МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МАТРИЧНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Чернявский М.М.,
магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Трубников Ю.В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Нелинейные матричные уравнения встречаются в различных приложениях. В теории управления и контроля, а также в теории переноса возникают различные алгебраические уравнения Риккати [4, с. 143], являющиеся частным случаем квадратного матричного уравнения. Полиномиальные матричные уравнения возникают, например, в цепях Маркова [5]. Однако существующие в настоящее время методы нахождения решения подобных уравнений зачастую не позволяют вычислить значения всех корней [1, 2], являются громоздкими и неудобными в программировании. Поэтому, в настоящей работе была поставлена цель – разработать эффективный приближенный метод нахождения решений матричных полиномиальных уравнений.

Материал и методы. Материалами исследования являются нелинейные матричные уравнения и итерационный процесс Ньютона-Канторовича. Во время исследования применялись аналитические и численные методы с использованием пакета компьютерной математики *Maple* 2015.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим полиномиальное матричное уравнение степени m (1), где все матрицы имеют размер [nЧn].

$$\sum_{k=0}^{m} A_k X^k = 0. \tag{1}$$

Как известно, метод Ньютона-Канторовича [3, с. 679] решения операторного уравнения $F(x)=0$ в банаховом пространстве состоит в построении последовательности

$$x_{n+1} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n) \ (n=1,2,...). \tag{2}$$

Для уравнения (1) некоторую трудность представляет нахождение оператора $\left[F'(X)\right]^{-1}$.

Для простоты записи возьмем кубическое матричное уравнение (3), являющееся частным случаем уравнения (1).

$$AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{3}$$

Пусть $F(X) = AX^3 + BX^2 + CX + D$, тогда, находя значение выражения $F(X+H) - F(X)$, получаем, что дифференциалом Фреше левой части уравнения (3) является выражение

$$F'(X)H = \left(AX^2 + BX + C\right)H + \left(AX + B\right)HX + AHX^2, \tag{4}$$

и, таким образом, получаем

$$\left[F'(X)\right]^{-1} F(X) = H. \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что мы должны получить следующее представление для $F(X)$: представить $F(X)$ в виде равенства $\left(AX^2 + BX + C\right)H + \left(AX + B\right)HX + AHX^2 = AX^3 + BX^2 + CX + D$ и тогда итерационный процесс Ньютона-Канторовича будет иметь следующий вид (6):

$$X_{n+1} = X_n - H(X_n) \qquad (n=1,2,...). \tag{6}$$

Таким образом, возникает следующий алгоритм решения уравнения (3).

1) Найти при помощи системы компьютерной алгебры матричную функцию $H=H(X)$ – решение линейного по H уравнения (7)

$$\left(AX^2 + BX + C\right)H + \left(AX + B\right)HX + AHX^2 = AX^3 + BX^2 + CX + D. \tag{7}$$

2) Осуществить итерационный процесс (6).

Проведя аналогичные рассуждения для уравнения (1), мы также получим для него справедливость равенства (5) и такой же вид итерационного процесса (6), но уравнение (7) для нахождения матричной функции $H=H(X)$ будет иметь другой вид.

Получать аналитическое решение уравнения типа (7) следует в системе компьютерной алгебры, например *Maple*. Для этого удобно перейти от данного матричного уравнения к системе алгебраических уравнений (8).

$$Eh = q, \tag{8}$$

где E – матрица размера $\left[n^2 \times n^2\right]$, соответствующая левой части уравнения (7), h – неизвестный вектор длиной n^2, получающийся путем построчной записи элементов матрицы H; q – вектор длиной n^2, соответствующий левой части уравнения типа (7).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть в кубическом матричном уравнении (3) $A = B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -70 & -80 \\ -60 & -65 \end{pmatrix}$.

Для уточнения каждого из корней проведем по 15 итераций.

При $X_{1,0} = 3E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ получаем $X_1 = \begin{pmatrix} 1,673796 & 3,768714 \\ 4,027275 & 2,665607 \end{pmatrix}$.

$$X_{2,0} = \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ -17 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -7,083951 & 5,901039 \\ -3,803847 & 0,012769 \end{pmatrix};$$

$$X_{3,0} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 2 & 3i \end{pmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} -1,2908473 - 2,856873i & -1,860801 - 2,116182i \\ -2,0086772 - 0,262961i & -1,878854 - 1,286291i \end{pmatrix};$$

$$X_{4,0} = \begin{pmatrix} 3+i & -4-i \\ -2+2i & 1-5i \end{pmatrix} \Rightarrow X_4 = \begin{pmatrix} -0,939142 + 1,9510976i & -1,4413331 + 3,251385i \\ -2,330137 + 1,0524408i & -2,230559 + 0,234529i \end{pmatrix};$$

$$X_{5,0} = \begin{pmatrix} 1+4i & 1-8i \\ 2-7i & 6+5i \end{pmatrix} \Rightarrow X_5 = \begin{pmatrix} 2,844905 + 0,534024i & 2,770887 - 0,455007i \\ 2,909523 - 0,492634i & 3,617970 + 0,419741i \end{pmatrix}.$$

$$X_{6,0} = \begin{pmatrix} 1+4i & 2+i \\ 2+7i & 1+3i \end{pmatrix} \Rightarrow X_6 = \begin{pmatrix} -2,118372 + 2,017678i & -0,396257 + 2,216033i \\ -1,290365 + 1,0213107i & -3,174802 + 1,1217142i \end{pmatrix}.$$

Если взять $X_{7,0} = X_{3,0}^*$, $X_{8,0} = X_{4,0}^*$, и $X_{9,0} = X_{5,0}^*$, то получаем решения $X_7 = X_3^*$, $X_8 = X_4^*$ и $X_9 = X_5^*$ соответственно.

Подставляя найденные значения X в исходное уравнение (3), убеждаемся, что все они с точность до последней цифры после запятой являются корнями данного уравнения.

Заключение. Таким образом, в данной работе разработан эффективный приближенный метод нахождения решений матричных полиномиальных уравнений, являющийся модификацией метода Ньютона-Канторовича.

Литература:

1. Higham, N.J. Functions of Matrices: Theory and Computation / N.J. Higham. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 752 с.
4. Икрамов, Х. Д. Численное решение матричных уравнений: Ортогональные методы / Х. Д. Икрамов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 192 с.
5. A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.