УДК 517.95

Задача Гурса для трехмерных дифференциально-операторных уравнений в частных производных второго порядка с переменными областями определения

Ф.Е. Ломовцев, А.В. Мотевич
Белорусский государственный университет

Доказана корректность по Адамару задачи Гурса для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений в частных производных по трехмерному параметру (времени) с зависящими от времени областями определения операторов. Предложен метод расширения неограниченных операторов краевых задач из позитивных пространств в негативные пространства для доказательства существования их сильных решений. Показана корректность новой частично характеристической краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка с трехмерным временем при условиях типа Гурса и нестационарных пространственных граничных условиях.

Ключевые слова: *трехмерная задача Гурса, корректность по Адамару, дифференциально-операторное уравнение в частных производных, переменная область определения, метод расширения в негативное пространство.*

Goursat problem for three-dimensional second-order partial operator-differential equations with variable domains

F.E. Lomovtsev, A.V. Motevich
Belarusian State University

Correctness by Hadamard of the Goursat problem for complete hyperbolic partial operator-differential equations with respect to three-dimensional parameter (time) with time-dependent domains of operators is proved. The method of extension for unbounded operators of boundary value problems from positive into negative spaces is proposed to prove the existence of its strong solutions. Correctness of new part-characteristic boundary value problem for second-order partial differential equation with respect to three-dimensional time under conditions of Goursat type and unsteady boundary space conditions is established.

Key words: *three-dimensional Goursat problem, correctness by Hadamard, partial operator-differential equation, variable domain, method of extension into negative space.*

Введение. Корректность по Адамару двумерной задачи Гурса для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными неограниченными операторами установлена в [1], когда область определения операторов постоянная, и в [2], когда область определения операторов переменная. В настоящей работе модификацией метода энергетических неравенств доказывается корректность по Адамару трехмерной задачи Гурса в случае переменных областей определения переменных неограниченных операторов, т.е. когда области определения зависят от трехмерного параметра (времени). Трехмерная задача Гурса и ее частные случаи не рассматривались ранее даже в случае постоянной области определения $D(A(t)) = D(A)$ постоянного оператора $A(t) = A$.

Материал и методы. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. В ограниченной области $T = \prod_{i=1}^{3}]0, T_i[$ переменных $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ исследуются уравнения

$$L(t)u \equiv \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_3 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_3 \partial t_1} + \sum_{i=1}^{3} A_i(t) \frac{\partial u(t)}{\partial t_i} + A(t)u(t) = f(t), \qquad (1)$$

с тремя условиями Гурса

$$l_i u \equiv u|_{t_i=0} = \phi_i(t^{(i)}), \quad t^{(i)} \in T^{(i)}, \quad i=\overline{1,3}, \tag{2}$$

где обозначены двумерные переменные $t^{(i)} = \{t_j, t_k\}$ и области $T^{(i)} =]0,T_j[\times]0,T_k[, \quad j \neq i, i \neq k, k \neq j;$ $i,j,k=\overline{1,3}$. Здесь u и f – неизвестная и заданная функции переменной t, принимающие значения в гильбертовом пространстве H, $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, самосопряженные, т.е. $A^*(t) = A(t)$ в H, положительные, т.е. $(A(t)u,u) \geq 0 \forall u \in D(A(t))$, и ограниченно обратимые на H операторы, $A_i(t)$ – линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_i(t))$, $D(A(t)) \subset D(A_i(t)), i=\overline{1,3}$; $\phi_i(t^{(i)})$ – функции двух переменных $t^{(i)} = \{t_j, t_k\} \in]0,T_j[\times]0,T_k[$ со значениями в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющие ниже указанным условиям согласования. За пространство сильных решений задачи Гурса (1), (2) берется банахово пространство E, полученное замыканием множества $D(L) = \{u \in H = L_2(T, H) : u(t) \in D(A(t)), \partial u(t)/\partial t_i \in D(A_i(t)),$ $t \in \overline{T} = = \prod_{i=1}^{3}[0,T_i]; \partial u/\partial t_i, \partial^2 u/\partial t_j \partial t_i, A_i(t)(\partial u/\partial t_i), A(t)u \in H, j<i; i,j=\overline{1,3}\}$ по норме

$$\|u\|_E = \left\{ \sup_{t\in T} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{3} \int_0^{T_i}\int_0^{T_j} \left[\frac{1}{2}|\partial u/\partial t_i|^2 + \frac{1}{2}|\partial u/\partial t_j|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right] dt_j dt_i \right\}^{1/2}.$$

Пространством правых частей и данных Гурса будет гильбертово пространство $F = H \times H_1 \times H_2 \times H_3$ функций $\Phi(t) = \{f(t), \phi_1(t_2,t_3), \phi_2(t_1,t_3), \phi_3(t_1,t_2)\}$ с условиями согласования $\phi_2(t_1,0) = \phi_3(t_1,0), t_1 \in [0,T_1]$, $\phi_1(t_2,0) = \phi_3(0,t_2)$, $t_2 \in [0,T_2]$ и $\phi_1(0,t_3) = \phi_2(0,t_3), t_3 \in [0,T_3]$, наделенное эрмитовой нормой $\|\Phi\|_F = (\|f\|_0^2 + |\phi_1|_1^2 + |\phi_2|_2^2 + |\phi_3|_3^2)^{1/2}$, где $\|\cdot\|_0$ – эрмитова норма в $H = L_2(T, H)$, гильбертовы пространства H_i – замыкания следов функций u множества $D(L)$ при $t_i = 0$ по эрмитовым нормам

$$\|u\|_i = \left(\int_0^{T_j}\int_0^{T_k} \left[\frac{3}{2}|\partial u/\partial t_j|^2 + \frac{3}{2}|\partial u/\partial t_k|^2 + |A^{1/2}(t)u|^2 \right]\Big|_{t_i=0} dt_k dt_j \right)^{1/2}, \quad j \neq i, i \neq k, j \neq k; i,j,k=\overline{1,3},$$

где $A^{1/2}(t)$ – квадратные корни операторов $A(t)$ в H. Задаче Гурса (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L \equiv \{L(t), l_1, l_2, l_3\} : E \supset D(L) \to F$, для которого справедлива

Лемма 1. *Если при каждом $t \in \overline{T}$ операторы $A(t)$ самосопряжены, положительны и ограниченно обратимы в H и в H плотно множество $D(L) = \{v \in D(L) : v \in D(A_i^*(t)), t \in \overline{T}$; $A_i^*(t)v \in H, i=\overline{1,3}\}$, где $A_i^*(t) : H \supset D(A_i^*(t)) \to H$ – сопряженные операторы к операторам $A_i(t) : H \supset D(A_i(t)) \to H$, то оператор L допускает замыкание (сильное расширение) $\overline{L} \equiv \{\overline{L}(t), l_1, l_2, l_3\} : E \supset D(\overline{L}) \to F$.*

Определение 1. *Решения $u \in D(\overline{L})$ уравнения $\overline{L}u = \Phi$, $\Phi \in F$, называются сильными решениями задачи Гурса (1), (2).*

Условимся называть уравнения (1) гиперболическими. Развитием и совершенствованием метода энергетических неравенств докажем существование, единственность и устойчивость по правой части и данным Гурса сильных решений задачи Гурса (1), (2) с зависящими от $t = \{t_1, t_2, t_3\}$ областями определения неограниченных операторов. Для трехмерной задачи Гурса разработаем методику вывода энергетического неравенства, которое обеспечивает единственность и устойчивость сильных решений. Для обоснования существования ее сильных решений покажем плотность множества значений созданным методом расширения операторов из позитивных пространств в негативные пространства, основанным на лемме Ф.Е. Ломовцева о сопряженном операторе к произведению операторов.

Результаты и их обсуждение. Сначала выводится энергетическое неравенство, из которого будут следовать единственность и устойчивость сильных решений по правой части и данным Гурса.

1. **Единственность и устойчивость сильных решений** обеспечивает

Теорема 1. *Если выполняются предположения леммы 1 и справедливы следующие условия:*

I. При всех $t \in \overline{T}$ *операторы* $A_i(t)$ *подчинены квадратному корню* $A^{1/2}(t)$ *с областями определения* $D(A^{1/2}(t))$ *операторов* $A(t)$ *(т.е.* $|A_i(t)w| \le c_1 |A^{1/2}(t)w| \ \forall w \in D(A^{1/2}(t)),\ c_1 > 0, i = \overline{1,3}$*) и для них имеет место оценка*

$$-\mathrm{Re}(A_1(t)v_1 + A_2(t)v_2 + A_3(t)v_3, v_1 + v_2 + v_3) \le c_2(|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2)\ \forall v_i \in D(A_i(t)),\ i = \overline{1,3},\ c_2 \ge 0. \qquad (3)$$

II. В пространстве H *при всех* $t \in \overline{T}$ *существуют ограниченные обратные операторы* $A^{-1}(t) \in B(\overline{T}, L(H))$*, сильно непрерывные по* t *и имеющие ограниченные сильные частные производные [3]* $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i \in B(\overline{T}, L(H)),\ i = \overline{1,3},$ *такие, что справедливы неравенства*

$$-\left((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)g, g\right) \le c_3(A^{-1}(t)g, g)\ \forall g \in H,\ i = \overline{1,3},\ \ c_3 \ge 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

тогда справедливо энергетическое неравенство

$$\|u\|_E^2 \le c_4 \left\|\overline{L}u\right\|_F^2 \ \ \forall u \in D(\overline{L}),\ c_4 = \exp\{(T_1 + T_2 + T_3)\max\{2,\ 4c_2/3,\ c_3\}\}. \qquad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножаем уравнение (1) скалярно в H на функцию $e^{c\theta(t)}\left(\partial u/\partial t_1 + \partial u/\partial t_2 + \partial u/\partial t_3\right)$, где $\theta(t) = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - t_1 - t_2 - t_3$, интегрируем по $T_\tau = \prod_{i=1}^{3}[0, \tau_i]$, $0 < \tau_i < T_i, i = \overline{1,3},$ берем удвоенную вещественную часть и для всех $u \in D(L)$ получаем тождество

$$2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(L(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt = 2\mathrm{Re}\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_j \partial t_i}, \frac{\partial u}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt +$$

$$+2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt + 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt + 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt +$$

$$+2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2} + A_3(t)\frac{\partial u}{\partial t_3}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt + 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{3}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt. \quad (6)$$

Интегрируя по частям один раз по t_j и t_i, приходим для $j \ne i; i \ne k; j \ne k; i, j, k = \overline{1,3},$ к трем равенствам

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2\Bigg|_{t_j=\tau_j} dt^{(j)} + \int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\Bigg|_{t_i=\tau_i} dt^{(i)} = 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_j \partial t_i}, \frac{\partial u}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt +$$

$$+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2\Bigg|_{t_j=0} dt^{(j)} + \int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\Bigg|_{t_i=0} dt^{(i)} - c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right]dt. \qquad (7)$$

Интегрируем по частям по $t_k, k = \overline{1,3},$ и получаем еще три равенства

$$\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)\Bigg|_{t_k=\tau_k} dt^{(k)} = \int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_j \partial t_k}, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt + \int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_k}\right)dt +$$

$$+\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)\Bigg|_{t_k=0} dt^{(k)} - c\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt, \qquad k \ne j; i \ne k; j \ne i; i, j, k = \overline{1,3}. \qquad (8)$$

Складываем левые и правые части равенств (7) с вещественной частью левых и правых частей равенств (8), применяем формулу квадрата нормы $|a+b|^2 = |a|^2 + 2\mathrm{Re}(a,b) + |b|^2$ и имеем равенство

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{3}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\ne i, k\ne j}}^{3}\frac{1}{2}\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right)\Bigg|_{t_k=\tau_k} dt^{(k)} = 2\mathrm{Re}\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_j \partial t_i}, \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,k\neq j}}^{3}\frac{1}{2}\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2\right)\Bigg|_{t_k=0} dt^{(k)}-$$

$$-c\sum_{i=1}^{3}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2 dt-\frac{c}{2}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2\right]dt, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

где перед знаками сумм взят множитель $1/2$, так как в них каждое слагаемое суммируется дважды. В силу оценки (3) для всех $u\in D(L)$ выполняется неравенство

$$-2c_2\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2\right)dt\le 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\sum_{i=1}^{3}A_i(t)\frac{\partial u}{\partial t_i},\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt. \qquad (10)$$

Применяем сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}, \varepsilon>0$, из [4] со свойствами: 1) при каждом $t\in\overline{T}$ $\forall g\in H$ норма $|A_\varepsilon^{-1}(t)g-g|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$; 2) в H при всех $t\in\overline{T}$ существуют сильные производные $\partial A_\varepsilon^{-1}(t)/\partial t_i\in B(\overline{T},L(H))$ и $\partial(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))/\partial t_i=-A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i)A(t)A_\varepsilon^{-1}(t),\ i=\overline{1,3}.$ Ввиду самосопряженности $A(t)$ в H и свойства 2), интегрируя один раз по t_j, имеем три равенства

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u)|_{t_j=\tau_j}\,dt^{(j)}=2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u)|_{t_j=0}\,dt^{(j)}-\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\Big[\Big(\big(\partial A^{-1}(t)/\partial t_j\big)A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u\Big)+$$

$$+c(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u,u)\Big]dt,\ j\neq i; i\neq k; j\neq k; i,j,k=\overline{1,3}.$$

По причине ограниченности производных $(\partial A^{-1}(t)/\partial t_j),\ j=\overline{1,3},$ и свойства 1) устремляем $\varepsilon\to 0,$ применяем оценки (4) и приходим к трем неравенствам

$$\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t_j=\tau_j}dt^{(j)}\le 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(A(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_j}\right)dt+\int_0^{\tau_i}\int_0^{\tau_k} e^{c\theta(t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t_j=0}dt^{(j)}+$$

$$+(c_3-c)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}|A^{1/2}(t)u|^2\,dt\ \ \forall u\in D(L),\ j\neq i; i\neq k; j\neq k; i,j,k=\overline{1,3}. \qquad (11)$$

Используя тождество (6), складываем почленно соотношения (9)–(11), применяем в H формулу для норм $|a+b|^2+|b+c|^2+|a+c|^2=|a+b+c|^2+|a|^2+|b|^2+|c|^2$ и получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,k\neq j}}^{3}\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_k=\tau_k}dt^{(k)}\le$$

$$\le 2\mathrm{Re}\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(L(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right)dt+3(c_3-c)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}|A^{1/2}(t)u|^2\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,k\neq j}}^{3}\int_0^{\tau_j}\int_0^{\tau_i} e^{c\theta(t)}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial t_j}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)\Bigg|_{t_k=0}dt^{(k)}+$$

$$+\left(1-\frac{c}{2}\right)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2dt+\left(2c_2-\frac{3c}{2}\right)\int_{T_\tau} e^{c\theta(t)}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t_3}\right|^2\right)dt.$$

Здесь левую часть оцениваем снизу, а правую часть сверху с помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенства $2ab\le a^2+b^2$, приводим подобные слагаемые, опускаем неположительные слагаемые при $c=\max\{2,4c_2/3,c_3\}$, берем точную верхнюю грань по τ_i от 0 до

$T_i, i=\overline{1,3},$ и приходим к неравенству (5) для $u \in D(L)$. Потом данное неравенство распространяем предельным переходом на все сильные решения $u \in D(\overline{L})$ задачи Гурса (1), (2). Теорема 1 доказана.

Непосредственно из энергетического неравенства (5) выводится

Следствие 1. *В предположениях теоремы 1 имеет место равенство* $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$, *где* $R(\overline{L})$ *– множество значений оператора* $\overline{L}$, *а* $\overline{R(L)}$ *– замыкание в* F *множества значений* $R(L)$ *оператора* L.

2. Существование сильных решений. Согласно следствию 1 для доказательства везде разрешимости на F во множестве сильных решений трехмерной задачи Гурса (1), (2) достаточно убедиться в плотности в F множества $R(L)$. Сначала убеждаемся в плотности в H множества значений оператора $L(t)$ на $D(L)$ при однородных условиях Гурса, то есть справедлива

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 1 и условие*

III. При почти всех $t \in T$ *в* H *существуют ограниченные сильные частные производные [5]* $\partial A_i(t)/\partial t_i, i=\overline{1,3},$ *подчиненные операторам* $A^{1/2}(t)$ *в* H, *существуют ограниченные сильные смешанные производные [3]* $\partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_j \partial t_i = \partial^2 A^{-1}(t)/\partial t_i \partial t_j \in L_\infty(T, L(H)),$ $j \neq i, i, j=\overline{1,3},$ *ограничены операторы* $(\partial A_i(t)/\partial t_i)A^{-1/2}(t), A_i(t)(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i) \in L_\infty(T, L(H)), i=\overline{1,3},$ *и при всех* $t \in \overline{T}$ *верна оценка*

$$-\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^* v_i, v_1+v_2+v_3\Big) \le c_5 \sum_{i=1}^{3} |A^{-1/2}(t)v_i|^2 \ \forall v_i \in H,\ i=\overline{1,3},\ c_5 \ge 0, \tag{12}$$

где $(A_i(t)A^{-1}(t))^*$ *– сопряженные операторы к ограниченным операторам* $A_i(t)A^{-1}(t)$ *в* H.

Если для некоторой функции $v \in H$ *выполняется тождество*

$$\int_T (L(t)u, v)dt = 0 \ \ \forall u \in D_0(L), \tag{13}$$

где множество $D_0(L) = \{u \in D(L) : l_i u = 0,\ t^{(i)} \in \overline{T^{(i)}}, i=\overline{1,3}\},$ *то* $v=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ограничены частные производные операторов $(\partial A_i(t)/\partial t_i)A^{-1/2}(t) \in L_\infty((T, L(H)), i=\overline{1,3},$ которые входят в младшую часть нового уравнения, то благодаря методу продолжения по параметру (см. следствие 2) утверждение этой леммы достаточно доказать для оператора $L_0(t)u \equiv \partial^2 u(t)/\partial t_2 \partial t_1 + \partial^2 u(t)/\partial t_3 \partial t_2 + \partial^2 u(t)/\partial t_3 \partial t_1 + \sum_{i=1}^{3}(\partial(A_i(t)u(t))/\partial t_i) + \ +A(t)u(t)$ вместо оператора $L(t)$. Поэтому вместо тождества (13) в тождестве

$$\int_T (L_0(t)u, v)dt = 0 \ \ \forall u \in D_0(L)$$

полагаем $u = A^{-1}(t)h$ для $\forall\, h \in M = \{h \in H : \partial h/\partial t_i, \partial^2 h/\partial t_2 \partial t_1,$ $\partial^2 h/\partial t_3 \partial t_1, \partial^2 h/\partial t_3 \partial t_2 \in H;\ h(t)|_{t_i=0} = 0,\ t^{(i)} \in \overline{T^{(i)}},\ i=\overline{1,3}\}$ и получаем тождество

$$\int_T \left(\frac{\partial^3}{\partial t_3 \partial t_2 \partial t_1} \left[\sum_{i=1}^{3} J(t_i)A^{-1}(t)h + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{3} J(t_j)J(t_k)A_i(t)A^{-1}(t)h \right], v \right) dt = -\int_T (h, v)dt,\ h \in M, \tag{14}$$

где интегральные операторы $J(t_i)g = \int_0^{t_i} g(t)|_{t_i=\tau_i}\, d\tau_i,\ g \in H,\ i=\overline{1,3}.$ В тождестве (14) перед знаками сумм взят множитель $1/2,$ так как в них каждое слагаемое суммируется дважды. Поскольку правая часть тождества (14) с помощью неравенства Коши–Буняковского оценивается сверху выражением $\|h\|_0 \|v\|_0$, где $\|\cdot\|_0$ – норма в H, то по определению сопряженных операторов в гильбертовых пространствах функция $v \in H$ принадлежит области определения $D((PS)^*)$ сопряженного опера-

тора $(PS)^*$ в H к произведению PS, где оператор $S=\sum_{i=1}^{3} J(t_i)A^{-1}(t)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,k\neq j}}^{3} J(t_j)J(t_k)A_i(t)A^{-1}(t)$ ограничен в H и неограниченный оператор $P=\partial^3/\partial t_3\partial t_2\partial t_1$ с плотной областью определения $D(P)=\{p\in H\ :\partial p/\partial t_i,\partial^2 p/\partial t_j\partial t_j,\ \partial^3 p/\partial t_k\partial t_j\partial t_j\in H\ ;p(t)|_{t_i=0}=0,$ $t^{(i)}\in\overline{T^{(i)}},i\neq j,i\neq k,j\neq k;i,j,k=\overline{1,3}\}$ замкнут в H. На этом основании в (14) переходим к сопряженному оператору $(PS)^*$, предельным переходом распространяем его по h с плотного множества M на все пространство H и имеем

$$\int_T \left(h,(PS)^* v\right)dt+\int_T \left(h,v\right)dt=0\ \forall h\in H\ . \tag{15}$$

Применяем лемму 4 из [4] к этим операторам S и P в гильбертовом пространстве $H=X=Y=Z$. Известно, что сопряженным оператором к $P=\partial^3/\partial t_3\partial t_2\partial t_1:H\supset D(P)\to H$ с областью определения $D(P)$ является оператор $P^*=-\partial^3/\partial t_3\partial t_2\partial t_1:H\supset D(P^*)\to H$ с областью определения $D(P^*)=\{\tilde p\in H\ :\partial\tilde p/\partial t_i,\partial^2\tilde p/\partial t_j\partial t_i,\ \ \partial^3\tilde p/\partial t_k\partial t_j\partial t_i\in H\ ;\tilde p(t)|_{t_i=T_i}=0,\ t^{(i)}\in\overline{T^{(i)}},i\neq j,i\neq k,\ j\neq k;i,j,k=\overline{1,3}\}$. Сопряженным оператором к $S:H\to H$ очевидно является ограниченный оператор

$$S^*=\sum_{i=1}^{3}A^{-1}(t)J^*(t_i)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,k\neq j}}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^* J^*(t_k)J^*(t_j),$$

где $(A_i(t)A^{-1}(t))^*$ – сопряженные операторы к ограниченным операторам $A_i(t)A^{-1}(t),t\in\overline{T},i=\overline{1,3}$, в H и $J^*(t_i)\tilde g(t)=\int_{t_i}^{T_i}\tilde g(t)|_{t_i=\tau_i}d\tau_i\ ,\tilde g\in H\ ,i=\overline{1,3}$, – сопряженные операторы к операторам $J(t_i),i=\overline{1,3}$, в H. Поэтому в силу формулы $(PS)^*=\overline{S^*P^*}$ по лемме 4 из [4] и определения замыкания $\overline{S^*P^*}$ произведения $\tilde M_0^*(t)=(S^*P^*)(t)$ существует, по крайней мере, одна последовательность функций $v_n\in D(\tilde M_0^*)=D(P^*)$ из множества $D(\tilde M_0^*)=\{v\in H\ :\partial v/\partial t_i,\partial^2 v/\partial t_j\partial t_i,\partial^3 v/\partial t_k\partial t_j\partial t_i\in H\ ,v(t)|_{t_i=T_i}=0,$ $t^{(i)}\in\overline{T^{(i)}},i\neq j,i\neq k,j\neq k;i,j,k=\overline{1,3}\}$, что сходятся последовательности $v_n\to v$ и $M_0^*(t)v_n\to M_0^*(t)v$ сильно в H при $n\to\infty$. В пространстве H сужение $M_0^*(t)=(PS)^*(t)$ на множество $D(\tilde M_0^*)$ равно

$$M_0^*(t)=A^{-1}(t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_1}+\frac{\partial^2}{\partial t_3\partial t_2}+\frac{\partial^2}{\partial t_3\partial t_1}\right]-\sum_{i=1}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^*\frac{\partial}{\partial t_i}. \tag{16}$$

Дифференцированием граничных условий из $D(\tilde M_0^*)$ находим для $v_n\in D(\tilde M_0^*)$ граничные условия

$$v_n(t)|_{t_i=T_i}=0,\quad (\partial v_n(t)/\partial t_j)\big|_{t_i=T_i}=0,i\neq j,\ i,j=\overline{1,3}. \tag{17}$$

Пусть H_t^+ – гильбертовы пространства, полученные наделением областей определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ эрмитовыми нормами $|\cdot|_{(t)}=|A^{1/2}(t)\cdot|$, и H_t^- – антидвойственные банаховы пространства к гильбертовым пространствам H_t^+ с нормами $|\cdot|_{(-t)},t\in\overline{T}$. Строим расширения $\overline{A^{1/2}}(t)$, $\overline{A^{-1/2}}$, $\overline{A}(t)$ и $\overline{A^{-1}}(t)$ операторов $A(t)$, $A^{-1}(t)$ и их квадратных корней [6]. Обозначаем символом $H^-=L_2(T\ ,H_t^-)$ банахово пространство интегрируемых по Бохнеру с квадратом соответствующих норм функций. Теперь строим расширение оператора $M_0^*(t)$, действующего вH, до оператора $\overline{M_0^*}(t)$, действующего в H^-. Банаховы пространства H_t^- изометричны гильбертовым пространствам с негативными скалярными произведениями $(g_1,g_2)_{(-t)}=(g_1,\overline{A^{-1}}(t)g_2),\forall g_1,g_2\in H_t^-$ [6]. Ввиду сильной сходимости $M_0^*(t)v_n\to M_0^*(t)v$ опера-

торов (16) в H при $n\to\infty$, непрерывности скалярного произведения и непрерывности $\overline{A^{-1}}(t)$ из H^- в H для $\forall h\in H$ имеем равенства

$$\int_T (h,M_0^*(t)v)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_T\left(h,A^{-1}(t)\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t_j\partial t_i}-\sum_{i=1}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^*\frac{\partial v_n}{\partial t_i}\right)dt=$$

$$=\int_T\left(h,\overline{A^{-1}}(t)\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t_j\partial t_i}-\sum_{i=1}^{3}\overline{A}^{1/2}(t)\overline{(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*}\frac{\partial v_n}{\partial t_i}\right]\right)dt=$$

$$=\int_T\left(h,\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t_j\partial t_i}-\sum_{i=1}^{3}\overline{A}^{1/2}(t)\overline{(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*}\frac{\partial v_n}{\partial t_i}\right]\right)_{(-t)}dt, \qquad (18)$$

так как благодаря ограниченности операторов $A_i(t)A^{-1/2}(t)$ в H ограниченные операторы $(A_i(t)A^{-1}(t))^*=A^{-1/2}(t)(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*$ в H по непрерывности продолжаются до ограниченных операторов $\overline{A}^{-1/2}(t)\overline{(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*}, i=\overline{1,3}$, в $H_t^-, t\in\overline{T}$. Равенства (18) распространяем предельным переходом с $h\in H$ на все $h\in H^-$ и имеем слабую сходимость последовательности $\{v_n, M_0^*(t)v_n\}$ к $\{v,\overline{M_0^*}(t)v\}$ в произведении $H\times H^-$ при $n\to\infty$, где в H^- сужение $\overline{M_0^*}(t)$ на $D(\tilde{M}_0^*)$ равно

$$\overline{M_0^*}(t)=\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_1}+\frac{\partial^2}{\partial t_3\partial t_2}+\frac{\partial^2}{\partial t_3\partial t_1}-\sum_{i=1}^{3}\overline{A}^{1/2}(t)\overline{(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*}\frac{\partial}{\partial t_i}. \qquad (19)$$

В гильбертовых пространствах средние арифметические $\{\mathbf{v}_n, M_0^*(t)\mathbf{v}_n\}$ членов некоторой подпоследовательности слабо сходящейся последовательности $\{v_n, M_0^*(t)v_n\}$ всегда сильно сходятся к тому же пределу в $H\times H^-$ при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{v}_n=v$ сильно в H и $\lim\limits_{n\to\infty}M_0^*(t)\mathbf{v}_n=\overline{M_0^*}(t)v$ сильно в H^- [7, с. 398]. Докажем сходимость частных производных первого порядка от функций $\mathbf{v}_n$ к частным производным первого порядка от функции v в H^- при $n\to\infty$. С этой целью значения операторов $M_0^*(t)\mathbf{v}_n$ вида (16) умножаем скалярно в H на функции $-e^{c\gamma(t)}\left(\partial\mathbf{v}_n/\partial t_1+\partial\mathbf{v}_n/\partial t_2+\partial\mathbf{v}_n/\partial t_3\right), c\ge 0,\ \gamma(t)=t_1+t_2+t_3$, интегрируем по $t\in T$, берем удвоенную вещественную часть и получаем равенство

$$-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(M_0^*(t)\mathbf{v}_n,\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt=-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\frac{\partial^2\mathbf{v}_n}{\partial t_j\partial t_i},\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt+$$

$$+2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^*\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i},\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt. \qquad (20)$$

Интегрируя по частям один раз по t_i и $t_j, j\ne i$, ввиду однородных условий (17) имеем три равенства

$$-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^2\mathbf{v}_n}{\partial t_j\partial t_i},\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}+\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right)dt=\int_{T^{(i)}}e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right|^2\Bigg|_{t_i=0}dt^{(i)}+$$

$$+\int_{T^{(j)}}e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2\Bigg|_{t_j=0}dt^{(j)}+c\int_T e^{c\gamma(t)}\left[\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2+\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right|^2\right]dt+$$

$$+\int_T e^{c\gamma(t)}\left[\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_j}\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i},\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)+\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_j},\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right)\right]dt,\ j\ne i; i,j=\overline{1,3}. \qquad (21)$$

Интегрированием по частям по $t_k, k=\overline{1,3},$ получаем еще три равенства

$$-\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_j \partial t_k},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt=\int_{T^{(k)}} e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)\Bigg|_{t_k=0} dt^{(k)}+$$

$$+c\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt+\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j},\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_i \partial t_k}\right)dt+\int_T e^{c\gamma(t)}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_k}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt \qquad (22)$$

для всех $i\neq k, j\neq k, i\neq j, i,j,k=\overline{1,3}.$ Суммируем равенства (21) с вещественной частью равенств (22), применяем формулу квадрата нормы суммы, приводим подобные слагаемые и имеем равенство

$$-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(A^{-1}(t)\left[\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_2\partial t_1}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_3\partial t_2}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_3\partial t_1}\right],\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\sum_{\substack{i,j=1\\ k\neq i,k\neq j,j>i}}^{3}\int_{T^{(k)}} e^{c\gamma(t)}\left[\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2+\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right|^2+\mathrm{Re}\left(A^{-1}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right)\right]\Bigg|_{t_k=0} dt^{(k)}+$$

$$+c\sum_{i=1}^{3}\int_T e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2 dt+\frac{c}{2}\int_T e^{c\gamma(t)}\left[\left|A^{-1/2}(t)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_2}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_3}\right)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\left|A^{-1/2}(t)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_1}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_3}\right)\right|^2+\left|A^{-1/2}(t)\left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_1}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_2}\right)\right|^2\right]dt+\int_T e^{c\gamma(t)}\Phi_1(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n)dt, \qquad (23)$$

где полуторалинейная форма $\Phi_1(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n)$ приводится к выражению

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{3}\sum_{\substack{i,j=1\\ k\neq i,k\neq j,j>i}}^{3}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_i}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_k}+\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_k},\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_k}\right)+\sum_{k=1}^{3}\sum_{\substack{i,j=1\\ k\neq i,k\neq j,j>i}}^{3}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_k}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right),\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_j}\right)\right],$$

которое с помощью неравенства (4) оценивается снизу величиной $-3c_3\sum_{i=1}^{3}\left|A^{-1/2}(t)(\partial \mathbf{v}_n/\partial t_i)\right|^2.$

При оценке снизу правой части равенства (23) опускаем неотрицательные интегралы следов при $t_i=0, i=\overline{1,3},$ применяем формулу $|a+b|^2+|b+c|^2+|a+c|^2=|a+b+c|^2+|a|^2+|b|^2+|c|^2$ в H, используем указанную оценку снизу для формы $\Phi_1(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n)$ и приходим к неравенству

$$\geq\frac{3}{2}(c-2c_3)\int_T e^{c\gamma(t)}\sum_{i=1}^{3}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2 dt+\frac{c}{2}\int_T e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2 dt. \qquad (24)$$

С помощью неравенства (12) находим

$$2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^{3}(A_i(t)A^{-1}(t))^*\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i},\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt\geq -2c_5\sum_{i=1}^{3}\int_T e^{c\gamma(t)}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2 dt. \qquad (25)$$

Суммируя оценки (24) и (25), согласно равенству (20) и формуле (19) получаем соотношения

$$\frac{c}{2}\int_T e^{c\gamma(t)}\left|\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2_{(-t)} dt+\frac{3}{2}\left(c-2c_3-\frac{4c_5}{3}\right)\sum_{i=1}^{3}\int_T e^{c\gamma(t)}\left|\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right|^2_{(-t)} dt\leq$$

$$\leq -2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(M_0^*(t)\mathbf{v}_n,\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_1}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_2}+\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_3}\right)dt=-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(\overline{A^{-1/2}}(t)\left[\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_2\partial t_1}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_3\partial t_1}+\frac{\partial^2 \mathbf{v}_n}{\partial t_3\partial t_2}-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{3}\overline{A}^{1/2}(t)\overline{(A_i(t)A^{-1/2}(t))^*}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right],A^{-1/2}(t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)dt=-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)}\left(M_0^*(t)\mathbf{v}_n,\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t_i}\right)_{(-t)} dt,\ c\geq 0, \qquad (26)$$

потому что в H_t^- скалярные произведения $(g_1,g_2)_{(-t)} = (\overline{A^{-1/2}}(t)g_1, \overline{A^{-1/2}}(t)g_2), \forall g_1,g_2 \in H_t^-, t \in \overline{T}$ [6]. В (26) правую часть оцениваем сверху неравенством Коши–Буняковского и неравенством $2ab \le a^2+b^2$, приводим подобные слагаемые и при $c = c_6 = \max\{2, 2c_3 + (4c_3/3)\} + 2/3$ имеем неравенство

$$\int_T \left(\left| \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_1} \right|^2_{(-t)} + \left| \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_2} \right|^2_{(-t)} + \left| \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_3} \right|^2_{(-t)} \right) dt \le e^{c_6(T_1+T_2+T_3)} \int_T |M_0^*(t)\mathbb{v}_n|^2_{(-t)}\, dt,$$

из которого ввиду сильной сходимости $M_0^*(t)\mathbb{v}_n \to \overline{M_0^*}(t)v$ в H^- следует сильная сходимость частных производных $\partial \mathbb{v}_n / \partial t_i \to \partial v / \partial t_i,\ i = \overline{1,3},$ в H^- при $n \to \infty$. Поэтому с помощью формул (19) и (15) мы можем вычислить сильный предел значений слагаемых оператора $M_0^*(t)\mathbb{v}_n$ в H^- при $n \to \infty$ и построить расширение $\overline{L_0^*}(t) = \overline{M_0^*}(t) + \overline{A}(t)$ в H^- оператора $L_0^*(t) = M_0^*(t) + I$ в H ..

Умножаем значения $L_0^*(t)\mathbb{v}_n$ скалярно в H на функции $-e^{c\gamma(t)}(\partial \mathbb{v}_n/\partial t_1 + \partial \mathbb{v}_n/\partial t_2 + \partial \mathbb{v}_n/\partial t_3)$, интегрируем по $t \in T$, берем удвоенную вещественную часть и имеем равенство

$$-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)} \left(L_0^*(t)\mathbb{v}_n, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right) dt = -2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)} \left(M_0^*(t)\mathbb{v}_n, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right) dt - 2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)} \left(\mathbb{v}_n, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right) dt. \quad (27)$$

Интегрируем по частям один раз по t_i и благодаря однородным условиям (17) на функции $\mathbb{v}_n$ имеем

$$-2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)} \left(\mathbb{v}_n, \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right) dt = \int_{T^{(i)}} e^{c\gamma(t)} |\mathbb{v}_n|^2|_{t_i=0}\, dt^{(i)} + c\int_T e^{c\gamma(t)} |\mathbb{v}_n|^2\, dt \ge c\int_T e^{c\gamma(t)} |\mathbb{v}_n|^2\, dt,\ i = \overline{1,3}. \quad (28)$$

Учитывая ранее сделанные оценки (24)–(26) и оценку (28), из равенства (27) выводим неравенство

$$3c\int_T e^{c\gamma(t)} |\mathbb{v}_n|^2\, dt + \frac{c}{2}\int_T e^{c\gamma(t)} \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right|^2_{(-t)} dt + \frac{3}{2}\left(c - 2c_3 - \frac{4c_5}{3} \right) \sum_{i=1}^3 \int_T e^{c\gamma(t)} \left| \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_i} \right|^2_{(-t)} dt \le$$

$$\le -2\mathrm{Re}\int_T e^{c\gamma(t)} \left(L_0^*(t)\mathbb{v}_n, \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_1} + \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_3} \right) dt,$$

из которого при постоянной $c = c_7 = 2c_3 + (4c_5/3) + (1/3)$ следует неравенство

$$\int_T |\mathbb{v}_n|^2\, dt \le -2\mathrm{Re}\int_T e^{c_7\gamma(t)} \left(L_0^*(t)\mathbb{v}_n, \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_1} + \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathbb{v}_n}{\partial t_3} \right) dt.$$

Ввиду сильной сходимости $L_0^*(t)\mathbb{v}_n = M_0^*(t)\mathbb{v}_n + \mathbb{v}_n \to \overline{L_0^*}(t)v = 0$, $\partial \mathbb{v}_n / \partial t_i \to \partial v / \partial t_i,\ i = \overline{1,3},$ в H^- для правой и $\mathbb{v}_n \to v$ в H для левой частей при $n \to \infty$, отсюда следует, что $v = 0$. Лемма 2 доказана.

Существование сильных решений исходной задачи Гурса дает

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения леммы 2 и условие*

IV. При всех $t \in \overline{T}$ *для операторов* $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i$ *существуют не зависящие от* g,h *функции* $d_i(t) \ge 0, i = \overline{1,3},$ *что* $d_i(t) < 2, i = \overline{1,3},$ *и выполняются неравенства*

$$\left| \left((\partial A^{-1}(t)/\partial t_i) g, h \right) \right| \le d_i(t)\, |g|\, |A^{-1/2}(t)h|\ \forall g,h \in H, i = \overline{1,3}. \quad (29)$$

Тогда для каждого $\Phi = \{f, \psi_1, \psi_2, \psi_3\} \in F$ *сильное решение* $u \in E$ *задачи Гурса (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке* $\|u\|_E^2 \le c_4 \|\Phi\|_F^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть некоторый элемент $\Phi = \{v, \psi_1, \psi_2, \psi_3\} \ne 0$ сопряженного пространства $F' = H \times H_1 \times H_2 \times H_3$ ортогонален множеству $R(L)$, т.е.

$$\int_T (L\ (t)u, v)dt + (l_1 u, \psi_1)_1 + (l_2 u, \psi_2)_2 + (l_3 u, \psi_3)_3 = 0\ \forall u \in D(L), \quad (30)$$

где $(\cdot,\cdot)_i$ – скалярные произведения в $H_i,\ i=\overline{1,3}.$ Применение леммы 2 в тождестве (30) дает равенство $(l_1u,\psi_1)_1+(l_2u,\psi_2)_2+(l_3u,\psi_3)_3=0\ \forall u\in D(L).$ Благодаря дифференцируемости операторов $A^{-1}(t)$ и условиям согласования в этом равенстве можно положить $u=A^{-1}(t)(\psi_1(t_2,t_3)+\psi_2(t_1,t_3)+\psi_3(t_1,t_2)-\psi_1(0,t_3)-\psi_2(t_1,0)-\psi_3(0,t_2)+\psi_1(0,0))$ и иметь для $j\neq i,\ j\neq k, k\neq i;\ j,k=\overline{1,3},$ равенство

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{T^{(i)}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_j}\psi_i(t^{(i)}),\frac{\partial\psi_i(t^{(i)})}{\partial t_j}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^{-1}(t)}{\partial t_k}\psi_i(t^{(i)}),\frac{\partial\psi_i(t^{(i)})}{\partial t_k}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\psi_i(t^{(i)})}{\partial t_j}\right|^2+\frac{1}{2}\left|A^{-1/2}(t)\frac{\partial\psi_i(t^{(i)})}{\partial t_k}\right|^2+|\psi_i(t^{(i)})|^2\right]\right|_{t_i=0}dt^{(i)}=0.$$

В силу оценки (29) и условий согласования на данные Гурса $\psi_1(t^{(1)}),\psi_2(t^{(2)})$ и $\psi_3(t^{(3)})$ отсюда получаем неравенство $\sum_{i=1}^{3}\int_{T^{(i)}}\left(1-(d_i^2(t)/4)\right)|\psi_i(t^{(i)})|^2\,dt^{(i)}\le 0,$ из которого при $d_i(t)<2$ следует, что $\psi_1=0,\psi_2=0$ и $\psi_3=0$. Оценка для решений u вытекает из неравенства (5). Теорема 2 доказана.

На основании энергетического неравенства (возможно, с большей c_4) для полного дифференциально-операторного уравнения стандартным методом продолжения по параметру доказывается

Следствие 2. *В предположениях теоремы 2 для всех* $f\in H$, $\phi_i\in H_i,\ i=\overline{1,3},$ *существуют единственные непрерывно зависящие от правых частей* f *и данных Гурса* ϕ_1,ϕ_2 *и* ϕ_3 *сильные решения гиперболического дифференциально-операторного уравнения с младшими членами*

$$L\ (t)u(t)+\sum_{i=1}^{3}B_i(t)(\partial u(t)/\partial t_i)+B_0(t)u(t)=f(t)$$

при условиях Гурса (2), если ограничены линейные операторы $B_i(t),B_0(t)A^{-1/2}(t)\in L_\infty(T\ ,L\ (H)),i=\overline{1,3}.$

3. Частично характеристическая краевая задача для трехмерного гиперболического уравнения при нестационарных граничных условиях. В ограниченной области $G=]0,T_1[\times]0,T_2[\times]0,T_3[\times]0,l[$ независимых переменных t_1,t_2,t_3,x изучена корректность уравнения

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t_j\partial t_i}+\sum_{i=1}^{3}a_1(t,x)\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x\partial t_i}-a\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}b_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t_i}+b_0(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+d_0(t,x)u(t,x)=f(t,x),a>0, \qquad (31)$$

при зависящих от трехмерного времени $t=\{t_1,t_2,t_3\}\in T$ граничных условиях

$$\partial u(t,0)/\partial x-\alpha_1(t)u(t,0)=0,\ \partial u(t,l)/\partial x+\alpha_2(t)u(t,l)=0,\ t\in T\ , \qquad (32)$$

и согласованных условиях типа Гурса по трехмерному времени

$$u(t,x)|_{t_i=0}=\phi_i(t^{(i)},x),t^{(i)}\in T^{(i)},x\in]0,l[,i=\overline{1,3}. \qquad (33)$$

Пространством сильных решений является банахово пространство $E(G),$ полученное замыканием множества $D(G)=\{u\in W_2^2(G):\partial u(t,0)/\partial x-\alpha_1(t)u(t,0)=\partial u(t,l)/\partial x+\alpha_2(t)u(t,l)=0,\ t\in\overline{T}\ \}$ по норме $\|u\|_{E(G)}=\left\{\sup_{t\in T}\sum_{\substack{i,j=1\\ j>i}}^{3}\int_0^{T_i}\int_0^{T_j}\left[(1/2)\|(\partial u/\partial t_i)\|_0^2+(1/2)\|(\partial u/\partial t_j)\|_0^2+\|A^{1/2}(t)u\|^2\right]dt_jdt_i\right\}^{1/2}$, где $\|\cdot\|_0$ – норма в $L_2(0,l).$ Пространство исходных данных – гильбертово пространство $F\ (G)=L_2(G)\times\prod_{i=1}^{3}W_2^1\left(T^{(i)}\times]0,l[\right)$ таких функций $\{f(t,x),\phi_1(t^{(1)}),\phi_2(t^{(2)}),\phi_3(t^{(3)})\},$ что $\phi_2(t_1,0,x)=\phi_3(t_1,0,x),$ $\phi_1(t_2,0,x)=\phi_3(0,t_2,x),$ $\phi_1(0,t_3,x)=\phi_2(0,t_3,x),t\in T\ ,x\in]0,l[,$ где

$\overset{G}{W}{}_2^1\left(T^{(i)}\times]0,l[\right)$ – замыкания значений функций из $D(G)$ при $t_i=0$ по норме $\left\|\phi_i(t^{(i)})\right\|_i=\left(\int_{T^{(i)}}\left[\ (3/2)\left\|\partial\phi/\partial t_j\right\|_0^2+(3/2)\left\|\partial\phi/\partial t_k\right\|_0^2+\left\|A^{1/2}(t)\phi_i\right\|^2\ \right]\Big|_{t_i=0}dt_{t_j}dt_{t_k}\right)^{1/2}$,

$i,j,k=\overline{1,3}$. Проверкой предположений теоремы 2 и следствия 2 установлена

Теорема 3. *Пусть* $a_1(t,x)\in C^{(1)}(\overline{G}),\ a_1(t,0)=0,\ a_1(t,l)\ge 0, t\in\overline{T}$, $b_i(t,x),\ d_0(t,x)\in C(\overline{G}),\ i=\overline{0,3}$, $\alpha_i(t)\in C^{(2)}(\overline{T})$, $\alpha_i(t)\ge 0, i=1,2,\ \alpha_1(t)+\alpha_2(t)\ne 0$, $d_i(t)<2$, $\forall t\in\overline{T}$, *где* $d_i(t)=al(l^2+1)[|\partial q_1(t)/\partial t_i+$

$+\partial(\alpha_1(t)q_1(t))/\partial t_i|+l\left|\partial q_2(t)/\partial t_i\right|+$

$l\left|\partial(\alpha_1(t)q_2(t))/\partial t_i\right|]\max\limits_{t\in\overline{T}}\{1+\alpha_1(t),1+\alpha_2(t)\}$. *Тогда частично характеристическая краевая задача (31)–(33) для всех* $f(t,x)\in L_2(G)$, $\phi_i(t^{(i)},x)\in\overset{G}{W}{}_2^1\left(T^{(i)}\times]0,l[\right), i=\overline{1,3}$, *имеет единственные сильные решения* $u\in E(G)$, *непрерывно зависящие от* f, ϕ_1, ϕ_2 *и* ϕ_3.

Заключение. Развитием метода энергетических неравенств доказана корректность задачи Гурса (1), (2). Для единственности и устойчивости ее сильных решений выведено энергетическое неравенство. Существование сильных решений получено новым методом расширения операторов в негативные пространства, который требует меньше ограничений, чем регуляризирующие задачи Коши в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриш, Н.И. Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Н.И. Бриш, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 6. – С. 1017–1030.
2. Ломовцев, Ф.Е. Задача Гурса для двумерных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями / Ф.Е. Ломовцев, А.В. Мотевич // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 44–54.
3. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М., 1967. – 464 с.
4. Ломовцев, Ф.Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873–886.
5. Ломовцев, Ф.Е. Дифференцирование и интегрирование по параметру неограниченных переменных операторов с переменными областями определения / Ф.Е. Ломовцев // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 1. – С. 13–15.
6. Березанский, Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 798 с.
7. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

Поступила в редакцию 15.01.2013. Принята в печать 20.02.2013.

Адрес для корреспонденции: 220050, г. Минск, пр-т Независимости, д. 4, БГУ, кафедра математической кибернетики,
e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.