УДК 512.542

О полугруппе π-нормальных классов Фиттинга

Н.В. Савельева

Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

В настоящей работе для всякого непустого множества π простых чисел вводится понятие π-нормального класса Фиттинга как класса Фиттинга, нормального в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп, и исследуется вопрос о π-нормальности произведения классов Фиттинга конечных π-групп. Установлено, что произведение двух классов Фиттинга конечных π-групп является π-нормальным классом Фиттинга при условии, что π-нормален второй сомножитель. Полученный результат позволяет выяснить, является ли полугруппой алгебра <$\mathfrak{P}$, ·>, где $\mathfrak{P}$ обозначает множество всех π-нормальных классов Фиттинга и «·» есть операция умножения классов Фиттинга. Основная теорема данной статьи расширяет известный результат Лаунэ о нормальности произведения произвольного класса Фиттинга конечных групп и класса Фиттинга, нормального в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп.

Ключевые слова: *класс Фиттинга, π-нормальный класс Фиттинга, произведение классов Фиттинга, полугруппа π-нормальных классов Фиттинга, класс всех конечных π-групп.*

On the semigroup of π-normal Fitting classes

N.V. Savelyeva

Educational establishment «Brest State Pushkin University»

In this paper for every non empty π-multitude of primes the concept of π-normal Fitting class as a Fitting class, normal in $\mathfrak{E}_\pi$ class of all finite π-groups is introduced. The issue of π normality of Fitting classes of finite π-groups product is studied. It is established that the product of two Fitting classes of finite π-groups is a π-normal Fitting class, if the second multiplier is a π-normal Fitting class. This property signifies that the algebra <$\mathfrak{P}$, ·> is a semigroup, where $\mathfrak{P}$ is the set of all π-normal Fitting classes and «·» is the multiplication operation of Fitting classes. The main theorem of this paper extends the known Laue's result on the conditions for products of Fitting classes of finite groups to be normal in the class $\mathfrak{E}$ of all finite groups.

Key words: *Fitting class, π-normal Fitting class, product of Fitting classes, semigroup of π-normal Fitting classes, class of all finite π-groups.*

В исследованиях алгебры классов конечных групп особое внимание уделяется выделению и описанию различных семейств классов групп, в частности, нормальных классов групп. Напомним, что понятие нормального класса было введено Блессенолем и Гашюцом [1] для классов Шунка и классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Согласно [1], класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если в любой конечной разрешимой группе G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются в ней нормальными подгруппами. В дальнейшем понятие нормальности было расширено введением так называемых локально нормальных (или $\mathfrak{X}$-нормальных) классов Фиттинга, и, прежде всего, π-нормальных классов (см. [2] или IX.2.13 (b) [3], а также с. 704, 708 [3]).

Известный результат Лауша [4] об изоморфизме решетки всех нормальных классов Фиттинга и решетки всех подгрупп некоторой бесконечной абелевой группы (группы Лауша класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп) инициировал систематическое изучение нормальных классов Фиттинга и их приложений в теории классов групп. В классе $\mathfrak{S}$ известен ряд изящных свойств нормальных классов Фиттинга. В частности, Косси [5] установлено, что произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{S}$-нормальным, если хотя бы один из сомножителей является нормальным в $\mathfrak{S}$. Следовательно, ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга, алгебра <$\mathfrak{P}$, > является полугруппой ($\mathfrak{P}$ – множество всех $\mathfrak{S}$-нормальных классов Фиттинга, «·» – операция умножения классов Фиттинга). Отметим, что на случай конечных разрешимых π-групп указанный выше результат Косси был расширен в работе [6] (π – непустое множество простых чисел). В связи с этим естественен вопрос о том, сохраняется ли такое свойство алгебры при переходе от конечных разрешимых групп к произвольным конечным группам. В данном направлении Лауэ [2] было установлено, что произведение подклассов Фиттинга класса $\mathfrak{E}$ всех конечных групп является $\mathfrak{E}$-нормальным, если $\mathfrak{E}$-нормален второй сомножитель. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп, то класс $\mathfrak{F}$ мы называем π-нормальным. Выяснить, является ли полугруппой алгебра $<\mathcal{P}, \cdot>$, где $\mathcal{P}$ обозначает множество всех π-нормальных классов Фиттинга, позволяет основной результат настоящей работы.

Все рассматриваемые группы являются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [3].

1. Предварительные сведения. Приведем вначале некоторые известные определения и результаты теории групп, которые мы будем использовать.

Напомним, что если M – непустое подмножество группы G, то централизатором $C_G(M)$ множества M в группе G называется совокупность всех элементов группы G, перестановочных с каждым элементом множества M, т.е. $C_G(M)=\{g\in G \mid gm=mg\ \forall m\in M\}$. Говорят (см., например, с. 60 [7]), что множество $B\subseteq G$ централизует непустое подмножество A группы G, если $B\subseteq C_G(A)$. Централизатор $C_G(G)$ называется центром группы G и обозначается $Z(G)$.

Основные свойства централизаторов сформулируем в качестве следующей леммы.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) (см. с. 70 [8]) если H – нормальная подгруппа группы G, то централизатор $C_G(H)$ нормален в G;

2) (см. с. 60 [7]) если A – подмножество группы G, то $A\leq Z(G)$ в точности тогда, когда $C_G(A)=G$;

3) (см. с. 19 [9]) если нормальные подгруппы H и K группы G таковы, что $K\leq H$, то централизатор $C_G(H/K)=<g\in G \mid g^{-1}h^{-1}gh\in K,\ h\in H>$ является нормальной подгруппой группы G.

Напомним также, что неединичная группа G называется простой, если она не содержит нетривиальных нормальных подгрупп.

Если H – подгруппа группы G и $\alpha(H)=H$ для всех $\alpha\in \mathrm{Aut}\, G$, то H называется характеристической подгруппой группы G. Группу, в которой не существует нетривиальных характеристических подгрупп, называют характеристически простой.

Хорошо известны (см., например, утверждения А.4.13 (a) [3] или 1.7.3 [7]) признаки и свойства характеристически простых групп, из которых необходимые нам мы приводим в качестве нижеследующей леммы, доказательство первого утверждения которой очевидно.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения*:

1) минимальная нормальная подгруппа является характеристически простой;

2) (см. А.4.13 (a) [3]) характеристически простая группа разлагается в прямое произведение изоморфных простых групп.

Сформулируем теперь определения основных понятий теории классов Фиттинга и приведем известные их свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если каждая нормальная подгруппа любой группы G из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$, и из того, что нормальные подгруппы M и N группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$. Из определения класса Фиттинга вытекает понятие $\mathfrak{F}$-радикала произвольной группы, которое определяется для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ как произведение всех ее нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, а именно: если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не пуст, то подгруппу $G_\mathfrak{F}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Понятие $\mathfrak{F}$-радикала группы является ключевым в теории классов Фиттинга и используется в выделении и исследовании многих семейств классов Фиттинга. Так, например, с помощью $\mathfrak{F}$-радикала определяются нормальные классы Фиттинга. При этом неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-нормальным (этот факт обозначается $\mathfrak{F}\trianglelefteq\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ и для любой $\mathfrak{X}$-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в группе

G. Отметим, что первоначально нормальные классы Фиттинга были введены [1] в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп посредством инъекторов групп.

В терминах радикалов групп определяются произведения классов Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение – это класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=(G\in\mathfrak{E} : G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H})$, который также является классом Фиттинга (см. с. 566 [3]).

Основные свойства радикалов и произведений классов Фиттинга характеризуют следующие две леммы.

Лемма 1.3 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – непустые классы Фиттинга. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) $G_{\mathfrak{F}}=G$ в точности тогда, когда $G\in\mathfrak{F}$;

2) если $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}$, то $G_{\mathfrak{X}}\leq G_{\mathfrak{Y}}$;

3) (см. IX.1.1(a) [3]) если N – субнормальная подгруппа группы G, то $N_{\mathfrak{F}}=N\cap G_{\mathfrak{F}}$;

4) (см. IX.1.12(b) [3]) имеет место равенство $(G/G_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}=G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о первого и второго утверждения леммы осуществляется непосредственной проверкой.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется гомоморфом (или Q-замкнутым классом), если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 1.4 [3, с. 566]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) если класс $\mathfrak{H}$ не пуст, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$;

2) если $\mathfrak{H}$ – гомоморф и класс $\mathfrak{F}$ не пуст, то $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}\mathfrak{H}$;

3) операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

В теории классов Фиттинга для разнообразных целей в доказательствах широко используются операторы «*» и «$_*$», которые были определены Локеттом [10] следующим образом: для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ посредством оператора «*» сопоставляется класс $\mathfrak{F}^*$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство

$$(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}.$$

Класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Напомним также, что секцией Локетта непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$.

2. Основной результат. Расширяя понятие $\mathfrak{E}$-нормальности классов Фиттинга на случай π-групп, неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть π-нормальным, если $\mathfrak{F}\trianglelefteq\mathfrak{E}_\pi$, где π обозначает непустое множество простых чисел и $\mathfrak{E}_\pi$ есть класс всех π-групп.

Блессенолем и Гашюцом было установлено [1], что существует нетривиальный наименьший $\mathfrak{S}$-нормальный класс Фиттинга, которым является $\mathfrak{S}_*$ – минимальный элемент секции Локетта класса $\mathfrak{S}$. Данное утверждение было впоследствии расширено в работе [6] на случай π-групп. Отметим, что дальнейшее расширение результата Блессеноля–Гашюца о наименьшем нормальном классе Фиттинга на случай класса $\mathfrak{E}_\pi$ произвольных π-групп невозможно, поскольку не все π-нормальные классы Фиттинга попадают в секцию Локетта класса $\mathfrak{E}_\pi$. Однако с использованием другой техники доказательства Лауэ были установлены (см. 2.5 (b) [2] или X.3.26 [3]) существование и нетривиальность наименьшего π-нормального класса Фиттинга, которым является класс $(\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{D}_\pi$, где $\mathfrak{D}_\pi$ – класс всех тех π-групп, которые разлагаются в прямое произведение простых подгрупп, и $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ – минимальный элемент секции Локетта класса $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп. Примечателен тот факт, что, как установлено в [11], класс $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ является наименьшим π-нормальным классом Фиттинга в универсуме $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп.

При доказательстве основной теоремы настоящей работы мы будем использовать результат Лаущ о наименьшем $\mathfrak{E}$-нормальном классе Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{D}_\pi$, который сформулируем ниже в качестве леммы 2.1.

Лемма 2.1 [2]. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел и* $\mathfrak{D}_\pi$ *обозначает класс всех тех* π*-групп, которые разлагаются в прямое произведение простых подгрупп. Существует единственный нетривиальный наименьший* π*-нормальный класс Фиттинга, которым является* $(\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{D}_\pi$.

Напомним также, что множество $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$, называемое характеристикой класса $\mathfrak{X}$, определяется для любого класса групп $\mathfrak{X}$ следующим образом:

$$\mathrm{Char}(\mathfrak{X})=\{p \mid p\in\mathbb{P},\ Z_p\in\mathfrak{X}\},$$

где $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел.

Известное свойство $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга представлено ниже.

Лемма 2.2 (см. X.3.2 [3]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс групп такой, что* $\mathfrak{X}^2=\mathfrak{X}\neq(1)$*, и пусть* $\mathfrak{F}$ *–* $\mathfrak{X}$*-нормальный класс Фиттинга. Тогда* $\mathfrak{F}$ *содержит все простые* $\mathfrak{X}$*-группы и, если* $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})=\pi$*, то* $\mathfrak{N}_\pi\subseteq\mathfrak{F}$*, где* $\mathfrak{N}_\pi$ *обозначает класс всех нильпотентных* π*-групп.*

Основной результат настоящей работы представляет следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть* π *– непустое множество простых чисел, классы Фиттинга* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *таковы, что* $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{E}_\pi$ *и* $\mathfrak{Y}\trianglelefteq\mathfrak{E}_\pi$*. Тогда* $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ *–* π*-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{Y}$ – π-нормальный класс Фиттинга. Предположим, что произведение $\mathfrak{E}_\pi$-классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не является π-нормальным классом. Тогда существует π-группа G минимального порядка, у которой найдется подгруппа $H\in\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ такая, что $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}<H\leq G$.

Заметим, что $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\triangleleft H$, и тогда $G_\mathfrak{X}\triangleleft G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\triangleleft H$. Отсюда по теореме о соответствии (см., например, теорему 4.12 [12, с. 32]) получаем $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X}\triangleleft H/G_\mathfrak{X}$. Но по утверждению 4) леммы 1.3 имеет место равенство $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X}=(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{Y}$. Следовательно, $(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{Y}\triangleleft H/G_\mathfrak{X}$. Но так как по условию $H\in\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, то по определению произведения классов Фиттинга $H/H_\mathfrak{X}\in\mathfrak{Y}$.

Заметим, что $H_\mathfrak{X}>G_\mathfrak{X}$. Действительно, случай $H_\mathfrak{X}=G_\mathfrak{X}$ невозможен, потому что тогда из равенства $H/G_\mathfrak{X}=H/H_\mathfrak{X}$ последует, что $H/G_\mathfrak{X}\in\mathfrak{Y}$. Это означает, что $(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{Y}<H/G_\mathfrak{X}\in\mathfrak{Y}$, т.е. получаем противоречие с π-нормальностью класса $\mathfrak{Y}$. Если же принять $H_\mathfrak{X}<G_\mathfrak{X}$, то $H_\mathfrak{X}<G_\mathfrak{X}<G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}<H$. Отсюда $|H/G_\mathfrak{X}|<|H/H_\mathfrak{X}|$. Кроме того, из $H_\mathfrak{X}<G_\mathfrak{X}<G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}<H$ по теореме о соответствии $|G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X}|<|H/G_\mathfrak{X}|$. Таким образом, с учетом утверждения 4) леммы 1.3 имеем $|(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{Y}|<|H/G_\mathfrak{X}|<|H/H_\mathfrak{X}|$. Но $H/H_\mathfrak{X}\in\mathfrak{Y}$. Итак, снова $(G/G_\mathfrak{X})_\mathfrak{Y}$ не является $\mathfrak{Y}$-максимальной подгруппой в $G/G_\mathfrak{X}$, что означает противоречие с π-нормальностью класса $\mathfrak{Y}$. Остается единственная возможность, что $H_\mathfrak{X}>G_\mathfrak{X}$.

Покажем, что $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}=G_\mathfrak{X}$. По утверждению 1) леммы 1.4 $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Значит, по утверждению 2) леммы 1.3 $G_\mathfrak{X}\leq G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$. Отсюда с учетом $G_\mathfrak{X}<H_\mathfrak{X}$ получаем, что $G_\mathfrak{X}\leq H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$. Но $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\in\mathfrak{X}$ и $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\triangleleft G$. Кроме того, $G_\mathfrak{X}$ – максимальная нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы G. Следовательно, ввиду $G_\mathfrak{X}\leq H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ заключаем, что $G_\mathfrak{X}=H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$.

Заметим также, что $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\trianglelefteq H$, так как $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\trianglelefteq G$ и $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}<H\leq G$.

Теперь из того, что $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}=G_\mathfrak{X}$, $H_\mathfrak{X}\trianglelefteq H$ и $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\trianglelefteq H$, заключаем, что $H_\mathfrak{X}$ централизует факторгруппу $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X}$, т.е. имеет место включение $H_\mathfrak{X}\subseteq C_G(G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X})$.

Обозначим $C=C_G(G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}/G_\mathfrak{X})$. Тогда по утверждению 3) леммы 1.1 имеем $C\trianglelefteq G$ и согласно утверждению 3) леммы 1.3 получаем $C_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}=G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C$.

Покажем, что $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C<(G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C)H_\mathfrak{X}$. Заметим, что $H_\mathfrak{X}\nsubseteq G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$. Действительно, если, допустив обратное, положить $H_\mathfrak{X}\subseteq G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$, то $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}=H_\mathfrak{X}$. Согласно доказанному ранее, имеем $H_\mathfrak{X}\cap G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}=G_\mathfrak{X}<H_\mathfrak{X}$. Значит, $H_\mathfrak{X}\nsubseteq G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}$ и тогда $H_\mathfrak{X}\nsubseteq G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C$. Поэтому $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C<(G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\cap C)H_\mathfrak{X}$.

Следовательно, с учетом того, что $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}\triangleleft H$, $C\trianglelefteq G$ и $H_\mathfrak{X}\triangleleft H$, получаем

$$C_{\mathfrak{XY}}=G_{\mathfrak{XY}}\cap C<(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}\trianglelefteq H.$$

Но поскольку $H\in\mathfrak{XY}$, то нормальность подгруппы $(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}$ в группе H по определению класса Фиттинга означает, что группа $(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}$ принадлежит классу $\mathfrak{XY}$.

Кроме того, $(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}<C$. Докажем это. Имеем $H_{\mathfrak{X}}\subseteq C$ ($H_{\mathfrak{X}}$ централизует группу $C_G(G_{\mathfrak{XY}}/G_{\mathfrak{X}})$. Если $H_{\mathfrak{X}}=C$, то ввиду $C\trianglelefteq G$ получаем $H_{\mathfrak{X}}\trianglelefteq G$ и по определению $\mathfrak{X}$-радикала $H_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{X}$. Но тогда по определению $\mathfrak{X}$-радикала должно выполняться $G_{\mathfrak{X}}\geq H_{\mathfrak{X}}$, что противоречит доказанному ранее соотношению $H_{\mathfrak{X}}>G_{\mathfrak{X}}$. Значит, $H_{\mathfrak{X}}\subset C$. Вместе с тем, $(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)\subseteq C$, причем равенство достижимо, если $G_{\mathfrak{XY}}\supseteq C$. Но тогда $G_{\mathfrak{XY}}\cap C=C$ и с учетом $H_{\mathfrak{X}}\subset C$ из доказанного ранее $G_{\mathfrak{XY}}\cap C<(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}$ получаем $C<CH_{\mathfrak{X}}=C$, что невозможно.

Итак,

$$C_{\mathfrak{XY}}<(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}<C.$$

Из минимальности порядка группы G следует, что $C=G$. Действительно, имеем $|C_{\mathfrak{XY}}|<|G|$ и $C_{\mathfrak{XY}}\in\mathfrak{XY}$. Но нашлась группа $(G_{\mathfrak{XY}}\cap C)H_{\mathfrak{X}}>C_{\mathfrak{XY}}$ и $C_{\mathfrak{XY}}\in\mathfrak{XY}$. Следовательно, ввиду выбора группы G и условия $C\leq G$ остается допустить, что $C=G$.

Так как $C=G$, то с учетом утверждения 2) леммы 1.1 получаем

$$G_{\mathfrak{XY}}/G_{\mathfrak{X}}\leq Z(G/G_{\mathfrak{X}}).$$

Пусть $N/G_{\mathfrak{XY}}$ – минимальная нормальная подгруппа π-группы $G/G_{\mathfrak{XY}}$. Если допустить, что $N\in\mathfrak{XY}$, то по определению радикала $G_{\mathfrak{XY}}=N$, и тогда факторгруппа $N/G_{\mathfrak{XY}}$ изоморфна единичной группе, что противоречит выбору группы $N/G_{\mathfrak{XY}}$. Следовательно, $N\notin\mathfrak{XY}$.

Если $N/G_{\mathfrak{XY}}$ абелева, то $N/G_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{N}_{\pi}$. Тогда с учетом π-нормальности класса $\mathfrak{Y}$ и условий, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{E}_{\pi})=\pi$ и $\mathfrak{E}_{\pi}\mathfrak{E}_{\pi}=\mathfrak{E}_{\pi}\neq(1)$ для любого непустого множества π, по лемме 2.2 заключаем, что $N/G_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{Y}$. Это по определению произведения классов Фиттинга означает, что $N\in\mathfrak{XY}$. Последнее противоречит выбору группы $N/G_{\mathfrak{XY}}$.

Следовательно, группа $N/G_{\mathfrak{XY}}$ не является абелевой. Но $N/G_{\mathfrak{XY}}$ – минимальная нормальная подгруппа. Значит, подгруппа $N/G_{\mathfrak{XY}}$ по лемме 1.2 является характеристически простой группой и разлагается в прямое произведение изоморфных простых групп. Итак, $N/G_{\mathfrak{XY}}\in\mathfrak{H}_{\pi}$, где $\mathfrak{H}_{\pi}$ – класс всех тех π-групп, которые представимы в виде прямого произведения изоморфных простых групп.

Тогда

$$(N/G_{\mathfrak{X}})_{(\mathfrak{S}_{\pi})_*}=G_{\mathfrak{XY}}/G_{\mathfrak{X}},$$

$$N/G_{\mathfrak{X}}\in(\mathfrak{S}_{\pi})_*\mathfrak{H}_{\pi},$$

и поэтому $N/G_{\mathfrak{X}}\in\mathfrak{Y}$ ввиду утверждения леммы 2.1.

Снова получаем $N\in\mathfrak{XY}$ – противоречие с выбором группы $N/G_{\mathfrak{XY}}$.

Теорема доказана.

В случае, когда π совпадает со множеством $\mathbb{P}$ всех простых чисел, из теоремы 2.3 вытекает указанный выше результат Лауэ.

Следствие 2.4 (Лауэ, теорема 2.7 [4]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{E}$ всех групп и $\mathfrak{Y}$ – $\mathfrak{E}$-нормальный класс Фиттинга. Тогда произведение $\mathfrak{XY}$ классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ является нормальным классом Фиттинга.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.
2. Laue, H. Über nichtaflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45, № 2. – S. 274–283.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
5. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – S. 289–295.
6. Савельева, Н.В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Сибирск. матем. журнал. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411–1419.
7. Kurzweil, H. The Theory of Finite Groups. An Introduction / H. Kurzweil, B. Stellmacher. – N. Y.: Springer-Verlag, 2004. – 387 p.
8. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – N. Y.: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967. – 798 s.
10. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137. – S. 131–136.
11. Савельева, Н.В. О проблеме существования максимальных подклассов минимального π-нормального класса Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 29–37.

12. Suzuki, M. Group Theory I / M. Suzuki. – N. Y.: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982. – 434 p.

Поступила в редакцию 08.11.2012. Принята в печать20.02.2013.
Адрес для корреспонденции: e-mail: natallia.savelyeva@gmail.com – Савельева Н.В.