АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

АЛЕЙНИКОВА Татьяна Григорьевна

ИТЕРАЦИОННЫЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МИНСК 1993

Работа выполнена в Институте математики АН Беларуси и Витебском педагогическом институте

Научные руководители: доктор физико-математических наук, профессор АБРАШИН Вячеслав Николаевич

кандидат физико-математических наук, доцент ЧЕГИС Раймондас Юозо

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор МОНАСТЫРНЫЙ Петр Ильич

доктор физико-математических наук, профессор ИВАНАУСКАС Феликс Феликсо

Ведущая организация: Казанский университет

Защита состоится "28" мая 1993 г. в 15 часов на заседании специализированного совета К 006.10.01 в Институте математики АН Беларуси по адресу: 220072, г.Минск, ул.Сурганова, 11, Институт математики АН Беларуси.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН Беларуси.

Автореферат разослан "__" ____________ 1993 года.

Ученый секретарь специализированного совета кандидат физ.-мат. наук А.И.Астровский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из наиболее важных направлений в развитии численных методов решения уравнений математической физики является разработка эффективных алгоритмов решения многомерных стационарных задач, возникающих при описании физических явлений и процессов различной природы (например, в теории упругости, стационарной теплопроводности, электродинамике, исследовании процессов диффузии, фильтрации).

Построению и изучению разностных методов решения эллиптических уравнений посвящены многие работы А.А. Самарского, Е.С. Николаева, Н.С. Бахвалова, Б.В. Андреева, Е.Г. Дьяконова, Г.И. Марчука, В.П. Ильина, Н.Н. Яненко, А.Д. Ляшко, М.М. Карчевского, В.И. Лебедева,а также зарубежных авторов: Р. Рихтмайера, К. Мортона, Ж. Лионса, Л. Хейгемана, В. Янга и других.

Большая размерность рассматриваемых задач приводит к необходимости разработки специальных методов, учитывающих специфическую структуру (разреженность, ленточность, блочность) получаемой в конечном счете матрицы системы алгебраических уравнений. Наиболее универсальными среди этих методов являются итерационные, позволяющие свести реализацию сложной задачи к последовательности более простых.

Существенным достижением в этой области является метод переменных направлений, предложенный Дугласом , Писменом, Ганном и Рэкфордом. Сравнение метода переменных направлений с другими итерационными алгоритмами показывает, что он является экономичным и довольно эффективным. Однако, в задачах с размерностью $p > 2$ применение данного метода связано с принципиальными трудностями, например, при этом необходима коммутируемость "одномерных" пространственных операторов, и накладываются ограничения на итерационные параметры.

Распространенными алгоритмами решения задач большой размерности являются методы, основанные на факторизации разностного оператора задачи, которые разрабатывались В.С.

Владимировым, С.К. Годуновым, А.А. Абрамовым, В.В. Андреевым, А.А. Самарским, Е.С. Николаевым и другими авторами. Но и для алгоритмов такого типа сохраняется требование коммутируемости "одномерных" пространственных операторов.

В работах В.Н.Абрашина был предложен класс экономичных разностных схем, который позволяет за счет введения многокомпонетности снять ряд ограничений на свойства исходной задачи и дает возможность значительно расширить область применения метода переменных направлений. Построение и исследование алгоритмов подобного типа для стационарных задач большой размерности и более сложной структуры представляет несомненный интерес для теории численных методов.

Если исходная дифференциальная задача рассматривается в области, имеющей сложную геометрию, то при построении и обосновании классических итерационных методов возникают дополнительные трудности. Они связаны с наличием нерегулярных приграничных узлов и изменяющимся шагом сетки, что плохо влияет на обусловленность получаемой в конечном счете матрицы системы алгебраических уравнений. В связи с этим остается актуальной проблема дискретизации области сложной формы и построения экономичных итерационных методов решения многомерных эллиптических задач в таких областях.

Целью работы является построение и исследование итерационных многокомпонентных методов переменных направлений решения эллиптических задач любой размерности.

Научная новизна. Предложены экономичные разностные схемы, которые позволяют использовать метод переменных направлений для решения эллиптических задач любой размерности. Проведено исследование построенных итерационных многокомпонентных алгоритмов метода переменных направлений. Предложены эффективные разностные схемы этого метода, позволяющие использовать его в областях со сложной геометрией, а также алгоритмы, допускающие полное распараллеливание вычислений на одномерные задачи. Решена задача выбора оптимальных итерационных параметров для описанных методов.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы при решении широкого класса многомерных эллиптических уравнений как в прямоугольных, так и в областях более сложной формы.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Республиканской научно-практической конференции творческой молодежи "Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение" (г. Минск, 1989 г.), на семинарах лаборатории численных методов математической физики Института математики АН Беларуси, на семинаре кафедры численных методов и программирования Белгосуниверситета, кафедры дифференциальных уравнений и численных методов Вильнюсского университета, отдела вычислительных методов Института математики и информатики АН Литвы, на семинарах кафедры информатики и вычислительной техники Витебского педагогического института.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-4].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, приложения и списка литературы, содержащего 38 наименований. Общий объем работы 100 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор литературы по теме диссертации,а также обоснована актуальность проведения исследований и изложено их основное содержание.

В первой главе рассмотрены многокомпонентные разностные схемы для линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами в области прямоугольной формы. С помощью спектрального и энергетического методов проведено исследование построенных многокомпонентных итерационных алгоритмов, получены оценки числа итераций, найдены оптимальные итерационные параметры.

В §1 приведена постановка задачи для двумерного эллиптического уравнения с разделяющимися переменными в прямоугольнике. Для ее решения предложен стационарный итерационный многокомпонентный метод переменных направлений

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_1} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k+1/2}{y_1} + \Lambda_2 \overset{k}{y} + \varphi,$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_2} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k+1/2}{y_1} + \Lambda_2 \overset{k+1/2}{y_2} + \varphi, \tag{1}$$

$$\overset{k+1}{y} = (\overset{k+1/2}{y_1} + \overset{k+1/2}{y_2})/2,$$

$$\overset{k}{y}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_1}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_2}|_\Gamma = g(x).$$

Здесь k - номер итерации, $\overset{k+1/2}{y_\alpha}$ -промежуточная итерация, τ - итерационный параметр, подлежащий выбору.

Исследование итерационного процесса (1) проведено спектральным методом, доказана сходимость метода со скоростью геометрической прогрессии.

Рассмотрен также еще один итерационный алгоритм

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_1} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k+1/2}{y_1} + \Lambda_2 \overset{k-1/2}{y_2} + \varphi,$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_2} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k-1/2}{y_1} + \Lambda_2 \overset{k+1/2}{y_2} + \varphi, \tag{2}$$

$$\overset{k+1}{y} = (\overset{k+1/2}{y_1} + \overset{k+1/2}{y_2})/2,$$

$$\overset{k}{y}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_1}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_2}|_\Gamma = g(x).$$

Он обладает свойством полного распараллеливания вычислений, т.е. каждое из его уравнений может решаться независимо от остальных. Такие алгоритмы являются наиболее эффективными при наличии ЭВМ, допускающих параллельную и асинхронную обработку информации. Проведено исследование сходимости итерационного процесса (2) и доказана соответствующая теорема.

Решена задача выбора оптимальных итерационных параметров τ для (1), (2). Проведено сравнение скорости сходимости предлагаемых алгоритмов с явным итерационным методом и доказано, что если матрица решаемой системы уравнений удовлетворяет энергетической оценке $\delta E \le A \le \Delta E$, то число итераций, достаточное для достижения заданной точности ε при оптимальном значении итерационного параметра, определяется по формуле

$$n \ge n_0(\varepsilon) \approx \ln\frac{1}{\varepsilon}/(6.5\eta), \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}.$$

В §2 на основе рассмотренного в §1 распараллеленного стационарного итерационного метода построен неявный итерационный процесс с чебышевским набором итерационных параметров для многомерного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде

$$B(\tau)\,\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A\,y_k = \varphi, \tag{3}$$

где $B(\tau)$ соответствует стационарному итерационному методу

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_1} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k+1/2}{y_1} + \Lambda_2 \overset{k}{y} + \ldots + \Lambda_p \overset{k}{y} + \varphi,$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_2} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k}{y} + \Lambda_2 \overset{k+1/2}{y_2} + \ldots + \Lambda_p \overset{k}{y} + \varphi,$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_p} - \overset{k}{y}}{\tau} = \Lambda_1 \overset{k}{y} + \Lambda_2 \overset{k}{y} + \ldots + \Lambda_p \overset{k+1/2}{y_p} + \varphi, \qquad (4)$$

$$\overset{k+1}{y} = (\overset{k+1/2}{y_1} + \overset{k+1/2}{y_2} + \ldots + \overset{k+1/2}{y_p})/p ,$$

$$\overset{k}{y}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_1}|_\Gamma = \overset{k+1/2}{y_2}|_\Gamma = \ldots = \overset{k+1/2}{y_p}|_\Gamma = g(x).$$

Оператор B^{-1}, соответствующий (4), имеет вид

$$B^{-1}(\tau) = \frac{\tau}{p} \left[(E + \tau A_1)^{-1} + (E + \tau A_2)^{-1} + \ldots + (E + \tau A_p)^{-1} \right].$$

Исследование сходимости (3), (4) позволяет найти оптимальное значение τ и определить оператор B^{-1} в этом случае

$$B^{-1}(\tau_{opt}) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha^{-1} .$$

Доказано, что итерационный метод (3) сходится за

$$n \geq n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

итераций, т.е. скорость сходимости такого же порядка, как в традиционном варианте метода переменных направлений. Вместе с тем предлагаемые алгоритмы расширяют возможности этого метода и позволяют решать задачи любой размерности с переменными коэффициентами. При этом снято ограничение коммутируемости "одномерных" пространственных операторов.

Рассмотренный в §2 неявный итерационный метод реализуется с чебышевским набором итерационных параметров. Для построения такого набора необходимо знать число итераций, достаточное для достижения заданной точности. В оценку числа итераций входят спектральные постоянные энергетической эквивалентности операторов. В §3 рассматриваются возможные способы вычисления этих постоянных, в том числе для случая разрывных коэффициентов. На основе полученных результатов формулируется критерий применимости итерационных методов для задач с разрывными коэффициентами. Эффективность этого критерия продемонстрирована на модельной задаче.

Вторая глава посвящена построению и исследованию алгоритмов многокомпонентного метода переменных направлений для многомерных эллиптических уравнений в области сложной формы.

В р-мерной выпуклой связной области с криволинейной границей строится сетка, равномерная на каждой из прямых в данном направлении. В ней отсутствуют нерегулярные приграничные узлы. Разностная схема, соответствующая построенной подобным образом сетке, лишена недостатка, присущего многим другим схемам, когда даже один, относительно малый шаг, сильно ухудшает обусловленность задачи.

Аппроксимируя исходное уравнение на рассмотренной сетке, получаем систему для р неизвестных векторов-функций

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y_\alpha - d y_\beta = -\varphi_\beta , \ \beta = \overline{1,p},$$

$$y_\alpha \big|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

$$\Lambda_\alpha y_\alpha = \left(a_\alpha y_{\alpha \bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha} .$$

В §4 дается постановка задачи, проводится построение пространственной сетки и разностной схемы для многомерного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. Использование "равномерной" сетки с несовпадающими узлами приводит к неклассической разностной схеме, когда в каждой точке имеются р значений решения (y_α , $\alpha = \overline{1,p}$). Обсуждаются возможные способы однозначного выбора приближенного решения.

Исследование устойчивости и сходимости разностной схемы (5) проводится методом энергетических неравенств. В §5 доказана теорема об устойчивости построенной разностной схемы по правой части в нормах W_2^1 и L_2.

В связи с применением специальной расчетной сетки требуется дополнительное исследование аппроксимационных свойств разностной схемы. Проведенный анализ позволил показать, что построенная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком $O(h)$. Доказана теорема о сходимости разностного решения в нормах W_2^1 и L_2.

Следует отметить, что при доказательстве теорем данного параграфа не требуется коммутативности "одномерных" пространственных операторов.

В §6 для реализации разностной схемы предложен итерационный процесс, который также принадлежит к классу многокомпонентных алгоритмов, изученных в первой главе:

$$\sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1}{y}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k}{y}_\alpha - d\,\overset{k+1}{y}_\beta = -\varphi_\beta, \quad \beta = \overline{1,p},$$

$$\overset{Q}{y} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{N}{y}_\alpha, \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{6}$$

Доказана следующая теорема о сходимости итерационного метода (6) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1 + \dfrac{dh^2}{4c_2(p-1)}}.$$

В этом параграфе также предложены некоторые другие варианты итерационного многокомпонентного метода переменных направлений:

$$\frac{\overset{k+1}{y}_\beta - \overset{k}{y}}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1}{y}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k}{y}_\alpha - d\,\overset{k+1}{y}_\beta + \varphi, \quad \beta = \overline{1,p},$$

$$y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{N}{y}_\alpha \,, \quad k = 1,2,\ldots,N; \tag{7}$$

или распараллельный алгоритм:

$$\frac{\overset{k+1}{y}_\beta - \overset{k}{y}}{\tau} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k}{y} + \Lambda_\beta \overset{k+1}{y}_\beta - d\,\overset{k+1}{y}_\beta + \varphi, \quad \beta = \overline{1,p},$$

$$y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{N}{y}_\alpha \,, \quad 1,2,\ldots,N. \tag{8}$$

В случае, когда исходная дифференциальная задача рассматривается в p-мерном прямоугольном параллелепипеде, для ее решения могут применяться также следующие алгоритмы:

$$\frac{\overset{k+1/2}{y}_\beta - \overset{k}{y}}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1/2}{y}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k}{y} - d\,\overset{k+1/2}{y}_\beta + \varphi, \quad \beta = \overline{1,p},$$

$$\overset{k+1}{y} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{k+1/2}{y}_\alpha \,, \tag{9}$$

$$\overset{k}{y}\Big|_{\gamma_h} = \overset{k+1/2}{y}_\alpha \Big|_{\gamma_{h_\alpha}} = g(x), \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad k = 1,2,\ldots;$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y}_\beta - \overset{k}{y}}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \Lambda_\alpha \overset{k+1/2}{y}_\alpha + \sum_{\alpha=\beta+1}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k-1/2}{y}_\alpha - d\,\overset{k+1/2}{y}_\beta + \varphi, \quad \beta = \overline{1,p},$$

$$\overset{k+1}{y} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{k+1/2}{y}_\alpha \,, \tag{10}$$

$$\overset{k}{y}\Big|_{\gamma_h} = \overset{k+1/2}{y_\alpha}\Big|_{\gamma_{h_\alpha}} = g(x),\ \alpha=1,2,\dots,p,\ k=1,2,\dots,$$

$$\frac{\overset{k+1/2}{y_\beta} - \overset{k}{y}}{\tau} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} \Lambda_\alpha \overset{k-1/2}{y_\alpha} + \Lambda_\beta \overset{k+1/2}{y_\beta} - d\,\overset{k+1/2}{y_\beta} + \varphi,\ \beta=\overline{1,p},$$

$$\overset{k+1}{y} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{k+1/2}{y_\alpha}, \qquad (11)$$

$$\overset{k}{y}\Big|_{\gamma_h} = \overset{k+1/2}{y_\alpha}\Big|_{\gamma_{h_\alpha}} = g(x),\ \alpha=1,2,\dots,p,\ k=1,2,\dots.$$

В §7 приложения приводятся результаты численных расчетов с помощью итерационных методов, рассмотренных в §1 и в §2, для некоторых тестовых задач. В качестве модельных примеров использовалась задача Дирихле для уравнения Лапласа, а также двумерное эллиптическое уравнение с сильно меняющимися коэффициентами в прямоугольнике.

Еще один пример, рассмотренный в данном параграфе, демонстрирует эффективность разностной схемы и итерационного метода, предложенных во второй главе. В области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед с шаровым вырезом, решается трехмерная эллиптическая задача. Расчетная сетка строится в соответствии с подходом, описанным в §4. Для реализации разностной схемы применяется многокомпонентный итерационный процесс, рассмотренный в §6.

Проведено сравнение некоторых вариантов итерационного многокомпонентного метода и классического итерационного метода переменных направлений на модельной задаче.

Полученные в §7 численные результаты свидетельствуют о том, что в двумерном случае количество итераций в многокомпонентном методе и методе переменных направлений примерно совпадает, а в случае большей размерности исходной дифференциальной задачи предложенный в работе метод не требует ограничений на итерационные параметры и, вследствие этого, обладает существенным преимуществом в скорости сходимости по сравнению с методом переменных направлений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Для многомерных линейных эллиптических задач с переменными коэффициентами в пространственных областях различной формы построены и изучены многокомпонентные разностные алгоритмы;
2. Для реализации полученных разностных схем предложены итерационные процессы, относящиеся к группе методов переменных направлений и допускающие полное распараллеливание вычислений;
3. Проведено исследование спектральным и энергетическим методами сходимости предлагаемых разностных схем и итерационных процессов, решена задача выбора оптимальных итерационных параметров.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Алейникова Т.Г. Об одном классе эффективных разностных схем решения эллиптических уравнений в области произвольной формы // Дифференц. уравнения. -1990.- Т.26, № 5.- С. 898.
2. Алейникова Т.Г. Экономичные разностные схемы решения эллиптических уравнений в области произвольной формы // Применение информатики и вычислит. техники при решении народнохозяйственных задач. Тезисы докл. Респ. конференции молодых ученых и специалистов. - Мн., 1989, с. 118.
3. Абрашин В.Н., Алейникова Т.Г. Эффективные итерационные методы решения многомерных эллиптических уравнений. I // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1991, № 6.- С. 5-11.
4. Aleinikova T., Ciegis R. On the iterative method for linear problems with discontinuous coeficients // Informatica, 1993. - V.4, № 2. - P.118-132.

Подписано к печати 24.04.93 г. Заказ 23 . Тираж 100 экз.
Отпечатано на ротапринте Витебского пединститута.
210036, г. Витебск, Московский пр., 33.