УДК 512.622

О СВЯЗИ МЕЖДУ КОРНЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Во время решения алгебраического уравнения один или несколько корней могут быть известными. Актуальной задачей является получение уравнений, связывающих уже известные корни с неизвестными. Алгоритм деления углом не позволяет получать подобные конструкции, а только понизить степень уравнения.

Цель статьи – показать способ построения аналитических конструкций, связывающих уже известные корни алгебраических уравнений с неизвестными, в виде алгебраических уравнений меньшей степени, чем исходные.

Материал и методы. *Материалом исследования являются алгебраические уравнения произвольной степени с комплексными коэффициентами, а также способы установления аналитической связи между их корнями. Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики Maple 2019.*

Результаты и их обсуждение. *Доказана теорема, связывающая в символьном виде три неизвестных корня с двумя известными для произвольного алгебраического уравнения пятой степени. Полученные результаты применены и для случая трехчленных алгебраических уравнений. Приведены различные числовые примеры, которые подтверждают справедливость этих результатов.*

Заключение. *Предложен алгоритм построения уравнений, связывающих известные корни алгебраического уравнения с неизвестными в символьном виде. Этот алгоритм наиболее удобен при анализе трехчленных уравнений. Кроме того, в статье предложен алгоритм приведения трехчленного алгебраического уравнения четвертой степени к возвратному.*

Ключевые слова: *алгебраические уравнения, уравнения связи, трехчленные уравнения, подбор корней, возвратные уравнения.*

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

Yu.V. Trubnikov, M.M. Chernyavsky
Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

When solving an algebraic equation, one or more roots may be known. An urgent task is to obtain equations connecting already known roots with the unknown ones. The Euclidean algorithm does not allow obtaining such constructions, but allows only to lower the degree of the equation.

The purpose of the article is to show a method for constructing analytical constructions which connects the already known roots of algebraic equations with the unknown ones in the form of algebraic equations of a lesser degree than the original ones.

Material and methods. *The research material is algebraic equations of the arbitrary degree with complex coefficients, as well as methods for establishing an analytical relationship between their roots. Methods of the mathematical analysis and Maple 2019 System of computer mathematics were used in the research.*

Findings and their discussion. *A theorem is proved that connects in a symbolic form three unknown roots with two known roots for an arbitrary algebraic equation of the fifth degree. The results obtained are also applied to the case of trinomial algebraic equations. Various numerical examples are given that confirm the validity of these results.*

Conclusion. *An algorithm for constructing equations connecting the known roots of an algebraic equation with the unknown ones in a symbolic form is proposed. This algorithm is most convenient when analyzing trinomial equations. The article also proposes an algorithm for reducing the trinomial algebraic equation of the fourth degree to the reciprocal.*

Key words: *algebraic equations, relationship equations, trinomial equations, root selection, reciprocal equations.*

При решении алгебраических уравнений зачастую один или несколько корней алгебраического уравнения оказываются известными. Корень может быть найден как подбором, так и вычислен некоторыми специфическими методами. Например, существуют методы определения наличия кратного корня у алгебраического уравнения, а также алгоритмы для аналитического вычисления такового [1; 2].

Если каким-то образом определить значение одного или нескольких корней алгебраического уравнения, то естественным считается понижение степени исходного уравнения путем деления полинома по алгоритму Евклида (деление углом). Сделать это можно и в общем символьном виде для определенных типов уравнений с помощью систем компьютерной математики. Тем не менее такое деление углом в большинстве случаев не дает полезной информации об остальных корнях уравнения, а просто позволяет получить новый полином меньшей степени, коэффициенты которого будут включать в себя уже найденные корни.

Непосредственно предметом исследования в настоящей статье является следующая задача: пусть в символьной форме известны один, два или несколько корней алгебраического уравнения. Требуется найти уравнение меньшей степени, коэффициенты которого выражались бы через известные корни исходного уравнения, а корни нового уравнения совпадали бы с ранее неизвестными корнями первоначального уравнения.

С этой точки зрения представляют интерес трехчленные алгебраические уравнения произвольной степени, так как их корни выражаются при помощи аргумента определяющей функции (функции действительного аргумента, свойства которой позволяют судить о числе действительных решений уравнения). Для трехчленных уравнений исследуемый метод приводит к равенствам, связывающим значения аргумента этой функции между собой. Следовательно, если некоторые корни трехчленного уравнения известны (а это эквивалентно тому, что некоторые значения аргумента определяющей функции известны), то остальные значения ее аргумента находятся из уравнений меньших степеней.

Цель статьи – показать способ построения аналитических конструкций, связывающих уже известные корни алгебраических уравнений с неизвестными, в виде алгебраических уравнений меньшей степени, чем исходные.

Материал и методы. В качестве материала исследования в настоящей статье выступает ряд математических объектов и понятий. Во-первых, это алгебраические уравнения произвольной степени с комплексными коэффициентами. Во-вторых, это произвольные трехчленные алгебраические уравнения, корни которых можно выразить через значения аргумента конкретной определяющей функции. В-третьих, это различные способы установления явной аналитической связи между корнями вышеупомянутых уравнений. К материалу исследования можно также отнести алгоритмы приведения произвольных алгебраических уравнений к возвратному виду, что зачастую упрощает процесс точного аналитического нахождения их корней.

Использованы методы математического анализа, а также возможности системы компьютерной математики *Maple* 2019 для получения результатов некоторых расчетов в аналитическом виде.

Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение.

Введем следующие обозначения:

$$f_0(u,\ v) = 1,\ f_1(u,\ v) = u + v,\ f_2(u,\ v) = u^2 + uv + v^2,\ \ldots,$$
$$f_j(u,\ v) = u^j + u^{j-1}v + u^{j-2}v^2 + \ldots + uv^{j-1} + v^j.$$

Тогда, очевидно,

$$u^j - v^j = (u - v)f_{j-1}(u,\ v). \tag{1}$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$f_j(u,w) - f_j(u,v) = (w - v)\left[u^{j-1}f_0(w,\ v) + u^{j-2}f_1(w,\ v) + \cdots + uf_{j-2}(w,v) + f_{j-1}(w,\ v)\right]. \tag{2}$$

Доказательство. Применяя равенство (1), получаем

$$f_j(u,\ w) - f_j(u,\ v) = u^{j-1}(w - v) + u^{j-2}(w - v)f_1(w,\ v) +$$
$$+ u^{j-3}(w - v)f_2(w,\ v) + \cdots + u(w - v)f_{j-2}(w,\ v) + (w - v)f_{j-1}(w,\ v) =$$
$$= (w - v)\left[u^{j-1}f_0(w,\ v) + u^{j-2}f_1(w,\ v) + u^{j-3}f_2(w,\ v) + \cdots + uf_{j-2}(w,\ v) + f_{j-1}(w,\ v)\right].$$

Лемма доказана.

Далее рассмотрим уравнение пятой степени

$$P(z) = z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5 = 0 \tag{3}$$

с произвольными комплексными коэффициентами. Пусть u, v, w – попарно различные корни уравнения (3). Найдем кубическое уравнение для корня u, коэффициенты которого выражаются через корни v, w.

Теорема 1. *Кубическое уравнение, которому должен удовлетворять корень u, имеет следующий вид:*

$$u^3 + (v + w + a_1)u^2 + [v^2 + vw + w^2 + a_1(v + w) + a_2]u +$$
$$+ v^3 + v^2w + vw^2 + w^3 + a_1(v^2 + vw + w^2) + a_2(v + w) + a_3 = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя равенство (2), преобразуем разность $P(u) - P(v)$:

$$P(u) - P(v) = (u - v)[f_4(u,\ v) + a_1f_3(u,\ v) + a_2f_2(u,\ v) + a_3f_1(u,\ v) + a_4f_0(u,\ v)] = 0. \tag{5}$$

Аналогично

$$P(u) - P(w) = (u - w)[f_4(u,\ w) + a_1 f_3(u,\ w) + a_2 f_2(u,\ w) + a_3 f_1(u,\ w) + a_4 f_0(u,\ w)] = 0. \quad (6)$$

Далее вычтем из равенства (6) равенство (5):

$$f_4(u,\ w) - f_4(u,v) + a_1[f_3(u,\ w) - f_3(u,\ v)] + a_2[f_2(u,\ w) - f_2(u,\ v)] +$$
$$+\ a_3[f_1(u,\ w) - f_1(u,\ v)] = 0.$$

Последнее равенство после применения формулы (2) и сокращения на $w - v$ дает требуемый результат.

Равенство (4) можно записать в следующей форме

$$u^3 + u^2[f_1(w,\ v) + a_1 f_0(w,\ v)] + u[f_2(w,\ v) + a_1 f_1(w,\ v) + a_2 f_0(w,\ v)] +$$
$$+ f_3(w,v) + a_1 f_2(w,\ v) + a_2 f_1(w,\ v) + a_3 f_0(w,\ v) = 0.$$

Аналогично получаем, что если известны три попарно не совпадающих корня v, w, y, то любой другой корень уравнения (3) находится из уравнения

$$u^2 + u(v + w + y + a_1) + v^2 + w^2 + y^2 + vw + vy + wy + a_1(v + w + y) + a_2 = 0.$$

Например, пусть

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0. \quad (7)$$

Корни $v = 1$, $w = 2$ находим подбором из делителей числа 120. Остальные корни получаем из уравнения (4), которое принимает следующий вид:

$$u^3 - 12u^2 + 47u - 60 = 0.$$

Эти рассуждения удобно применять при исследовании трехчленных уравнений. Рассмотрим, например, уравнение

$$x^3 + 2x - 72 = 0 \quad (p = 2,\ q = -72). \quad (8)$$

Подстановка (k – аргумент определяющей функции, которая для данного уравнения задается неявно равенством $\frac{k^3}{k+1} = -\frac{p^3}{q^2}$ [3])

$$x = k\frac{q}{p} = k\frac{-72}{2} = -36k$$

приводит к следующей связи между корнями:

$$u = k_1\frac{q}{p},\ v = k_2\frac{q}{p},\ w = k_3\frac{q}{p}.$$

Связь выражается равенствами

$$k_2^2 + k_1k_2 + k_1^2 = -\ \frac{p^3}{q^2};\ k_3^2 + k_1k_3 + k_1^2 = -\ \frac{p^3}{q^2}. \quad (9)$$

Корень u находится подбором: $u = 4$, отсюда следует, что $k_1 = -\frac{1}{9}$, после чего k_2 находится из уравнения (9):

$$k_2 = \frac{1}{18} + \frac{i\sqrt{14}}{36}.$$

Таким образом,

$$x_2 = k_2\frac{q}{p} = \left(\frac{1}{18} + \frac{i\sqrt{14}}{36}\right) \cdot \frac{-72}{2} = -2 - i\sqrt{14}.$$

Аналогично $x_3 = -2 + i\sqrt{14}$.

Более содержательными являются примеры, относящиеся к трехчленным уравнениям пятой степени.

Пусть

$$x^5 - 5x + 4 = 0 \quad (p = -5,\ q = 4).$$

Используя такую же подстановку

$$x = k\frac{q}{p} = k\frac{4}{-5},$$

получаем следующую связь между корнями:

$$u = k_1 \frac{q}{p},\ v = k_2 \frac{q}{p},\ w = k_3 \frac{q}{p},\ y = k_4 \frac{q}{p},\ z = k_5 \frac{q}{p}.$$

Уравнения связи имеют вид

$$k_i^4 + k_i k_j^3 + k_i^2 k_j^2 + k_i^3 k_j + k_j^4 = -\ \frac{p^5}{q^4} \quad (i \neq j). \tag{10}$$

Тогда, находя подбором корень $u = 1$, из уравнения

$$u = k_1 \frac{q}{p}$$

находим $k_1 = -5/4$. Подставляя это значение в уравнение (10), получим

$$\frac{256}{625} k^4 - \frac{64}{125} k^3 + \frac{16}{25} k^2 - \frac{4}{5} k - 4 = 0.$$

Решениями последнего уравнения являются числа k_2, k_3, k_4, k_5. Вычислим их значения с помощью системы компьютерной математики *Maple* 2019:

$$k_2 = k_1 = -\frac{5}{4};$$

$$k_3 = \frac{5\left(\left(35+15\sqrt{6}\right)^{2/3} + 2\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3} - 5\right)}{12\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3}};$$

$$k_4 = \frac{5\left(\left(i\sqrt{3}-1\right)\left(35+15\sqrt{6}\right)^{2/3} + 5i\sqrt{3} + 4\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3} + 5\right)}{24\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3}};$$

$$k_5 = -\frac{5\left(\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(35+15\sqrt{6}\right)^{2/3} + 5i\sqrt{3} - 4\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3} - 5\right)}{24\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3}} = k_4^*.$$

Тогда соответствующие значения неизвестных будут иметь вид:

$$x_3 = k_3 \frac{q}{p} = -\frac{\left(\left(35+15\sqrt{6}\right)^{2/3} + 2\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3} - 5\right)}{3\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3}};$$

$$x_4 = k_4 \frac{q}{p} = -\frac{\left(i\sqrt{3}-1\right)\left(35+15\sqrt{6}\right)^{2/3} + 5i\sqrt{3} + 4\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3} + 5}{6\left(35+15\sqrt{6}\right)^{1/3}};$$

$$x_5 = x_4^*.$$

Подставляя все полученные значения x в исходное уравнение, убеждаемся, что все они являются его корнями.

Рассмотренный пример был приведен в целях ознакомления со справедливостью полученных аналитических выкладок. Разумеется, на практике, подобрав первый корень $u = 1$, можно было бы без труда разделить исходное уравнение углом на $(x-1)$ и получить уравнение четвертой степени

$$x^4 + x^3 + x^2 + x - 4 = 0,$$

корень которого также $v = 1$, но равенство типа равенства (10) имеет удобную символьную форму. Снова разделив на $(x-1)$, мы бы получили

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0,$$

корнями которого являются представленные x_3, x_4 и x_5.

Отметим также, что для проверки, содержит ли кратный корень произвольное трехчленное алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, можно воспользоваться теоремами, доказанными авторами настоящего исследования ранее. Они опубликованы в предыдущей статье, посвященной разработке метода локализации и определения числа действительных решений у произвольных трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами [3]. Конкретно в нашем примере трехчленное уравнение имеет вид

$$x^5 + px + q = 0 \ (p \neq 0, \quad q \neq 0),$$

для которого согласно [3, теорема 1] справедливо условие существования двукратного действительного корня

$$-\ \frac{p^5}{q^4} = \frac{3125}{256},$$

и при выполнении этого условия значение кратного корня находится по формуле

$$x_* = \left(-\ \frac{p}{5}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Вернемся к равенствам, связывающим корни алгебраических уравнений между собой. Несложно убедиться в том, что наиболее простой вид имеют равенства, связывающие корни трехчленных алгебраических уравнений.

Напомним, что для произвольных трехчленных алгебраических уравнений вида

$$x^n + px^m + \ q = 0\ (n > m > 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0)$$

имеет место следующая классификация [4, с. 148]. В зависимости от четности степеней неизвестного трехчленные алгебраические уравнения подразделяются на 4 типа:

- нечетно-нечетные (n и m – нечетные),
- нечетно-четные (n – нечетное, m – четное),
- четно-нечетные (n – четное, m – нечетное)
- и четно-четные (n и m – четные).

1. **Нечетно-нечетные уравнения.** Пусть

$$u^n + pu^m + q = 0,\ v^n + pv^m + q = 0.$$

Тогда для двух различных корней такого уравнения справедливо равенство

$$u^{n-1} + vu^{n-2} + \dots + v^{n-2} + p(u^{m-1} + vu^{m-2} + \dots + v^{m-1}) = 0. \qquad (11)$$

Подстановка

$$x = k\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m}$$

приводит к двум различным значениям аргумента определяющей функции:

$$u = k\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m},\ v = k_1\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m}.$$

Эти значения связаны равенством, которое следует после подстановки u и v в равенство (11):

$$(k^{n-1} + k^{n-2}k_1 + \dots + k_1^{n-2})\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}} + p(k^{m-1} + k^{m-2}k_1 + \dots + k_1^{m-2}) = 0. \qquad (12)$$

2. **Нечетно-четные уравнения.** Если p и q – одного знака, то подстановка

$$x = k\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m} \qquad (13)$$

приводит к равенству (12) (уравнение определяется структурой подстановки и в этом случае оно такое же, как и в нечетно-нечетном). Если применяется подстановка

$$x = k\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{m}},$$

то равенство (12) принимает вид

$$(k^{n-1} + k^{n-2}k_1 + \dots + k_1^{n-2})\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}} + p(k^{m-1} + k^{m-2}k_1 + \dots + k_1^{m-2}) = 0.$$

В остальных случаях ситуация аналогичная.

Далее приведем пример на применение теоремы 1. Рассмотрим уравнение

$$x^5 + (i-6)x^4 + (18-i)x^3 - (28+9i)x^2 + (17+19i)x - 2 - 10i = 0. \qquad (14)$$

Числа $v = 1$ и $w = 2$ являются его корнями. Уравнение (4) для нахождения остальных корней уравнения (14) будет иметь вид:

$$u^3 + (-3+i)u^2 + (7+2i)u - 1 - 5i = 0.$$

Корни данного уравнения $u_1 = 2 - 3i$, $u_2 = i$, $u_3 = i + 1$. Эти же числа являются корнями уравнения (14).

Приведение трехчленного уравнения четвертой степени к возвратному. Напомним, что уравнение четвертой степени

$$x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0. \quad (15)$$

называется *возвратным*, если вынесение за скобки x^2 приводит его к виду

$$x^2\left[\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 + a_1\left(x + \frac{a}{x}\right) + a_2\right] = 0. \quad (16)$$

Такое преобразование возможно, если выполнено равенство

$$c_1^2c_4 = c_3^2. \quad (17)$$

Построим алгоритм преобразования трехчленного уравнения четвертой степени

$$x^4 + px^3 + q = 0 \quad (18)$$

к возвратному. Подстановка $x = y + b$ приводит уравнение (18) к виду

$$y^4 + (p + 4b)y^3 + (6b^2 + 3pb)y^2 + (4b^3 + 3pb^2)y + b^4 + pb^3 + q = 0, \quad (19)$$

а равенство (17) превращается в условие

$$p^3b^3 + 16qb^2 + 8pqb + p^2q = 0. \quad (20)$$

Т.е. число b надо выбирать из корней кубического уравнения (20) [5]. Зачастую метод сведения алгебраического уравнения четвертой степени к возвратному оказывается более простым в применении по сравнению с другими классическими методами, например, методом Феррари. В конкретных числовых примерах уравнение типа (20) может иметь более простое решение, чем кубическое уравнение, возникающее в методе Феррари.

Приведем пример. Рассмотрим уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2 = 0. \quad (21)$$

Уравнение (20) в этом случае будет иметь вид

$$-8b^3 + 32b^2 - 32b + 8 = 0.$$

Его корни

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, b_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Выбираем $b = 1$, тогда после подстановки $x = y + 1$ получаем уравнение

$$y^4 + 2y^3 - 2y + 1 = 0.$$

Далее

$$y^4 + 2y^3 - 2y + 1 = y^2\left[y^2 + \frac{1}{y^2} + 2\left(y - \frac{1}{y}\right)\right] = y^2\left[\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{y}\right) + 2\right].$$

Сделаем замену

$$z = y - \frac{1}{y}.$$

Уравнение

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

имеет корни $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$. Далее надо решить уравнение

$$y - \frac{1}{y} = z_1 = -1 + i.$$

Его корни

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(-1 - i - \sqrt{\sqrt{5} - 2}(\sqrt{5} + 2) + \sqrt{\sqrt{5} - 2}\ i\right),$$
$$y_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - i + \sqrt{\sqrt{5} - 2}(\sqrt{5} + 2) - \sqrt{\sqrt{5} - 2}\ i\right).$$

Таким образом, находятся два корня уравнения (21), это

$$x_1 = y_1 + 1, x_2 = y_2 + 1.$$

Другие два корня уравнения (21) находятся аналогично из уравнения

$$y - \frac{1}{y} = z_2 = -1 + i.$$

Применяя такие же предыдущие рассуждения к уравнению

$$x^4 + px + q = 0,$$

получаем аналог уравнения (19)

$$y^4 + 4by^3 + 6b^2y^2 + (4b^3 + p)y \ + b^4 + pb + q = 0$$

и аналог уравнения (20):

$$8b^3p \ + 16b^2q \ - p^2 = 0.$$

Заключение. Предложенный авторами алгоритм построения уравнений типа уравнения (4), связывающих известные корни алгебраического уравнения с неизвестными (причем в символьной форме), помогает в терминах известных корней получить такое уравнение. В особенности этот алгоритм удобен при анализе трехчленных уравнений. Если при исследовании трехчленного уравнения применяется определяющая функция, то получаются равенства, связывающие различные значения ее аргументов при фиксированном значении самой определяющей функции. Например, равенство (12) можно рассматривать как уравнение, позволяющее по известному значению k_1 найти другое значение ее аргумента. Кроме того, в статье предложен алгоритм приведения трехчленного уравнения четвертой степени к возвратному.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.
2. Утешев, А.Ю. Курс лекций по высшей алгебре. Часть I: учеб. пособие / А.Ю. Утешев, Е.А. Калинина. – СПб.: «СОЛО», 2007. – 246 с.
3. Трубников, Ю.В. О распределении корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 1(106). – С. 21–33.
4. Кутищев, Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени / Г.П. Кутищев. – М.: Издательство ЛКИ, 2019. – 232 с.
5. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.

R E F E R E N C E S

1. Antipova I.A., Mikhalkin E.N., Tsikh A.K. *Matematicheski sbornik* [Mathematics Collection], 2018, 209(10), pp. 3–30.
2. Uteshev A.Yu., Kalinina E.A. *Kurs lektsi po vysshei algebre* Ucheb. posobiye [Course of Lectures on Higher Algebra. Textbook], St. Petersburg, SOLO, 2007, 246 p.
3. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. *Vestnik VGU* [Newsletter of Vitebsk State University], 2020, 1(106), pp. 21–33.
4. Kutishchev G.P. *Resheniye algebraicheskikh uravneni proizvolnoi stepeni* [Solving Algebraic Equations of Arbitrary Degree], Moscow, Izdatelstvo LKI, 2019, 232 p.
5. Astapov I.S., Astapov N.S. *Programmnaya inzheneriya* [Software Engineering], 2017, 8(9), pp. 422–432.

Поступила в редакцию 20.04.2020
Адрес для корреспонденции: e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.