-А] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а их реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины; на Международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова (Гомель, 9-11 июля 2007 г.); на X Республиканской научно-методической конференции молодых ученых (Брест, 15-16 мая 2008 г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 28 мая-3 июня 2008 г.); на Международной научной конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3-7 ноября 2008 г.); на Республиканской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (Витебск, 24-25 марта, 2009 г.); на XV(62) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике», посвященной 100-летию со дня основания УО «ВГУ им. П.М. Машерова» (Витебск, 3-5 марта 2010 г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева (Санкт-Петербург, 19-24 июня 2010 г.); на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «IV Машеровские чтения» (Витебск, 28-29 октября 2010 г.); на XVI(63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 16-17 марта 2011 г.); на 8-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 60-летию со дня рождения профессора В.М. Усенко (Луганск, 5-12 июля 2011); на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «V Машеровские чтения» (Витебск, 29-30 сентября 2011 г.); на Международной научно-практической Интернет-конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева (Витебск, 21-22 июня 2011 г.); на XVII(64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука – образованию, производству, экономике» (Витебск, 14-15 марта 2012 г.); на Международной математической конференции, посвященной 70-летию профессора В.В. Кириченко (Николаев, 13-19 июня 2012 г.); на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Н. Черникова (Киев, 20-26 августа 2012 г.); на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VI Машеровские чтения» (Витебск, 27-28 сентября 2012 г.); на Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 4-9 ноября 2012 г.); на XVIII(65) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск 14-15 марта 2012 г.); на 9-ой Международной алгебраической конференции в Украине (Львов, 8-13 июля 2013 г.); на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VI Машеровские чтения» (Витебск, 24-25 сентября 2013 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях и в 21 тезисах и материалах докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов – 5,115 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах – 3,24 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций – 1,875 авторских листа. Общее количество страниц опубликованных материалов – 74.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 82 наименований. Объем диссертации – 99 страниц, из них 11 страниц составляет библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – кандидату физико-математических наук, доценту Залесской Елене Николаевне за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертационной работе группы предполагаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем[11].

[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка.

Глава 1 «Постановка задач и предварительные сведения» содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. В данной главе изложены этапы развития алгебры разрешимых классов Фишера и на основе проведенного анализа литературных источников сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Ключевым понятием диссертационного исследования является понятие класса Фишера. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*[7], если из условий $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$, $K \leq H \leq G$ и H/K является p-группой для некоторого простого p следует $H \in \mathfrak{F}$. Заметим, что семейство таких классов обширно: оно содержит все наследственные классы Фиттинга.

Основные результаты диссертации представлены в главах 2–5. Глава 2 «Операции на классах Фишера» посвящена изучению свойств операций умножения и замыкания на множестве классов Фишера произвольных групп и характеризации классов Фишера и частично локальных формаций в терминах этих операций. Напомним, что *произведением классов Фиттинга* (в частности, классов Фишера) $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. В разделе 2.1 мы расширяем понятие класса Фишера следующим образом. Пусть π - некоторое непустое множество простых чисел и Λ — такое произвольное непустое множество, что выполняются следующие условия: 1) $\pi(\lambda)$ непустое подмножество простых чисел из π для всех $\lambda \in \Lambda$; 2) $\pi = \cup_{\lambda\in\Lambda}\pi(\lambda)$; 3) $\pi(\lambda) \cap \pi(\mu) = \varnothing$ для каждого $\lambda \neq \mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$).

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *Λ-классом Фишера* [1-А], если из условий $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G, K \leq H \leq G$ и H/K является нильпотентной $\pi(\lambda)$-группой для некоторого $\lambda \in \Lambda$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

В случае, если $\pi = \Lambda = \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ - множество всех простых чисел) и $\pi(\lambda) = \{p\}$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $p \in \mathbb{P}$, то Λ-класс Фишера является классом Фишера.

2.1.3 Теорема [1-А]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ - Λ-классы Фишера, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является Λ-классом Фишера.*

2.1.4 Следствие [1-А]. *Произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.*

2.1.5 Следствие (Локетт[9]). *Произведение двух любых разрешимых классов Фишера — класс Фишера.*

---

[7]Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

[9]Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups – Ph.D. thesis : University of Warwick / F.P. Lockett. Warwick, 1971.

Раздел 2.2 посвящен характеризации классов Фишера в терминах операции замыкания, определяемой свойством субнормального вложения корадикалов подгрупп в группы из класса Фишера. Напомним, что отображение C называют *операцией замыкания*, если C сопоставляет каждому классу групп $\mathfrak{K}$ класс групп $\mathrm{C}\mathfrak{K}$ такой, что $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{K} = \mathrm{C}(\mathrm{C}\mathfrak{K})$ и из $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$ следует $\mathrm{C}\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{K}_2$ для классов групп $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$. Класс групп $\mathfrak{K}$ называют C-*замкнутым*, если $\mathrm{C}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп и $\mathfrak{X}$ — непустой R_0-замкнутый класс групп, т.е. класс групп, замкнутый относительно взятия конечных подпрямых произведений. Через $\mathrm{S}_{\mathrm{F}\mathfrak{X}}$ обозначим операцию, которая сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{K}$ класс групп $\mathrm{S}_{\mathrm{F}\mathfrak{X}}\mathfrak{K} = (H : H \leq G \in \mathfrak{K}$ и $H^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq \trianglelefteq G)$. Заметим, что в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и разрешимого класса $\mathfrak{K}$ такая операция была определена и использована Хоуксом[10] для характеризации разрешимых классов Фишера. Исследование возможностей применения операции $\mathrm{S}_{\mathrm{F}\mathfrak{X}}$, в общем случае, приводит к следующему обобщению понятия класса Фишера.

2.2.3 Определение [2-А]. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *$\mathfrak{X}$-классом Фишера*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп и из $K \leq H \leq G \in \mathfrak{F}$; $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{X}$ следует $H \in \mathfrak{F}$.

2.2.9 Теорема [2-А]. *Для любой непустой наследственной формации $\mathfrak{X}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathrm{S}_{\mathrm{F}\mathfrak{X}}$-замкнутый класс.*

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ получаем

2.2.11 Следствие (Хоукс[10]). *Разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Фишера, в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ — S_{F}-замкнутый класс.*

Известно, что не каждая локальная формация является классом Фишера. В связи с этим возникает задача описания локальных формаций, которые являются классами Фишера, т.е. *формаций Фишера*. Используя концепцию частичной локализации Скибы-Шеметкова[15], в разделе 2.3 мы решаем более общую задачу в этом направлении исследований — задачу описания ω-локальных формаций Фишера.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P}/\omega$ и назовем ω-функцией отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow$\{формации групп\}. Для ω-функции f через $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп

$$(G : G/O_\omega(G)) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)),$$

где $O_\omega(G)$ и $F_p(G)$ – ω-радикал группы G и p-нильпотентный радикал груп-

[10] Hawkes, T.O. A Fitting Class Construction / T.O. Hawkes // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1976. – Vol. 80. – P. 437–446.

пы G соответственно. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *ω-локальной*[15] с ω-локальным спутником f, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой ω-функции f. Если $\omega = \mathbb{P}$, то ω-локальную формацию называют *локальной*, а её ω-локальный спутник f – *локальным*. Известно[15], что каждая ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется каноническим ω-локальным спутником F таким, что $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$ и $F(\omega') = \mathfrak{F}$. При помощи теоремы 2.1.3 мы устанавливаем критерий ω-локальной формации Фишера, что представляет

2.3.6 Теорема [3-А]. *Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если f – ω-локальный спутник $\mathfrak{F}$ такой, что $f(a)$ – формация Фишера для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то $\mathfrak{F}$ – формация Фишера.

2) $\mathfrak{F}$ является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения её канонического ω-локального спутника – формации Фишера.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ получаем

2.3.8 Следствие (Дерк, Хоукс[11], IX.3.6). *Разрешимая локальная формация является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника – формации Фишера.*

Третья глава диссертации "Классы Фиттинга с заданными свойствами холловых подгрупп"посвящена разработке новых методов построения классов Фишера при помощи заданных свойств холловых π-подгрупп. Ориентиром для исследований в данной главе служит следующая гипотеза из теории формаций.

Гипотеза (Л.А. Шеметкова[12], проблема 19). *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Доказать, что $C_\pi\mathfrak{F}$ – локальная формация.*

Следуя[16], группу G будем называть E_π-группой, если в G имеется хотя бы одна холлова π-подгруппа, и C_π-группой, если G является E_π-группой и любые две холловы π-подгруппы G сопряжены. Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то символом $E_\pi\mathfrak{X}$ обозначим класс всех групп, обладающий по крайней мере одной холловой π-подгруппой, принадлежащей $\mathfrak{X}$, а символом $C_\pi\mathfrak{X}$ – класс групп $C_\pi \cap E_\pi\mathfrak{X}$, где C_π — класс всех C_π-групп.

Наиболее значительные результаты, относящиеся к данной гипотезе, бы-

---

[15]Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л.А. Шеметков / Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

[15]Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л.А. Шеметков / Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[12]Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит. 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).

[16]Hall, P. Theorem's like Sylow's / P. Hall / Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, № 2. – P. 286–304.

ли достигнуты в теории формаций в работе[17]. Вместе с тем, аналог гипотезы для локальных классов Фиттинга исследовался и был подтвержден в разрешимом и π-разрешимом случае[13,18].

В разделе 3.1 нами установлено, что каждый локальный класс Фиттинга является классом Фишера и построены семейства классов Фишера, которые не являются локальными классами Фиттинга (теорема 3.2.1). В связи с этим естественен следующий

Аналог гипотезы Шеметкова. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — класс Фишера. Доказать, что $C_\pi\mathfrak{F}$ — класс Фишера.*

Подтверждение указанного предположения в классе $\mathfrak{S}^\pi$ всех π-разрешимых групп дает

3.3.4 Теорема [4-А]. *Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда для любого класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех π-разрешимых $C_\pi\mathfrak{F}$-групп является классом Фишера.*

В главе 4 «Классы Фишера с нормальными инъекторами» исследуется нормальное строение классов Фишера. Основополагающими результатами для таких исследований являются результаты Блессеноля–Гашюца[14], благодаря которым было установлено существенное различие между теориями формаций и классов Фиттинга: определены, так называемые, нормальные подклассы Фиттинга в классе Фишера $\mathfrak{S}$, каждый из которых не является формацией.

Напомним, что разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является *нормальным*, если для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъектор — нормальная подгруппа G. Кроме того, в теории классов известна теорема Блессеноля–Гашюца[14] о том, что пересечение любого множества нееденичных разрешимых нормальных классов Фиттинга является нееденичным разрешимым нормальным классом Фиттинга.

Поиск аналогов теоремы Блессеноля-Гашюца[14] обуславливает

Проблема (Дерк, Хоукс[11], с. 716). *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ — класс Фиттинга. Верно ли, что пересечение двух $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга?*

Положительное решение данной проблемы для случая, когда $\mathfrak{X}$ — частично разрешимый класс Фишера (в общем случае $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$) — основной результат

[17]Вдовин, Е. П. Формации конечных C_π-групп / Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин, Л. А. Шеметков // Алгебра и анализ. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 40–52.

[13]Загурский, В. Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами холловых подгрупп / В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев // Математические заметки. – 2005. – Т. 78, – Выпуск 2. – С. 234–240.

[18]Guo, W. On the Shemetkov problem for Fitting class / W. Guo, B. Li // Beitrage Algebra Geom. – 2007. – Bd. 48, № 1. – S. 281–289.

[14]Blessenohl, D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbaren Gruppen / D. Blessenohl // Math. Z. – 1975. – Bd. 142, № 3. – S. 299-300.

[11]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

данной главы. Основное ее содержание составляют три взаимосвязанных раздела. Разделы 4.1 и 4.2 посвящены нахождению новых канонических классов сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в любой π-разрешимой группе для классов Фиттинга, определяемых полулокально с носителем π, т.е. π-насыщенных классов — классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{F}$ (теорема 4.2.3 [5-А]). В частности, установлено, что *каждая π-разрешимая группа обладает единственным классом сопряженных π-замкнутых инъекторов и единственным классом сопряженных π-специальных инъекторов* (следствия 4.2.4 и 4.2.5 [5-А]).

Основной результат представляет

4.3.7 Теорема [5-А]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ — множество классов Фиттинга, нормальных в $\mathfrak{X}$, и $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для любого $i \in I$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ определяется полулокально H-функцией f_i с носителем π и каждая группа из $\mathfrak{X}$ является π-разрешимой, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$;*

2) *если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ такова, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ — $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимая группа, то $\mathfrak{F}$ — нормальный подкласс Фиттинга в $\mathfrak{X}$.*

4.3.8 Следствие (Блессеноль,Гашюц[14]). *Пересечение любого множества неединичных разрешимых нормальных классов Фиттинга является неединичным разрешимым нормальным классом Фиттинга.*

Заключительная глава диссертации «Подгруппы Фишера» посвящена групповым аспектам развития алгебры классов Фишера: в ней найден новый канонический класс сопряженных подгрупп Фишера во множестве Фишера конечной частично разрешимой группы и установлен критерий совпадения подгруппы Фишера и инъектора в этих множествах.

Непустое множество $\boldsymbol{F}$ подгрупп группы G называют *множеством Фиттинга группы G*, если $\boldsymbol{F}$ замкнуто относительно взятия субнормальных подгрупп, нормальных произведений и внутренних автоморфизмов G. Заметим, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фиттинга $\{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\}$. Его называют следом $\mathfrak{F}$ в G и обозначают $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$. Однако не каждое множество Фиттинга группы является следом класса Фиттинга (см. книгу[11], VIII.2.2). Понятия $\boldsymbol{F}$-радикала, $\boldsymbol{F}$-инъектора, $\boldsymbol{F}$-подгруппы Фишера и множества Фишера определяются для множества Фиттинга $\boldsymbol{F}$ точно так же, как и для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Более того, $\mathfrak{F}$-радикал, $\mathfrak{F}$-инъектор и $\mathfrak{F}$-подгруппа Фишера группы G — это, в точности, $\boldsymbol{F}$-радикал, $\boldsymbol{F}$-инъектор и $\boldsymbol{F}$-подгруппа Фишера группы G для случая множества Фиттинга $\boldsymbol{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$

[14] *Blessenohl, D.* Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.

[11] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

и поэтому результаты для множеств Фиттинга, относящиеся к этим подгруппам, обобщают соответствующие результаты в теории классов Фиттинга.

Напомним для множества Фиттинга определение, дуальное определению $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы Гашюца ($\mathfrak{F}$ – насыщенная формация), которое впервые было введено Фишером[5] для разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустое множество Фиттинга группы G. Тогда подгруппа $F \in \boldsymbol{F}$ называется ***F*-подгруппой Фишера** группы G, если F содержит все нормальные $\boldsymbol{F}$-подгруппы каждой промежуточной группы между F и G, т.е. из $F \leq L \leq G$ следует $F \geq L_{\boldsymbol{F}}$.

Основной результат главы – критерий $\boldsymbol{F}$-подгруппы Фишера для множества Фишера $\boldsymbol{F}$ частично разрешимой группы. Для его доказательства в разделах 5.1 и 5.2 изучены свойства и методы построения $\boldsymbol{F}$-инъекторов для множества Фиттинга $\boldsymbol{F}$ группы G такой, что $G/G_{\boldsymbol{F}}$ – разрешимая группа. В частности, в разделе 5.1 найден следующий аналог произведения классов Фиттинга для множества Фиттинга группы G: *если $\boldsymbol{F}$ – множество Фиттинга G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то множество $\boldsymbol{F} \circ \mathfrak{X} = \{H \leq G \mid H/H_{\boldsymbol{F}} \in \mathfrak{X}\}$ является множеством Фиттинга G* (теорема 5.1.6). Одно из важных наблюдений в разделе 5.2 – утверждение 3) теоремы 5.2.2 о том, что *для любого множества Фишера $\boldsymbol{F}$ группы $G \in \boldsymbol{F} \circ \mathfrak{S}$ ее $\boldsymbol{F}$-инъекторы нормально вложены в G*, т.е. *силовская p-подгруппа $\boldsymbol{F}$-инъектора является силовской p-подгруппой некоторой нормальной подгруппы G для каждого $p \in \mathbb{P}$*.

5.3.2 Теорема [6-А]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фишера $\boldsymbol{F} \circ \mathfrak{S}$-группы G. Подгруппа F группы G является $\boldsymbol{F}$-подгруппой Фишера группы G, в точности, тогда, когда F является $\boldsymbol{F}$-инъектором группы G.*

Многие известные результаты из теорий множеств Фиттинга и классов Фиттинга являются следствиями данной теоремы. Приведем некоторые из них.

5.3.9 Следствие [6-А]. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фишера $\boldsymbol{F} \circ \mathfrak{S}$-группы G. Тогда G имеет единственный класс сопряженных $\boldsymbol{F}$-подгрупп Фишера.*

5.3.10 Следствие (Андерсон[19]). *Пусть $\boldsymbol{F}$ – множество Фишера разрешимой группы G. Подгруппа F является $\boldsymbol{F}$-подгруппой Фишера G в том и только в том случае, если F – $\boldsymbol{F}$-инъектор группы G. Кроме того, G имеет $\boldsymbol{F}$-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.*

5.3.11 Следствие (Хартли[7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый класс Фишера и G – разрешимая группа. Тогда $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера G – это, в точности,*

---

[5] Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen: Habilitationschrift. – Universität Frankfurt (M). / B. Fischer – Frankfurt (M), 1966.

[19] Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P.333–338.

[7] Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

ее $\mathfrak{F}$-инъекторы.

5.3.12 Следствие (Фишер[5]). *В любой разрешимой группе для любого разрешимого класса Фишера $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.*

[5]Fischer. B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen: Habilitationschrift. Universitat Frankfurt (M). / B. Fischer. Frankfurt (M). 1966.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации описаны структурные закономерности и свойства алгебры классов Фишера, на основе которых разработаны новые методы построения классов групп и изучения их структуры, а также найдены канонические классы сопряженных подгрупп в частично разрешимых группах. Основные результаты диссертации следующие.

Во второй главе диссертации получено описание классов Фишера и формаций Фишера в терминах операций умножения и замыкания. В разделе 2.1 установлено, что произведение двух любых Λ-классов Фишера (в частности, классов Фишера) является Λ-классом Фишера (классом Фишера), теорема 2.1.3 [1-А]. В разделе 2.2 получена следующая характеризация обобщенных классов Фишера ($\mathfrak{X}$-классов Фишера, где $\mathfrak{X}$ — наследственная формация): класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера (в частности, классом Фишера), в точности, тогда, когда класс $\mathfrak{F}$ — $S_{\mathfrak{F}\mathfrak{X}}$-замкнут, т.е. $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подгрупп, $\mathfrak{X}$-корадикалы (нильпотентные корадикалы) которых субнормально вложены в группы из $\mathfrak{F}$, теорема 2.2.9 [2-А]. Раздел 2.3 посвящен описанию частично локальных формаций Фишера: доказано, что ω-локальная формация является классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического ω-локального спутника — классы Фишера, теорема 2.3.6 [3-А].

В третьей главе диссертации разработаны новые методы построения классов Фишера при помощи заданных свойств холловых π-подгрупп. Здесь основной результат — теорема 3.3.4 [4-А] о том, что для любого множества простых чисел π и класса Фишера $\mathfrak{F}$ класс всех π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, является классом Фишера. Этот результат подтверждает справедливость аналога формационной гипотезы Шеметкова для π-разрешимых классов Фишера и является новым, в частности, для разрешимых классов Фишера.

Четвертая глава посвящена исследованию нормального строения класса Фишера: здесь изучаются свойства пересечений нормальных подклассов Фиттинга в классе Фишера. Главный результат главы — теорема 4.3.7 [5-А], где, в частности, установлено, что пересечение любого множества подклассов Фиттинга, нормальных в классе Фишера $\mathfrak{X}$, является классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{X}$ в случае, когда $\mathfrak{X}$ — π-разрешим и все подклассы Фиттинга, нормальные в $\mathfrak{X}$, π-насыщены. Данная теорема положительно решает проблему Дерка-Хоукса о том, что пересечение подклассов Фиттинга, нормальных в идемпотентном классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, является нормальным в $\mathfrak{X}$ для случая, когда $\mathfrak{X}$ — частично разрешимый класс Фишера и без требования его идемпотентности. Кроме того, вспомогательные разделы 4.1 и 4.2 представляют самостоятельный интерес – они посвящены поиску новых канонических классов сопряженных инъекторов. В частности, найдены два новых канонических класса сопряженных инъекторов в любой π-разрешимой группе: π-замкнутые и π-специальные инъекторы, следствия 4.2.4 и 4.2.5 [5-А].

В заключительной главе диссертации изучаются групповые аспекты применения алгебры классов Фишера: в ней найден новый канонический класс сопряженных подгрупп Фишера и доказан критерий совпадения таких подгрупп с инъекторами во множествах Фишера конечной частично разрешимой группы.

В разделах 5.1 и 5.2 описаны свойства инъекторов и множества Фишера $\boldsymbol{F}$ группы с разрешимой факторгруппой по ее $\boldsymbol{F}$-радикалу, необходимые для доказательства основного результата главы – теоремы 5.3.2 [6-А]. Установлено, что если $\boldsymbol{F}$ – множество Фишера группы G с разрешимой факторгруппой по ее $\boldsymbol{F}$-радикалу, то подгруппа F группы G является $\boldsymbol{F}$-подгруппой Фишера G в том и только в том случае, если F – $\boldsymbol{F}$-инъектор G, причем $\boldsymbol{F}$-подгруппы Фишера существуют в G и любые две из них сопряжены.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Доказанные в диссертации результаты могут найти приложение при дальнейшем изучении нормального и подгруппового строения групп и их классов в Витебском, Гомельском, Полоцком, Белорусском госуниверситетах, университете науки и технологий КНР, университетах Майнца и Тюбингема (Германия), Валенсии и Наварры (Испания). Разработанные методы и полученные в диссертации результаты позволяют подойти к целому ряду еще нерешенных проблем теории классов конечных групп, связанных с построением классов групп и нахождением новых классов сопряженных подгрупп.

О практической значимости полученных результатов свидетельствует возможность их использования в учебном процессе при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических факультетов университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций, а также они могут служить основой для классификации формальных языков и при построении конечных автоматов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1-А. *Залесская, Е. Н.* О произведениях классов Фишера / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта імя П. М. Машэрава. — 2008. — № 3. — С. 101–105.

2-А. *Залесская, Е. Н.* О характеризации классов Фишера конечных групп / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. — 2010. — № 2. — С. 202–205.

3-А. *Воробьев, С. Н.* О формациях Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2012. — № 2. — С. 43–48.

4-А. *Воробьев, С. Н.* Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев, Е.Н. Залесская // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54, № 5. — С. 989–999.

5-А. *Воробьев, С. Н.* О нормальных подклассах класса Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 2 (15). — С. 39–49.

6-А. *Воробьев, С. Н.* Инъекторы и подгруппы Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта імя П. М. Машэрава. — 2013. — № 5(77). — С. 36–42.

Тезисы докладов конференций

7-А. *Zalesskaya, E. N.* On ω-local Fisher formations / E. N. Zalesskaya, S. N. Vorob'ev // Классы групп, алгебр и их приложения : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июля 2007 г. / Министерство обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.С. Монахов (отв. ред.) [и др.]. — Гомель, 2007. — С. 34-35.

8-А. *Воробьев, С. Н.* О факторизациях классов Фишера / С. Н. Воробьев // X Республиканская научно-методическая конференция молодых учёных : Сб. тез. докл. Брест, 15-16 мая 2008 г. / Министерство обр. Республики Беларусь, Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина; под общ. ред. К.К. Красовского. — Брест, 2008. - С. 11.

9-А. *Залесская, Е. Н.* О произведениях классов Фишера / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая–3 июня 2008 г. /

Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; оргком.: Э.Б. Винберг [и др.]. Прогр. ком.: В.А. Артамонов [и др.]. Москва, 2008. С. 101-102.

10-А. *Залесская, Е. Н.* О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения проф. А.Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; оргком.: Э.Б. Винберг [и др.]. Прогр. ком.: В.А. Артамонов [и др.]. Москва, 2008. С. 100-101.

11-А. *Воробьев, С. Н.* О характеристике Λ-класса Фишера / С. Н. Воробьев // X(55) Рег. научно-практ. конф.: сб. статей / Витебский государственный университет; редкол.: А.Л. Гладков (отв. ред.) [и др.]. Витебск: издательство УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008. С. 13-14.

12-А. *Залесская, Е. Н.* О свойствах прямых произведений радикалов для Λ-классов Фишера Фиттинга / Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. научн. конф., Минск, 3 7 ноября 2008 г. : в 2 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 31.

13-А. *Воробьев, С. Н.* Об операции замыкания для классов Фишера / С. Н. Воробьев // III Машеровские чтения: матер. респ. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных, Витебск, 24-25 марта 2009 г. / Витебский государственный университет: редкол. А.Л. Гладков (гл. ред.) [и др.]. Витебск: УО «ВГУ им. Машерова», 2009. Математика. Информатика. Философия. Экономика. Юриспруденция. С. 8.

14-А. *Zalesskaya, E. N.* On Local Fisher Classes / E. N. Zalesskaya, S. N. Vorob'ev // 7th International Algebraic Conference in Ukraine : Abstracts of talks, Kharkov, August 18-23, 2009 / Karazin Kharkov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences ; G.N. Zholtkevich, editor. – Kharkov, 2009. P. 155.

15-А. *Воробьев, С. Н.* О построении $\mathfrak{X}$-классов Фишера / С. Н. Воробьев // Наука образованию, производству, экономике : матер. XV(62) Регион. научно-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, посвящ. 100-летию со дня основания Вит. гос. ун-та им. П.М. Машерова, Витебск, 3-5 марта 2010 г. / Вит. Гос.ун-т. : редкол. А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. Витебск : УО "ВГУ им. П.М. Машерова 2010. С. 7.

16-А. *Zalesskaya, E. N.* Closure operations for finite groups / E. N. Zalesskaya, S. N. Vorob'ev // Междунар. алгебраической конф., посв.

70-летию А.В. Яковлева : тез. докл., Санкт-Петербург, 19 24 июня 2010 г. / Санкт-Петербургский гос. ун-т, Санкт-Петербургск. отделение математич. ин-та им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Междунар. математич. институт им. Л. Эйлера, Фонд Эйлера. Санкт-Петербургск. математич. общ-во ; под ред. А.И. Генералова. – СПб., 2010. – С. 34-35.

17-А. *Воробьев, С. Н.* Об операторе замыкания для классов Фишера / С. Н. Воробьев // Наука образованию, производству, экономике: матер. XVI(63) Региональной научно-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16-17 марта 2011 г. / Витебский государственный университет; редкол: А.П. Солодков (гл. ред) [и др.] Витебск: УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова», 2011 – Т.1. – С. 54-55.

18-А. *Vorobyov, S. N.* On closure operation of finite classes of group / S. N.Vorobyov // 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the memory of Professor V.M. Usenko : Book of abstracts, Lugansk, July 5-12, 2011 / Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences : Yu.A. Drozd, V.V. Kirichenko, B.V. Novikov, editors. Lugansk, 2011. P. 142.

19-А. *Воробьев, С. Н.* Классы Фишера и холловы операторы / С.Н. Воробьев // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: матер. межд. научно-практ. интернет-конф., посвящ. 60-летию доктора физ.-матем. наук, проф. Н.Т. Воробьева. Витебск, 21-22 июля, 2011. С. 24-25.

20-А. *Воробьев, С. Н.* О инъекторах конечных подгрупп для множеств Фиттинга / С. Н. Воробьев // Наука образованию, производству, экономике: материалы XVII(64) Региональной научно-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14-15 марта 2012 г. / Витебский государственный университет; редкол: А.П. Солодков (гл. ред) [и др.] Витебск: УО «Витебский Государственный университет им. П.М. Машерова», 2012 Т.1. С. 7-8.

21-А. *Воробьев, С. Н.* О сопряжённости $\boldsymbol{F}$-инъекторов конечных групп для множеств Фиттинга / С. Н. Воробьев // Междунар. матем. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения проф. В.В. Кириченко : тез. докл., Николаев, 13 19 июня 2012 г. / Мин-во обр. и науки, молодежи и спорта Украины. Институт математики НАН Украины, Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Николаевский национальный ун-т им. В.А. Сухомлинского ; редкол.: Ю.А. Дрозд (гл. ред.) [и др.]. Николаев, 2012. С. 83.

22-A. *Vorobyov, S. N.* On Fischer Sets of Finite Groups / С. Н. Воробьев // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov : Book of abstracts, Kyiv, August 20–26, 2012 / Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv Taras Shevchenko National University, Dragomanov National Pedagogical University ; Org. com.: V. Andrushchenko (chairman) [and others]. Progr. com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. – Kyiv, 2012. – P. 173.

23-A. *Воробьев, С. Н.* О множествах Фишера конечных групп / С. Н. Воробьев // VI Машеровские чтения: матер. межд. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных, Витебск, 27-28 сентября 2012 г. / Витебский государственный университет: редкол. А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО «ВГУ им. Машерова», 2012. – С.18.

24-A. *Воробьев, С. Н.* О подгруппах Фишера и инъекторах конечных групп / С. Н. Воробьев, Залесская Е. Н. // XI Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. научн. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 5. – С. 19-20.

25-A. *Воробьев, С. Н.* О свойстве нормальности в классах Фишера / С. Н. Воробьев // Наука — образованию, производству, экономике : мат. XVII(65) рег. научно-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14-15 марта 2013 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: УО "ВГУ им. П.М. Машерова 2013. – С. 37-38.

26-A. *Vorobyov, S. N.* On normal π-solvable Fitting classes / S. N. Vorobyov // 9th International Algebraic Conference in Ukraine : abstracts, Lviv, July 8-13, 2013 / Ivan Franko National University of Lviv; editional board T. Banah [and etc.] – Lviv, 2013. – P. 216.

27-A. *Воробьев, С. Н.* О нормальных π-разрешимых классах Фиттинга / С.Н. Воробьев // VII Машеровские чтения: матер. межд. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных, Витебск, 24-25 сентября 2013 г. / Вит. Гос.ун-т.: редкол. А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. - Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2013. – С. 11.

РЭЗЮМЭ

Вараб'еў Сяргей Мікалаевіч

Класы Фішара канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, холава надгрупа, аперацыя замыкання, клас Фіцінга, клас Фішара, радыкал, ін'ектар, падгрупа Фішара.

Дысертацыя прысвечана распрацоўцы новых метадаў даследавання класаў Фіцінга і мностваў Фіцінга канечных груп і іх прымяненню для апісання асноўных структурных уласцівасцяў і заканамернасцяў алгебры класаў Фішара.

У ёй даказана алгебраічнасць аперацый множання і замыкання класаў Фішара і ў тэрмінах гэтых аперацый апісана іх структура; з дапамогай холавых аператараў распрацаваны метады пабудовы новых сямействаў класаў Фішара, на аснове якіх пацверджан аналаг гіпотэзы Шамяткова для класаў Фішара ў выпадку іх π-вырашальнасці (у прыватнасці, вырашальнасці); станоўча вырашана праблема Дзёрка-Хоукса аб алгебраічнасці аперацыі перасячэння на мностве падкласаў Фіцінга, нармальных ў ідэмпатэнтным класе Фіцінга для часткова вырашальнага класа Фішара без умовы яго ідэмпатэнтнасці; даказан крытэрый супадзення падгрупы Фішара і ін'ектара ў мностве Фішара для часткова вырашальнай групы, таксама знойдзен новы кананічны клас спалучаных падгруп Фішара ў гэтай групе.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Воробьев Сергей Николаевич

Классы Фишера конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, операция замыкания, класс Фиттинга, класс Фишера, радикал, инъектор, подгруппа Фишера.

Диссертация посвящена разработке новых методов исследования классов Фиттинга и множеств Фиттинга конечных групп и их применению для описания основных структурных свойств и закономерностей алгебры классов Фишера.

В ней доказана алгебраичность операций умножения и замыкания классов Фишера и в терминах этих операций описана их структура; посредством холловых операторов разработаны методы построения новых семейств классов Фишера, на основе которых подтвержден аналог гипотезы Шеметкова для классов Фишера в случае их π-разрешимости (в частности, разрешимости); положительно решена проблема Дерка-Хоукса об алгебраичности операции пересечения на множестве подклассов Фиттинга, нормальных в идемпотентном классе Фиттинга для частично разрешимого класса Фишера без условия его идемпотентности; доказан критерий совпадения подгруппы Фишера и инъектора во множестве Фишера частично разрешимой группы и найден в этой группе новый канонический класс сопряженных подгрупп Фишера.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследовании по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Vorobyov Sergey Nikolaevich

Fischer classes of finite groups

Keywords: finite group, Hall subgroup, closure operation, Fitting class, Fischer class, radical, injector, Fischer subgroup.

Thesis is devoted to the development of new research methods of Fitting classes and Fitting sets of finite groups and their use to describe the basic structural properties and laws of Fischer classes′ algebra.

It is proved algebraicity of multiplication operation and closure operation for Fischer classes and in terms of these operations it is described their structure: by Hall operators it is developed new methods for constructing families of Fischer classes on which it is confirmed the analog of Shemetkov hypothesis for Fischer classes if they are π-solvable (in particular, solvable); it is positively solved the Doerk-Hawkes problem on the algebraicity of intersection operation on the set of Fitting subclasses, which are normal in idempotent Fitting class of partially solvable Fischer class without the conditions of its idempotent; they are proved criteria of the coincidence of Fischer subgroup and injector's in the Fischer set of partially soluble group and in this group they are found new canonical class of conjugate Fischer subgroups.

All the main results of the thesis are new. They are theoretical and can be used in research on the theory of finite groups and their classes, as well as in reading specialized courses at universities.

Научное издание

ВОРОБЬЕВ Сергей Николаевич

КЛАССЫ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 23.04.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,6.
Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 60 экз. Заказ 211.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель