

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ

Учебно-методический комплекс

2010

УДК 330.4(075)
ББК 65в631я73
М34

Авторы-составители: заведующий кафедрой инженерной физики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», доктор технических наук, профессор **А.С. Ключников**; аспирант кафедры инженерной физики УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **Д.Ф. Карелин**

Рецензент:
заведующий кафедрой теоретической физики УО «ВГУ им. П.М. Машерова»,
доктор физико-математических наук, профессор *Ю.В. Трубников*

М34

Рассматриваются теоретические основы применения математических моделей в управлении организационными системами. Изложены главные понятия математического моделирования, приведены методы структурного и функционального моделирования организационных систем.

Учебно-методический комплекс по дисциплине специализации «Математические модели в управлении» предназначен для студентов специальности 1-31 04 01-04 «Физика» (управленческая деятельность) и составлен в соответствии с учебной программой указанного курса для специализации 1-31-04-01-04-25 «Физическая информатика».

УДК 330.4(075)
ББК 65в631я73

© УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Структурное содержание дисциплины.....	6
Тема 1. Понятия модели и системы моделей. Классификация систем.....	7
Тема 2. Система управления.....	19
Тема 3. Информация и информационный процесс.....	28
Тема 4. Моделирование. Классификация методов моделирования.....	38
Тема 5. Оценка качества моделей	51
Тема 6. Структурное моделирование.....	56
Тема 7. Методы формализованного описания структур.....	63
Тема 8. Структурно-топологические характеристики систем управления	70
Тема 9. Количество и состав в системе управления.....	78
Тема 10. Сетевое моделирование целенаправленных процессов	89
10.1. Назначение и область применения сетевого моделирования.....	89
10.2. Построение сетевых моделей	95
Тема 11. Анализ сетевых моделей	104
Тема 12. Основные понятия и определения теории игр. Классификация игр. Смешанные стратегии	129
Тема 13. Математические модели функционирования систем	139
13.1. Общий вид модели функционирования.....	139
13.2. Методы функционального моделирования.....	140
Тема 14. Динамическое программирование.....	146
Тема 15. Системы и модели массового обслуживания	154
Вопросы к экзамену	164
Тесты	165
Рекомендуемая литература	168
Список использованных источников	169

ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование математических методов является необходимым условием эффективной научной и практической деятельности современного специалиста. Эти методы приобретают все большее значение при принятии управленческих решений, когда для их обоснования требуется найти рациональные и логические аргументы.

Повседневная деятельность менеджера связана с исследованием самых разнообразных хозяйственных ситуаций, поскольку участие в коммерческой деятельности требует умения количественно оценить возможные варианты финансово-экономических последствий при выборе того или иного управленческого решения.

Современный аппарат математических методов для решения экономических и управленческих задач превратился в самостоятельные научную и прикладную области. При изучении дисциплины рассматриваются методы и модели исследования операций, имитационного моделирования и экспертных оценок, эконометрики и финансовой математики.

Изучение математических методов и опыта их использования необходимо для успешного освоения основных дисциплин блока магистерской программы, поскольку современные экономическая теория, теории управления и маркетинга включают как естественный, необходимый элемент математические методы и модели.

В связи с этим базовый посыл для изучения дисциплины — познакомить студентов с различными математическими методами и моделями, применяемыми в науке, экономике, менеджменте, бизнесе.

Дисциплина «Математические методы в управлении» изучается в течение одного семестра.

Преподавание дисциплины «Математические методы в управлении» ведется исходя из требуемого уровня базовой подготовки экономистов высшей квалификации менеджмента.

Цели преподавания дисциплины:

знать, эффективно и профессионально использовать экономико-математические методы и модели в научно-исследовательской, педагогической и аналитической деятельности; в сфере управления организациями различной формы собственности и в функциональных областях менеджмента, таких, как управление производством, финансами, маркетинг, хозяйственная деятельность.

Основа изучения дисциплины – реализация требований к подготовке магистра менеджмента, установленных в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования. В ходе изучения дисциплины ставится задача обучить студентов разработке и применению математических и компьютерных методов для моделирования исследовательских, производственных, финансово-экономических, управленческих и маркетинговых процессов.

В результате изучения дисциплины студенты должны
знать:

– существующие экономико-математические методы и модели, применяемые в управлении производственными, финансовыми, маркетинговыми и хозяйственными процессами;

уметь:

– разрабатывать и применять современные методы построения и анализа экономико-математических моделей с учетом специфики экономических процессов (большая размерность, вероятностный характер, иерархичность в управлении, многокритериальность функционирования и оптимизации и т.д.);

– использовать методы математического моделирования экономических систем как основу для прогнозирования развития и управления экономическими системами;

– осваивать имеющиеся, создавать и внедрять новые программные продукты, ориентированные на применение в реальных ситуациях рыночных отношений и соответствующие современному уровню информационных технологий;

– анализировать, планировать и принимать решения, опираясь на результаты, полученные путем математического моделирования.

Дисциплины, знание которых необходимо для изучения курса

«Математические методы в управлении» – прикладная математическая дисциплина, успешное овладение которой требует знания таких дисциплин, как: «Математика», «Информатика», «Маркетинг», «Экономика предприятия», «Статистика».

Содержание лекционных, практических и самостоятельных занятий по дисциплине

Усвоение данной дисциплины предусматривает проведение лекционных занятий, практических занятий, самостоятельного изучения студентом нескольких тем, представление итогов проделанной работы (написание реферата или отчета).

СТРУКТУРНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Вид занятия	Тема занятия и изучаемые вопросы	Количество часов
Лекция 1	Понятия модели и системы моделей. Классификация систем	2
Лекция 2	Система управления	2
Лекция 3	Информация и информационный процесс	2
Лекция 4	Моделирование. Классификация методов моделирования	2
Лекция 5	Оценка качества моделей	2
Лекция 6	Структурное моделирование	2
Лекция 7	Основные понятия и определения теории игр. Классификация игр. Смешанные стратегии	2
Лекция 8	Математические модели функционирования систем. Общий вид модели функционирования. Методы функционального моделирования	2
Лекция 9	Динамическое программирование	2
Лекция 10	Системы и модели массового обслуживания	2
Практическое занятие 1	Методы формализованного описания структур	2
Практическое занятие 2	Структурно-топологические характеристики систем управления	2
Практическое занятие 3	Количество и состав в системе управления	2
Практическое занятие 4	Сетевое моделирование целенаправленных процессов. Назначение и область применения сетевого моделирования	2
Практическое занятие 5	Построение сетевых моделей. Анализ сетевых моделей	4

ТЕМА 1. ПОНЯТИЯ МОДЕЛИ И СИСТЕМЫ МОДЕЛЕЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ

Человек живет и действует в объективно существующем реальном мире. Но все свои действия он осуществляет в соответствии со своими представлениями об этом мире, о своих действиях и их результатах. Общая схема любого активного действия может быть представлена в следующем виде (рис. 1.1):

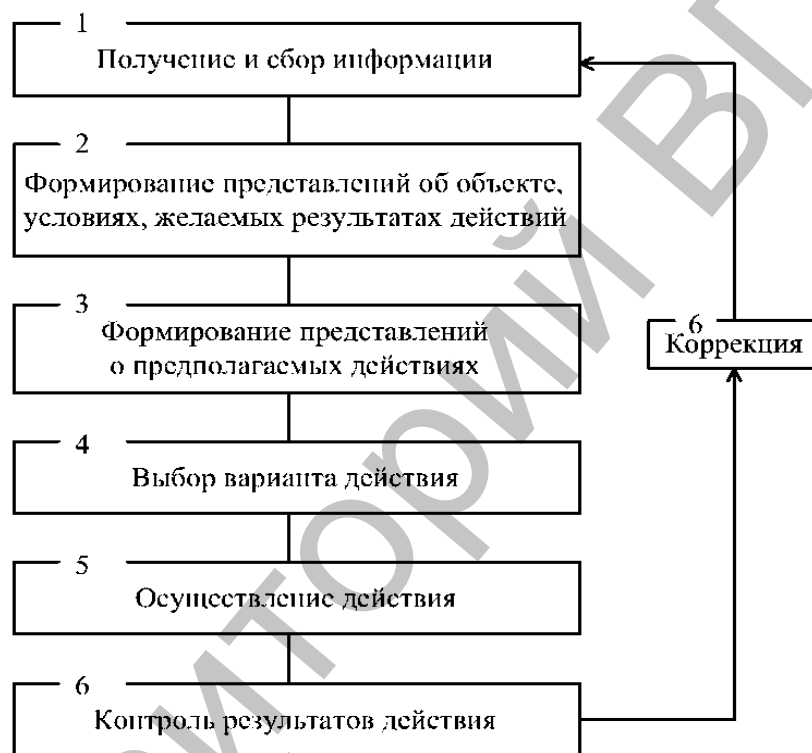


Рис. 1.1.

Все представления, исходя из которых действует человек, он формирует на основании личного опыта, опыта предшествующих и современного поколений. Личный опыт приобретается человеком в процессе его деятельности путем воздействия на соответствующие объекты и изучения, исследования результатов воздействия. При этом объектами воздействия служат либо сами объекты, о которых необходимо создать представление, либо их замещающие объекты, исследование и изучение которых позволяет создать представление о замещаемом объекте. Опыт поколений, в сущности, является их представлением о реальном мире, хранимым и передаваемым в той или иной форме от поколения к поколению. Сами представления, в свою очередь, являются объектами, которыми человек в процессе своей деятельности замещает окружающий мир.

От того, насколько правильно воспринимает человек реальный мир, зависит результат его действий. Особенно это касается целенаправленных действий, т.е. действий, связанных с получением вполне определенного желаемого результата. В этом случае стараются действовать наиболее рациональным образом, что предъявляет повышенные требования к объектам замещения, на основе которых формируются соответствующие представления. Таким требованиям в наибольшей степени отвечают объекты, создание и выбор которых для замещения производится на научной основе с использованием аппарата соответствующих наук и научных направлений. При выполнении определенных условий эти объекты называют моделями, а процесс создания моделей и замещения ими исследуемых объектов – моделированием.

Бурное развитие модельных методов, протекающее особенно интенсивно в последние десятилетия, повлекло за собой формирование ряда специфических понятий, представлений и приемов, связанных с построением, анализом и использованием моделей различных классов. Сегодня есть все основания говорить о моделировании и модельных методах как о самостоятельной области знаний, сфера приложений которых простирается от теории познания до решения сугубо практических производственных вопросов.

Повышенный интерес к модельной проблематике обусловлен той ролью, которую методы моделирования, особенно математического, приобрели в современных исследованиях. Кроме того, этот интерес стимулируется, с одной стороны, прогрессирующей сложностью задач, которые приходится решать человеку в своей деятельности, а с другой – большими успехами в развитии прикладной математики, вычислительной техники и программирования, исследования операций, научных дисциплин кибернетического цикла. В совокупности с традиционными областями науки они дают возможность – во всяком случае принципиальную – для решения значительной части прикладных задач научными методами с целью получения оптимальных в том или ином смысле результатов.

Первым в истории примером в полной мере научно обоснованного применения метода моделирования, по-видимому, можно считать работы по исследованию гидродинамических характеристик судов в опытных бассейнах, которые развернулись во второй половине XIX века. Однако даже в первые десятилетия двадцатого столетия наиболее распространенное толкование понятия «модель» по-прежнему было связано не с наукой, а с производством (литейным делом) и архитектурой.

Переломными в развитии моделирования оказались 40–50-е годы XX века, годы становления научных дисциплин кибернетического цикла, методов исследования операций, бурного развития прикладной математики, вычислительной техники и компьютерного программирования. В этот период значительно расширился круг исследовательских и прикладных задач, решаемых научными методами, что повлекло за собой необходимость выявления и описания, существенных для каждой задачи свойств и черт множества самых разнообразных объектов, т.е. необходимость вполне осознанного построения их моделей. Непрерывно растущие возможности численных математических методов и реализующих эти методы автоматизированных вычислительных систем не только стимулировали математическую формализацию разнообразных задач и моделей, но и способствовали развитию связанного с моделями концептуального аппарата. Именно в эти годы сложились современные понятия аналоговой и алгоритмической математической модели, получили значительное развитие методы численного, в том числе статистического имитационного моделирования и моделирования на компьютерах, были разработаны специальные приемы для модельного исследования систем сложной структуры, методы идентификации объектов-оригиналов и т.д. По существу, только начиная с 40-х годов двадцатого столетия можно говорить о моделях и моделировании как о сознательно используемом научном методе, применяемом для решения различных задач, связанных с объектами произвольной природы.

Математические модели стали играть в моделировании решающую роль, что было обусловлено широкими возможностями математики обеспечивать хотя бы теоретически научно обоснованное моделирование любых объектов свойствами математических моделей, а также уровнем и темпами развития современных информационных средств и технологий, позволяющих относительно легко осуществлять математическое моделирование.

В первую очередь, такая оценка роли математических моделей справедлива для управления сложными объектами, к которым, несомненно, относятся организационные системы, включая науку и высшую школу со своими подразделениями. Невозможно представить современную и будущую теорию управления организационными системами без применения математического моделирования, и приближение этого будущего зависит от темпов развития математического моделирования и соответствующих информационных средств и технологий. Поэтому в учебном пособии и рассматриваются математические модели и методы математического моделирования.

Основу современной теории управления сложными объектами составляют системный подход и реализующие его системные научные направления, к которым относятся кибернетика, системный анализ, общая теория систем, системотехника, исследование операций и т.д.

Одним из основных понятий, играющих важную роль в теории управления и других системных научных направлениях, является понятие «система». В настоящее время существует много определений данного понятия, которые применяются в соответствии с целями и решаемыми задачами. Эти определения различаются, главным образом, степенью общности, обусловленной количеством и детальностью описания свойств объектов, классифицируемых как системы. Достаточно полным и конструктивным, т.е. соответствующим целям и задачам курса, можно считать следующее определение.

Определение 1.1. Система – единое целое, представимое совокупностью взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, обладающее свойствами (хотя бы одним), которых не имеет ни одна из частей целого при любом способе его членения, и не выводимыми из свойств частей. Исходя из данного определения выделим основные свойства системы: целостность, ограниченность, членимость, интегративность, организованность.

Целостность – свойство, характеризующее внутреннее единство, завершенность, законченность системы. Оно обусловлено наличием внутренних связей, т.е. связей между объектами, образующими систему, и взаимодействием этих объектов. Для обеспечения целостности системы внутренние связи и взаимодействия должны быть достаточно сильными.

Отграниченность (обособленность) определяет возможность отграничить (обособить, выделить) систему из окружающего мира. Это свойство обусловлено относительной слабостью связей системы с внешней средой.

Между целостностью и отграниченностью существует довольно тесная связь. Чем более система выделена, отграничена от окружающего мира, тем более она внутренне целостна. Целостность и отграниченность системы свидетельствуют о том, что внутренние связи в системе сильнее, чем внешние.

Членимость характеризует возможность членения (декомпозиции) системы, т.е. представления ее в виде совокупности взаимосвязанных и взаимодействующих объектов. Мысленно можно представить любые членения системы, однако допустимыми являются только естественные, которые определяются самой сутью системы, ее внутренними свойствами. Такие членения позволяют, изу-

чая их структуру, выявить существенные свойства системы. В то же время членения, не связанные с сущностью и внутренними свойствами системы, не дают возможности увязать свойства системы и ее частей, выявить преемственность этих свойств, а сами свойства в этом случае производят впечатление неустойчивых, случайных.

Интегративность системы обусловлена наличием у нее интегративных (системных) свойств.

Определение 1.2. **Интегративное (системное) свойство** – свойство системы, которое не имеет ни одна из ее частей при любом способе членения и не выводимое из свойств частей. Системные свойства формируются путем накопления, усиления и проявления одних свойств частей системы с одновременным нивелированием, ослаблением и сокрытием других при взаимодействии частей. На определенном уровне взаимодействия происходит скачок (переход количества в качество) – появление у совокупности взаимодействующих объектов свойств, не присущих этим объектам.

Наличие у системы интегративных свойств свидетельствует о том, что, во-первых, система не сводится к простой совокупности объектов и, во-вторых, расчленяя систему на отдельные части и изучая их, нельзя познать все свойства системы. Организованность характеризует внутреннюю упорядоченность системы, согласованность взаимодействия ее частей.

В теории управления организационными системами из класса систем исключают суммативные системы, у которых сила внутренних и внешних связей одного порядка. Это зависит от того, что объектом изучения в теории управления являются особые, так называемые сложные, системы, они будут рассмотрены далее.

Определение 1.3. **Подсистема** – часть системы, которая, в свою очередь, является системой.

Определение 1.4. **Надсистема** – это система, для которой рассматриваемая система является ее частью (подсистемой).

Понятия «подсистема», «система» и «надсистема» устанавливают иерархию систем в окружающем мире. Любая система является надсистемой для своих подсистем и в то же время служит подсистемой для некоторой надсистемы.

Определение 1.5. **Элемент** – это часть системы, у которой только внешние связи и взаимодействия оказывают существенное влияние на свойства системы.

Из данного определения следует, что внутренние связи и взаимодействия в элементе не оказывают существенного влияния на свойства системы и поэтому при рассмотрении объекта как системы не учитываются.

При членении системы элемент мыслится как неделимое целое, у которого учитываются только внешние связи и взаимодействия. Элементы составляют последний, самый глубокий уровень членения системы. Конечно, в общем случае элемент лишь относительно неделим, однако для данной системы он является абсолютно неделимым, так как дальнейшее его деление в рамках системы приводит к потере необходимых, существенных для системы свойств. Членение системы в общем случае не имеет предела, поэтому элемент может быть также рассмотрен как система, но это будет уже другая система, отличная от той, элементом которой он является.

Определение 1.6. **Окружающая среда** – это объекты окружающего мира, не вошедшие в систему, но оказывающие на нее влияние либо подверженные влиянию со стороны системы.

Окружающую среду иногда для краткости называют просто средой.

Определение 1.7. **Входной полюс (вход) системы** – это совокупность элементов системы, через которые окружающая среда оказывает воздействие на систему.

Определение 1.8. **Выходной полюс (выход) системы** – это совокупность элементов системы, через которые система воздействует на окружающую среду.

Определение 1.9. **Входная ситуация** – это мгновенная обстановка на входном полюсе системы, отражающая воздействие окружающей среды на систему.

Определение 1.10. **Выходная ситуация** – это мгновенная обстановка на выходном полюсе системы, отражающая воздействие системы на окружающую среду.

Часто входную ситуацию называют импульсом, а выходную ситуацию – реакцией системы на импульс. Процессы изменения входной и выходной ситуации во времени называют соответственно входным и выходным процессами.

На рис. 1.2 приведена схема, поясняющая введенные понятия.

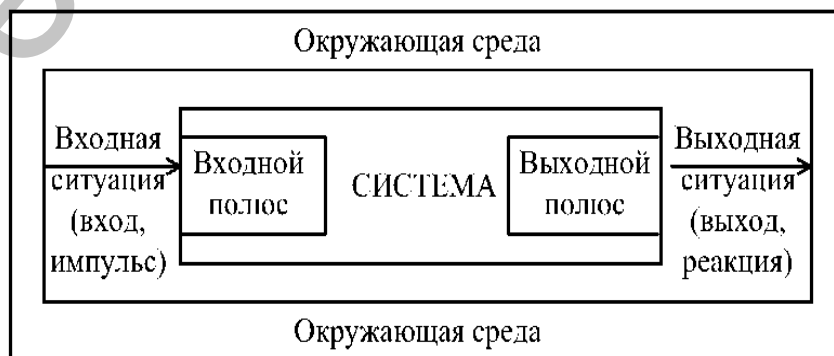


Рис. 1.2. Схема взаимодействия системы и окружающей среды

Наиболее содержательными характеристиками системы являются строение и поведение. Строение характеризует систему в статике, а исследование поведения дает возможность изучить и описать систему в динамике. Строение системы определяется составом элементов и организацией системы (рис. 1.3).

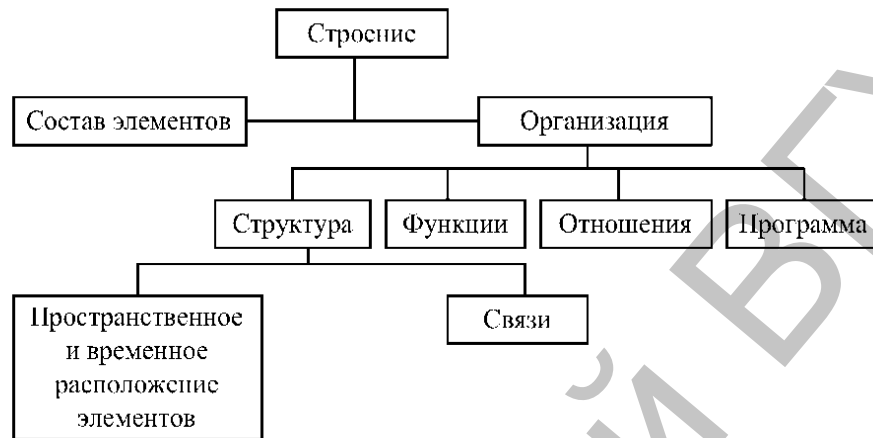


Рис. 1.3. Характеристики строения системы

Состав элементов характеризует количество и качественное различие элементов. В теории управления качественное различие элементов определяется только различием функциональных характеристик, а не их материальной природой. Так, с точки зрения теории управления, при исследовании вычислительной системы не важно, из чего сделаны тот или иной элемент либо устройство, а важно, какие функции он выполняет, например, триггера, регистра, запоминающего устройства и т.д.

Определение 1.11. Организацией системы будем называть способ взаимосвязи и взаимодействия между ее элементами и подсистемами, который обеспечивает образование и существование системы.

Именно с организацией связано отличие суммы свойств отдельно взятых элементов, частей от свойств системы, в которую они входят. В организации различают относительно стабильную (инвариантную) и переменную части. Стабильная часть определяет структуру системы, а переменная – ее программу, функции и отношения.

Определение 1.12. **Структура** – устойчивая упорядоченность в пространстве и времени элементов и связей системы, определяющая ее целостность, строение, основы ее организации. Благодаря структуре система воспроизводит себя и существует вполне определенное время в целостном виде.

Поскольку элементы, входящие в систему, участвуют во взаимодействии не целиком, а лишь определенными сторонами, свойствами, то структура в определенном смысле независима от

элементов. Это означает, что возможна замена элементов системы на качественно иные, другой материальной природы, но обладающие такими же взаимодействующими свойствами элементы. Структура системы от этого не изменится. В этом смысле можно говорить об устойчивости структуры, о ее постоянстве, неизменности.

Рассмотренная независимость структур от физической природы элементов дает возможность распространить закономерности, выявленные при изучении структур систем одной физической природы, на системы другой природы.

Определение 1.13. **Связь** – физический канал, по которому обеспечивается обмен между элементами системы веществом, энергией и информацией.

Структурные связи могут быть классифицированы по физической природе, направленности, силе (мощности), наличию элементов-посредников (рис. 1.4).

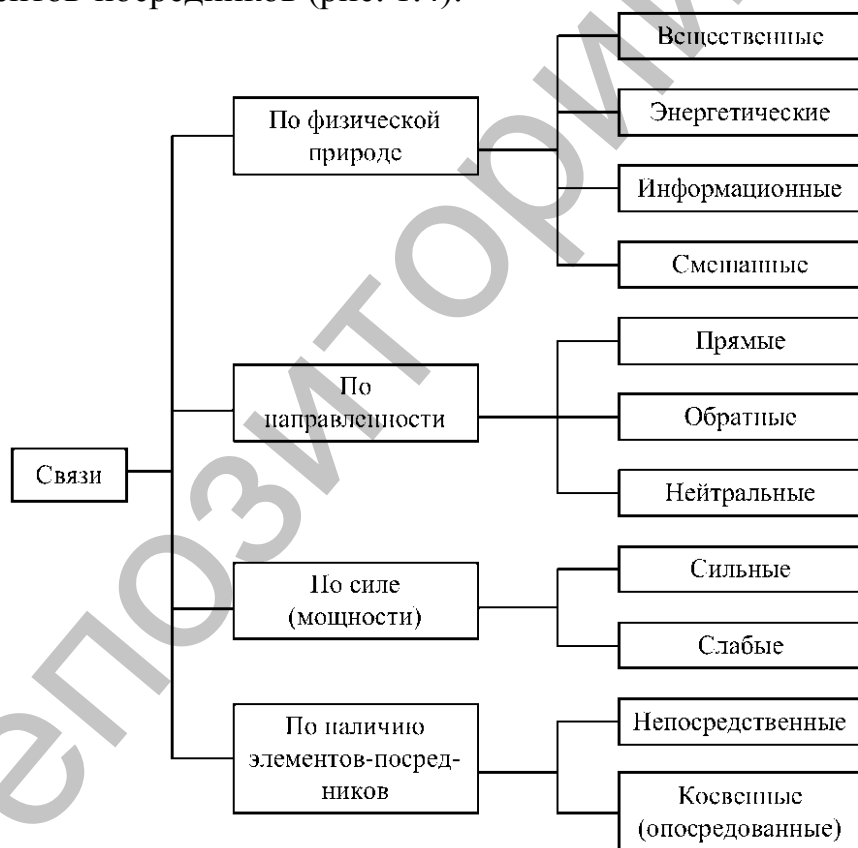


Рис. 1.4. Классификация связей в системе

По физической природе различают: вещественные, энергетические, информационные и смешанные связи. Вещественные связи представляют собой каналы, по которым элементы системы, ее части или системы в целом обмениваются между собой веществом. Энергетические связи обеспечивают обмен различными видами энергии, а информационные связи – информацией.

Смешанные связи представляют собой каналы, по которым происходит обмен веществом, энергией и информацией. Следует отметить, что реально все связи являются смешанными, так как нельзя передать вещество, не передавая энергии и информации, информацию – без передачи вещества и энергии. Выделение связи по данному признаку означает, что для рассматриваемой связи соответствующий вид обмена является преобладающим.

По направленности различают прямые связи, направленные от входа к выходу системы, обратные, имеющие противоположное направление, и нейтральные (ненаправленные).

По наличию элементов-посредников различают непосредственные связи, связывающие элементы, части систем и системы непосредственно, и косвенные (опосредованные) связи, при которых связь элементов и подсистем происходит через промежуточные элементы-посредники.

Например, на рис. 1.5 связь элемента 1 с элементом 2 является прямой непосредственной, с элементом 3 – прямой косвенной, с элементом 6 – обратной непосредственной, с элементом 5 – прямой косвенной (через элементы 2, 3, 4 и 2, 7, 4) и обратной косвенной (через элемент 6). Связь элемента 2 с элементом 7 является нейтральной.

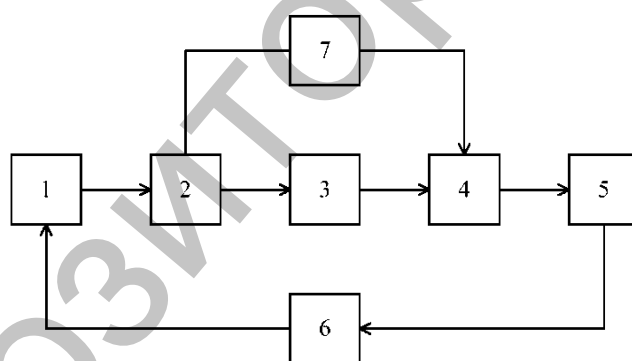


Рис. 1.5. Иллюстрация видов связей в системе

Определение 1.14. **Функция** – действие, выполняемое объектом, назначение объекта.

Любой элемент выполняет вполне определенные функции. Функция элемента возникает как реализация его системоопределенных свойств при формировании элемента и его связей в системе. Функция системы возникает как специфическое для каждой системы порождение всего комплекса функций элементов. Основными системными характеристиками функций являются их совместимость с другими функциями, изменчивость, реализуемость, интенсивность.

Любой элемент обладает огромным количеством свойств. Одни из этих свойств при формировании системы подавляются,

другие, напротив, усиливаются, становятся четко выраженными. Однако степень подавления свойств, как правило, не бывает полной. Поэтому при образовании системы возникают функции, не только обеспечивающие сохранение системой ее качественной особенности, но и негативно влияющие на образование и существование системы как единого целого.

В процессе взаимодействия элементы системы вступают в определенные отношения, характеризующие взаимозависимость элементов системы. Отношения между элементами могут быть весьма разнообразными. Примером отношения является отношение порядка, определяющее взаимоподчиненность, старшинство элементов в системе.

Определение 1.15. Программой системы будем называть закон объединения элементов в единое целое, определяющий порядок и последовательность взаимодействия элементов в системе, и реакцию системы на внешние воздействия.

Определение 1.16. **Состояние системы** – множество существенных свойств, которыми обладает система в конкретный момент времени.

Определение 1.17. **Поведение (функционирование) системы** – изменение состояния системы во времени. Форма (линия) поведения системы определяется последовательностью состояний и временными интервалами между ними. Исходное состояние системы в каждой линии поведения называется начальным состоянием. Обычно о поведении системы говорят, когда имеют дело со сложноорганизованными системами, живыми существами. Для технических систем применяют термины «функционирование» и «выходной процесс».

Определение 1.18. Развитием системы будем называть изменение состояния системы, подчиненное определенным закономерностям, определяющим последовательность изменения строения системы.

Классификация систем

В теории управления организационными системами все рассматриваемые системы могут быть классифицированы (рис. 1.5):

- по степени обусловленности строения системы;
- по степени сложности строения и поведения системы;
- по целенаправленности поведения системы.

По степени обусловленности строения и поведения системы различают детерминированные и стохастические (вероятностные) системы.



Рис. 1.5. Классификация систем

Детерминированные системы обладают вполне определенным строением и поведением. Такие системы однозначно реагируют на внешние воздействия. Полное описание этих систем возможно даже в случае большого количества элементов и связей в системе.

Если известны, например, состояние системы и программа перехода ее в другие состояния, то всегда можно точно описать состояние, в которое перейдет система под влиянием различных воздействий.

В вероятностных системах элементы взаимодействуют между собой, а также с внешней средой случайным образом. Такая система всегда остается неопределенной в той или иной степени, и описание ее будущего поведения никогда не выходит за рамки вероятностных категорий, с помощью которых это поведение описывается. Полное описание вероятностных систем возможно только в этих рамках на уровне количественных характеристик и законов распределения вероятностей состояний систем.

По степени сложности строения и поведения различают простые, сложные и очень сложные (сверхсложные) системы.

Простыми принято считать системы, имеющие малое количество элементов и связей между ними; элементы таких систем также являются простыми. Простота элементов означает, что с

достаточной степенью точности свойства и закономерности изменения состояния элементов могут быть описаны известными математическими соотношениями.

Сложные системы имеют большое количество элементов и связей между ними. Они обладают разветвленной структурой, а их элементы выполняют сложные функции и сами являются сложными системами. Однако эти системы при введении гипотез о простоте свойств элементов могут быть сведены к простым, что позволяет составить математическое описание таких систем с достаточной точностью. Очень сложные (сверхсложные) системы имеют исключительно большое число и многообразие элементов и связей между ними. Никакое сколь угодно подробное знание строения и поведения элементов таких систем не позволяет определить полностью поведение систем, никакое сколь угодно точное знание поведения сверхсложной системы на любом конечном интервале в настоящем не позволяет точно предсказать ее поведение на любом конечном интервале в будущем.

По целенаправленности поведения системы подразделяются на целенаправленные и нецеленаправленные (казуальные).

Определение 1.19. Целенаправленными (целеустремленными) называются системы, поведение которых направлено на достижение цели. Системы, поведение которых не обусловлено наличием цели, называются нецеленаправленными.

Определение 1.20. **Цель** – желаемый результат деятельности, который может быть достигнут в пределах некоторого интервала времени. Такое понятие цели присуще весьма высокоорганизованным системам, к которым относятся живые существа, обладающие сознанием. Для технических систем под целью понимается состояние, к которому стремится система. На достижение этого состояния направлены организация и поведение системы. Другие аспекты классификации систем по поведению представлены на рис. 1.5.

Организационные системы по рассмотренной классификации относятся к стохастическим сложным и очень сложным системам, обладающим активным целенаправленным поведением с учетом и прогнозированием результатов этого поведения. Такое сложное целенаправленное поведение системы возможно только при наличии у нее способности изменять свое поведение в нужном направлении. Свойство, характеризующее эту способность системы, называется управляемостью, воздействие на систему с целью изменения ее поведения в нужном направлении – управлением, а системы, в которых реализуется процесс управления, – системами управления.

ТЕМА 2. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ

Любое управление подразумевает оказание воздействия на объекты с целью изменения их поведения в желаемом направлении. Следовательно, для осуществления управления в некоторой системе необходимо наличие объектов, вырабатывающих такие воздействия, а также объектов, на которые эти воздействия оказываются. Поэтому в любой системе управления можно выделить в качестве подсистем две системы – управляемую и управляющую.

Определение 2.1. Система управления – это система, целесообразное (целенаправленное) поведение которой обеспечивается путем выработки соответствующих воздействий и оказания этих воздействий на элементы системы.

Определение 2.2. Управляемая система – это подсистема системы управления, состоящая из объектов, на которые оказывается воздействие для обеспечения целесообразного поведения системы управления.

Определение 2.3. Управляющая система – это подсистема системы управления, вырабатывающая и оказывающая воздействия на управляемую подсистему для обеспечения целесообразного поведения системы управления.

Структурная схема системы управления, представленная в виде взаимодействующих управляющей и управляемой систем, приведена на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Структурная схема системы управления

На схеме приняты следующие обозначения:

$Z_{<k>}(t) = \langle Z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t) \rangle$ – возмущающие переменные, характеризующие воздействия окружающей среды на систему управления в момент времени t ;

$U_{<m>}(t) = \langle W_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \rangle$ – управляющие переменные,

ные, характеризующие целенаправленные воздействия управляющей системы на управляемую систему в момент времени t ;

$X_{\langle n \rangle}(t) = \langle X_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \rangle$ – переменные состояния, характеризующие состояние управляемой системы в момент времени t ;

$Y_{\langle r \rangle}(t) = \langle y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t) \rangle$ – выходные переменные, характеризующие выходную ситуацию или воздействие системы управления на окружающую среду в момент времени t ;

$H_{\langle l \rangle}(t) = \langle h_1(t), h_2(t), \dots, h_l(t) \rangle$ – наблюдаемые переменные – это те переменные состояния и выходные переменные, которые наблюдаются управляющей системой в момент времени t .

Введенные переменные часто называют параметрами. Аргументы у всех переменных на схеме для краткости опущены.

Выходные переменные в общем случае связаны с переменными состояния функциональной зависимостью:

$$Y_{\langle r \rangle}(t) = \psi_{\langle r \rangle}(X_{\langle n \rangle}(t)), \quad (2.1.)$$

где $\psi_{\langle r \rangle}$ – символ вектор-функции.

Используя введенные переменные, можно составить следующую математическую модель системы управления:

$$\begin{aligned} X_{\langle n \rangle}(t) &= \hat{O}_{\langle n \rangle}(X_{\langle n \rangle}(t_0), U_{\langle m \rangle}(t), Z_{\langle k \rangle}(t), H_{\langle l \rangle}(l)t), \\ X_{\langle n \rangle}(t) &\in A(t), \\ U_{\langle m \rangle}(t) &\in B(t), \\ H_{\langle l \rangle}(l) &\in C(l), \\ l &\in [t_0, T], \end{aligned} \quad (2.2.)$$

где, $X_{\langle n \rangle}(t_0)$ – начальное состояние управляемой системы;

$A(t)$ – область допустимых значений векторов переменных состояния управляемой системы;

$B(t)$ – область допустимых значений векторов управляющих переменных;

$C(t)$ – область допустимых значений векторов наблюдаемых переменных.

Выражения (2.2) описывают состояние системы в любой момент времени на интервале $[t_0, T]$, а совместно с выражением (2.1.) – выходную ситуацию в том же интервале времени.

Уравнение (1) в модели (2.2) представляет собой функциональную зависимость вектора состояний системы от начального состояния управления, возмущений, наблюдаемости системы, времени. Выражения (2)–(4) в этой модели являются математической формулировкой ограничений на состояния системы, управление и наблюдаемость переменных.

Учитываемые ограничения можно разделить на два рода:

- ограничения первого рода, обусловленные действием законов и закономерностей природы;
- ограничения второго рода, обусловленные конечной величиной ресурсов, а также различных величин, которые не могут или не должны превосходить определенных пределов.

Теория управления организационными системами изучает не любые системы, а только определенный класс систем, в состав которых входят коллективы людей. Эти системы часто называют просто организациями. Наличие коллективов людей приводит к тому, что организационные системы как системы управления обладают следующими особенностями:

- сложной организацией, т.е. сложной структурой с большим количеством связей и сложной программой;
- сложным поведением в меняющейся среде;
- адаптивной устойчивостью поведения, т.е. одна и та же линия поведения системы может быть реализована при различном состоянии окружающей среды;
- наличием информационных процессов с обязательным включением стадий преобразования циркулирующей в системе информации.

Понятие о процессах управления

Требуемое поведение управляемой системы обеспечивается воздействиями на нее со стороны управляющей системы с целью перевода системы в состояние, в определенном смысле лучшее по сравнению с тем, которое она приняла бы без этих воздействий.

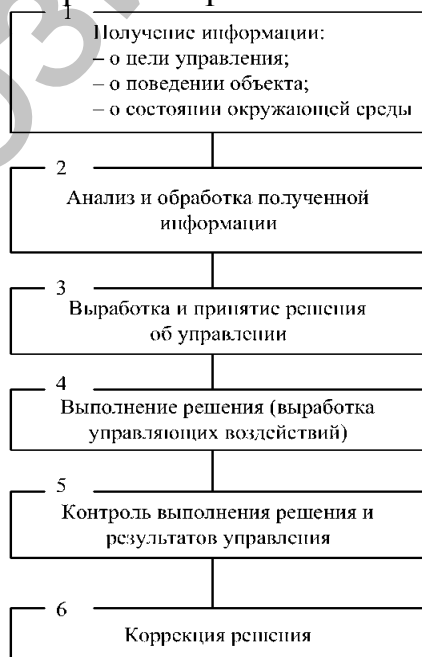


Рис. 2.2. Структурная схема процесса управления

При этом необходимо выполнить ряд операций, которые и составляют процесс управления. На рис. 2.2. представлена последовательность этапов управления с указанием выполняемых операций. Последний этап (коррекция решения) выполняется в том случае, если цель управления в результате не достигнута.

Таким образом, понятие управления может быть конкретизировано следующим образом.

Определение 2.2. Управление – это воздействие на управляемую систему, выбранное на основании информации о поведении системы и состоянии окружающей среды из множества допустимых воздействий для достижения поставленной цели.

Сущность управления состоит в изменении организации системы (структуры, функции, отношения и программы) для обеспечения ее требуемого поведения.

Чтобы управление было реально осуществимо, необходимо выполнение следующих условий: наблюдаемости, т.е. управляющая система должна знать текущее состояние управляемой системы; управляемости, т.е. система должна располагать всеми ресурсами, необходимыми для реализации управления. Кроме того, управление должно оказывать соответствующее влияние на управляемую систему; полноты учета воздействий окружающей среды, т.е. все существенные для поведения системы воздействия должны быть учтены при управлении; осуществимости закона необходимого разнообразия, т.е. должно существовать достаточное количество линий поведения системы, обеспечивающих достижение цели; наличия четко сформулированной цели управления и критерия оценивания качества управления.

Задачи, решаемые при управлении, можно разделить на три класса: планирования, координации, оперативного управления.

Планирование является начальным этапом управления. При планировании осуществляется выбор целей системы, определяются средства и способы достижения цели с учетом достаточно стабильных факторов, требуемые ресурсы, их источники и способ распределения ресурсов между элементами системы.

Целью планирования является составление плана на достаточно продолжительный интервал времени. Длительность интервала планирования ограничивается наличием некоторого постоянства в организационной системе. Это постоянство, стабильность может определяться, например, стабильностью параметров системы, постоянством законов изменения параметров, законов распределения случайных параметров, стабильностью числовых характеристик параметров системы.

Составленный план определяет конечное состояние, в которое должна перейти система, и распределение ресурсов, обеспечивающее этот переход.

Координация состоит в установлении постоянных и временных взаимоотношений между элементами системы, в определении порядка и условий их функционирования, обеспечивающих наилучшее в определенном смысле достижение поставленных целей.

Координация включает в себя решение задач двух классов:

- установления операционных правил, предписывающих порядок действия подсистемам и элементам системы;
- практического обеспечения выполнения этих правил.

Решение задач первого класса фактически связано с изменением организации системы и состава элементов в подсистемах, так как установление новых операционных правил приводит к изменению функций подсистем и взаимосвязей между ними. Способы решения этих задач обычно называют способами координирования, среди которых можно выделить следующие:

- прогнозирования взаимодействий;
- оценки взаимодействий;
- «развязывания» взаимодействий;
- способ наделения ответственностью;
- способ создания коалиций.

В рамках каждого из способов изменение организации системы происходит в результате изменения целей либо ресурсов. Следует отметить, что решение задач первого класса составляет существо самоорганизации организационных систем.

Решение задач второго класса (практического обеспечения выполнения операционных правил) связано непосредственно с управлением подсистемами и элементами системы и состоит в выборе величины и формы координирующего воздействия на них при фиксированной организации системы.

В общем случае координирование подсистем и элементов означает такое воздействие на них, которое заставляет их действовать согласованно. Оценка результатов координации осуществляется по отношению к общей глобальной цели, поставленной перед всей системой.

Оперативное управление состоит в обеспечении функционирования системы в соответствии с намеченным планом и условиями, определенными на этапе координации. Оно заключается в периодическом или непрерывном сравнении поведения системы с требуемым и соответствующем изменении его с помощью управляющих воздействий.

Целью оперативного управления является реализация во времени составленного плана, поэтому оно всегда должно рассматриваться как функция времени. Отсюда вытекает такая особенность оперативного управления, как осуществление его в темпе, соответствующем динамике поведения системы и изменения состояния окружающей среды. Это накладывает некоторые ограничения на процессы оперативного управления, что необходимо учитывать при выборе способов определения наилучшего в том или ином смысле оперативного управления.

Методы управления и структуры системы управления

Процесс управления обязательно включает в себя этап принятия решения. Поэтому в системе управления, а именно в управляющей системе, должен быть элемент, осуществляющий реализацию данного этапа и уполномоченный на принятие решения.

В зависимости от распределения полномочий на принятие решения между элементами системы методы управления и системы, реализующие эти методы, подразделяются на централизованные, децентрализованные и смешанные.

В централизованной системе все решения на управление принимает один орган, в децентрализованной системе все решения принимаются отдельными элементами системы независимо и не корректируются другими элементами. В смешанных системах полномочия на принятие решений на управление распределяются между элементами системы различным образом. Наибольшее распространение получили смешанные системы управления с иерархической, или многоуровневой, структурой. Такие системы называются иерархическими. В них функции управления распределены между несколькими органами управления различного уровня (ранга). При этом орган управления любого уровня, за исключением самого высокого и самого низкого уровней, управляет органами более низкого уровня, которые находятся в его подчинении, и сам, в свою очередь, управляется органом более высокого уровня. Структурные схемы централизованной, децентрализованной и иерархической систем управления представлены на рис. 2.3. Наиболее часто в иерархических системах управления встречаются двух- и трехуровневые управляющие системы.

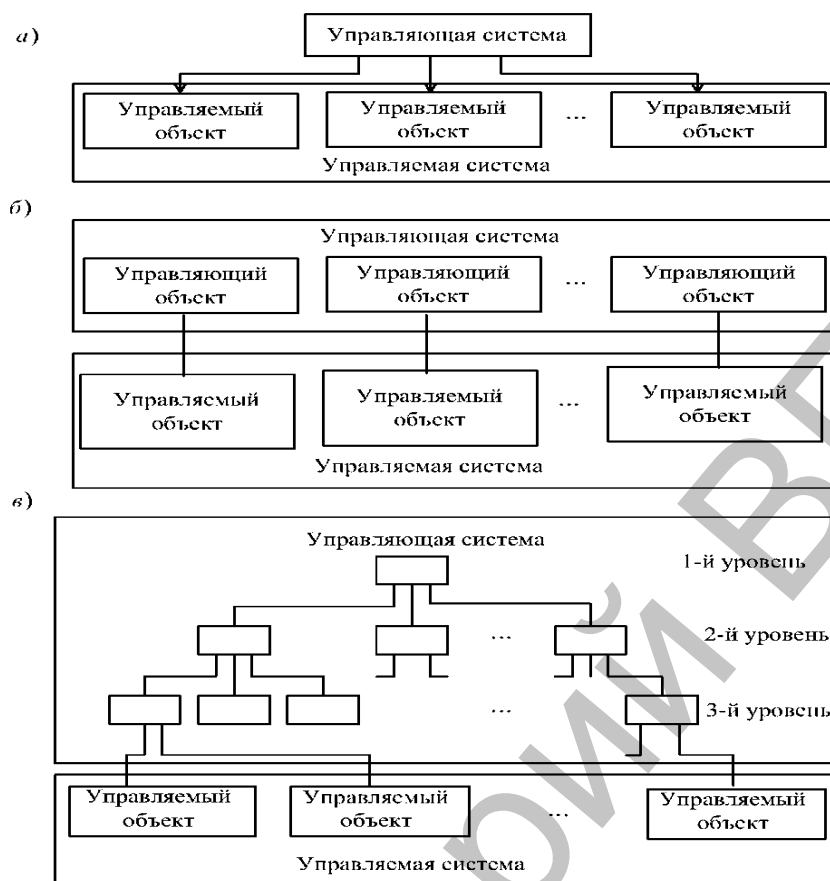


Рис. 2.3. Структурные схемы систем управления: а – централизованной; б – децентрализованной; в – иерархической

В централизованных системах управляющему органу в принципе доступна вся получаемая об управляемых объектах информация. Если образуемые этой информацией информационные потоки малы, а требования к оперативности управления невысоки, то централизованная структура системы управления обладает определенными преимуществами при управлении по сравнению с децентрализованной. Если же интенсивность информационных потоков в системе велика, то при жестких требованиях к оперативности управления централизованная система не справится с обработкой получаемой информации, что приведет к снижению качества управления. В этом случае предпочтительней является децентрализованная структура системы управления, так как каждому управляющему органу оказывается доступной только часть всей получаемой об управляемых объектах информации, а именно, информация только о своем объекте. Поэтому в децентрализованных системах легче обеспечить обработку всей поступающей информации, что является достоинством таких систем при наличии в них мощных информационных потоков. В то же время в системах с децентрализованной структурой управление каждым управляемым объектом осуществляется без учета со-

стояния и поведения других управляемых объектов, что является существенным недостатком таких систем.

В иерархических системах каждый вышестоящий уровень управления получает от нижестоящего только прошедшую специальную обработку информацию, позволяющую сжать исходную информацию, доведя ее объем до приемлемого с сохранением существенных для управления сведений о системе. Поэтому в иерархических системах управляющий орган самого высокого уровня получает всю необходимую для управления системой информацию, но в таком обобщенном и сжатом виде, в каком обеспечивается возможность ее оперативной обработки. Это означает, что системы управления с иерархической структурой обладают всеми достоинствами централизованных и децентрализованных систем, в то же время они практически избавлены от их недостатков.

Методы управления подразделяются также по способу реализации тех или иных этапов информационных процессов, протекающих в системах управления, на методы управления: в разомкнутых и замкнутых системах.

Система управления называется разомкнутой, если на управление не оказывает влияния фактический ход управляемого процесса. В разомкнутых системах используется два метода управления: по жесткой программе и с компенсацией возмущающих воздействий.

Система управления называется замкнутой, если при управлении учитывается фактический ход управляемого процесса. В замкнутых системах управления применяются следующие методы управления: стабилизация, программное управление, отслеживание.

В организационных системах применяются все указанные методы управления, а также их всевозможные комбинации. Так как на выбор методов управления большое влияние оказывают условия получения информации, используемой при управлении, а также ее объем и достоверность, то по объему этой информации различают управление при полной и неполной информации.

Наличие полной информации об управляемом объекте и окружающей среде позволяет хотя бы в принципе определить и реализовать наилучшее в том или ином смысле управление. Отсутствие хотя бы части необходимой для управления информации резко ухудшает условия определения такого управления. Поэтому в условиях неполной информации используются методы, позволяющие наилучшим образом применять имеющуюся информацию, а также производить сбор ее в процессе управления.

К таким методам относятся, например, методы адаптивного управления.

Достоверность используемой информации в значительной степени определяется характером воздействия окружающей среды. В этом случае различают управление в конфликтной и неконфликтной ситуации.

В неконфликтных ситуациях окружающая среда нейтральна по отношению к результатам управления. В конфликтных ситуациях окружающая среда активно реагирует на результаты управления и противодействует ему. Поэтому используемая информация в этих ситуациях может не только иметь малую степень достоверности, но и содержать дезинформацию, выдаваемую элементами окружающей среды для затруднения и даже срыва управления организационной системой.

Следует отметить особенности процессов управления в организационных системах в условиях рыночной экономики. Они обусловлены различием целей и несовпадением, а часто и противоположностью интересов таких систем, являющимися субъектами рынка. Поэтому они функционируют в особых условиях – условиях активного противодействия конкурента, цели которого прямо противоположны целям рассматриваемой системы.

В зависимости от того, какой способ воздействия на конкурента использует каждая из сторон, степень достижения цели противоборствующими сторонами будет различна. Поэтому при выработке управлений каждая из сторон должна учитывать не только свои возможности, но и поведение конкурента. Подобные ситуации относятся к конфликтным, а исследованием и разработкой методов управления в таких ситуациях занимается специальный раздел теории управления, называемый управлением в конфликтных ситуациях, а также теория игр.

ТЕМА 3. ИНФОРМАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Информация в последнее время стала одной из самых широко употребляемых категорий современной науки. Слово «информация» в переводе с латинского означает сообщение, осведомление о чем-либо. Существующие сегодня научные направления и школы используют различные определения понятия информации. В теории управления наиболее конструктивным является подход к формированию данного понятия с позиций теории отражения, которая рассматривает информацию как одну из сторон процесса отражения в живой природе, обществе и технике, как некоторое свойство материи. Это свойство заключается в том, что любое тело (объект) способно воспроизводить (отражать) некоторые особенности воздействующих на него других объектов.

Отражение – есть свойство всей материи, любой материальной системы. Оно проявляется в различных формах в зависимости от сложности и уровня развития материальной системы. С развитием самой материи развивается и совершенствуется свойство отражения, начиная от простейших форм – элементарного отражения – и кончая высшими – ощущением и сознанием. Процесс отражения и все формы отражения возникают при взаимодействии объектов материального мира. Вне этого взаимодействия процесс отражения не существует и отражение не возникает.

До определенного уровня развития материальных систем отражение имеет пассивный характер, так как результаты отражения не используются отражающей системой для активного изменения своего существования. Начиная с некоторого уровня, а именно с возникновения целенаправленных систем, использование результатов отражения становится необходимым условием обеспечения существования таких систем, их развития, совершенствования и воспроизводства. Поэтому процесс отражения становится активным, обеспечивая адекватное поведение систем. Для этого отражающая система должна воспроизводить существенные для обеспечения своего поведения свойства отражаемых объектов в такой форме, которая обеспечивала бы сохранение, передачу, преобразование и воспроизведение результатов отражения. Такие результаты отражения называют информацией.

Таким образом, информация – это отраженные в форме, пригодной для сохранения, передачи, преобразования, воспроизведения и использования, свойства объекта. Объект, от которого поступает информация, называют источником информации. Это может быть либо объект, свойства которого отражены в информации, либо объект, способный хранить и передавать информацию.

Процессы получения, хранения, передачи, преобразования и воспроизведения информации, взятые в отдельности или в совокупности, называют информационными процессами.

В информационных процессах принято выделять следующие фазы преобразования (обращения) информации: восприятие, передача, сбор и хранение, обработка, представление, использование.

Восприятие информации состоит в том, что при отражении в отражающем объекте формируется и регистрируется след источника информации, представляющий собой его образ, по которому можно провести опознание и оценку источника. Передача информации состоит в переносе ее тем или иным способом на расстояние.

Сбор и хранение информации состоит в накоплении и запоминании информации (переносе информации во времени). Обработка информации заключается в ее преобразовании к виду, позволяющему представить и использовать информацию для обеспечения целенаправленных действий.

Представление (воспроизведение) информации необходимо в случае, когда информация предназначена для использования. При этом информация должна представляться в том виде, который удобен для ее восприятия человеком.

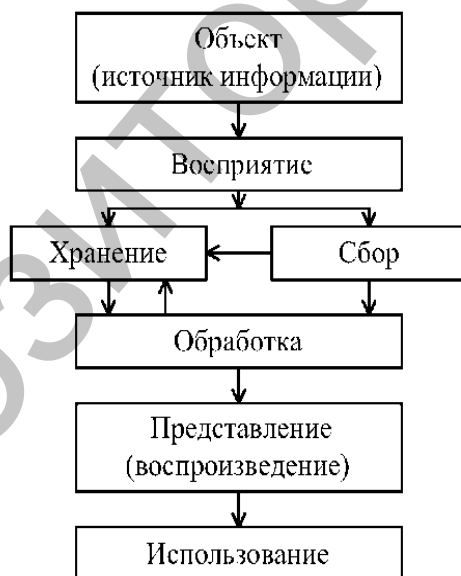


Рис. 3.1. Структурная схема преобразования информации в информационном процессе

Использование информации заключается в выработке и принятии на основе информации информационного решения с последующим использованием в процессе управления.

Последовательность фаз преобразования информации представлена на рис. 3.1.

Виды информации

При использовании информации и исследовании информационных процессов классификацию видов информации осуществляют по различным признакам, в том числе по областям знаний, к которым относится информация (военная, техническая, экономическая и др.), по физической природе восприятия информации (зрительная, слуховая, вкусовая, тактильная и др.), а также по структурно-метрическим свойствам. В последнем случае информацию классифицируют по форме представления, степени динамизма, структуре и метрическим свойствам.

По форме представления информацию принято делить на параметрическую, топологическую, абстрактную.

К параметрической относят информацию в виде числовых величин, которые характеризуют результаты количественных исследований явлений и объектов (результаты измерений и т.д.).

К информации в топологической форме (топологической информации) относят информацию в виде всевозможных точечных, линейных, плоских и пространственных фигур и изображений (карты, чертежи, снимки и т.д.).

К абстрактной форме относят информацию в виде обобщенных образов и понятий, представляемых обычно в виде символов (букв, знаков и т.д.) и математических соотношений.

Следует отметить, что между формами представления информации нет четкого разграничения и всегда возможно преобразование одной формы представления информации в другую.

По динамизму информацию принято делить на связанную и свободную. Связанной называют информацию, записанную (зафиксированную, зарегистрированную) на каком-либо носителе. Свободной называют информацию, циркулирующую внутри системы или между системами в форме различного рода сигналов.

Классификация информации по структуре приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Классификация информации по структуре		
Вид информации	Условное обозначение	Характеристика структуры
Натуральная	$\{*, \langle \rangle\}$	Первоначальная структура информации
Нормализованная	$M, D, L, \{x\}, \{t\} \{n\}$	Приведена к единому масштабу M , диапазону D и началу отсчета L
Комплексированная	$\{y, t, h\}$	Приведена к комплексу с обобщенными координатами y, t, h
Декомпонированная	$i \xrightarrow{*} x t \text{ -----}$ $\{x, t, n\} \text{ ----} \gg x n$ $\gg t n \text{ ---} \rightarrow \rightarrow n$	Преобразованы число измерений, структура и расположение
Генерализованная	$G_A \{x, t, n\}$	Устранена избыточность, выделена существенная часть по условию A

Дискретная (квантованная)	$\{x^*\}, \{t^*\}, \{n^*\}$	Выделены отсчеты в дискретные моменты времени
Безразмерная		Дискретные отсчеты приведены к безразмерной форме
Кодированная		Информация представлена в цифровом коде или в каком-либо другом алфавите

Натуральная информация отражает реальное существование объектов. Она имеет аналоговую форму, засорена шумами, не оптимальна по диапазонам и началам отсчетов значений параметров. Все эти особенности обусловлены физическими свойствами отражаемого объекта или явления. Натуральную информацию можно представить как совокупность величин $\{x\}$, моментов времени $\{t\}$ и точек пространства $\{n\}$.

Нормализованная информация отличается от натуральной тем, что в ней каждое множество $\{x\}, \{t\}, \{n\}$ уже приведено к одному масштабу, диапазону, началу отсчета и другим общим унифицированным характеристикам. Нормализованную информацию можно трактовать как результат воздействия на натуральную информацию операторов: масштабного M , диапазонного D и локализованного L .

Комплектированная информация образуется в результате приведения всей информации к полному комплексу, т.е. к трехмерной системе y, t, h , где y – обобщенная координата значений параметров или унифицированная шкала каких-либо оценок; t – обобщенная координата времени; h – обобщенная координата пространства источников информации.

Комплексированная информация представляет собой связанное и координированное множество $\{y, t, h\}$.

Изменение количества измерений структуры и расположения элементов в информационных комплексах преобразует информацию в декомпонированную. Особенно часто применяют следующие два вида декомпозиции:

- приведение физического пространства трех измерений, физических полей, многомерных систем датчиков, векторных и комплексных величин к пространствам двух и одного измерений;
- приведение полного комплекса информации y, t, h к любой из плоскостей yt, yh, th или осей y, t, h координат измерений.

В декомпонированной информации изменены связи между элементами информации.

В генерализованной информации исключены второстепенные ее части, данные обобщены и укрупнены. Генерализация может охватывать как номенклатуру параметров, так и моменты времени, диапазоны измерения и степень подробности отображения параметров.

Дискретная (квантованная) информация совпадает с исходной непрерывной информацией по физической размерности, отличаясь от нее лишь прерывным характером. Дискретизация может быть осуществлена по осям u , t , h параметрического комплекса. Безразмерная информация имеет безразмерную числовую форму. Число, отображающее безразмерную информацию, соответствует количеству информационных элементов (квантов) и равно отношению любой координаты к ее интервалу дискретности:

$$q_x = \frac{x}{\Delta x}, q_t = \frac{t}{\Delta t}, q_n = \frac{n}{\Delta n}.$$

Кодированная информация имеет форму совокупности знаков, принадлежащих алфавиту, который лежит в основе выбранной системы кодирования.

Деление информации по метрическим свойствам основано на способе ее измерения. В настоящее время для измерения информации применяются структурные, вероятностные (статистические) и семантические меры.

При применении структурных мер за единицу количества информации принимаются некоторые элементарные структурные единицы – кванты, и количество информации оценивается подсчетом числа квантов в информационном массиве. Структурные меры применяются для оценки количества связанной (хранящейся) информации.

При измерении количества информации с помощью статистических мер оценивают степень неопределенности, которую снимают при получении информации. В этом случае обычно не затрагивается смысл передаваемой информации. Данные меры широко применяются для оценки количества свободной информации (передаваемой по каналам связи).

Семантические меры позволяют оценить важность, полезность информации. Они учитывают смысл, содержание информации, давая возможность связать количество информации с эффективностью ее использования.

Так как измерение количества информации является одной из важнейших проблем, то необходимо рассмотреть указанные меры более подробно.

Количественные меры информации

Структурные меры применяются для измерения только дискретной информации. Основой используемых структурных мер служат информационные элементы (кванты), под которыми понимают неделимые части информации.

Структурные меры подразделяются на геометрические, комбинаторные и аддитивные меры информации.

Геометрическая мера определяет количество информации как значение длины, площади или объема геометрической модели сообщения, отнесенное к количеству содержащихся в нем квантов.

Геометрическим методом определяют потенциальное, т.е. максимально возможное, количество информации в заданных структурных габаритах. Это количество называют информационной емкостью.

Количество информации при использовании комбинаторной меры вычисляется как количество комбинаций, которое можно составить из информационных элементов. Данной мерой измеряется потенциальное структурное разнообразие информационных комплексов. Комбинаторную меру целесообразно использовать тогда, когда требуется оценить возможности передачи различной информации при помощи алфавитно-цифровых элементов.

Прежде чем говорить об аддитивной мере информации, введем понятия глубины h и длины l слова. Глубиной h слова называют количество различных элементов (знаков), содержащихся в принятом алфавите. Длиной l слова называют количество знаков, необходимых и достаточных для представления заданного набора слов элементами данного алфавита. Глубина слова соответствует основанию, а длина слова – разрядности системы счисления или кодирования. Общее количество слов, которое может быть представлено кодами длиной l и глубиной h , определяется выражением

$$q = h^l.$$

Это означает, что информационная емкость q при таком способе оценивания экспоненциально зависит от длины слова l . Поэтому применение данной меры на практике представляет большое неудобство.

Для обеспечения возможности сложения количества информации при сложении слов и пропорциональности количества информации длине слова Хартли ввел аддитивную логарифмическую меру информации

$$I = \log_2 h^l = l \log_2 h.$$

Единицей измерения информации при применении аддитивной меры служит бит, т.е. количество информации, содержащееся в слове глубиной $h = 2$ и длиной $l = 1$.

Если информация поступает от различных источников, то при оценивании количества информации аддитивной мерой справедливо

$$I(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n I(A_i),$$

где $I(A_1, A_2, \dots, A_n)$ – общее количество информации от источников $A_1, A_2, \dots, A_n$,

$I(A_i)$, $i = 1(1)n$ – количество информации от источника A_n , измеренное аддитивной мерой.

Статистические меры информации

Определение количества информации с помощью статистических мер требует привлечения вероятностного подхода. При таком подходе информация рассматривается как сообщение об исходе случайных событий, реализации случайных величин и функций, а количество информации ставится в зависимость от априорных вероятностей этих событий, величин, функций.

Исходная постановка задачи определения количества информации в данном случае может быть сформулирована следующим образом. Пусть существует некоторое конечное множество независимых событий, которые могут наступать с вероятностями P_i ; $i = 1(1)n$ соответственно, причем множество вероятностей удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1.$$

Такое множество событий удобно отождествлять со множеством состояний физической системы, в каждом из которых она может оказаться с определенной вероятностью.

Априорно исходное множество событий X можно характеризовать присущей ему степенью неопределенности или энтропией, которая определяется выражением (по Шеннону)

$$H[X] = - \sum_{i=1}^n P_i \log_a P_i.$$

В зависимости от выбора основания логарифма при вычислении энтропии получают различные единицы ее измерения. В дальнейшем будет использоваться только основание, равное двум, поэтому символ основания в выражениях для энтропии указываться не будет. Единицей измерения энтропии в этом случае служит бит, т.е. степень неопределенности системы, имеющей два равновероятных состояния.

О состоянии одной системы можно судить, наблюдая состояния другой системы.

Пусть имеются две системы X и Y . О состоянии системы X будем судить, наблюдая систему Y . Тогда степень неопределенности X определяется условными энтропиями

$$H[X / y_i] = - \sum_{i=1}^n P_{X/y}(x_i; y_i) \log P_{X/y}(x_i; y_i);$$

$$H[X / Y] = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n P_X(x_i) P_{X/Y}(x_i; y_j) \log P_{X/Y}(x_i; y_j);$$

$$H[X / Y] = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) H[X / y_j];$$

где, $H[X/y_j]$; $j = 1(1)m$ – условная энтропия системы X относительно состояния y_j системы Y ;

$H[X/Y]$ – полная условная энтропия системы X относительно системы Y .

$P_{X/Y}(x_i; y_j)$, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)m$ – вероятность состояния x_i системы X при условии, что система Y находится в состоянии y_j ; n , m – число состояний системы X и Y соответственно; $P_X(x_i)$, $i = 1(1)n$ – вероятность состояния x_i системы X . Последняя формула связывает между собой условные энтропии. Для двух систем рассматривают также совместную энтропию, определяемую выражениями

$$H[X, Y] = H[X] + H[Y/X]; H[X, Y] = H[Y] + H[X/Y].$$

Если до получения сообщения о состоянии системы степень неопределенности ее состояния, т. е. энтропия, была равна $H^0[X]$, а после получения сообщения стала равна $H^1[X]$, то количество информации I_X в сообщении при измерении статистическими мерами определяют как разность энтропий системы до и после получения сообщения:

$$I_X = H^0[X] - H^1[X].$$

Единицы измерения количества информации совпадают с единицами измерения энтропии.

Если наблюдение ведется за системой Y , то количество информации $I_X(Y)$, получаемое о системе X при наблюдении за системой Y , определяется выражением

$$I_X(Y) = H[X] - H[X/Y].$$

Можно показать, что количество информации $I_X(Y)$, получаемое о системе X при наблюдении за системой Y , равно количеству информации $I_Y(X)$, получаемой о системе Y при наблюдении за системой X :

$$I_X(Y) = I_Y(X),$$

где

$$I_Y(X) = H[Y] - H[Y/X].$$

Поэтому данную величину называют полной взаимной информацией и обозначают $I(X, Y)$.

Полная взаимная информация, содержащаяся в двух системах, может быть определена по формуле

$$I(X, Y) = H[X] + H[Y] - H[X, Y].$$

Семантические меры информации

Статистические и структурные меры информации не позволяют оценить содержательность информации, так как они не учитывают смысла сообщения и ценности его для адресата. Семантические меры дают возможность избежать этого недостатка.

Среди семантических мер рассмотрим меры содержательности и меру целесообразности информации.

Мера содержательности в сообщении A обозначается cont (contents – содержание) и определяется в виде

$$\text{cont}(a) = \mu(\neg a) = 1 - \mu(a),$$

где μ – аддитивная функция; $\neg$ – знак логического отрицания. Функция μ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\mu(a) + \mu(\neg a) = 1; 0 < \mu(a) < 1.$$

Значение функции $\mu(a)$ отражает истинность высказывания A , а значение $\mu(\neg a)$ – ложность этого высказывания.

Помимо этой меры используется также аддитивная мера содержательности информации в сообщении A , которая обозначается символом inf и определяется выражением

$$\text{inf } A = -\log \mu(a) = -\log(1 - \text{cont}(a)).$$

К мерам целесообразности (ценности) информации относятся меры, которые позволяют оценить изменение эффекта какого-либо действия в результате использования информации.

Такой мерой является мера Харкевича, который предложил оценивать целесообразность информации по формуле

$$X = \log \frac{P_1}{P_0},$$

где P_0 – вероятность достижения цели до получения информации; P_1 – вероятность достижения цели после получения и использования информации.

Если $X > 0$, то информация обеспечивает приращение эффекта. Если $X = 0$, то использование информации бесполезно. Если $X < 0$, то использование информации уменьшает конечный эффект, а следовательно, она не только бесполезна, но и вредна. В частности, это возможно, когда используют ложную информацию либо дезинформацию. Еще один подход к измерению ценности информации связан с учетом способности адресата к восприятию информации. Чтобы иметь возможность воспринимать информацию, адресат должен обладать вполне определенной системой знаний. В этом случае ценность информации можно определять по степени изменения системы знаний после получения и переработки информации.

Пусть система знаний адресата оценивается величиной T , которую будем называть тезаурусом. Ценность $s(I, T)$ информации I , воспринимаемой адресатом с тезаурусом T , соответствует величине изменения тезауруса адресата.

График, качественно отражающий зависимость ценности $s(I, T)$ информации $I = I_1$ от тезауруса T адресата, приведен на рис. 3.2.

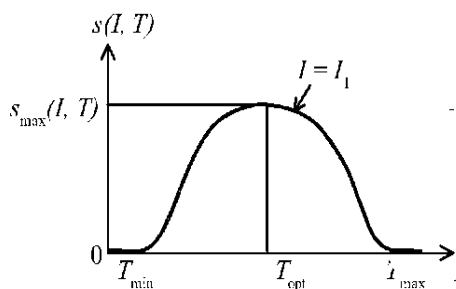


Рис. 3.2.

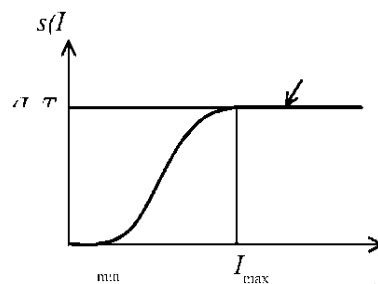


Рис. 3.3

Если тезаурус $T < T_{\min}$, то информация I_1 адресатом просто не воспринимается, поэтому ценность такой информации для адресата равна нулю. Если $T_{\min} < T < T_{\max}$, то адресат воспринимает информацию I_1 и под действием этой информации увеличивает свой тезаурус. Следовательно, в этом интервале изменения тезауруса информация имеет для адресата определенную ценность. При этом наибольшее изменение тезауруса соответствует $T = T_{\text{opt}}$, и соответственно в этой точке информация I_1 имеет наибольшую ценность для адресата. При $T > T_{\text{opt}}$ тезаурус является достаточно большим, поэтому информация I_1 мало влияет на него. Наконец, при $T < T_{\max}$ тезаурус оказывается настолько большим, что информация I_1 не может оказать на него какого-либо воздействия.

График, качественно отражающий зависимость ценности $s(I, t)$ информации для адресата, обладающего тезаурусом $T = T_1$, от количества информации I , представлен на рис. 3.3.

Если $I < I_{\min}$, то для адресата, обладающего тезаурусом $T = T_1$, эта информация ценности не имеет, так как не оказывает влияния на тезаурус. При $I_{\min} < I < I_{\max}$ информация I является ценной, так как позволяет увеличить тезаурус. При $I > I_{\max}$ ценность информации I не возрастает, так как количество информации стало столь большим, что адресатом воспринимается только часть этого количества, соответствующая максимально возможному изменению тезауруса. Поэтому ценность информации при $I > I_{\max}$ равна $s_{\max}(I, T)$.

В заключение следует отметить следующее. Никакое преобразование сообщений не позволяет увеличить количество содержащейся в них информации. Однако ценность информации в процессе преобразований может увеличиться, если информация после преобразования станет более доступной адресату.

ТЕМА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование организационных систем и протекающих в них процессов путем наблюдения за ними или проведения на системах эксперимента для выявления интересующих исследователя свойств и характеристик систем, а также закономерностей протекающих в них процессов сопряжено со значительными трудностями. Это обусловлено сложностью исследуемых объектов, большими материальными и временными затратами на наблюдение и проведение эксперимента, ненаблюдаемостью многих параметров и характеристик систем и процессов. Кроме того, проведение эксперимента на системах в отдельных случаях оказывается невозможным, так как связано с разрушением и уничтожением исследуемой системы либо с нанесением невосполнимого ущерба отдельным личностям и коллективам людей. Поэтому основным методом изучения организационных систем и протекающих в них процессов, в том числе процессов управления, является моделирование.

Определение 4.1. Моделирование – это метод изучения сложного объекта путем его замены более удобным для исследования объектом, сохраняющим существенные черты изучаемого объекта, а также процесс построения замещающего объекта.

Определение 4.2. Модель – это объект любой природы, который, отображая или воспроизводя исследуемый объект, способен замещать его так, что изучение замещающего объекта позволяет получить новую информацию о замещаемом объекте.

Замещаемый при моделировании объект называют оригиналом. Сущность моделирования состоит в замещении оригинала моделью, исследовании модели и переносе полученных при исследовании результатов на оригинал. Такой перенос становится правомерным только при соблюдении определенных условий, к которым относится наличие у оригинала и модели сходства, подобия или аналогии.

Говорят, что объекты сходны между собой, если у них существует хотя бы один общий признак. При сходстве объектов одной физической природы говорят о подобии, а при сходстве объектов различной физической природы – об аналогии этих объектов. Моделирование можно рассматривать как разновидность и дальнейшее развитие метода аналогии.

При установлении между оригиналом и моделью аналогии, т.е. сходства данных объектов по каким-либо свойствам, признакам, объективным основанием для логического переноса призна-

ков с одного объекта на другой служит то, что свойства любого объекта тесно взаимосвязаны между собой, причем изменение любого существенного признака, как правило, сказывается и на других признаках. Поэтому можно предполагать, что если два объекта обладают одинаковой совокупностью определенных свойств, а у одного из объектов выявлены дополнительные свойства, то и другой объект обладает этими же свойствами.

Общим для всех выводов по аналогии является то, что в каждом случае непосредственному исследованию подвергается один объект, а вывод делается для другого, что определяется в самом общем смысле как перенос информации с одного объекта на другой.

Следует отметить, что, как бы ни было велико сходство между оригиналом и моделью, всегда между ними имеется более или менее существенное различие. Поэтому выводы по аналогии носят не абсолютно достоверный, а более или менее приближенный, вероятностный характер и всегда нуждаются в дополнительной проверке. Степень достоверности этих выводов зависит от уровня сходства, подобия или аналогии между оригиналом и моделью. Различие в уровне сходства может быть отражено с помощью логико-математических понятий изоморфизма и гомоморфизма, определяющих степень одинаковости, подобия объектов.

Определение 4.3. Системы называются изоморфными, если между их элементами, а также функциями, свойствами и отношениями, осмысленными для этих систем, существует или может быть установлено взаимно-однозначное соответствие.

Каждая из изоморфных систем называется изоморфным образом другой, а отношение между ними – изоморфизмом. Условия, которым должны отвечать изоморфные системы A и B , могут быть сформулированы следующим образом.

Каждому элементу a системы A соответствует один и только один элемент b системы B и наоборот.

Каждой функции φ , определенной для системы A , соответствует одна и только одна функция ψ , определенная для системы B , и, наоборот.

Каждому свойству P , определенному для системы A , соответствует одно и только одно свойство Q , определенное для системы B , и наоборот.

Каждому отношению R , определенному для системы A , соответствует одно и только одно отношение S , определенное для системы B , и, наоборот.

Изоморфизм, как и отношение типа равенства, обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Рефлексивность изоморфизма означает, что система всегда изоморфна самой себе. Симметричность изоморфизма свидетельствует, что если система A изоморфна системе B , то и система B изоморфна системе A . Из транзитивности изоморфизма следует, что если система A изоморфна системе B , а система B изоморфна системе C , то и система A изоморфна системе C .

Изоморфные системы эквивалентны друг другу в той мере, в какой они являются изоморфными. Поэтому изоморфизм систем служит основанием для правомерного переноса знаний, полученных при изучении одной изоморфной системы, на другую, обеспечивая тем самым высокую достоверность результатов моделирования.

Существенным недостатком изоморфного моделирования является сложность изоморфной модели, сравнимая со сложностью оригинала. Это приводит практически к тем же трудностям, с какими приходится сталкиваться при непосредственном исследовании оригинала.

Определение 4.4. Системы называются гомоморфными, если элементам, функциям, свойствам и отношениям, определенным для одной системы, могут быть поставлены в однозначное соответствие элементы, функции, свойства и отношения, определенные для другой системы.

Для гомоморфных систем A и B выполняются следующие условия.

Каждому элементу a системы A соответствует один и только один элемент b системы B .

Каждой функции φ , определенной для системы A , соответствует одна и только одна функция ψ , определенная для системы B .

Каждому свойству P , определенному для системы A , соответствует одно и только одно свойство Q , определенное для системы B .

Каждому отношению R , определенному для системы A , соответствует одно и только одно отношение S , определенное для системы B .

При выполнении указанных условий система A называется гомоморфным прообразом системы B , система B – гомоморфным образом системы A , а отношение между системами A и B – гомоморфизмом.

Сравнение условий, которым удовлетворяют изоморфные и гомоморфные системы, показывает, что изоморфизм есть частный случай гомоморфизма, т.е. изоморфизм всегда является гомоморфизмом, обратное же будет неверно.

Гомоморфизм в отличие от изоморфизма не обладает свойством симметричности. Если для изоморфных систем каждая система служит изоморфным образом другой и может быть выбрана в качестве модели, то при гомоморфизме лишь одна система будет образом другой, причем гомоморфным образом, который как бы упрощает гомоморфный прообраз, допуская соответствие множества элементов, функций, свойств, отношений, определенных для прообраза, одному элементу, функции, свойству, отношению, определенному для образа. Будучи несимметричным отношением, гомоморфизм допускает лишь односторонний перенос информации, а именно с гомоморфного образа на прообраз, но не наоборот. Поэтому при гомоморфизме в качестве модели, как правило, выбирают гомоморфный образ, а в качестве оригинала – гомоморфный прообраз.

В настоящее время используют два подхода к построению гомоморфных моделей.

Первый подход состоит в исключении из рассмотрения несущественных элементов, функций, свойств и отношений исследуемой системы (оригинала). В результате получают более простую систему (модель), пространство состояний которой имеет размерность меньшую, чем пространство состояний исходной системы. При этом каждому состоянию исходной системы будет соответствовать только одно состояние упрощенной системы, обратное будет неверно.

Второй подход состоит в объединении некоторого множества состояний исследуемой системы в одно, например, путем перехода от рассмотрения всех состояний из данного множества к рассмотрению только принадлежности состояния к множеству. В результате так же получают более простую систему с пространством состояний меньшей размерности, чем у исходной, и однозначным соответствием состояний исходной системы состояниям упрощенной. Обратное соответствие будет неоднозначным.

Введенные понятия гомоморфизма и изоморфизма позволяют дать более строгое определение модели. Пусть A, B, A^1, B^1 – системы.

Определение 4.5. Система A есть модель системы B , если существуют изоморфные между собой гомоморфные образы A^1 и B^1 этих систем.

Отношение между системами A и B , вводимое данным определением, будем называть модельным отношением. Оно является общим случаем отношений изоморфизма и гомоморфизма. Изоморфизм из модельного отношения получается при отождествлении систем A с A^1 и B с B^1 , а гомоморфизм – при отождествлении либо A с A^1 , либо B с B^1 .

Модельное отношение является отношением типа равенства. Оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому любая из систем А и В с одинаковым правом может служить моделью другой. Решение о том, какую систему считать моделью, а какую – оригиналом при наличии между рассматриваемыми системами модельного отношения, определяется целями моделирования.

Основными целями моделирования являются:

- описание строения и поведения системы;
- построение теорий и гипотез, объясняющих наблюдаемое строение и поведение системы;
- прогнозирование будущего строения и поведения системы.

К основным принципам моделирования относятся:

- целенаправленность моделирования;
- «удобство» модели для проведения исследований;
- соответствие степени адекватности модели целям моделирования.

Принцип целенаправленности моделирования означает, что модель должна быть средством достижения целей, ради которых осуществляется моделирование.

Принцип «удобства» модели говорит о том, что проведение исследований на модели должно быть проще и удобнее, чем на оригинале, а получаемые результаты исследований – допускать достаточно простую интерпретацию.

Принцип соответствия степени адекватности модели целям моделирования предполагает, что требуемая адекватность модели оригиналу определяется целями исследования. Если адекватность модели будет ниже требуемой, то результаты моделирования будут недостаточно достоверными, чтобы обеспечить достижение цели моделирования. Если же адекватность модели оригиналу будет выше требуемой, то сложность модели может не обеспечить выполнения принципа «удобства» модели, т.е. модель может оказаться сравнимой по сложности с оригиналом, либо результаты моделирования могут не поддаваться интерпретации. В этом случае цели моделирования также не будут достигнуты.

Перечисленные выше цели и принципы моделирования позволяют сформулировать следующие требования к модели, которая должна:

- объективно соответствовать моделируемому объекту;
- позволять замещать изучаемый объект на определенных этапах исследования;
- давать в ходе исследования новую информацию, допускающую опытную проверку;

- содержать совокупность достаточно четких правил перехода от модельной информации к информации о моделируемом объекте.

Кроме того, модель должна быть:

- простой и понятной пользователю;
- целенаправленной;
- надежной в смысле гарантии от получения абсурдных результатов;
- удобной в обращении;
- полной с точки зрения достижения основных целей;
- адаптивной, т.е. допускающей изменение и развитие модели по мере получения дополнительной информации;
- повторяемой.

В настоящее время модели широко применяются как средства отражения и осмысления реального мира, общения, обучения и тренажа, прогнозирования и экспериментирования. Одним из наиболее важных применений моделей является прогнозирование поведения моделируемых объектов.

Классификация моделей и методов моделирования

Одним из основных признаков, по которым проводится классификация моделей и методов моделирования, являются средства моделирования или способ реализации модели. По этому признаку моделирование подразделяется на материальное и идеальное (рис. 4.1).



Рис. 4.1. Классификация моделей и методов моделирования по средствам моделирования

При материальном моделировании моделями служат материальные объекты, отражающие в той или иной степени свойства

объектов моделирования. Модели в этом случае либо строятся исследователем, либо отбираются им в окружающем мире. В зависимости от степени сходства модели и оригинала различают три основных вида материального моделирования: геометрическое, физическое и аналоговое.

При геометрическом моделировании в качестве модели используются материальные объекты, геометрически подобные оригиналу (макеты, муляжи, копии и т.д.), воспроизводящие пространственно-геометрические характеристики оригинала безотносительно к его физической природе. В основу построения геометрических моделей положено определение подобия в геометрии, согласно которому два объекта считаются геометрически подобными, если можно добиться их совмещения с помощью линейных преобразований. В управлении геометрические модели находят незначительное применение.

При физическом моделировании моделями служат материальные объекты, подобные оригиналу и имеющие с ним одинаковую физическую природу. Основу физического моделирования составляют теория подобия и теория размерностей. Физические модели широко применяются в технике при разработке и проектировании технических систем. В первую очередь это относится к таким областям техники, как гидротехника, самолето- и кораблестроение.

Аналоговое моделирование основывается на наличии сходства между объектами различной физической природы, т.е. аналогии между моделью и оригиналом. Чаще всего при аналоговом моделировании используют тождественность математического описания процессов в оригинале и модели. При такой трактовке аналоговая модель представляет материальную систему, в которой происходят физические процессы, отличные от процессов в оригинале, но те и другие могут быть описаны одинаковыми или подобными математическими выражениями. Аналоговые модели относятся к моделям прямой аналогии, если моделирование осуществляется с помощью реальных материальных объектов, и к моделям непрямой аналогии, если для моделирования используются аналоговые ЭВМ.

Во всех случаях материального моделирования модель — это материальное отражение исходного объекта. Исследование состоит в материальном воздействии на нее, т.е. в экспериментировании с моделью. Поэтому материальное моделирование по своей природе является экспериментальным методом.

Идеальное моделирование основывается не на материальной, а на идеальной, мыслимой связи между объектами. В этом

его принципиальное отличие от материального моделирования. В идеальном моделировании различают формализованное и неформализованное (интуитивное).

При неформализованном моделировании моделью является не зафиксированное точно мысленное отражение моделируемого объекта, служащее основой для рассуждений и принятия решений. Эффективность такого моделирования в значительной степени зависит от опыта и интуиции лица, его осуществляющего. Другим недостатком неформализованных моделей является их плохая повторяемость при воспроизведении таких моделей разными лицами, так как один и тот же объект может восприниматься разными исследователями по-разному, что может привести не только к несовпадающим, но и прямо противоположным выводам.

При формализованном моделировании моделями служат системы знаков или образов, вместе с которыми задаются правила их преобразования и интерпретации.

Образное моделирование использует в качестве моделей идеальные образы исследуемых объектов, причем эти образы воспринимаются всеми исследователями одинаково, а правила взаимодействия образов, используемых в модели, четко фиксированы. Примером таких моделей являются идеальный газ, идеальная жидкость – в физике, точка, линия – в геометрии и т.д. Исследования на таких моделях принято называть мысленным экспериментом.

Знаковое моделирование использует в качестве моделей системы знаков в совокупности с правилами их преобразования и интерпретации. Знаки могут быть различными. Примерами знаковых моделей могут служить карты местности, химические формулы, описания объектов на любом из языков. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, а знаковой модели – математическая модель.

Определение 4.6. Математическая модель – это знаковая модель исследуемой системы, составленная на языке математики.

Математическая модель представляет собой совокупность математических выражений, отражающих существенные для исследования свойства моделируемого объекта.

Определение 4.7. Математическое моделирование – это процесс построения и оперирования математической моделью с целью получения информации о моделируемом объекте.

Формализованное моделирование можно подразделить также на частично формализованное, допускающее в известных пределах неоднозначность и вариабельность описаний свойств и характеристик моделируемого объекта в семантическом и синтаксическом отношениях, и вполне формализованное. Основны-

ми признаками подкласса вполне формализованных моделей являются, во-первых, абстрактный характер всех структурных компонент модели, которые должны представлять собой формально описанные элементы некоторого жесткого языка с его семантикой, и, во-вторых, вполне однозначный синтаксис, определяющий операции, которые допустимы над этими элементами, а также порядок выполнения допустимых операций.

Математические модели относятся к классу вполне формализованных моделей.

По сравнению с другими видами моделирования математическое моделирование как метод исследования обладает следующими преимуществами:

- универсальностью, обусловленной универсальностью математики как языка описания и метода исследования объектов окружающего мира;
- практическим отсутствием ограничений на применение, так как математическое моделирование пригодно для исследования любых объектов;
- высокой адаптивностью, т.е. возможностью внесения требуемых изменений в модель при необходимости;
- меньшими материальными и временными затратами на моделирование;
- возможностью проведения исследований на критических режимах, которые приводят к разрушению материальных моделей.

Особенно ярко преимущества математического моделирования проявились с появлением ЭВМ. Моделирование с помощью ЭВМ позволило решать многие задачи исследования, которые по уровню сложности и затратам на их решение не могли быть решены другими методами. К таким задачам относятся задачи управления сложными организационными системами и исследования в них информационных процессов. Поэтому математическое моделирование является важнейшим методом исследования в теории управления и кибернетике.

Модели и методы моделирования, кроме рассмотренного аспекта классификации, а именно по средствам моделирования, могут быть классифицированы по характеристикам моделируемого объекта, которые отражаются в модели. Так как основными характеристиками систем являются их структура и поведение (функционирование), то по данному признаку различают следующие виды моделирования: структурное, структурно-функциональное, функционально-структурное, функциональное.

При структурном моделировании оригинал и модель отождествляются на основе сходства, подобия, аналогии их структур.

При функциональном моделировании оригинал и модель отождествляются на основе сходства, подобия, аналогии их функционирования.

Критерии всех рассматриваемых классов представляют собой высказывательные формы, которые становятся высказываниями после присвоения переменным некоторых значений. Если полученное высказывание является истинным, то считают, что объект по качеству удовлетворяет данному критерию; если высказывание будет ложным, то объект не удовлетворяет по качеству выбранному критерию.

Математическое моделирование рискованных ситуаций

Любая сфера человеческой деятельности, в особенности экономика или бизнес, связана с принятием решений в условиях неполноты информации. Источники неопределенности могут быть самые разнообразные: нестабильность экономической и/или политической ситуации, неопределенность действий партнеров по бизнесу, случайные факторы, т.е. большое число обстоятельств, учесть которые не представляется возможным (например, погодные условия, неопределенность спроса на товары, неабсолютная надежность процессов производства, неточность информации и др.). Экономические решения с учетом перечисленных и множества других неопределенных факторов принимаются в рамках так называемой теории принятия решений – аналитического подхода к выбору наилучшего действия (альтернативы) или последовательности действий. В зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение (ЛПР), в теории принятия решений рассматриваются три типа моделей:

- выбор решений в условиях определенности, если относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;
- выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертно-оцениваемую вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок;
- выбор решений при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности совершенно не известны или не имеют смысла.

Проблема риска и прибыли – одна из ключевых в экономической деятельности, в частности, в управлении производством и

финансами. Под *риском* принято понимать вероятность (угрозу) потери лицом или организацией части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной производственной и финансовой политики.

Различают следующие виды рисков:

- *производственный*, связанный с возможностью невыполнения фирмой своих обязательств перед заказчиком;
- *кредитный*, обусловленный возможностью невыполнения фирмой своих финансовых обязательств перед инвестором;
- *процентный*, возникающий вследствие непредвиденного изменения процентных ставок;
- *риск ликвидности*, обусловленный неожиданным изменением кредитных и депозитных потоков;
- *инвестиционный*, вызванный возможным обесцениванием инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг;
- *рыночный*, связанный с вероятным колебанием как рыночных процентных ставок собственной национальной денежной единицы, так и курса зарубежных валют.

Риск подразделяется на динамический и статический. *Динамический риск* связан с возникновением непредвиденных изменений стоимости основного капитала вследствие принятия управленческих решений, а также рыночных или политических обстоятельств. Такие изменения могут привести как к потерям, так и к дополнительным доходам. *Статический риск* обусловлен возможностью потерь реальных активов вследствие нанесения ущерба собственности и потерь дохода из-за недееспособности организации.

Все участники проекта заинтересованы в том, чтобы не допустить возможность полного провала проекта или хотя бы избежать убытка. В условиях нестабильной, быстро меняющейся ситуации необходимо учитывать все возможные последствия от действий конкурентов, а также изменения конъюнктуры рынка. Поэтому основное назначение анализа риска состоит в том, чтобы обеспечить партнеров информацией, необходимой для принятия решений о целесообразности участия в некотором проекте, и предусмотреть меры по защите от возможных финансовых потерь.

При анализе риска могут использоваться следующие условия или предположения:

- потери от риска не зависят друг от друга;
- потери по одному из некоторого перечня рисков не обязательно увеличивают вероятность потерь по другим;

- максимально возможный ущерб не должен превышать финансовых возможностей участников проекта.

Все факторы, влияющие на рост степени риска в проекте, можно условно разделить на объективные и субъективные. *Объективные факторы* непосредственно не зависят от самой фирмы: это инфляция, конкуренция, политические и экономические кризисы, экология, налоги и т.д. *Субъективные факторы* непосредственно характеризуют данную фирму: это производственный потенциал, техническое оснащение, уровень производительности труда, проводимая финансовая, техническая и производственная политика, в частности, выбор типа контракта между инвестором и заказчиком. Последний фактор играет особо важную роль для фирмы, поскольку от типа контракта зависят степень риска и величина вознаграждения по окончании проекта.

Исследование риска целесообразно проводить в следующей последовательности:

- выявление объективных и субъективных факторов, влияющих на конкретный вид риска;
- анализ выявленных факторов;
- оценка конкретного вида риска с финансовых позиций, определяющая либо финансовую состоятельность проекта, либо его экономическую целесообразность;
- установка допустимого уровня риска;
- анализ отдельных операций по выбранному уровню риска;
- разработка мероприятий по снижению риска.

Финансирование проекта, являясь одним из наиболее важных условий обеспечения эффективности его выполнения, должно быть нацелено на обеспечение потока инвестиций для планомерного выполнения проекта, на снижение капитальных затрат и риска проекта за счет оптимальной структуры инвестиций и получения налоговых преимуществ. В плане финансирования проекта должны учитываться следующие виды рисков:

- нежизнеспособности проекта;
- налоговый;
- неуплаты задолженностей;
- незавершения строительства.

Высокая степень риска проекта приводит к необходимости поиска путей искусственного снижения его (риска) возможных последствий на состояние дел фирмы.

В существующей практике применяются главным образом четыре основных способа управления риском: распределение риска между всеми участниками проекта (передача части риска соисполнителям), страхование, резервирование средств на покрытие непредвиденных расходов и диверсификация.

Анализ рисков подразделяется на два взаимно дополняющих друг друга вида: *качественный*, главная задача которого состоит в определении факторов риска и обстоятельств, приводящих к рисковым ситуациям, и *количественный*, позволяющий вычислить размеры отдельных рисков и риска проекта в целом.

Наиболее распространена точка зрения, согласно которой *мерой риска* коммерческого (финансового) решения или операции следует считать среднеквадратичное отклонение (положительный квадратный корень из дисперсии) значения показателя эффективности этого решения или операции. Действительно, поскольку риск обусловлен недетерминированностью исхода решения (операции), то, чем меньше разброс (дисперсия) результата решения, тем более он предсказуем, т.е. меньше риск. Если вариация (дисперсия) результата равна нулю, риск полностью отсутствует. Например, в условиях стабильной экономики операции с государственными ценными бумагами считаются безрисковыми.

Чаще всего показателем эффективности финансового решения (операции) служит прибыль.

Рассмотрим в качестве иллюстрации выбор некоторым лицом одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска. Пусть имеются два проекта A и B , в которые указанное лицо может вложить средства. Проект A в определенный момент в будущем обеспечивает случайную величину прибыли. Предположим, что ее среднее ожидаемое значение, математическое ожидание, равно m_A с дисперсией S_A . Для проекта B эти числовые характеристики прибыли как случайной величины предполагаются равными соответственно m_B и S_B . Среднеквадратичные отклонения равны соответственно S_A и S_B .

Возможны следующие случаи:

- a) $m_A = m_B, S_A < S_B$, следует выбрать проект A ;
- b) $m_A > m_B, S_A < S_B$, следует выбрать проект A ;
- c) $m_A > m_B, S_A = S_B$, следует выбрать проект A ;
- d) $m_A > m_B, S_A > S_B$;
- e) $m_A < m_B, S_A < S_B$.

В последних двух случаях решение о выборе проекта A или B зависит от отношения к риску ЛПР. В частности, в случае d) проект A обеспечивает более высокую среднюю прибыль, однако он и более рискован. Выбор при этом определяется тем, какой дополнительной величиной средней прибыли компенсируется для ЛПР заданное увеличение риска. В случае e) для проекта A риск меньший, но и ожидаемая прибыль меньше.

ТЕМА 5. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА МОДЕЛЕЙ

Процесс оценивания качества объектов включает в себя следующие этапы.

1-й этап. Выбор совокупности свойств. В совокупность свойств, учитываемых при оценивании качества, должны быть включены все свойства, существенные для использования объекта по своему назначению, и только они.

2-й этап. Измерение качества осуществляется путем сравнения свойств, включенных в совокупность, с эталонами и вычислением значений частных показателей качеств и обобщенного показателя качества, если таковой имеется.

3-й этап. Собственно оценивание состоит в подстановке в выбранный критерий измеренных значений показателей качества и проверке истинности соответствующих высказываний.

Определение 5.1. Качество модели – сложное свойство модели, характеризующее ее способность замещать исследуемый объект (оригинал) для получения новой информации о замещаемом объекте.

К основным свойствам, определяющим качество модели, относятся адекватность, сложность, информативность, интерпретируемость.

Определение 5.2. Адекватность модели – свойство модели, характеризующее ее соответствие оригиналу, ее способность отражать или воспроизводить оригинал.

В качестве количественной характеристики адекватности модели можно выбрать меру близости модели оригиналу, определяя ее как расстояние между моделью и оригиналом в некотором метрическом пространстве.

Пусть: O – оригинал; M – модель; A – некоторое множество, которому принадлежат модель и оригинал, т.е. $O, M \in A$;

$r(a, b)$ – расстояние, заданное на множестве A , т.е. для $\forall a, b, c \in A$ справедливо:

$r(a, b) > 0$ и $r(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$, или короче $r(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (аксиома тождества);

$r(a, b) = r(b, a)$ (аксиома симметрии);

$r(a, b) + r(b, c) \geq r(a, c)$ (аксиома треугольника).

Тогда множество A есть метрическое пространство с заданной в нем метрикой $r(a, b)$, которая определяет степень близости объектов этого множества и, следовательно, может служить количественной характеристикой, т.е. показателем $r(M, O)$ адекватности модели M оригиналу O .

В зависимости от природы оригинала, совокупности моделируемых свойств и вида модели могут быть выбраны различные метрики, а следовательно, и показатели адекватности модели.

$$\forall X_{\langle n \rangle}, Y_{\langle n \rangle} \in X^n \subset E^n :$$

$$r(X_{\langle n \rangle}, Y_{\langle n \rangle}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

$$r(X_{\langle n \rangle}, Y_{\langle n \rangle}) = \max_{\forall i \in [1(n)]} |x_i - y_i|;$$

$$r(X_{\langle n \rangle}, Y_{\langle n \rangle}) = \sup_{\forall i \in [1(n)]} |x_i - y_i|;$$

$$r(X_{\langle n \rangle}, Y_{\langle n \rangle}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Так, в n -мерном евклидовом пространстве E^n в качестве показателей адекватности могут быть выбраны следующие метрики:

$$r(f(x), g(y)) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|;$$

$$r(f(x), g(y)) = \int_X |f(x) - g(x)| dx;$$

$$r(f(x), g(y)) = \left\{ \int_X |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где, X – метризуемое бикompактное пространство (например, замкнутое ограниченное подпространство евклидова пространства);

$p \in \{1(n)\infty\}$ – целое натуральное число.

Требуемая адекватность моделей определяется с помощью соответствующих критериев. Так, критерий пригодности может быть сформулирован в виде

$$r(O, M) \leq \varepsilon \geq 0,$$

где r характеризует минимальную допустимую степень близости модели к оригиналам.

В общем случае значения $r(O, M)$ являются случайными, поэтому в качестве показателя следует выбрать вероятность выполнения данного неравенства либо соответствующие числовые характеристики случайной величины $\hat{r}(O, M)$, а критерий пригодности формулировать в виде:

$$P(\hat{r}(O, M) \leq \varepsilon \geq 0) \geq \delta \geq 0; \quad \bar{r}(O, M) \leq \varepsilon_1,$$

$$r(O, M) = \sup_{\forall O, M \in A} \rho(O, M) \leq \varepsilon_2 \geq 0,$$

где $P(O, M)$ – математическое ожидание случайной величины $r(O, M)$;

$\rho(O, M)$ – расстояние между элементами множества A , которому принадлежат модель M и оригинал O .

Сложность модели определяется строением модели и характеризует возможность ее использования при моделировании. Чем сложнее модель, тем больше трудностей возникает при ее использовании. Для оценивания сложности задают соответствующие показатели и критерии сложности, формирование и использование которых рассматривается в разделах системных направлений, относящихся к структурному анализу систем. Возможность применения данных показателей обусловлена тем, что модель всегда можно рассматривать как систему.

Информативность – свойство модели, характеризующее ее способность в процессе моделирования отображать или воспроизводить информацию об оригинале. Показателями информативности могут служить различные меры информации, используемые при измерении ее количества и качества и рассматриваемые в теории информации.

Интерпретируемость модели – свойство модели, которое характеризует возможность переноса информации, получаемой с помощью модели, на оригинал. Количественные характеристики данного свойства модели пока практически не разработаны.

Следует сказать, что рассмотренные составляющие качества модели достаточно тесно связаны между собой. Так, повышение степени адекватности модели чаще всего ведет к ее усложнению и уменьшению возможности интерпретации. Поэтому качество модели с повышением ее адекватности может не только увеличиваться, но и уменьшаться, что требует компромиссного подхода к заданию требований к адекватности, сложности, информативности и интерпретируемости моделей.

Эффективность моделирования

Моделирование, как и любой целенаправленный процесс, имеет вполне определенное назначение а, следовательно, обладает качеством и является объектом изучения квалиметрии.

Однако исторически сложилось так, что целенаправленные процессы и их качество стали объектом и предметом изучения теории эффективности, которую можно рассматривать как одно из направлений квалиметрии.

Теория эффективности – научная дисциплина, в которой разрабатываются методологические основы, методы и методики анализа и количественного оценивания качества целенаправленных процессов.

Объектом изучения в теории эффективности являются целенаправленные процессы, или операции, а предметом изучения – эффективность, или качество, таких процессов.

Операция – это упорядоченная совокупность взаимосвязанных действий, направленных на достижение некоторой цели.

В соответствии с данным определением моделирование представляет собой операцию.

Формально операция может быть описана в виде следующего выражения: $O = \langle R_1, R_2, F, Q, T \rangle$, где R_1 – ресурсы, затрачиваемые в процессе выполнения операции; R_2 – результат операции; $F \subset R_1 \times R_2$ – отношение, задаваемое на множестве $R_1 \times R_2$; Q – условие проведения операции; T – время, затрачиваемое на выполнение операции.

Схема взаимодействия всех элементов, оказывающих влияние на результат операции, имеет следующий вид (рис. 5.1).

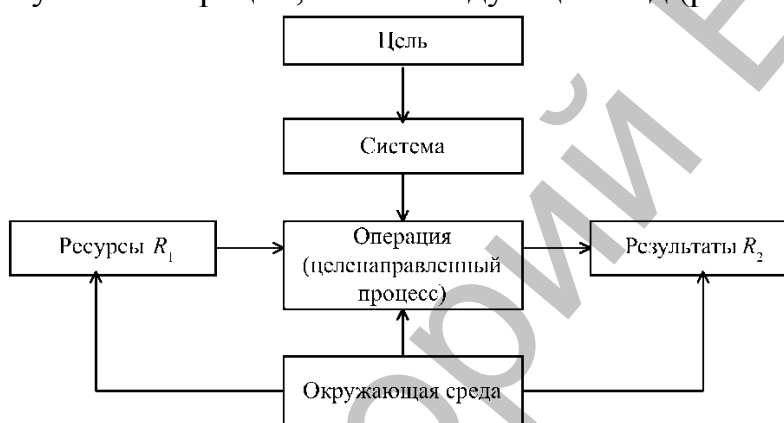


Рис. 5.1. Схема взаимодействия всех элементов, оказывающих влияние на результат операции

Таким образом, в рамках теории эффективности операция представляется как процесс преобразования ресурсов в результаты. При этом желаемые результаты (цель операции) называют целевым эффектом. Прочие результаты подразделяют на побочные положительные и отрицательные эффекты, а также расходы ресурсов.

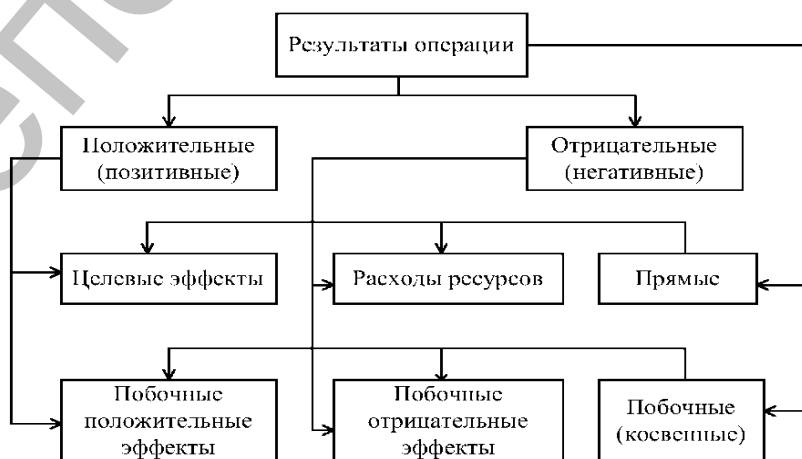


Рис. 5.2. Классификация результатов операции

Классификация результатов операции приведена на рис. 5.2. Эффективность операции характеризует способность (точнее приспособленность) операции преобразовывать расходуемые ресурсы в выходные эффекты и является основным свойством, характеризующим качество операции.

С позиций теории эффективности, моделирование представляет собой типичную операцию, а эффективность моделирования – основное свойство, определяющее качество этой операции.

Определение 5.3. **Эффективность моделирования** – сложное свойство этой операции, характеризующее ее приспособленность для достижения целей моделирования. Как сложное свойство, эффективность порождается совокупностью свойств, к которым относятся результативность, ресурсоемкость, оперативность.

Результативность моделирования – свойство, характеризующее способность моделирования давать целевой эффект, т.е. новую информацию об оригинале. Результативность моделирования определяется объемом и качеством информации об оригинале, получаемой в результате моделирования.

Ресурсоемкость моделирования – свойство, характеризующее расход всех видов ресурсов при моделировании на получение целевого эффекта. Такими ресурсами являются материальные, энергетические, информационные, трудовые, финансовые, временные (за исключением времени на проведение моделирования).

Оперативность моделирования – свойство, характеризующее расход времени на проведение моделирования для достижения целевого эффекта.

ТЕМА 6. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Одной из важнейших характеристик системы является ее структура, т.е. устойчивая упорядоченность в пространстве и времени элементов и связей, определяющая целостность, строение и основы организации системы.

Целью структурного моделирования является построение структурной модели, т.е. объекта, структура которого в требуемой мере сходна со структурой оригинала, и исследование этой модели для определения характеристик структуры оригинала, влияния структуры на функционирование оригинала и выявления наилучших с заданной точки зрения структур.

В основе структурного моделирования лежит сходство, подобие структур модели и исследуемой системы.

К основным задачам структурного моделирования относятся:

- установление структуры исследуемой системы;
- определение степени влияния структуры и параметров исследуемой системы на ее поведение (функционирование);
- оценивание качества структуры;
- определение наилучшей по заданному критерию структуры и совокупности параметров системы.

При структурном моделировании систем обычно используют три уровня описания связей между элементами.

На первом уровне, когда исходят лишь из наличия или отсутствия связей между элементами, моделями структур систем обычно служат неориентированные графы. На втором уровне, когда дополнительно учитывается направление связей, в качестве структурных моделей применяют ориентированные графы и структурные схемы. На третьем уровне, когда, кроме того, учитывается вид и направление сигналов, в качестве моделей чаще всего используют структурные схемы и ориентированные взвешенные графы.

Построение структурных схем сложных систем осуществляется с использованием графов, поэтому графы составляют основу аппарата формализованного описания структур систем. Так как графы нашли широкое применение в структурном моделировании, то рассмотрим основные положения теории графов, необходимые при решении задач структурного анализа и синтеза систем.

Определение 6.1. Граф G – пара множеств $\langle X, U \rangle$, состоящая из множества X и подмножества U прямого произведения множества X самого на себя, т.е. $G = \langle X, U \rangle$, где $U \subset X \times X$.

Граф называется конечным, если множества X и U конечны, и бесконечным – в противном случае. Элементы x множества X называются вершинами графа, а само множество X – множеством вершин графа.

Элементы $\langle x, y \rangle$ множества U , где $x \in X$, $y \in Y$, называются дугами, а само множество U – множеством дуг графа.

Говорят, что дуга $\langle x, y \rangle$ исходит из вершины x и заходит в вершину y .

Вершины x и y дуги $\langle x, y \rangle$ называются концевыми вершинами этой дуги, при этом вершина x называется начальной, а вершина y – конечной вершиной этой же дуги.

Определение 6.2. Дуга и вершина графа называются инцидентными, если вершина является концевой для данной дуги.

Это означает, что дуга $\langle x, y \rangle$ инцидентна вершинам x и y , а вершины x и y инцидентны дуге $\langle x, y \rangle$.

Определение 6.3. Вершина графа, не инцидентная никакой дуге, называется изолированной.

Определение 6.4. Дуги графа, имеющие общую начальную и общую конечную вершины, называются кратными дугами.

Определение 6.5. Дуга графа, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называется петлей.

Определение 6.6. Две вершины графа называются смежными, если существует хотя бы одна дуга, инцидентная им обеим.

В графе две вершины смежные, если для какой-либо из дуг графа они являются концевыми.

Определение 6.7. Две дуги графа называются смежными, если существует хотя бы одна вершина, инцидентная им обеим.

В графе дуги будут смежными, если существует общая концевая вершина для этих дуг.

Граф может быть задан следующими тремя способами: аналитическим, геометрическим и матричным.

Аналитический способ задания графов

Говорят, что граф $G = \langle X, U \rangle$ задан аналитически, если задано множество X и соответствие $\Gamma = \langle X, X, U \rangle$, для которого множество U является графиком, т.е. $U \subset X \times X$.

Соответствие, определяющее граф, может быть задано различным образом, что обуславливает разные формы аналитического задания графа. Так, например, соответствие Γ может задаваться множеством $\Gamma_{(x)}$ образов для каждого элемента x множества X . Тогда граф будет задан в виде, приведенном в примере 2.1.

Пример 6.1

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

$$\tilde{A}(x_1) = \{x_1, x_3, x_5\}, \tilde{A}(x_2) = \emptyset, \tilde{A}(x_3) = \{x_1, x_2, x_5\}, \tilde{A}(x_4) = \{x_1\},$$

$$\tilde{A}(x_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Граф может быть задан также путем перечисления всех элементов множества X и множества U так, как приведено в примере 6.2.

Пример 6.2

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

$U = \{\langle x_1, x_1 \rangle, \langle x_1, x_3 \rangle, \langle x_1, x_5 \rangle, \langle x_3, x_1 \rangle, \langle x_3, x_2 \rangle, \langle x_3, x_5 \rangle, \langle x_4, x_1 \rangle, \langle x_5, x_1 \rangle, \langle x_5, x_2 \rangle, \langle x_5, x_3 \rangle, \langle x_5, x_4 \rangle, \langle x_5, x_5 \rangle\}$

В примерах 2.1. и 2.1. задан один и тот же граф.

Геометрический способ задания графов

При геометрическом способе задания графа множеству X ставится в соответствие множество точек некоторого подпространства (чаще плоскости). Эти точки являются вершинами графа. Каждую вершину $x_j \in X$ соединяют линиями со стрелками на конце с вершинами $x_i \in X$, которые являются образами вершины x_j , т.е. для которых выполнено условие: $x_j \in \tilde{A}(x_i)$.

Стрелки на концах линий направляют от вершины x_j к вершинам $x_i \in \tilde{A}(x_j)$.

В результате получают геометрическое представление графа, называемое диаграммой графа.

Диаграмма графа, приведенного в примерах 6.1 и 6.2, представлена на рис. 6.1.

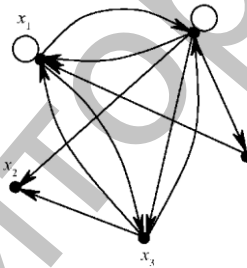


Рис. 6.1

Матричный способ задания графов

Рассмотрим конечный граф $G = \langle X, U \rangle$, число вершин которого равно n , а число дуг – m .

Определение 6.8. Квадратная матрица $R = \|r_{ij}\|_n^n$ размерности $n \times n$, каждой строке и каждому столбцу которой сопоставлены вершины x_i , $i = 1(1)n$ графа G , а элементы r_{ij} которой равны 1, если граф имеет дугу, исходящую из вершины x_i и заходящую в вершину x_j и 0, если такой дуги в графе нет, т.е.

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x_i, x_j \rangle \in U; \\ 0, & \text{если } \langle x_i, x_j \rangle \notin U, \end{cases}$$

называется матрицей смежности вершин этого графа.

Если граф имеет кратные дуги, то элемент r_{ij} матрицы смежности равен числу дуг, исходящих из вершины x_i и заходящих в вершину x_j .

Для рассмотренного в примерах 6.1 и 6.2 графа матрица смежности имеет вид

$$R = \|r_{ij}\|_5^5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица инцидентности, как и матрица смежности, полностью определяет соответствующий граф. Все три рассмотренных способа задания графов являются эквивалентными. Геометрический способ обладает наибольшей наглядностью, матричный способ широко применяется при компьютерной обработке графов.

Приведем еще несколько понятий и определений, которые потребуются в дальнейшем.

Две дуги графа называются противоположно ориентированными, если для каждой из них начальная вершина одной дуги является конечной вершиной другой дуги, а сами дуги считаются эквивалентными (с точностью до ориентации дуг).

Каждой паре противоположно ориентированных дуг графа можно сопоставить неупорядоченный элемент (x_i, x_j) , составленный из концевых вершин сопоставляемой пары дуг и называемый ребром графа. Неупорядоченность ребра означает, что любая его концевая вершина может быть принята за начальную, тогда другая концевая вершина будет конечной, и наоборот. Поэтому понятия начальной и конечной вершин для ребра не определяются, а само ребро рассматривается как неориентированная дуга. С другой стороны, возможен подход, при котором дугу рассматривают как ориентированное ребро, для которого определены начальная и конечная вершины.

Каждому ребру графа, в свою очередь, можно сопоставить пару противоположно ориентированных дуг. Следовательно, между такими парами дуг и сопоставляемыми ребрами существует взаимно однозначное соответствие, и поэтому любую пару противоположно ориентированных дуг в графе можно заменить соответствующим ребром, и наоборот. Петли в графе всегда считаются ребрами.

Геометрически ребро графа изображается ненаправленным (неориентированным) отрезком, соединяющим две вершины. Диаграмма графа, рассмотренного в примерах 6.1 и 6.2, после замены соответствующих пар дуг эквивалентными им ребрами приведена на рис. 6.2.

Определение 6.10. Граф $G = \langle X, U \rangle$, множество U которого содержит только дуги, называется ориентированным графом (орграфом).

Определение 6.11. Граф в примерах 2.1.1 и 2.1.2, после замены $G = \langle X, U \rangle$, множество U которого содержит только ребра, называется неориентированным графом.

Определение 6.12. Граф $G = \langle X, U \rangle$, множество U которого содержит как ребра, так и дуги, называется смешанным графом.

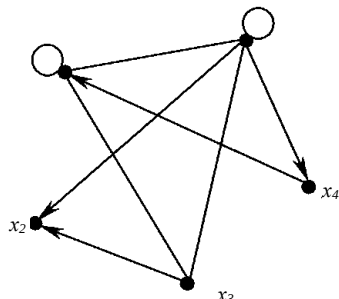


Рис. 6.2. Диаграмма графа, приведенного в примерах 2.1.1 и 2.1.2, после замены пар дуг ребрами

Матричное представление неориентированных графов имеет свои особенности. Элемент матрицы смежности неориентированного графа равен 1, если в графе существует ребро, соединяющее вершины, соответствующие строке и столбцу, и 0, если такого ребра не существует. Элементы матрицы инцидентности такого графа равны 1, если вершина, соответствующая строке, инцидентна ребру, соответствующему столбцу, и 0, если соответствующие вершина и ребро не инцидентны. Поэтому матрицы смежности ориентированных и неориентированных графов совпадают по внешнему виду, так как содержат только нули и единицы, а матрицы инцидентности оказываются различными, так как элементами такой матрицы ориентированного графа являются элементы множества $\{-1, 0, +1\}$, а неориентированного графа – элементы множества $\{0, 1\}$.

Для неориентированного графа с кратными дугами элемент матрицы смежности равен числу ребер, соединяющих соответствующие вершины.

Определение 6.13. Граф называется полным, если для любой пары его вершин существует дуга, соединяющая их. На рис. 6.3, а изображен полный орграф, а на рис. 6.3, б – полный неориентированный граф; рис. 6.2 соответствует смешанному графу.

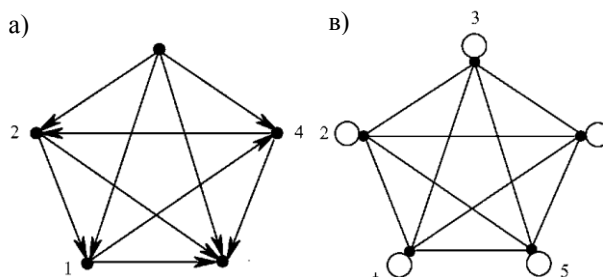


Рис. 6.3. Диаграммы графов: а – полный орграф; б – полный неориентированный граф

Определение 6.14. Граф $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ называется частью графа $G = \langle X, U \rangle$, если $X_1 \subset X$, а $U_1 \subset U$. Часть графа получают из графа путем исключения вершин и дуг.

Определение 6.15. Граф $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ называется подграфом графа $G = \langle X, U \rangle$, если $X_1 \subset X$, а $U_1 = U \cap (X_1 \times X_1)$.

Подграф получают из графа путем исключения вершин и дуг, инцидентных исключенным вершинам.

Определение 6.16. Граф $G_1 = \langle X_1, U_1 \rangle$ называется суграфом (остовным графом) графа $G = \langle X, U \rangle$, если $X_1 = X$, а $U_1 \subset U$. Суграф получают из графа путем удаления части дуг (рис. 6.4).

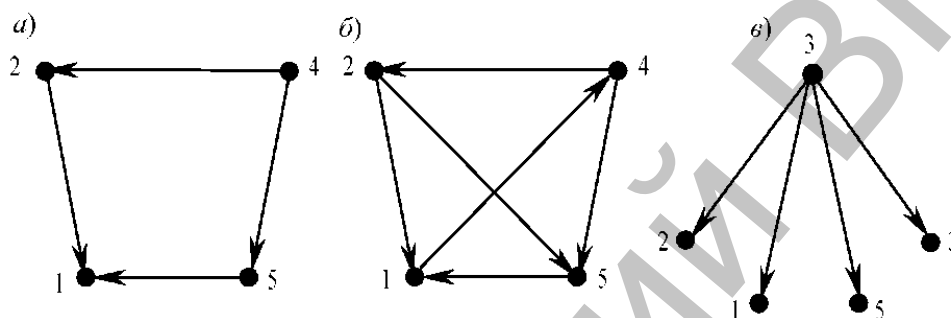


Рис. 6.4. Виды графа, приведенного на рис. 2.1.3, а: а – часть графа; б – подграф; в – суграф

Определение 6.17. Граф называется планарным, если можно построить такую его диаграмму в двумерном пространстве (на плоскости, сфере), что любая точка, принадлежащая двум и более дугам графа, не является внутренней точкой никакой дуги этого графа.

Такая диаграмма называется геометрической реализацией графа.

На геометрической реализации графа общими точками дуг могут быть только вершины, т.е. дуги графа при таком геометрическом представлении не пересекаются.

Не всякий граф является планарным. Для того, чтобы конечный граф имел геометрическую реализацию (был планарным), необходимо и достаточно, чтобы он не имел частей вида, приведенных на рис. 6.5.

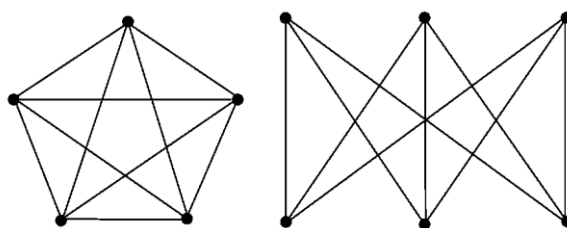


Рис. 6.5. Части графа, при наличии которых граф не является планарным

Определение 6.18. Графом со взвешенными дугами называется граф, дугам которого сопоставлены числа.

Определение 6.19. Графом со взвешенными вершинами называется граф, вершинам которого сопоставлены числа.

Определение 6.20. Взвешенным графом называется граф со взвешенными вершинами и дугами.

Определение 6.21. Путем в графе называется такая последовательность дуг, в которой каждая последующая дуга исходит из вершины, в которую заходит предыдущая.

Определение 6.22. Путь называется простым, если в нем никакая дуга не встречается более одного раза.

Определение 6.23. Путь называется элементарным, если в нем никакая вершина не встречается более одного раза.

Определение 6.24. Путь называется контуром, если начальная вершина первой дуги пути является конечной вершиной последней дуги пути.

Определение 6.25. Полустепенью исхода вершины графа называется число исходящих из нее дуг.

Определение 6.26. Полустепенью захода вершины графа называется число заходящих в нее дуг.

Определение 6.27. Степенью вершины графа называется число дуг, инцидентных этой вершине (число исходящих из нее и заходящих в нее дуг).

Определение 6.28. Маршрутом в неориентированном графе называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую концевую точку (являются смежными два соседних ребра).

Определение 6.29. Маршрут называется циклом, если первое и последнее ребро маршрута имеют общую концевую точку.

Понятия простого и элементарного маршрутов вводятся аналогично понятиям простого и элементарного путей. Путь можно рассматривать как маршрут, если не учитывать ориентацию дуг пути.

Определение 6.30. Длиной пути (маршрута) называется число дуг (ребер), входящих в него.

Определение 6.31. Две вершины графа называются связанными, если существует путь между ними.

Определение 6.32. Граф называется связным, если любые две его вершины связаны.

В приведенных выше определениях формулируются основные понятия теории графов, используемые при структурном моделировании. По мере необходимости эти определения будут дополняться в процессе дальнейшего изложения материала.

ТЕМА 7. МЕТОДЫ ФОРМАЛИЗОВАННОГО ОПИСАНИЯ СТРУКТУР

Среди существующих методов описания структур кибернетических систем можно выделить две группы методов, широко применяемых в настоящее время: основанные на использовании структурных схем и на теории графов.

Структурная схема системы определяет основные функциональные части системы, их назначение и взаимосвязи. Выделяемые в системе функциональные части называются блоками. Под блоком обычно понимают устройство, функционально законченное и оформленное в виде отдельного целого. Однако, исходя из требуемой степени детализации описания структуры, наглядности отображения в ней особенностей процессов функционирования, обусловленных структурой системы, в качестве блоков могут выделяться части устройств, входящих в систему, либо совокупность устройств, которые не представляют в системе отдельного целого устройства или узла.

Основными принципами выделения блоков при составлении структурных схем являются возможность функционального описания блока и однонаправленность его действия. Однонаправленность блока означает, что он осуществляет преобразование входа в выход и, следовательно, оказывает воздействие на блоки, подключенные к его выходу своими входами, и не влияет на блоки, подключенные ко входу.

Методика описания системы с помощью структурных схем состоит в следующем.

Система разбивается на блоки, которые изображаются в виде условных символов (прямоугольников или других графических изображений) с обозначением роли элемента в системе.

Информационные, материальные, энергетические связи, учет которых необходим при исследовании системы, изображаются в виде линий между элементами, для которых эти связи существуют.

Отношения между блоками определяются:

- обозначением направленности процессов в системе с помощью стрелок на линиях связи;
- описанием правил функционирования каждого блока;
- описанием правил функционирования подсистем и системы в целом.

На рис. 7.1 приведены структурные схемы основных типовых структур.

Структурные схемы наглядны и дают возможность судить о структурных свойствах системы. Кроме того, структурные схе-

мы легко поддаются уточнению и конкретизации, в ходе которой не надо изменять всю схему, а достаточно заменить отдельные ее элементы структурными схемами, включающими не один, как раньше, а несколько взаимодействующих блоков. Поэтому структурные схемы находят широкое применение, особенно при описании структур технических систем.

Однако структурная схема – это еще не математическая модель структуры. Она с трудом поддается формализации и является скорее естественным промежуточным звеном между содержательным описанием структуры системы и ее математической моделью. Поэтому структурные схемы не позволяют широко применять математические методы для исследования структур. От этого недостатка свободна вторая группа методов, в основе которых лежит описание структур с помощью теории графов.

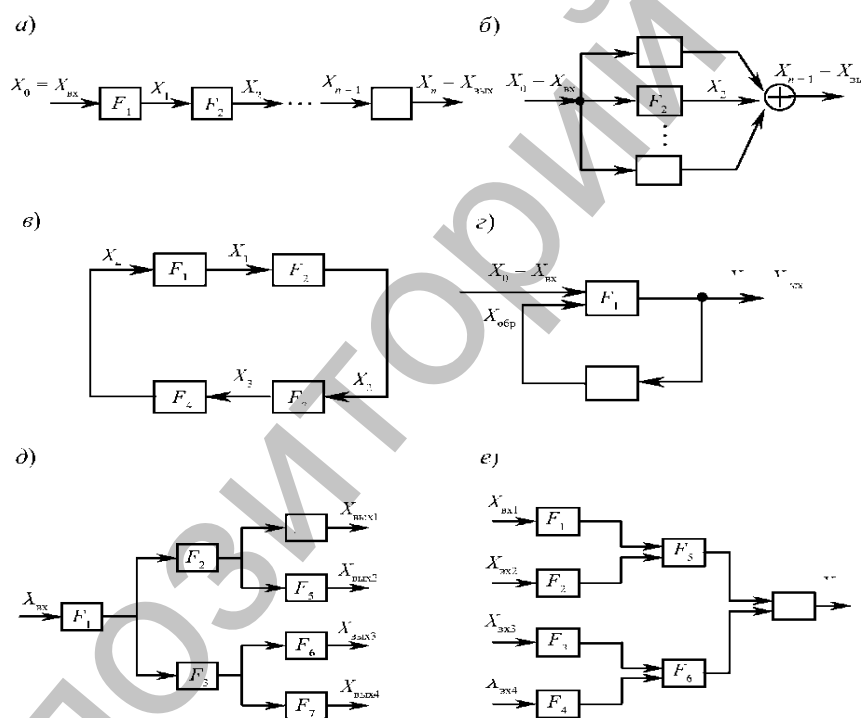


Рис. 7.1. Структурные схемы типовых структур: а – линейная (последовательная) структура; б – параллельная структура; в – кольцевая структура; г – структура с обратной связью; д – расходящаяся структура; е – сходящаяся структура

Методика построения модели структуры системы в виде графа достаточно проста и состоит в следующем:

1. Элементам системы ставят в соответствие вершины графа

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

2. Связям между элементами ставят в соответствие дуги графа

$$U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}.$$

В результате получают граф, отражающий структуру системы и называемый вершинным графом.

В другом случае элементам системы сопоставляются дуги, а связям между элементами – вершины графа. Получаемый граф называется реберным графом.

Построение вершинного графа, особенно при наличии структурной схемы системы, довольно просто, так как для этого достаточно установить перечень элементов системы, связи между ними и составить матрицу смежности вершин. Построение реберного графа, эквивалентного вершинному, значительно сложнее. В то же время модели систем, представленные в виде вершинных графов, обладают тем недостатком, что физическое содержание отдельных элементов и логические условия их реализации объединены в одних и тех же элементах графа – его вершинах. Это чрезвычайно затрудняет исследование, делая его индивидуальным для каждой структуры, представленной вершинным графом.

Реберные графы дают возможность сопоставить физические свойства элементов дугам графа, а логические условия их осуществления – вершинам. Это позволяет разработать полностью формализованные методы исследования структур, описания которых могут включать любые логические функции.

В теории графов известны две классические задачи: задача Эйлера, состоящая в отыскании простых маршрутов, проходящих через все ребра графа, и задача Гамильтона, состоящая в отыскании элементарных маршрутов, проходящих через все вершины графа. Маршруты, удовлетворяющие условиям задачи Эйлера, называются эйлеровыми маршрутами (путями), а условиям задачи Гамильтона – гамильтоновыми маршрутами (путями).

Задачу Эйлера можно рассматривать как задачу упорядочения ребер, а задачу Гамильтона – как задачу упорядочения вершин графа. Несмотря на сходство формулировок, эти задачи имеют различную степень сложности. Доказанные Эйлером теоремы позволяют однозначно по виду графа решать вопрос о существовании эйлеровых путей. Для гамильтоновых путей такого критерия не существует.

Поэтому, с одной стороны, для сложных систем относительно просто можно построить вершинный граф, задав, например, матрицу смежности вершин. С другой стороны, проще исследуется реберный граф. Возникшее противоречие может быть разрешено путем эквивалентного преобразования вершинного графа в реберный. Основанием такого преобразования служит теорема об условиях эквивалентности матриц смежности вершинного и реберного графов.

Методика, обеспечивающая выполнение условий эквивалентности при преобразовании вершинного ориентированного графа без кратных дуг в реберный граф, включает в себя три этапа:

1-й. Построение квазиканонической матрицы смежности реберного графа

На данном этапе матрица смежности вершинного графа путем расширения и преобразования элементов матрицы с помощью построения двух вспомогательных матриц на каждой из последовательно проводимых итераций постепенно преобразуется в квазиканоническую матрицу смежности реберного графа, эквивалентного исходному вершинному.

2-й. Нумерация вершин реберного графа

На этом этапе нумеруются вершины реберного графа и между ними распределяются дуги, соответствующие вершинам исходного графа.

3-й. Построение диаграмм реберного графа

По заполненной таблице дуг строят диаграмму реберного графа, эквивалентного исходному вершинному. Дуги, соответствующие вершинам исходного графа, изображают сплошными линиями, исходящими из начальных вершин и заходящими в конечные вершины, а фиктивные дуги – штриховыми линиями. Направленность дуги отображается стрелками у конечных вершин. Если есть необходимость, то проводят эквивалентные преобразования построенного графа к более наглядному и удобному для последующего использования виду. На этом построение реберного графа, эквивалентного исходному вершинному графу, заканчивается.

Рассмотрим применение изложенной методики на примерах.

Пример 7.1. Пусть диаграмма исходного вершинного графа имеет вид, представленный на рис. 7.2.

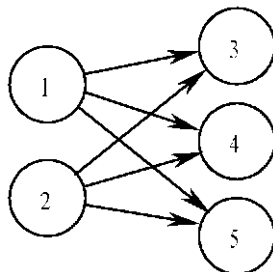


Рис. 7.2.

Требуется построить эквивалентный ему реберный граф.

Решение. Матрица смежности исходного графа имеет вид:

$$R_{[5]} = \|r_{ij}\|_5^5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Здесь и в дальнейшем пустые клетки матрицы соответствуют нулевым элементам.

1-й этап. Нумерация вершин реберного графа

1-й шаг. В матрице R имеется более одного (два) пустого столбца, следовательно, дополняем матрицу столбцом слева и строкой сверху. Присваиваем дополнительному столбцу и строке номер 6 и в дополнительной строке в столбцах 1 и 2 проставляем единицы.

	6	1	2	3	4	5	7	
6		1	1					<i>a</i>
1				1	1	1		<i>b</i>
2				1	1	1		<i>b</i>
$R_q = 3$							1	<i>c</i>
4							1	<i>c</i>
5							1	<i>c</i>
7								<i>d</i>
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

N_b	$N_{нач}$	$N_{кон}$
6	<i>a</i>	<i>b</i>
1	<i>b</i>	<i>c</i>
2	<i>b</i>	<i>c</i>
3	<i>c</i>	<i>d</i>
4	<i>c</i>	<i>d</i>
5	<i>c</i>	<i>d</i>
7	<i>d</i>	—

2-й шаг. В матрице R имеется более одной (три) пустой строки. Поэтому дополняем матрицу справа и снизу столбцом и строкой, присваиваем им 7, а в дополнительном столбце в строках 3, 4, 5 проставляем единицы. Справа от матрицы R_q строим таблицу начальных и конечных вершин дуг реберного графа, заполняя сразу столбец N_b каждой строки.

3-й шаг. Пустому столбцу 6 матрицы R_q присваиваем индекс «а». Этот же индекс присваиваем строке 6 и проставляем в столбце $N_{нач}$ в строке, соответствующей строке 6 матрицы R. Следующему столбцу 1 присваиваем индекс «b», который проставляется против строки 1 и в соответствующую строку столбца $N_{нач}$ таблицы.

4-й шаг. Просматривая столбец 1, находим единицу в строке 6 и вычеркиваем ее, а также единицу на пересечении этой строки и столбца 2. Столбец 2 оказывается после этого пустым, поэтому присваиваем ему, а также строке 2 индекс «b». Этот же индекс заносим в соответствующую строку столбца $N_{нач}$ таблицы дуг.

5-й шаг. Присваиваем индекс «с» столбцу 3 и строке с тем же номером. Заносим индекс «с» в соответствующую строку

столбца $N_{нач}$ таблицы. Просматриваем столбец с индексом «с» матрицы R_q . Первый единичный элемент находится на пересечении этого столбца со строкой 1. Вычеркиваем все единицы в строке 1. Второй единичный элемент находится на пересечении столбца со строкой 2. Вычеркиваем все единицы этой строки. Столбцы 4 и 5 после этого оказываются пустыми. Поэтому присваиваем им, а также строкам 4 и 5 индекс «с», помещая его на соответствующие места в столбце $N_{нач}$ таблицы.

6-й шаг. Присваиваем индекс «d» последнему составляющему столбцу 7, строке 7 и заносим его в столбец $N_{нач}$ таблицы.

На этом нумерация столбцов, а следовательно, и вершин реберного графа заканчивается.

7-й шаг. Заполняем столбец $N_{кон}$ таблицы следующим образом. В столбцах «b» матрицы R единицы находятся только в строке «a», поэтому в столбец $N_{кон}$ заносим индекс «b» в строку, которая содержит индекс «a» в столбце $N_{нач}$. Столбцы «с» матрицы содержат единицы только в строках «b», поэтому заносим индекс «с» в соответствующие строки столбца $N_{кон}$ таблицы. Столбец «d» содержит единицы в строках «с», поэтому индекс «d» проставляется в соответствующих строках столбца $N_{кон}$ таблицы, а в пустой строке столбца $N_{кон}$ ставим прочерк.

На этом заполнение таблицы заканчивается. В результате имеем таблицу дуг реберного графа, заданных своими начальными и конечными вершинами. Первоначальные номера строк матрицы R , занесенные в столбец N_b таблицы, позволяют сопоставить дуги реберного графа вершинам исходного графа. В нашем случае первоначальный номер строки соответствует номеру вершины исходного графа.

2-й этап. Построение диаграммы реберного графа

По таблице дуг реберного графа строим диаграмму этого графа (рис. 7.3).

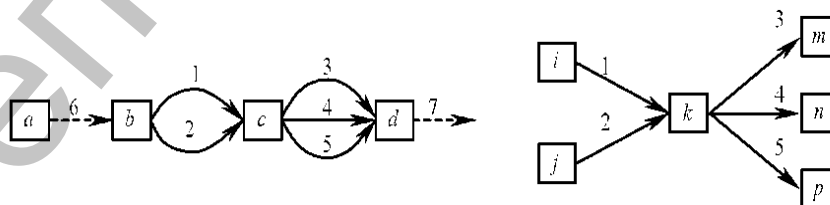


Рис. 7.3. Эквивалентные диаграммы реберного графа

В литературе по теории графов можно встретить следующее определение реберного графа, которое применяется к неориентированному графу.

Реберным (смежностным) графом или графом смежности ребер для исходного графа называется граф, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены ребрам исходного графа, при-

чем две вершины реберного графа имеют общие ребра в том и только в том случае, если соответствующие им ребра исходного графа имеют общую вершину.

Матрица смежности вершин такого графа совпадает с матрицей смежности ребер исходного графа. В дальнейшем, чтобы не возникало путаницы и разночтения, для рассмотренного в замечании графа оставим только название смежностный, а понятие «реберный» будем использовать только в соответствии с определением, данным ранее.

Построение диаграммы смежностного графа по диаграмме исходного достаточно просто. На каждом ребре исходного графа выбирают фиксированную точку, например, середину. Фиксированные точки соединяют линиями в том и только в том случае, если соответствующие им ребра имеют общую вершину. В результате получают диаграмму смежностного графа, вершины которого изображены фиксированными точками, а ребра – соединяющими их линиями.

На рис. 7.4 приведены диаграммы исходного построенного указанным способом смежностного графа.

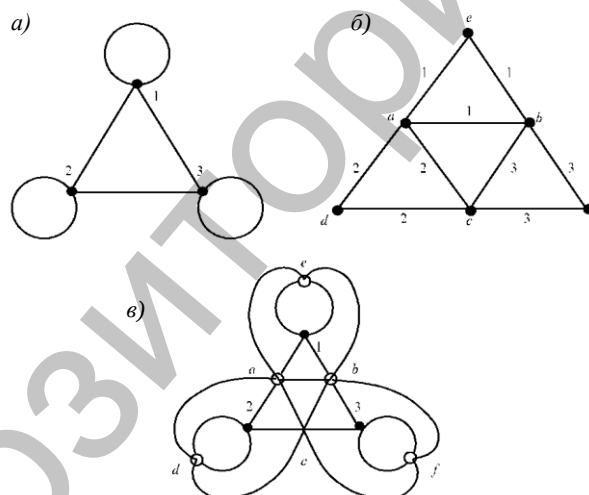


Рис. 7.4. Диаграммы графов: а – исходного; б – смежностного; в – иллюстрация метода преобразования

Графы являются математическими объектами, поэтому применение графов при моделировании структур систем позволяет широко привлекать математические методы для исследования структур и их свойств, в том числе с помощью ЭВМ. Построение графа требует минимальной информации о моделируемой структуре, что особенно ценно на начальных этапах разработки и исследования систем. Однако при этом следует иметь в виду, что анализ структурных свойств системы по графу неизбежно приобретает топологический характер, так как при этом выявляются и исследуются в основном наиболее общие топологические свойства и характеристики структуры.

ТЕМА 8. СТРУКТУРНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При исследовании структуры системы наибольший интерес представляют те свойства структуры, которые оказывают существенное влияние на эффективность функционирования и качество системы. Эти свойства описываются структурно-топологическими характеристиками системы, среди которых основными являются:

- наличие изолированных, висячих и тупиковых вершин;
- наличие петель и контуров;
- количество и состав связей между элементами;
- связность структуры;
- значимость элементов в структуре.

Перечисленные характеристики позволяют количественно оценить свойства структуры, выявить наличие непредусмотренных обрывов и тупиков, нежелательных связей в системе, распределение элементов в структуре, их значимость, а также ответить на вопрос, как удаление тех или иных элементов нарушает структуру системы.

Чаще всего в основе вычисления указанных характеристик лежит матричное представление графа структуры в виде матрицы смежности вершин. Рассмотрим данные структурно-топологические характеристики и некоторые способы их определения.

Изолированные, висячие и тупиковые вершины

При проведении структурно-топологического анализа в первую очередь определяют наличие в структуре изолированных, висячих и тупиковых вершин.

Определение 8.1. Вершина графа называется изолированной, если в графе не существует дуг, инцидентных этой вершине.

Определение 8.2. Вершина графа называется висячей, если для всех дуг графа, инцидентных данной вершине, она является начальной.

Определение 8.3. Вершина графа называется тупиковой, если для всех дуг графа, инцидентных данной вершине, она является конечной.

Введенные понятия иллюстрирует рис. 8.1. Граф, диаграмма которой представлена на рисунке, имеет изолированную вершину 7, висячую вершину 1 и тупиковую вершину 6.

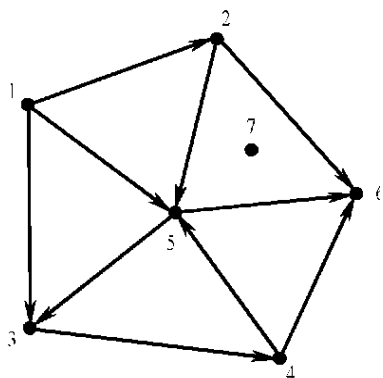


Рис. 8.1. Типы вершин графа

Наличие в графе изолированных вершин чаще всего свидетельствует об ошибках, допущенных при описании структуры системы или построении графа структуры. Такое заключение следует из определения системы как целого, состоящего из взаимосвязанных элементов.

Висячие вершины соответствуют входам системы, а тупиковые – ее выходам. Наличие лишних висячих или тупиковых вершин, как и их недостаток, по сравнению с количеством входов и выходов системы также говорит об ошибках в описании или моделировании структуры.

Выявить все изолированные, висячие и тупиковые вершины достаточно просто по матрице смежности вершин графа.

Пусть $R_{[n]}$ – матрица смежности вершин графа. Суммируя элементы r_{ij} матрицы по строкам, получают величины

$$r^{(j)} = \sum_{i=1}^n r_{ij}, \quad j = 1(1)n. \quad (8.1)$$

После суммирования элементов r_{ij} матрицы по столбцам получают величины

$$r_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}, \quad i = 1(1)n. \quad (8.2)$$

Если для некоторой k -й вершины графа обе величины $r^{(k)}$ и r_k , определяемые выражениями (8.1), (8.2), равны нулю, то эта вершина будет изолированной. Если только одна величина $r^{(k)} = 0$, то вершина будет висячей. Если только $r_k = 0$, то вершина будет тупиковой.

Поэтому просматривая матрицу смежности вершин графа, выявляют изолированные вершины, для которых соответствующие им строки и столбцы матрицы содержат только нулевые элементы, висячие вершины, для которых только соответствующие им столбцы не содержат ненулевых элементов, и тупиковые вершины, для которых только соответствующие им строки не содержат ненулевых элементов.

Матрица смежности графа, диаграмма которого приведена на рис. 8.1, имеет вид:

$$R_{[7]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Рис. 8.1

Анализ матрицы показывает, что в графе вершина 1 является висячей, вершина 6 – тупиковой, а вершина 7 – изолированной.

Петли и контуры

Петля в графе свидетельствует о наличии связи между входом и выходом одного и того же элемента системы, а контур – о наличии связи между входом и выходом некоторой совокупности последовательно связанных элементов. Существуют системы, в которых такие связи не допускаются. В таком случае наличие петель и контуров свидетельствует об ошибках в описании системы или построении графа ее структуры. В то же время некоторые системы по своей сути должны иметь петли или контуры, поэтому их отсутствие или невозможность правильной их интерпретации говорит о допущенных ошибках при моделировании.

Наличие петель и контуров можно выявить с помощью матрицы смежности. Если матрица $R_{[n]}$ смежности вершин графа содержит ненулевые элементы, расположенные на главной диагонали, то вершины графа, соответствующие этим элементам, имеют петли. Равенство нулю всех элементов матрицы смежности, расположенных на главной диагонали, свидетельствует об отсутствии петель в графе.

Наличие контуров в графе определяется следующим образом.

Рассмотрим матрицу $R_{[n]}$ смежности вершин графа. Если в ней имеются не равные нулю элементы главной диагонали, то приравняем их нулю. Полученную матрицу обозначим $Q_{[n]}$ и возведем в квадрат. При отсутствии ненулевых элементов главной диагонали в матрице смежности в качестве матрицы $Q_{[n]}$ выбираем ее саму. Элементы матрицы $Q_{[n]}^{(2)} = Q_{[n]}^2$ определяются по формуле

$$q_{ij}^{(2)} = \sum_{p=1}^n q_{ip} q_{jp}, \quad i = 1(1)n, j = 1(1)n. \quad (8.3)$$

Каждое слагаемое в выражении (2.3) не равно нулю в том и только том случае, когда оба сомножителя q_{ip} и q_{pj} не равны нулю. А это возможно только тогда, когда существует путь из вершины i в вершину j , состоящий из двух дуг и проходящий через вершину p . Таким образом, значение элемента q_{ij} матрицы $Q_{[n]}^{(2)}$ равно числу путей длины 2 (двухзвенных путей), ведущих из вершины i в вершину j . Следовательно, матрица $Q_{[n]}^{(2)}$ определяет число всех путей длины 2 в рассматриваемом графе. Не равные нулю элементы главной диагонали матриц $Q_{[n]}^{(2)}$, если они имеются, свидетельствуют о наличии двухзвенных контуров в графе.

В общем случае для выявления наличия контуров длины k необходимо вычислять матрицу

$$Q_{[n]}^{(k)} = Q_{[n]}^{(k-1)'} Q_{[n]}, \quad k = 2(1)n, \quad (8.4)$$

где $Q_{[n]}^{(1)'} = Q_{[n]}$ – матрица, полученная из матрицы $R_{[n]}$ смежности путем приравнивания к нулю ненулевых элементов ее главной диагонали.

Не равные нулю элементы главной диагонали матрицы $Q_{[n]}^{(k)}$ свидетельствуют о наличии контуров длины k в графе. При отсутствии таких элементов контуров длины k в графе нет.

Матрица $Q_{[n]}^{(k)}$ определяет число всех путей длины k в графе. Так как в графе с n вершинами самый длинный элементарный контур не может иметь длину больше n , то и количество операций вида (8.4) не превышает n .

Следует отметить, что если в графе с n вершинами отсутствуют петли и контуры, то максимальная длина элементарного пути в таком графе не превышает $n - 1$. Поэтому, начиная с некоторого $k \in [2(1)n]$, степени матрицы смежности будут представлять собой нулевые матрицы, т.е.

$$R_{[n]}^{(l)} = 0, \quad l = k(1)\infty, k \in [2(1)n] \quad (8.5)$$

Следовательно, выполнение соотношения (8.5) свидетельствует об отсутствии петель и контуров в графе. Если же при последовательном возведении матрицы смежности в степень появляются ненулевые элементы на ее главной диагонали, то это говорит о наличии контуров в графе.

Рассмотрим применение указанных выше правил анализа структур систем по графу на примерах.

Пример 8.1. Пусть диаграмма графа имеет вид, приведенный на рис. 8.2, а. Определить наличие изолированных, висячих,

тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

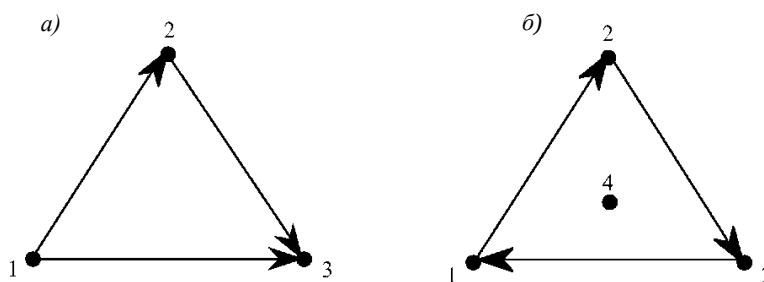


Рис. 8.2. Диаграммы графов для примеров: а – 2.3.1; б – 2.3.2

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид:

$$R_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}.$$

В матрице первый столбец и третья строка содержат только нули, следовательно, первая вершина в графе - висячая, а третья - тупиковая. Изолированных вершин нет. Так как главная диагональ матрицы содержит только нули, то петель в графе нет. Возведем матрицу смежности в квадрат.

$$R_{[3]}^{(2)} = R_{[3]}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица содержит только нули на главной диагонали, поэтому двухзвенных контуров в графе нет. Возведем матрицу смежности в куб.

$$R_{[3]}^{(3)} = R_{[3]}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в результате возведения матрицы смежности в куб получили нулевую матрицу, то контуров в графе нет. Полученные выводы легко проверяются по диаграмме графа.

Пример 8.2. Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 8.2, б. Определить наличие изолированных, висячих, тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид:

$$R_{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}.$$

В матрице только четвертый столбец и четвертая строка содержат одни нули, поэтому четвертая вершина в графе - изолированная, а висячих и тупиковых вершин нет.

На главной диагонали матрицы расположены только нулевые элементы, поэтому петель в графе нет.

Возведем матрицу смежности в квадрат.

$$R_{[4]}^2 = R_{[4]}^2 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы расположены только нулевые элементы, поэтому двухзвенных контуров в графе нет. Возведем матрицу смежности в куб.

$$R_{[4]}^{(3)} = R_{[4]}^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы стоят ненулевые элементы, поэтому в графе имеется трехзвенный контур, проходящий через первую, вторую и третью вершины графа. Других контуров в графе нет, так как четвертая вершина - изолированная.

Пример 8.3. Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 8.3. Определить наличие изолированных, висячих, тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

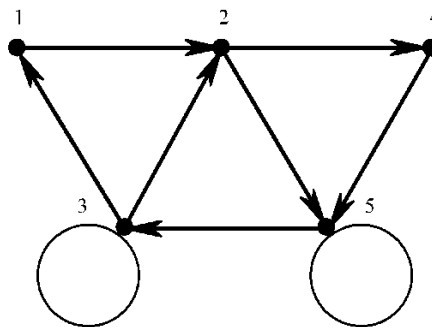


Рис. 8.3. Диаграмма графа для примера 8.3

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид:

$$R_{[5]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3. \\ 4 \\ 5 \end{matrix}.$$

На главной диагонали матрицы смежности расположены два ненулевых элемента: $r_{33} = 1$, $r_{55} = 1$. Следовательно, третья и пятая вершины графа имеют петли. Нулевых столбцов и строк в матрице нет, следовательно, граф не имеет висячих, тупиковых и изолированных вершин.

Получив матрицу путем приравнивания к нулю элементов r_{33} и r_{55} , возведем ее в квадрат.

$$Q_{[5]}^{(2)} = Q_{[5]}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы отсутствуют ненулевые элементы. Следовательно, двухзвенных контуров в графе нет. В соответствии с выражением (8.4) вычисляем матрицу:

$$Q_{[5]}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку на главной диагонали полученной матрицы стоят ненулевые элементы $q_{22}^{(3)} = 1$; $q_{33}^{(3)} = 1$ и $q_{55}^{(3)} = 1$, то в графе имеется трехзвенный контур, проходящий через вторую, третью

и пятую вершины графа. С помощью выражения (8.4) при $k = 4$ вычисляем матрицу $Q_{[5]}^{(4)}$

$$Q_{[5]}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Анализ элементов полученной матрицы, расположенных на главной диагонали, показывает, что в графе имеются два четырехзвенных контура, проходящих через первую, вторую, третью, пятую вершины и вторую, третью, четвертую и пятую вершины. Используя выражение (8.4) при $k = 5$, вычисляем матрицу $Q_{[5]}^{(5)}$

$$Q_{[5]}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Анализ элементов главной диагонали полученной матрицы показывает, что в графе имеется один пятизвенный контур, проходящий через все вершины. Других контуров, кроме выявленных, в графе нет, так как максимальная длина элементарного контура в графе с пятью вершинами не может быть более пяти.

ТЕМА 9. КОЛИЧЕСТВО И СОСТАВ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

Определение числа и состава связей между элементами системы является одной из основных задач структурного анализа. При описании структуры системы в виде графа решение этой задачи сводится к определению числа и состава элементарных путей в графе, что, в свою очередь, предполагает умение находить все элементарные пути, идущие из любой вершины исследуемого графа в любую другую его вершину.

Существует несколько способов решения данной задачи. Рассмотрим один из них, основанный на использовании алгебры квазиминов и применимый к ориентированным графам без петель и кратных дуг.

Определение 9.1. Квазимином элемента a_{kl} , $k \neq l$ матрицы $A_{[n]} = \|a_{ij}\|_n^n$ называют определитель особого рода (беззнаковый определитель) матрицы, получаемой из матрицы $A_{[n]}$ путем вычеркивания k -го столбца и l -й строки.

Квазимином элемента a_{kl} обозначают символом:

$$|a_{ij-lk}|_{kl}.$$

При этом знак $\| \|_{kl}$ является символом квазиминора, а знак a_{ij-lk} обозначает матрицу $A_{[n]} = \|a_{ij}\|_n^n$, полученную из матрицы $A_{[n]}$ путем вычеркивания l -й строки и k -го столбца, которая вписывается в символ квазиминора подобно матрице, вписываемой в символ обычного минора.

Квазимином $|a_{ij-lk}|_{kl}$ при $k \neq l$ может быть вычислен с помощью выражения:

$$|a_{ij-lk}|_{kl} = \sum_q a_{pq} A_{pq}^{(1)}, \quad (9.1)$$

где

$$A_{pq}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{при } q = l; \\ |a_{ij-lk-pq}|_{ql}, & \text{при } q \neq l; \end{cases}$$

$a_{ij-lk-pq}$ – символ матрицы, вписываемой в символ квазиминора $| |_{kl}$ и получаемой из матрицы квазиминора $|a_{ij-lk}|_{kl}$ путем вычеркивания p -й строки и q -го столбца.

Формула (9.1) сводит вычисление исходного квазиминора $|a_{ij-lk}|_{kl}$ к вычислению квазиминов меньшего порядка путем разложения его на эти квазимины. Процесс вычисления во многом

сходен с процессом вычисления обычных определителей и после приобретения практических навыков оказывается достаточно простым. Кроме того, данный процесс легко поддается алгоритмизации, а следовательно, и выполнению на ЭВМ.

Сущность рассматриваемого способа определения всех элементарных путей в графе состоит в том, что на основе матрицы смежности вершин графа строится матрица непосредственных путей, а по ней с помощью алгебры квазиминоров находится полная матрица путей.

Определение 9.2. Матрицей непосредственных путей графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу $U_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а элементы определяются по формуле:

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - \text{если данная дуга существует;} \\ 0 - \text{в противном случае, } i = 1(1)n, \quad j = 1(1)n. \end{cases}$$

Матрица непосредственных путей легко получается из матрицы смежности вершин, если в ней все элементы, не равные нулю, заменить соответствующими символами дуг.

Определение 9.3. Полной матрицей путей графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу $A_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а значение элементов a_{ij} , $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ равно числу всех элементарных путей из вершины x_i графа в вершину x_j .

Доказано, что число всех элементарных путей, ведущих из k -й вершины в l -ю, т.е. значение элемента a_{kl} полной матрицы путей $A_{[n]}$, равно значению квазиминора элемента u_{kl} матрицы непосредственных путей $U_{[n]}$:

$$a_{kl} = |u_{ij-lk}|_{kl}, \quad \text{если } k \neq l. \quad (9.2)$$

Элементы a_{kk} , $k = 1(1)n$ полной матрицы путей можно вычислить с помощью выражения

$$a_{kk} = |u_{ij}|_{kk}, \quad k = 1(1)n. \quad (9.3)$$

При этом в квазиминор вписывается вся матрица без вычеркивания столбцов и строк. Следует помнить, что для графа без петель и контуров элементы $a_{kk} = 0$, $k = 1(1)n$.

Порядок вычисления элементов a_{kj} полной матрицы путей следующий.

Пусть граф задан матрицей $R_{[n]}$ смежности вершин графа.

1-й этап. По матрице $R_{[n]}$ путем замены всех элементов, не равных нулю, на символы u_{ij} , $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ получают матрицу непосредственных путей $U_{[n]}$.

2-й этап. Применяя алгебру квазиминоров, вычисляют

элемент a_{kl} матрицы полных путей по формуле (9.2) либо (9.3) путем последовательного разложения исходного квазиминора на квазиминоры меньшего порядка по формуле (9.1) до тех пор, пока не получат обыкновенного алгебраического выражения, значение которого вычисляется стандартным способом. При этом индексацию столбцов и строк квазиминоров в процессе вычисления не изменяют.

Вычисление квазиминора (9.2) или (9.3) начинают с разложения его с помощью выражения (9.1) по элементам строки, которая соответствует исходной вершине искомым элементарным путям. Для элемента a_{kl} полной матрицы путей исходной вершиной будет вершина с индексом k . Следовательно, для $k \neq 1$ имеем

$$a_{kl} = |u_{ij-lk}|_{kl} = \sum_{q=1}^n |u_{kq}| U_{kq}^{(1)}, \quad (9.4)$$

где

$$|u_{kq}|, q = 1(1)n - \text{длина дуги } u_{kq};$$

$$U_{kq}^{(l)} = \begin{cases} 1, \text{ при } q = l, \\ |u_{ij-kl-kq}|_{ql}, \text{ при } q \neq l, q = 1(1)n. \end{cases}$$

Если $k = 1$, то:

$$a_{ll} = |u_{ij}|_{ll} = \sum_{l=1}^n |u_{lq}| U_{lq}^{(l)}. \quad (9.5)$$

Последующие разложения квазиминоров меньших порядков проводятся по элементам строк, соответствующих вершинам, в которые заходят дуги, по которым производилось предыдущее разложение, т.е. по элементам q -х строк.

При определении всех элементов полной матрицы путей второй этап выполняется для каждого элемента этой матрицы. Если же необходимо определить все элементарные пути только между некоторыми вершинами, то второй этап выполняется только для соответствующих элементов полной матрицы путей.

Пример 9.1. Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 9.1. Требуется построить полную матрицу путей графа.

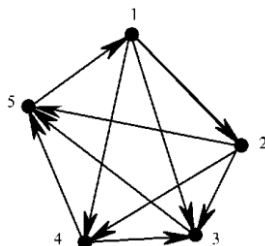


Рис. 9.1. Диаграмма графа для примера 9.1

Решение. По диаграмме графа составляем матрицу смежности вершин $R_{[5]}$, а затем и матрицу непосредственных путей $U_{[5]}$ графа

$$R_{[5]} = \|r_{ij}\|_5^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad (9.6)$$

$$U_{[5]} = \|u_{ij}\|_5^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 \\ 0 & 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Определение элементов полной матрицы путей начнем с элемента a_{11} . Так как элемент a_{11} расположен на главной диагонали матрицы непосредственных путей, то для его вычисления используем формулу (9.5):

$$a_{11} = |u_{ij}|_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 \\ 0 & 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad (9.7.)$$

Исходной вершиной является вершина с индексом 1, поэтому разложение квазиминора (9.7) будем вести по элементам первой строки в соответствии с выражением (9.1):

$$\begin{aligned} a_{11} = |u_{ij}|_{11} &= |u_{12}|u_{ij-12}|_{21} + |u_{13}|u_{ij-13}|_{31} + |u_{14}|u_{ij-14}|_{41} = \\ &= |u_{12}| \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} + |u_{13}| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} + \\ &+ |u_{14}| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & u_{23} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{43} & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{aligned}$$

Первый этап разложения соответствует выявлению всех путей единичной длины, исходящих из вершины 1. Дальнейшее разложение полученных квазиминоров выполняем по элементам строк, индексы которых совпадают с индексами вершин, в которые заходят выделенные дуги. Опуская общие выражения, получаемые при разложении квазиминоров, запишем:

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & \left| u_{12} u_{23} \right| \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 + \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{12} u_{24} \right| \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 + \\ 5 \end{matrix} \\
 & + \left| u_{12} u_{25} \right| \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{43} & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 + \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{13} u_{35} \right| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & u_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 + \\ 5 \end{matrix} \\
 & + \left| u_{14} u_{43} \right| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 + \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{14} u_{45} \right| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 = \\ 5 \end{matrix} \\
 = & \left| u_{12} u_{23} u_{35} \right| \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ u_{51} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{12} u_{24} u_{43} \right| \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & u_{35} \\ u_{51} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} + \\
 & + \left| u_{12} u_{24} u_{45} \right| \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ u_{51} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{12} u_{25} u_{51} \right| 1 + \left| u_{13} u_{35} u_{51} \right| 1 + \\
 & + \left| u_{14} u_{43} u_{35} \right| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ u_{51} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} + \left| u_{14} u_{45} u_{51} \right| 1 = \left| u_{12} u_{23} u_{35} u_{51} \right| 1 + \\
 & + \left| u_{12} u_{24} u_{43} u_{35} u_{51} \right| 1 + \left| u_{12} u_{24} u_{45} u_{51} \right| 1 + \left| u_{12} u_{25} u_{51} \right| + \left| u_{13} u_{35} u_{51} \right| + \\
 & + \left| u_{14} u_{43} u_{35} u_{51} \right| 1 + \left| u_{14} u_{45} u_{51} \right|.
 \end{aligned}$$

Последовательность этапов определения элемента a_{11} иллюстрируется рис. 9.2. На каждом этапе процесса последовательного разложения исходного квазиминора (9.7) в искомых путях выделяют очередные дуги, а в результате получают выражение (9.8), определяющее количество и состав всех элементарных путей, ведущих из первой в первую вершину:

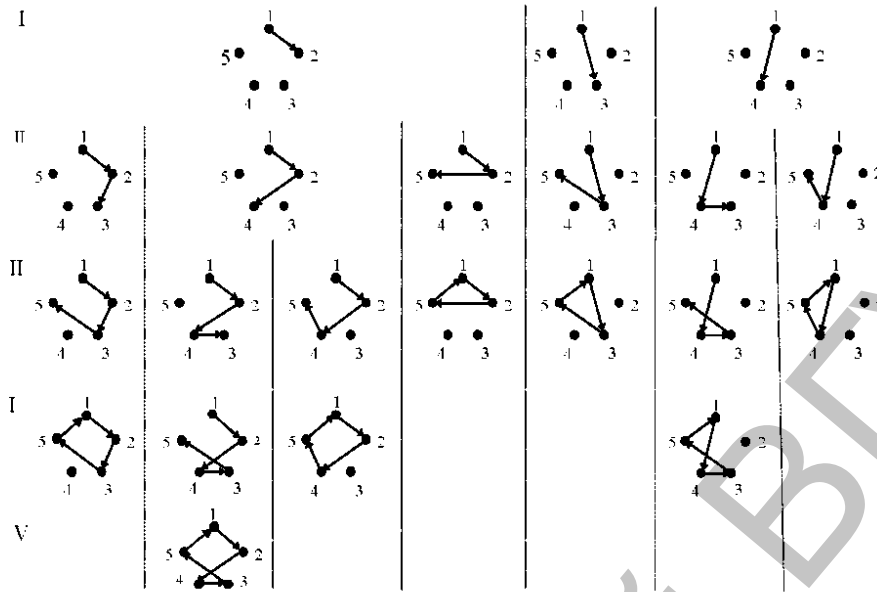


Рис. 9.2. Последовательность этапов определения состава и количества элементарных путей, ведущих из первой в первую вершину

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & |u_{12}u_{23}u_{35}u_{51}|1 + |u_{12}u_{24}u_{43}u_{35}u_{51}|1 + |u_{12}u_{24}u_{45}u_{51}|1 + \\
 & + |u_{12}u_{25}u_{51}| + |u_{13}u_{35}u_{51}| + \\
 & + |u_{14}u_{43}u_{35}u_{51}|1 + |u_{14}u_{45}u_{51}|.
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Подсчитывая количество путей в выражении (9.8), получаем $a_{11} = 7$. Далее производят вычисление остальных элементов полной матрицы путей.

Вычисление элементов матрицы, расположенных вне главной диагонали, рассмотрим на примере элемента a_{15} .

$$a_{15} = |u_{ij-51}|_{15} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 \\ 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}. \tag{9.9}$$

Выражение (9.9) получено из (9.6) после вычеркивания в матрице непосредственных путей пятой строки и первого столбца. В соответствии с выражением (9.1) производим последовательное разложение квазиминора (9.7), постепенно уменьшая порядок составляющих квазиминоров до тех пор, пока не получим выражение вида (9.6), в явном виде определяющее количество и состав всех элементарных путей, ведущих из первой в пятую вершину:

$$\begin{aligned}
a_{15} = |u_{ij-51}|_{15} = & |u_{12}| \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ u_{43} & 0 & u_{45} \end{vmatrix} 2 + |u_{13}| \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{45} \end{vmatrix} 2 + \\
& + |u_{14}| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & u_{23} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & u_{45} \end{vmatrix} 2 + |u_{12}u_{23}| \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & u_{35} \\ 0 & u_{45} \end{vmatrix} 3 + \\
& + |u_{12}u_{24}| \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & u_{35} \\ u_{43} & u_{45} \end{vmatrix} 3 + |u_{12}u_{25}| 1 + |u_{13}u_{35}| 1 + \\
& + |u_{14}u_{43}| \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & u_{25} \\ 0 & u_{35} \end{vmatrix} 2 + |u_{14}u_{45}| 1 + |u_{12}u_{23}u_{35}| 1 + \\
& + |u_{12}u_{24}u_{43}u_{35}| 1 + |u_{12}u_{24}u_{45}| 1 + |u_{12}u_{25}| + |u_{13}u_{35}| + \\
& + |u_{14}u_{43}u_{35}| + |u_{14}u_{45}|.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

В результате получаем $a_{15} = 7$.

После проведения всех вычислений получаем матрицу полных путей графа:

$$A_{[5]} = \|a_{ij}\|_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \tag{9.11}$$

При анализе путей в графе чаще всего определяются: вершины, входящие в путь; пути, длина которых удовлетворяет определенному требованию.

Первая задача может быть решена как задача перечисления совпадающих символов дуг, входящих в путь, а также символов начала и конца пути. Для путей, ведущих из первой в пятую вершину, из выражения (9.10) можно получить следующие перечисления:

$$\begin{aligned}
& \langle x_1, x_2, x_3, x_5 \rangle, \langle x_1, x_2, x_4, x_3, x_5 \rangle, \langle x_1, x_2, x_4, x_5 \rangle, \langle x_1, x_2, x_5 \rangle, \\
& \langle x_1, x_3, x_5 \rangle, \langle x_1, x_4, x_3, x_5 \rangle, \langle x_1, x_4, x_5 \rangle.
\end{aligned}$$

Вторая задача решается как задача определения длин путей и выбора из них таких, которые удовлетворяют заданному критерию.

Так, например, если надо выбрать максимальный путь из первой в пятую вершину, то таким будет путь $\langle u_{12}, u_{24}, u_{43}, u_{35} \rangle$, содержащий четыре дуги. Минимальных путей будет три, причем каждый из них содержит по две дуги: $\langle u_{12}, u_{25} \rangle$, $\langle u_{13}, u_{35} \rangle$, $\langle u_{14}, u_{45} \rangle$.

Связность структуры

Связность структуры при описании ее в виде графа характеризуется связностью графа. Ориентированный граф будет связным (слабо связным), если между двумя любыми его вершинами существует хотя бы один путь, и сильно связным (бисвязным), если из любой вершины графа существует путь в любую вершину графа. Таким образом, связность графа определяет возможность связи между его вершинами. Связность графа достаточно хорошо может быть описана с помощью полной матрицы связей.

Определение 9.4. Полной матрицей связи графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу вида:

$$\Gamma_n = \|\gamma_{ij}\|_n^n, \quad (9.12)$$

$$\text{где } \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в графе существует хотя бы один путь} \\ & \text{из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0 & - \text{в противном случае } i = 1(1)n, j = 1(1)n. \end{cases}$$

Полная матрица связи может быть легко определена по полной матрице путей на основе соотношения:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij} > 0; \\ 0, & \text{если } a_{ij} = 0, i = 1(1)n, j = 1(1)n. \end{cases} \quad (9.13)$$

Для графа, рассмотренного в примере 9.1, полная матрица связи, полученная из полной матрицы путей (9.10) с использованием выражения (9.11), имеет вид:

$$\Gamma_{[5]} = \|\gamma_{ij}\|_5^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}. \quad (9.14)$$

Анализ полной матрицы связей показывает, что в графе существуют пути из любой вершины в любую вершину, следовательно, данный граф является сильно связным.

Элементы полной матрицы связи могут быть определены также с помощью квазиминоров:

$$\gamma_{kl} = |u_{ij-lk}|_{kl}, \quad k = 1(1)n, l = 1(1)n,$$

если при их вычислении сложение понимать в булевом смысле (как логическое), т.е. предполагать, что:

$0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$, а длины дуг принимать равными единице.

Для вычисления полной матрицы связей ориентированного графа без петель и контуров можно использовать еще один достаточно простой способ, в основе которого положено определение матрицы $R_{[n]}^5$ по формуле:

$$R_{[n]}^s = \sum_{k=1}^n R_{[n]}^k, \quad (9.15)$$

где $R_{[n]}$ – матрица смежности вершин графа.

После вычисления матрицы R n полную матрицу связей получают на основе соотношения

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } r_{ij}^s > 0; \\ 0, & \text{если } r_{ij}^s = 0, i = 1(1)n, j = 1(1)n. \end{cases} \quad (9.16)$$

Анализ связности графа позволяет выявить наличие обрывов или отсутствие необходимых связей в системе, а также наиболее уязвимые связи и элементы, удаление которых может привести к распаду системы на отдельные, не связанные между собой подсистемы.

Методы теории графов позволяют определять и такую структурную характеристику системы, как значимость элемента в ее структуре. Естественно предположить, что чем больше связей имеет элемент с другими элементами системы, тем большую роль при прочих равных условиях он может играть в системе.

Количественно значимость элемента в структуре оценивают с помощью ранга или веса элемента. Как ранг, так и вес элемента определяется количеством связей элемента в графе. При этом, чем больше связей имеет элемент, тем выше его ранг и вес.

Ранги и веса элементов вычисляются различными способами. Если ранг и вес элемента оцениваются по числу элементарных путей, ведущих из соответствующей этому элементу вершины графа к другим вершинам, то для вычисления значений этих характеристик можно использовать полную матрицу путей.

При определении ранга элемента по полной матрице путей $A_{[n]}$ для каждой строки производят суммирование элементов этой строки по столбцам, получая величины:

$$s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1(1)n. \quad (9.17)$$

Затем производят ранжирование величин $s_i, i = 1(1)n$ и присвоение рангов элементов в порядке убывания ранжированных величин. При этом наивысший ранг присваивается элементу с наибольшим значением s_i , $I \in [1(1)n]$.

Вес элемента по полной матрице путей вычисляется по формуле:

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}, i = 1(1)n, \quad (9.18)$$

где $v_i, i = 1(1)n$ – вес i -го элемента системы, определяемый по полной матрице путей;

$a_{ij}, i = 1(1)n, j = 1(1)n$ – элементы полной матрицы путей. Аналогичным образом могут быть определены ранги и веса элементов с помощью полной матрицы связей. При этом используются формулы

$$s'_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}, i = 1(1)n. \quad (9.19)$$

$$v'_i = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}}, i = 1(1)n, \quad (9.20)$$

где, $V'_i, i = 1(1)n$ – вес i -го элемента системы, определяемый по полной матрице связей;

$\gamma_{ij}, i = 1(1)n, j = 1(1)n$ – элементы полной матрицы связей.

В случае ориентированного графа без петель и контуров при вычислении рангов и весов можно использовать матрицу, вычисляемую по формуле (9.15), при этом достаточно ограничиться вычислением первых трех-четырех членов суммы в выражении (9.15).

Пример 9.2. Задан граф, диаграмма которого приведена на рис. 9.3. Требуется определить ранги элементов системы, которым сопоставлены вершины графа.

Вариант 1. Для определения ранга элементов используем полную матрицу путей (9.10). С помощью выражения (9.16) получаем:

$$s_1 = 21, s_2 = 19, s_3 = 7, s_4 = 12, s_5 = 15.$$

Ранжируя данные величины в порядке убывания, имеем ряд элементов в порядке убывания рангов

$$X_1, X_2, X_5, X_4, X_3.$$

Если за наибольший ранг принять единицу, а последовательному уменьшению ранга сопоставить увеличение его значения на единицу, то в результате получим следующее распределение рангов по элементам:

Элемент	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ранг	1	2	5	4	3

Рис. 9.3

Вариант 2. Для определения ранга элементов используем полную матрицу связи (9.14).

В этом случае все суммы по строкам равны, следовательно, с помощью полной матрицы связи все элементы анализируемой системы по значимости в структуре не различимы, так как имеют одинаковые ранги.

Поскольку в рассматриваемом графе имеются контуры, то формула (9.15) для вычисления рангов элементов не применима.

При определении всех рассмотренных выше структурно-топологических характеристик учитывались только структурные свойства системы и совсем не использовались функциональные свойства всей системы и ее элементов. Однако этого оказалось достаточно для выработки определенных суждений о структуре и ее влиянии на функционирование системы. Поэтому структурный анализ оказывается особенно полезным на тех этапах жизненного цикла систем, когда отсутствует необходимая информация об их функционировании, например, на этапах разработки и проектирования.

Кроме того, структурное моделирование, а точнее моделирование структур в виде графов, оказалось весьма полезным при исследовании целенаправленных процессов, представляющих собой совокупность взаимосвязанных операций. Это привело к возникновению целого направления в структурном моделировании, а именно сетевого моделирования.

ТЕМА 10. СЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

10.1. НАЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ СЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сетевое моделирование относится к разновидности структурного моделирования, нашедшей широкое применение в тех случаях, когда моделируемый процесс представляет собой сложную систему, включающую большое количество операций с достаточно сложными взаимосвязями между ними. Такие процессы будем называть сложными процессами. Использование сетевых моделей при отображении структуры таких процессов позволило на основе учета особенностей отображаемой структуры разработать эффективные методы анализа и оптимизации сложных процессов.

Широкое распространение сетевого моделирования при решении практических задач управления обусловлено тем, что она позволяет реализовывать системный подход, применять математические методы и современную вычислительную технику при исследовании сложных процессов, повышать эффективность планирования и управления такими процессами.

Метод планирования и управления, в основу которого положено использование сетевой модели управляемого процесса, получил название сетевого планирования и управления.

Определение 10.1.1. Сетевое планирование и управление (СПУ) – это метод оперативного планирования и управления функционированием сложных систем, в котором с целью реализации системного подхода к организации управления процессами в таких системах для логико-математического описания управляемого процесса и алгоритмизации расчетов параметров этого процесса используется сетевая модель. Применение сетевого моделирования при планировании и управлении сложными процессами дает возможность решать следующие задачи.

Четко отобразить состав и структуру управляемого процесса, выявить с требуемой степенью детализации операции, составляющие моделируемый процесс, установить взаимосвязи между этими операциями, определить операции, которые необходимы для достижения поставленных частных и конечной целей, четко распределить обязанности между исполнителями операций, объективно необходимых для реализации управляемого процесса.

Широко использовать опыт и знания наиболее компетентных и подготовленных специалистов при составлении планов и

управлении сложными процессами. Вскрывать резервы сил, средств и времени, скрытые в нерациональной организации управляемого процесса, осуществлять контроль за ходом процесса сразу по нескольким направлениям, исключать из-под усиленного контроля те операции, которые не влияют на временные характеристики процесса, находить узкие места и своевременно преодолевать их.

Обеспечивать наглядное и удобное для восприятия отображение структуры управляемого процесса как в целом, так и по частям.

Обоснованно, с учетом фактического хода процесса, корректировать принятые управленческие решения, получать прогнозы на будущее, предвидеть возможные отклонения процесса от плана и те последствия, которые они окажут на протекание процесса в целом. Получать количественные оценки параметров управляемого процесса и степени неопределенности прогнозов его протекания.

Упростить внесение изменений, уточнений и дополнений в планы, обеспечивая тем самым гибкость и требуемую периодичность планирования, упростить систему отчетности, а также обеспечить быстрое включение в работу новых лиц и непрерывность управления при смене руководителей.

Сетевое планирование и управление реализуется системами СПУ, которые представляют собой автоматизированные кибернетические системы управления, в которых управляемой системой является коллектив исполнителей, располагающий определенными ресурсами и выполняющий комплекс операций, призванный обеспечить достижение намеченного конечного результата (цели), а управляющей системой – руководящая группа, которая осуществляет планирование и управление выполнением комплекса операций на основе его сетевой модели.

В основе сетевого моделирования лежит представление структуры управляемого процесса в виде специального графа, называемого сетевой моделью или сетью.

Определение 10.1.2. Сетевая модель (сеть) – это ориентированный граф без контуров и кратных дуг, элементам которого сопоставлены числа.

Если числа сопоставлены только вершинам графа, то сетевая модель представляет собой отмеченный граф, если числа сопоставлены только дугам, то – взвешенный граф. Сопоставление чисел элементам графа означает задание на графе некоторой функции. Поэтому можно дать другое эквивалентное определение сетевой модели.

Определение 10.1.3. **Сетевая модель (сеть)** – это ориентированный граф без контуров и кратных дуг с заданной на нем функцией.

Требование отсутствия в графе контуров и кратных дуг является несущественным. Однако выполнение этого требования облегчает исследование сетевой модели на ЭВМ и позволяет использовать разработанные в настоящее время программы вычисления параметров сетевой модели.

Диаграмма сетевой модели называется сетевым графиком. Основными элементами сетевой модели являются операции (работы) и события.

Операцией (работой) называется любое целенаправленное действие, приводящее к достижению определенных результатов. Операции по отношению к затратам средств и времени на их осуществление подразделяются на действительные и фиктивные.

Определение 10.1.4. **Действительная операция** – операция, на осуществление которой необходимо затратить время или ресурсы.

Определение 10.1.5. **Фиктивная операция** – операция, на осуществление которой не требуется никаких затрат. Фиктивная операция характеризует только связь между операциями, позволяя отразить порядок их следования с помощью сетевой модели.

Определение 10.1.6. **Событием** называется факт достижения требуемого результата. Событие не имеет продолжительности во времени. Оно свершается мгновенно, а его свершение лишь фиксирует момент окончания или начала одной или нескольких операций.

При сетевом моделировании сложных процессов важное значение имеет отношение предшествования или следования, определяемое для операций и событий. Для задания этого отношения введем следующие понятия.

Определение 10.1.7. **Операция, предшествующая данной операции**, – это операция, без выполнения которой не может быть начата данная операция.

Определение 10.1.8. **Операция, непосредственно предшествующая данной операции**, – это предшествующая данной операции операция, между окончанием которой и началом данной операции не требуется выполнения каких-либо других операций.

Определение 10.1.9. **Операция, последующая за данной операцией**, – это операция, до начала выполнения которой необходимо выполнить данную операцию.

Определение 10.1.10. **Операция, непосредственно последующая за данной операцией**, – это последующая для данной

операции операция, между началом которой и окончанием выполнения данной операции не требуется выполнения каких-либо других операций.

Определение 10.1.11. **Событие, предшествующее данному событию**, – это событие, свершение которого необходимо для свершения данного события.

Определение 10.1.12. **Событие, непосредственно предшествующее данному событию**, – это предшествующее для данного события событие, между свершением которого и свершением данного события не требуется свершения каких-либо других событий.

Определение 10.1.13. **Событие, последующее для данного события**, – это событие, для свершения которого необходимо свершение данного события.

Определение 10.1.14. **Событие, непосредственно последующее для данного события**, – это последующее для данного события событие, между свершением которого и свершением данного события не требуется свершения каких-либо других событий.

Аналогичным образом определяются операции, предшествующие, непосредственно предшествующие, последующие, непосредственно последующие для данного события, и события, предшествующие, непосредственно предшествующие, последующие и непосредственно последующие для данной операции.

Определение 10.1.15. **Начальное для данной операции событие**, – это событие, непосредственно предшествующее данной операции.

Определение 10.1.16. **Конечное для данной операции событие**, – это событие, непосредственно последующее для данной операции.

Определение 10.1.17. **Исходное событие**, – это событие, не имеющее предшествующих операций и событий.

С исходного события начинается выполнение моделируемого сетью комплекса операций, составляющего сложный процесс.

Определение 10.1.18. **Завершающее событие**, – это событие, не имеющее последующих операций и событий. Завершающим событием заканчивается выполнение моделируемого сетью комплекса операций, составляющих сложный процесс.

Определение 10.1.19. **Исходная операция**, – это операция, не имеющая предшествующих операций и событий.

Определение 10.1.20. **Завершающая операция** – операция, не имеющая последующих операций и событий.

Введенных понятий оказывается вполне достаточно для задания отношения предшествования или следования на моделируемом комплексе операций.

В зависимости от цели моделирования сетевые модели могут быть ориентированы либо на события, либо на операции, либо на операции и события. Сетевая модель, ориентированная на события, – это сеть, в которой вершинам сопоставлены события, а дугам – связи между ними. Сетевая модель, ориентированная на операции – это сеть, в которой вершинам сопоставлены операции, а дугам – связи между ними. Сетевая модель, ориентированная на операции и события, – это сеть, в которой вершинам сопоставлены события, а дугам – операции. Эти сетевые модели называют также моделями в терминах событий, операций, операций и событий соответственно.

На рис. 10.1.1 представлены сетевые графики сетевых моделей. Эти модели составлены для одного и того же комплекса операций, включающего 14 операций и одну логическую связь (15). Вершины графа изображаются на графике геометрическими фигурами, а дуги – сплошными и штриховыми стрелками. При этом вершины, сопоставленные событиям, обычно изображаются кружками, а сопоставленные операциям – квадратами или прямоугольниками. Номера вершин проставляются внутри соответствующих фигур. Связи между событиями в сетевой модели в терминах событий и действительные операции в сетевой модели в терминах операций и событий изображаются сплошными линиями со стрелками, фиктивные операции – штриховыми линиями со стрелками. Длительность операций на сетевом графике в терминах операций проставляются у вершин, а на сетевом графике в терминах операций и событий – под соответствующими дугами.

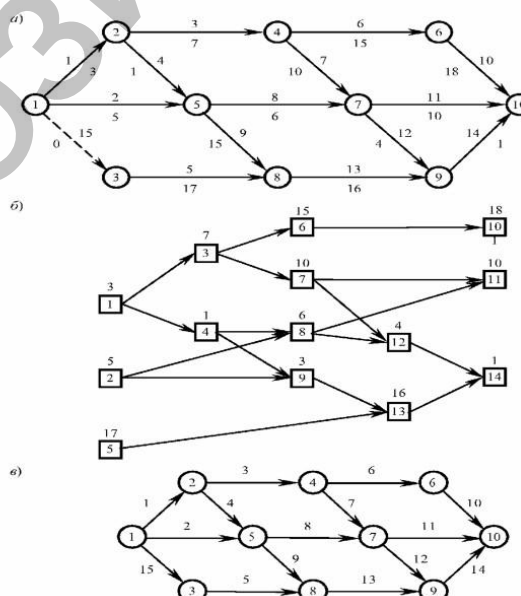


Рис. 10.1.1. Сетевые графики сетевых моделей, ориентированных на:
а – события, б – операции, в – операции и события

По количеству сетей, описывающих исследуемый комплекс операций, различают односетевые и многосетевые модели. По количеству конечных целей, для достижения которых осуществляется комплекс операций, сетевые модели подразделяются на одноцелевые (с одним завершающим событием) и многоцелевые (с несколькими завершающими событиями). По количеству исходных событий или операций различают сеть с одним исходным событием (одной исходной операцией) и несколькими исходными событиями (несколькими исходными операциями). По степени неопределенности сетевой модели различают детерминированные и стохастические сетевые модели. По количеству операций, составляющих комплекс, сетевые модели подразделяются на сети большого объема (свыше 10 000 операций), среднего объема (от 1500 до 10 000 операций) и малого объема (до 1500 операций). На рис. 10.1.2 приведена рассмотренная классификация сетевых моделей.

Следует отметить, что с помощью фиктивных операций многосетевая многоцелевая модель с несколькими исходными событиями (операциями) всегда может быть преобразована в односетевую одноцелевую модель с одним исходным событием.

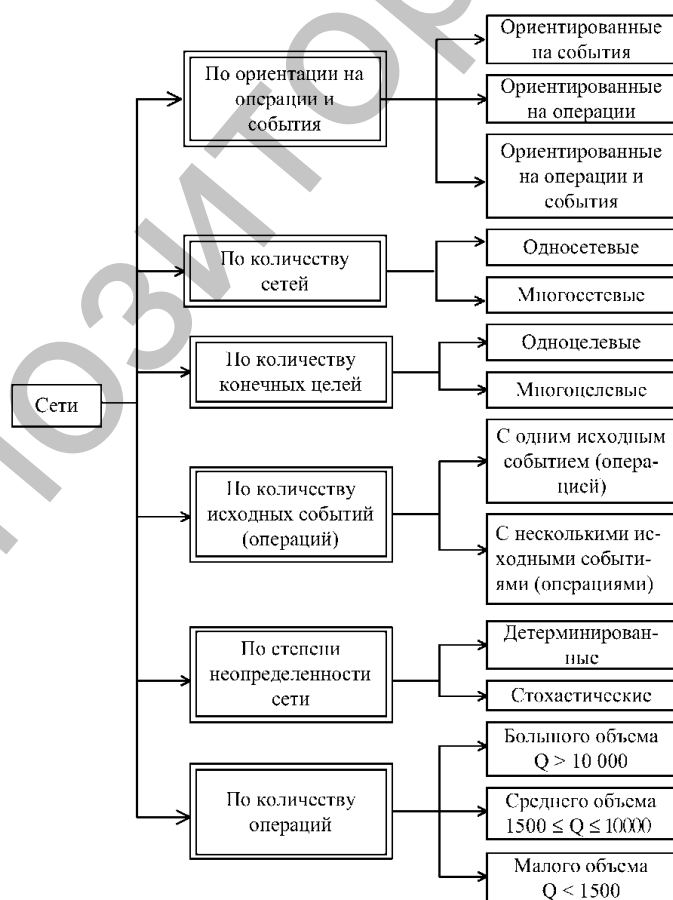


Рис. 10.1.2. Классификация сетевых моделей

10.2. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Правила построения сетевых моделей определяются сферой их применения, к которой относится сетевое планирование и управление, и соответствующим программным обеспечением современных ЭВМ, разработанным для построения и анализа сетей. При построении сетевой модели ее вершинам обычно присваиваются числа, которые служат номерами вершин. Тогда каждой дуге сети может быть сопоставлена пара чисел, первое из них соответствует вершине, из которой исходит дуга, а второе – вершине, в которую заходит дуга.

К основным правилам, которыми следует руководствоваться при построении сетевых моделей, относятся следующие.

1. Для каждой вершины сети номер любой предшествующей ей вершины должен быть меньше ее собственного номера.

2. В сетевой модели не должно быть «лишних» висячих и тупиковых вершин, т.е. таких висячих вершин, которые не соответствуют исходным событиям и операциям, и таких тупиковых вершин, которые не соответствуют завершающим событиям и операциям.

3. В сети не должно быть петель, контуров и кратных дуг.

4. В сети должны быть только одна исходная и одна завершающая вершины.

Сетевая модель, для которой справедливо первое правило, называется упорядоченной. Выполнение этого правила обеспечивается соответствующей нумерацией вершин сети.

Нарушение второго правила свидетельствует либо о наличии в комплексе лишних операций, которые не влияют на конечные результаты и ход выполнения всего комплекса операций, либо об ошибках в построении сети.

Выполнение третьего и четвертого правил достигается путем введения в сеть фиктивных дуг и вершин. Введение таких дуг и вершин позволяет осуществлять эквивалентное преобразование многоцелевых сетевых моделей с кратными дугами и несколькими исходными вершинами в одноцелевую сеть без кратных дуг с одной завершающей вершиной. Примеры такого преобразования путем введения фиктивных дуг и вершин приведены на рис. 10.2.1.

Кратные дуги в сети соответствуют параллельно выполняемым операциям или параллельным связям в моделируемом комплексе операций. Как видно из рис. 10.2.1, а, в случае обозначения таких дуг парами, состоящими из номеров начальных и конечных вершин, они будут неразличимы. Это в значительной ме-

ре осложняет исследование моделей, содержащих кратные дуги. Введение в модель дополнительных вершин и фиктивных дуг так, как это показано на рис. 10.2.1, б, позволяет осуществить эквивалентное преобразование сети с кратными дугами в сеть без кратных дуг.

На рис. 10.2.1, в-е представлены способы эквивалентного преобразования многоцелевой сети с несколькими исходными и завершающими вершинами в одноцелевую сеть с одной исходной и одной завершающей вершинами. При этом сетевые графики на рис. 10.2.1, д, е соответствуют сетям в терминах операций.

Выполнение указанных выше правил облегчает построение и контроль правильности построения сетевой модели, а также позволяет применять существующие программы для расчета параметров и анализа сетей на ЭВМ. Это обусловлено тем, что при соблюдении правил номер начальной вершины всегда будет меньше номера конечной вершины для любой дуги сети. А данное условие, во-первых, легко проверяется и, во-вторых, позволяет значительно упростить программы исследования сетей на ЭВМ.

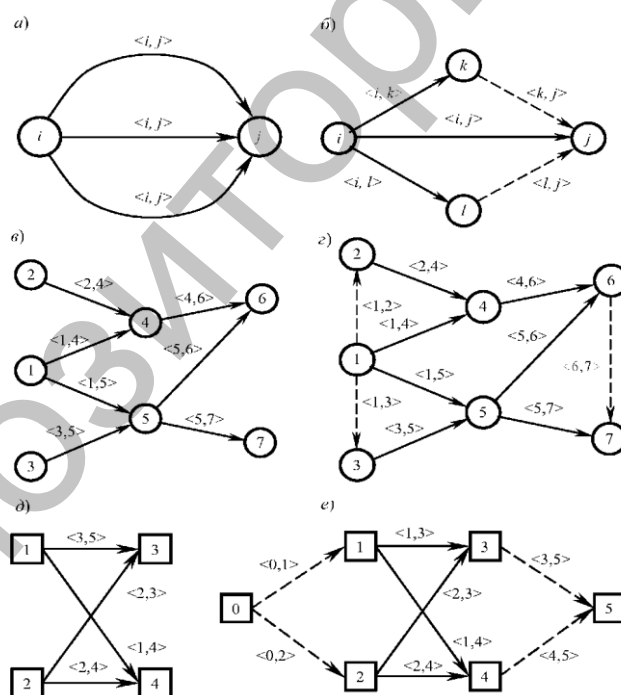


Рис. 10.2.1. Эквивалентные преобразования сети

Поэтому существующие программы обязательно содержат проверку выполнения данного условия, что необходимо учитывать при их использовании.

Кроме данной проверки, в различных программах могут проводиться проверки и других условий, требующих соблюдения

при построении сетей дополнительных правил, которые будут рассмотрены далее по мере необходимости. Существует несколько способов построения сетевых моделей с соблюдением перечисленных выше правил. Для построения, например, сетевой модели, ориентированной на операции, может быть рекомендована методика, включающая следующие этапы:

- составление перечня операций;
- составление матрицы смежности;
- заполнение таблицы слоев;
- нумерация вершин и построение сетевого графика.

Рассмотрим эти этапы. Составление перечня операций. Перечень операций для моделируемого комплекса операций составляется в виде таблицы 10.2.1, головка которой приведения ниже.

Таблица 10.2.1

№ операции	Содержание (наименование, индекс) операции	Параметры					Непосредственно предшествующие операции	Непосредственно последующие операции
		Продолжительность				Вероятность		
		$t_{\min}$	$t_{\max}$	$t_{\text{вер}}$	$t_{\text{ср}}$	P		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Номера присваиваются операциям по мере включения их в перечень. К параметрам операций относятся наименьшее, наибольшее, вероятное и среднее времена выполнения операций. При этом первые три параметра определяются экспертным путем, а среднее время выполнения операции вычисляется по всем трем либо первым двум параметрам, если отсутствует третий. Кроме указанных параметров, для сетей с вероятностной структурой используется вероятность выполнения операции, которая также заносится в таблицу.

Для построения детерминированной сетевой модели в перечне операций достаточно было бы указать только непосредственно предшествующие либо последующие операции. Однако включение тех и других операций в перечень значительно облегчает построение и контроль правильности построения сетевой модели. Особенно это касается сетей среднего и большого объема.

Для стохастических сетей включение всех указанных операций в перечень обязательно.

Составление матрицы смежности. Матрица смежности R составляется по перечню операций. Она представляет собой квадратную матрицу, размерность которой равна числу операций в комплексе, а строки и столбцы соответствуют операциям.

Элементы матрицы вычисляются по формуле

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i - \text{я операция непосредственно предшествует } j - \text{й;} \\ 0 - \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (10.2.1.)$$

При наличии в перечне непосредственно предшествующих и последующих операций матрица смежности может быть составлена по предшествующим операциям, а правильность ее составления проверена по последующим, и наоборот.

Если комплекс операций имеет вероятностную структуру, то элементы матрицы смежности соответствуют вероятностям осуществления предшествующих операций.

Заполнение таблицы слоев. Представим головку таблицы слоев.

Таблица 10.2.1.

Таблица слоев

№ слоя	Операции, входящие в слой
--------	---------------------------

Заполнение таблицы слоев производится следующим образом. Выполняют суммирование элементов матрицы смежности для каждого столбца по строкам:

$$r^{(j)} = \sum_{i=1}^n r_{ij}, \quad j = 1(1)n, \quad (10.2.2)$$

где $r^{(j)}$, $j = 1(1)n$ – сумма элементов матрицы смежности по всем строкам для j -го столбца; n – размерность матрицы смежности.

Затем определяют столбцы, для которых полученные суммы равны нулю. Операции, номера (индексы) которых совпадают с номерами (индексами) этих столбцов, составляют первый слой. Номер этого слоя представляется в первой строке первого столбца таблицы, а номера операций, входящих в этот слой, – в ту же строку второго столбца таблицы.

Из полученных для каждого столбца сумм вычитают элементы матрицы смежности, находящиеся на пересечении рассматриваемого столбца и строк, соответствующих операциям, составляющим первый слой. Определяют столбцы, для которых полученные разности равны нулю. Операции, номера (индексы) которых совпадают с номерами (индексами) этих столбцов, составляют второй слой. Номер слоя и номера, составляющих его операций, заносятся в соответствующие столбцы таблицы во вторую строку.

Затем из разностей, полученных для каждого столбца на предыдущем шаге, вычитают элементы, соответствующие операциям, составляющим второй слой. Определяют столбцы, для которых новые разности равны нулю, и по ним – операции, состав-

ляющие третий слой. Заполняют третью строку таблицы слоев, и шаги повторяются.

Процесс заполнения таблицы слоев продолжается до тех пор, пока соответствующая разность для каждого столбца не станет равной нулю. Таким образом, получаем распределение всех операций по слоям.

Операции, входящие в один слой, обладают тем свойством, что для каждой из них предшествующие операции включены только в слой с меньшим номером, чем слой, в который входит рассматриваемая операция, а непосредственно предшествующая операция обязательно принадлежит слою с номером на единицу меньше, чем номер слоя, в который входит данная операция. Номер слоя соответствует максимальной длине пути из исходной вершины в вершины слоя, если длина пути измеряется количеством входящих в него дуг. Любые две вершины одного слоя не являются смежными.

Нумерация вершин и построение сетевого графика. При нумерации вершин сетевой модели необходимо соблюдать следующее правило: номер любой вершины слоя должен быть больше номера любой вершины, входящей в предшествующие слои. На нумерацию вершин внутри единого слоя ограничений обычно не накладывается. При таком способе нумерации вершин номер начала дуги всегда будет меньше номера конца этой же дуги для любой дуги сети. Использование конкретных программ для расчета параметров сетей может потребовать соблюдения дополнительных правил при нумерации вершин. К ним относятся, например, требования начинать нумерацию обязательно с единицы, не допускать пропусков в нумерации вершин и т.д.

После завершения нумерации вершин производят присвоение новых номеров столбцам и строкам матрицы смежности и их перестановку в порядке возрастания новых номеров. В результате получают матричное представление упорядоченной сети.

Новые номера операций заносят в перечень операций, а также в специальную таблицу для того, чтобы получить возможность легко переходить от старой нумерации к новой и, наоборот.

При построении диаграммы сетевой модели (построении сетевого графика) вершины, входящие в один слой, располагают на одном уровне, а соединяющие их дуги определяются по матрице смежности.

Замечание. Если сетевая модель построена, и необходимо только перенумеровать вершины так, чтобы сеть стала упорядоченной, то можно воспользоваться следующей процедурой.

1-й этап

1-й шаг. Определяют исходные вершины и присваивают им начальные номера в порядке возрастания.

2-й шаг. Отмечают все дуги, для которых эти вершины являются начальными.

k-й этап

1-й шаг. Определяют все вершины, которые являются конечными только для отмеченных дуг, и перенумеровывают их в любом порядке.

2-й шаг. Отмечают все дуги, для которых перенумерованные вершины стали начальными, и переходят к $k + 1$ -му этапу.

Данный процесс является итеративным, начинается с первого этапа, продолжается последовательным выполнением k -го этапа, начиная с $k = 2$, и заканчивается тогда, когда всем завершающим вершинам будут присвоены порядковые номера. При этом на каждом k -м этапе определяются и нумеруются вершины, входящие в k -й слой.

На этом построение сети в терминах операций заканчивается. Для построения сети в терминах операций и событий можно использовать изложенную ранее процедуру преобразования вершинного графа в реберный, беря в качестве вершинного графа сетевую модель в терминах операций, либо производить построение непосредственно по сети в терминах операций и перечню операций. При этом желательно включение в перечень и соответствующих событий. Следует отметить, что построение сети в терминах операций значительно облегчает последующее построение сети в терминах операций и событий.

Применение указанной методики построения сетевых моделей, ориентированных на операции, рассмотрим на следующем примере.

Пример 10.2.1. Задан комплекс операций. Требуется построить сетевую модель, ориентированную на операции, и сетевую модель, ориентированную на операции и события для заданного комплекса.

Решение. Пусть для заданного комплекса операций составлен перечень операций в виде табл. 10.2.3.

1. По перечню операций составим матрицу смежности сетевой модели в терминах операций. Нули в матрице не проставлены.

Таблица 10.2.3.

Перечень операций комплекса

Наименование (индекс) операции	Продолжительность операции t_{cp}	Непосредственно предшествующая операция	Непосредственно последующая операция
B_1	4	-	$B_{2,4,5}$
B_2	3	B_1	$B_{3,6,7}$
B_3	3	B_2	-
B_4	2	B_1	$B_{12,14}$
B_5	4	B_1	B_{15}
B_6	8	B_2	B_{15}
B_7	5	B_2	B_8
B_8	8	$B_{7,10,15}$	-
B_9	4	B_{12}	-
B_{10}	4	B_{12}	B_8
B_{11}	4	B_{12}	B_{15}
B_{12}	9	$B_{4,13}$	$B_{9,10,11}$
B_{13}	10	-	$B_{12,14}$
B_{14}	5	$B_{4,13}$	B_{15}
B_{15}	8	$B_{5,6,11,14}$	B_8

2. Для удобства заполнения таблицы слоев составим вспомогательную таблицу (10.2.4), в которую будем последовательно заносить результаты суммирования и последующих вычитаний элементов матрицы смежности для каждого столбца. В первую строку таблицы занесем результаты суммирования элементов матрицы смежности построчно для каждого столбца согласно формуле (10.2.2).

Равные нулю суммы оказались в столбцах, соответствующих операциям с индексами B_1 и B_{13} . Поэтому занесем эти индексы в первый слой таблицы слоев (табл. 10.2.5), а содержимое строк матрицы смежности, соответствующих данным индексам, вычтем из полученных для каждого столбца сумм. При этом столбцы, содержимое которых в строке сумм равно нулю, в процессе вычитания на данном этапе и в дальнейшем процессе не участвуют. Это правило будет справедливо для тех столбцов вспомогательной таблицы, в которых на последующих этапах будут получаться нули. На втором этапе равными нулю оказались разности в столбцах вспомогательной таблицы с индексами B_2 , B_4 , B_5 . Занесем эти индексы во второй слой таблицы слоев, а содержимое строк матрицы смежности с данными индексами вычтем из содержимого столбцов второй строки вспомогательной таблицы.

На третьем этапе равными нулю оказались разности в столбцах вспомогательной таблицы с индексами B_3 , B_6 , B_7 , B_{12} ,

B_{14} . Занесем эти индексы в третий слой таблицы слоев, а содержимое строк матрицы смежности с данными индексами вычтем из содержимого столбцов третьей строки вспомогательной таблицы.

Действуя, таким образом, постепенно заполняем вспомогательную таблицу и таблицу слоев до тех пор, пока все операции комплекса не будут распределены по слоям. На этом заполнение таблицы слоев заканчивается. Окончательный результат заполнения вспомогательной таблицы и таблицы слоев приведен в виде табл. 10.2.4 и 10.2.5.

Таблица 10.2.4

Вспомогательная таблица

$\frac{j}{i}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}
1	0	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2	0	2	4
2		0	1	0	0	1	1	3	1	1	1	1		1	4
3			0			0	0	3	1	1	1	0		0	3
4								1	0	0	0				1
5								1							0
6								1							

Таблица 10.2.5

Таблица слоев

№ слоя	Индекс операции, входящей в слой
I	$B_1 > B_{13}$
II	$B_2 > B_4 > B_5$
III	$B_3, B_6, B_7 > B_{12}, B_{14}$
IV	B_9, B_{10}, B_{11}
V	B_{15}
VI	B_8

3. По таблице слоев и матрице смежности строим сетевой график модели, ориентированной на операции. При этом вершины сети, входящие в один слой, располагают по вертикали таким образом, чтобы избежать лишних пересечений дуг. Над вершиной проставляется индекс соответствующей ей операции, а под вершиной – продолжительность этой операции. Затем производят нумерацию вершин в соответствии с указанными в приведенной выше методике правилами. Построенный таким образом сетевой график упорядоченной сети в терминах операций представлен на рис. 10.2.2.

Поскольку построенная сеть содержит малое число элементов и достаточно проста, то сетевой график сети, ориентированной на операции и события, строим непосредственно по сети, ориентированной на операции.

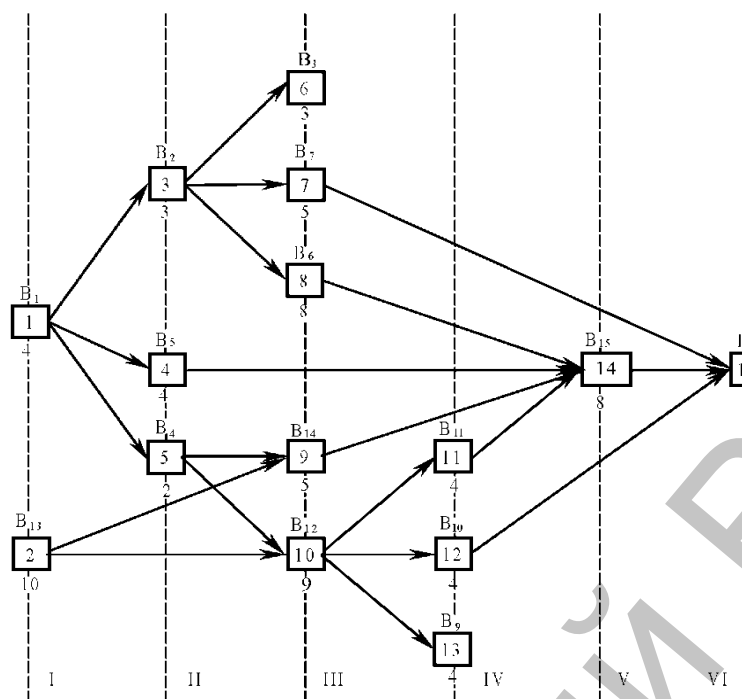


Рис. 10.2.2. Упорядоченная сеть в терминах операции

При этом нумерация вершин (событий) производится способом, указанным в замечании к методике, без предварительного построения таблицы слоев. Построенный сетевой график сетевой модели, ориентированной на операции и события, приведен на рис. 10.2.3. Номера операций указаны под дугами, а их продолжительность – под ними.

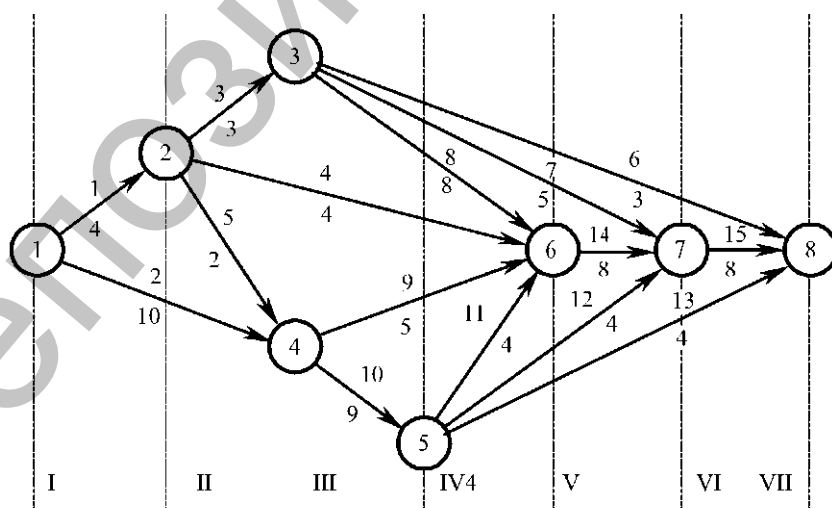


Рис. 10.2.3. Упорядоченная сеть в терминах операций и событий

ТЕМА 11. АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Основу анализа сетевой модели составляет расчет значений ее параметров.

Определение 11.1. **Параметры сетевой модели** – величины, характеризующие временные соотношения между событиями и операциями, а также вид, количество ресурсов, затрачиваемых в процессе выполнения операций, и объем выполняемых работ.

Параметры, описывающие временные соотношения между событиями и операциями в сетевой модели, а также затраты времени на выполнение операций, называются временными параметрами.

Исходными для определения всех временных параметров служит продолжительность (длительность) операции, обозначаемая t_{ij} для операции $\langle i, j \rangle$. Продолжительность любой операции до окончания ее выполнения является величиной неизвестной, а следовательно, случайной. Наиболее полно случайная величина характеризуется законом распределения. Точные законы распределения продолжительностей операций, входящих в моделируемый комплекс, также обычно неизвестны. Поэтому на практике используют аппроксимирующие законы, которые стараются подобрать таким образом, чтобы один и тот же закон распределения, различаясь только числовыми характеристиками, с точностью, достаточной для целей моделирования, аппроксимировал законы распределения продолжительностей всех операций, входящих в комплекс.

Наиболее часто в качестве аппроксимирующих законов используют законы бета-распределения, треугольного и логарифмически нормального распределений. В общем случае формула плотности бета-распределения случайной величины $\hat{x}$, заданной на интервале $(0, 1]$, имеет следующий вид:

$$\varphi_{\hat{x}}(x, p, q) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (11.1.)$$

где $B(p, q)$ – бета-функция, определяемая выражением

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (11.2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, определяемая по формуле

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy. \quad (11.3)$$

Известно, что для целых z функция $\Gamma(z)$ определяется выражением

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Математическое ожидание, дисперсия и мода случайной величины, распределенной по закону (11.1), вычисляются по формулам

$$M[\hat{x}] = \frac{p}{p+q}, \quad (11.4)$$

$$D[\hat{x}] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}, \quad (11.5)$$

$$Mo[\hat{x}] = \frac{p-1}{p+q-2}. \quad (11.6)$$

Величины p и q называются параметрами закона распределения (11.1).

Если для аппроксимации реальных распределений продолжительностей операций используют бета-распределение, то поступают следующим образом.

Полагают, что продолжительность $\hat{t}_{ij}$ произвольной операции есть заданная на интервале $[t_{i,j}^{\min}, t_{i,j}^{\max}]$ случайная величина, наиболее вероятное значение которой равно m , т.е.

$$\hat{t}_{ij} \in [t_{i,j}^{\min}, t_{i,j}^{\max}],$$

$$Mo[\hat{t}_{ij}] = m.$$

Введя параметры $\varphi = p - 1$, $\gamma = q - 1$ и задавая линейное преобразование случайной величины x в случайную величину t_j выражением

$$x = \frac{t_{ij} - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}},$$

из формулы (11.1) получают следующее выражение для плотности распределения продолжительности t_j операции:

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \notin [t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}] \\ C(t - t_{ij}^{\min})^{\alpha} (t_{ij}^{\max} - t)^{\alpha} \left(\frac{1}{m'} - 1\right), & \forall t \in [t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}] \end{cases} \quad (11.7)$$

где

$$C = \left[(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^{\alpha + \gamma + 1} B(\alpha + 1, \gamma + 1) \right]^{-1};$$

$$m' = \frac{m - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}};$$

$$\gamma = \alpha \left(\frac{1}{m'} - 1 \right).$$

Если предположить (как было сделано, например, разработчиками математического аппарата системы ЭКСПЕРТ), что

$$\alpha + \gamma = 4, \quad (11.8)$$

то для математического ожидания и дисперсии случайной величины, подчиненной закону (3.4.7), будут справедливы следующие выражения:

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{t_{ij}^{\min} + 4m + t_{ij}^{\max}}{6} \quad (11.9)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{28} - \frac{4}{63} \left[\frac{t_{ij}^{\min} + t_{ij}^{\max}}{2} - m \right]^2. \quad (11.10)$$

Вместо выражения (3.4.10) для вычисления дисперсии часто используют приближенную формулу

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{36}. \quad (11.11)$$

Поскольку точные значения $t_{i,j}^{\min}, t_{i,j}^{\max}$, $Mo[\hat{t}_{i,j}]$ для реальных операций неизвестны, то на практике применяют оценки этих величин, полученные экспертным путем или путем статистической обработки результатов наблюдений, с помощью которых вычисляют оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения по формулам

$$\tilde{M}[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{6} (\tilde{t}_{ij}^{\min} + 4Mo[\hat{t}_{ij}] + \tilde{t}_{ij}^{\max}), \quad (11.12)$$

$$\tilde{\sigma}[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{6} (\tilde{t}_{ij}^{\max} - \tilde{t}_{ij}^{\min}), \quad (11.13)$$

где $\tilde{M}[\hat{t}_{ij}]$ – оценка математического ожидания продолжительности $[\hat{t}_{i,j}]$ операции;

$\tilde{\sigma}[\hat{t}_{ij}]$ – оценка среднего квадратического отклонения продолжительности $[\hat{t}_{i,j}]$ операции;

$\tilde{t}_{i,j}^{\min}$ – оценка наименьшей возможной продолжительности $[\hat{t}_{i,j}]$ операции;

$\tilde{t}_{i,j}^{\max}$ – оценка наибольшей возможной продолжительности $[\hat{t}_{i,j}]$ операции;
 $M\tilde{o}[\hat{t}_{i,j}]$ – оценка наиболее вероятной продолжительности $M_o[\hat{t}_{i,j}]$ операции.

Оценки $\tilde{t}_{i,j}^{\min}, \tilde{t}_{i,j}^{\max}, M\tilde{o}[\hat{t}_{i,j}]$ и называют оптимистической, пессимистической и наиболее вероятной оценками продолжительности $[\hat{t}_{i,j}]$ операции.

Метод вычисления оценок числовых характеристик по формулам (11.12), (11.13) называют трехоценочным методом.

Для аппроксимации реального закона распределения продолжительности операции используют выражение (11.7), в котором точные значения величин $\tilde{t}_{i,j}^{\min}, \tilde{t}_{i,j}^{\max}, m$ заменены их оценками, а числовые характеристики определяются по формулам (11.12), (11.13).

Как следует из выражения (11.10), дисперсия продолжительности операции, подчиненной закону бета-распределения (11.7), при постулировании, что $\alpha + \gamma = 4$, зависит от моды распределения. Поэтому использование оценки (11.13) и задание одного и того же значения a при аппроксимации реальных законов распределения продолжительностей операций законом (11.7) приводит к противоречию с заданием в качестве исходных данных трех оценок $\tilde{t}_{i,j}^{\max}, \tilde{t}_{i,j}^{\min}, m$.

От данного недостатка свободно в значительной степени аппроксимирующее бета-распределение, для которого параметры α и γ закона распределения выбраны таким образом, что дисперсия распределения наименьшим образом зависит от разброса моды. Этот выбор можно осуществить следующим образом.

Дисперсию в рассматриваемом случае можно представить как функцию случайного аргумента, а именно моды. Поэтому сама дисперсия есть величина случайная. Если усреднить дисперсию по всем возможным значениям моды и взять в качестве ее оценки полученное среднее, то данная оценка при достаточно большом количестве операций в сети практически не будет зависеть от разброса мод продолжительностей операций.

Задавая в качестве среднего значения дисперсии величину

$$\tilde{D}[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{36}, \quad (11.14)$$

можно определить искомые значения параметров α и γ . Это было выполнено В.С. Поповым, который получил, что $\alpha + \gamma = 4,55$. Ок-

ругляя полученное значение до ближайшего целого, он принял, что $\alpha + \gamma = 5$, и с учетом этого предположения получил следующее выражение для плотности аппроксимирующего бета-распределения:

$$\varphi_{t_{ij}}(t) = \begin{cases} C_1(t - t_{ij}^{\min}) \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}} (t_{ij}^{\max} - t) \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}, \forall t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}] \\ 0, \forall t \notin (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}] \end{cases} \quad (11.15)$$

Числовые характеристики бета-распределения (11.15) определяются системой выражений

$$\begin{cases} \frac{5\pi(m - t_{ij}^{\min})}{720 \sin \frac{5\pi(m - t_{ij}^{\min})}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}} \\ \pi \prod_{k=0}^5 [k(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}) - 5(m - t_{ij}^{\min})] \\ m \neq t_{ij}^{\min} + \frac{l}{5}(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}), l \in [0(1)5] \\ \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{720(-1)^{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}}} \\ (t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq q}}^5 [k(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}) - 5(m - t_{ij}^{\min})] \\ q = \frac{5(m - t_{ij}^{\min})}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})} \\ m = t_{ij}^{\min} + \frac{l}{5}(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}), l \in [0(1)5] \end{cases} =$$

где

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{7}(t_{ij}^{\min} + 5m + t_{ij}^{\max}), \quad (11.16)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{392} \left[6 + 25 \frac{m - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}} - 25 \left(\frac{m - t_{ij}^{\min}}{t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min}} \right)^2 \right]. \quad (11.17)$$

При этом вместо (11.17) с достаточной степенью точности можно использовать выражение

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2}{36}. \quad (11.18)$$

При практическом применении выражений (11.15), (11.16), (11.18) вместо величин $t_{i,j}^{\min}, t_{i,j}^{\max}$, m используют их оценки.

Кроме бета-распределения при трехочечном методе в качестве аппроксимирующего может быть использовано треугольное распределение, плотность которого определяется выражением

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}} = \begin{cases} \frac{2(t - t_{ij}^{\min})}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})}, \text{ если } t \in (t_{ij}^{\min}, m]; \\ \frac{2(t_{ij}^{\max} - t)}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - m)}, \text{ если } t \in (m, t_{ij}^{\max}]; \\ 0, \text{ если } t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}] \end{cases} \quad (11.19)$$

Функция распределения для треугольного закона имеет вид:

$$I_{\hat{t}_{ij}}(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \leq t_{ij}^{\min}; \\ \frac{(t - t_{ij}^{\min})^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})}, \text{ если } t \in (t_{ij}^{\min}, m]; \\ 1 - \frac{(t_{ij}^{\max} - t)^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - m)}, \text{ если } t \in (m, t_{ij}^{\max}]; \\ 1, \text{ если } t > t_{ij}^{\max}. \end{cases} \quad (11.20)$$

Числовые характеристики треугольного распределения определяются по формулам

$$M[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{3}(t_{ij}^{\min} + m + t_{ij}^{\max}) \quad (11.21)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = \frac{1}{18} \left(t_{ij}^{\min 2} + m^2 + t_{ij}^{\max 2} - m t_{ij}^{\min} - t_{ij}^{\min} t_{ij}^{\max} - m t_{ij}^{\max} \right). \quad (11.22)$$

Применение треугольного распределения и бета-распределения вида (11.7) при предположении (11.8) дает примерно одинаковые результаты.

Хорошие результаты может дать использование двухочечного метода при аппроксимации реальных распределений продолжительностей операций бета-распределением. При этом плотность распределения описывается выражением

$$\varphi_{\hat{t}_{ij}} = \begin{cases} 0, \text{ если } t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}]; \\ 12 \frac{(t - t_{ij}^{\min})(t_{ij}^{\max} - t)^2}{(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^4}, \text{ если } t \in (t_{ij}^{\min}, t_{ij}^{\max}]; \end{cases} \quad (11.23)$$

а числовые характеристики имеют вид:

$$M[\hat{t}_{ij}] = 0,2(3t_{ij}^{\min} + 2t_{ij}^{\max}) \quad (11.24)$$

$$D[\hat{t}_{ij}] = 0,04(t_{ij}^{\max} - t_{ij}^{\min})^2; \quad (11.25)$$

$$Mo[t_{ij}] = \frac{2t_{ij}^{\min} + t_{ij}^{\max}}{3}. \quad (11.26)$$

Вычислению оценок двухоценочным методом следует отдать предпочтение перед трехоценочным, так как наибольшие затруднения у экспертов встречается получение оценки моды, которая не используется в двухоценочном методе, а расхождение между оценками математического ожидания по двухоценочному и трехоценочному методам составляет чуть больше одного процента.

Параметры сетевой модели

В основе определения параметров сетевой модели лежит понятие пути. Сетевая модель представляет собой ориентированный граф, поэтому путем в сети будет любая последовательность дуг, в которой начало непосредственно последующей дуги совпадает с концом непосредственно предшествующей. В детерминированной сети отсутствуют петли и контуры, следовательно, любой путь проходит через любую дугу и любую вершину не более одного раза. Это означает, что все пути в сетевой модели являются простыми и элементарными.

В сетевом моделировании используются следующие виды путей: между вершинами, предшествующий вершине, последующий за вершиной, полный.

Определение 11.2. Путь между вершинами – это путь, исходящий из одной рассматриваемой вершины и входящий в другую рассматриваемую вершину.

Путь между вершинами i и j обычно обозначают символом $L_{i,j}$.

Определение 11.3. Путь, предшествующий вершине – это путь между исходной и рассматриваемой вершинами.

При обозначении исходной вершины символом I обозначается путь, предшествующий вершине i , обозначается символом $I_{i,j}$.

Определение 11.4. Путь, последующий за вершиной обозначается, – это путь между рассматриваемой и завершающей вершинами.

При обозначении завершающей вершины символом C путь, последующий за вершиной i , обозначается символом L_{iC} .

Определение 11.5. Полный путь – это путь между исходной и завершающей вершинами.

Обычно полный путь обозначается символом L_{iC} . Среди полных путей в сетевой модели ввиду особой важности выделяют критические и подкритические пути.

Определение 11.6. Критический путь – это полный путь, имеющий в сетевой модели наибольшую продолжительность.

Подкритическим путем называют путь, продолжительность которого мало отличается от продолжительности критического

пути. Это отличие чаще всего измеряется в долях от продолжительности критического пути и для всех подкритических путей не должно превышать заданного.

Для критического пути введем обозначение $L_{кр}$. При анализе сетевых моделей наибольшее применение находят следующие параметры сети.

1. Продолжительность $t(L_{ij})$ пути L_{ij} между вершинами i и j

$$t(I_{ij}) = \sum_{\forall r_{lk} \in L_{ij}} t(r_{lk}), \quad (11.27)$$

где r_{lk} – операция $\langle l, k \rangle$; $t(r_{lk})$ – продолжительность операции $\langle l, k \rangle$.

Продолжительность пути равна сумме продолжительностей операций, составляющих рассматриваемый путь.

2. Продолжительность $T_{кр}$ критического пути.

3. Ранний срок t_f свершения i -го события

$$T_{кр} = t(L_{кр}) = \max_{\{L_{IC}\}} (L_{IC}). \quad (11.28)$$

$$t_i^p = \max_{\{L_{li}\}} t(L_{li}). \quad (11.29)$$

Раз событие не может произойти, пока не будут выполнены все предшествовавшие ему операции, то ранний срок свершения события определяется наибольшей из всех продолжительностей, предшествовавших этому событию путей.

4. Поздний срок $t_i^п$ свершения i -го события.

Самое позднее свершение события не должно приводить к увеличению продолжительности критического пути, поэтому поздний срок свершения события определяется разностью между продолжительностью критического пути и наибольшей из всех продолжительностей последующих за этим событием путей.

5. Ранний срок $p_{i,j}^{д.ф.}$ начала операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{pn} = t_i^p. \quad (11.30)$$

Поскольку операция не может быть начата, пока не свершится ее начальное событие, то ранний срок начала операции совпадает с ранним сроком свершения ее начального события.

6. Поздний срок $t_{i,j}^{i.i.}$ начала операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{nn} = t_j^n - t_{ij}, \quad (11.31)$$

где $t_{i,j}$ – продолжительность операции $\langle i, j \rangle$.

Выполнение операции не должно вызывать увеличения продолжительности критического пути, а следовательно, и позднего срока свершения конечного события операции. Так как операция

имеет определенную продолжительность, то позднее начало операции вычисляется как разность между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью самой операции.

7. Ранний срок $t_{i,j}^{\delta,i}$ окончания операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{po} = t_j^p + t_{ij}. \quad (11.32)$$

8. Поздний срок $t_{i,j}^{\bar{i},\bar{j}}$ окончания операции $\langle i, j \rangle$

$$t_{ij}^{no} = t_j^n. \quad (11.33)$$

9. Резерв времени R (L_{IC}) полного пути

Резервом времени полного пути называют разность между продолжительностями критического и рассматриваемого полного путей. Данный параметр определяет наибольший промежуток времени, на который можно увеличить продолжительность рассматриваемого полного пути, не увеличивая при этом продолжительности критического пути.

10. Резерв времени R_i i -го события

$$R_i = t_i^n - t_i^p. \quad (11.34)$$

11. Полный резерв времени $R_{i,j}^i$ операции $\langle i, j \rangle$

$$R_{ij}^n = t_j^n - t_i^p - t_{ij} = t_{ij}^{no} - t_{ij}^{po}. \quad (11.35)$$

Полный резерв времени операции – это наибольший промежуток времени, на который можно увеличить продолжительность операции, не увеличивая при этом продолжительности критического пути.

12. Частный резерв времени первого вида $R'_{i,j}$ операции $\langle i, j \rangle$

$$R'_{ij} = t_j^n - t_i^n - t_{ij} = t_{ij}^{nn} - t_i^n. \quad (11.36)$$

Частный резерв времени первого вида операции – это наибольший промежуток времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения позднего срока свершения ее начального события.

13. Частный резерв времени второго вида $R''_{i,j}$ операции $\langle i, j \rangle$

$$R''_{ij} = t_j^p - t_i^p - t_{ij} = t_{ij}^p - t_i^{po}. \quad (11.37)$$

Частный резерв времени второго вида операции – это наибольший промежуток времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения раннего срока свершения ее конечного события.

14. Свободный резерв времени $R_{i,j}^c$ операции $\langle i, j \rangle$. Свободный резерв времени операции – это наибольший промежуток

времени, на который может быть увеличена продолжительность операции при условии, что это не вызовет изменения позднего срока свершения ее начального события и раннего срока свершения ее конечного события.

Рассмотрим введенные параметры.

Исходя из определений раннего и позднего сроков свершения событий для исходного и завершающего события получаем:

$$\begin{aligned} t_l^p &= t_l^n = 0; \\ t_c^p &= t_c^n = T_{kp}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Обозначим символом $L_{(I,C)}^{(i)}$ полный путь, проходящий через i -е событие, а символом $t(L_{(I,C)}^{(i)})_{\max}$ – наибольшую из продолжительностей таких путей.

Анализ выражения (3.4.40) позволяют сделать следующие выводы.

1. Резерв времени события равен резерву времени полного пути, проходящего через это событие и имеющего наибольшую продолжительность:

$$R_i = R(L_{IC}^{(i)})_{\min}, \quad (11.39)$$

где

$$R(L_{IC}^i)_{\min} = T_{kp} - t(L_{IC}^i)_{\max}.$$

2. Резервы времени событий, принадлежащих критическому пути, равны нулю. Это означает, что для каждого события, принадлежащего критическому пути, ранний и поздний сроки его свершения совпадают.

Обозначим символом $L_{IC}^{\langle ij \rangle}$ полный путь, проходящий через операцию $\langle i, j \rangle$, а символом $t(L_{IC}^{\langle ij \rangle})_{\max}$ – наибольшую из продолжительностей таких путей. Тогда:

$$t(L_{IC}^{\langle ij \rangle})_{\max} = \max_{\{L_{IC}^{\langle ij \rangle}\}} t(L_{IC}^{\langle ij \rangle}) = \max_{\{L_{ij}\}} t(L_{ij}) + \max_{\{L_{ij}\}} t(L_{ij}) + t_{ij}. \quad (11.40)$$

Выражение (11.40) позволяют сделать следующие **выводы**:

1. Полный резерв времени операции равен резерву времени полного пути, проходящего через эту операцию и имеющего наибольшую продолжительность:

$$R_{ij}^n = \min_{\{L_{IC}^{\langle ij \rangle}\}} R(L_{IC}^{\langle ij \rangle})$$

2. Все резервы времени операций, принадлежащих критическому пути, равны нулю.

3. Частные резервы первого и второго вида, а также сво-

бодный резерв времени операций являются частями полного резерва времени этой операции, удовлетворяющими соотношениям:

$$R'_{ij} = R_{ij}^n - R_i; \quad (3.4.43) \quad R''_{ij} = R_{ij}^n - R_j; \quad (11.41)$$

$$R_{ij}^n = R'_{ij} + R''_{ij} + R_{ij}^c. \quad (11.42)$$

4. Полный резерв времени операции может быть вычислен по следующим формулам:

$$R_{ij}^n = t_{ij}^{nh} - t_{ij}^{pn}; \quad (11.43)$$

$$R_{ij}^n = t_{ij}^{no} - t_{ij}^{po}; \quad (11.44)$$

$$R_{ij}^n = t_{ij}^{no} - t_{ij}^{pn} - t_{ij}. \quad (11.45)$$

5. Если

$$t_j^p - t_i^n \leq t_{ij}, \quad (11.46)$$

то свободный резерв времени операции будет отрицательным или равным нулю. Это говорит о том, что продолжительность рассматриваемой операции не может быть увеличена без изменения раннего срока свершения конечного и позднего срока свершения начального событий этой операции.

Частный резерв времени первого вида образуется у операции, через начальное событие которой проходит хотя бы один полный путь, имеющий продолжительность большую, чем любой полный путь, проходящий через рассматриваемую операцию.

Частный резерв времени второго вида образуется у операции, через конечное событие которой проходит хотя бы один полный путь, имеющий продолжительность большую, чем любой полный путь, проходящий через рассматриваемую операцию.

При использовании резервов времени в процессе планирования и управления комплексом операций следует иметь в виду, что увеличение продолжительности операции приводит к соответствующему уменьшению резервов времени всех операций, принадлежащих полному и наиболее продолжительному пути, проходящему через данную операцию. Это означает, например, что если полный резерв времени некоторой операции уменьшился на некоторую величину за счет увеличения ее продолжительности, то ровно на эту величину уменьшился полный резерв времени каждой операции, принадлежащей наиболее продолжительному из полных путей, проходящих через рассматриваемую операцию.

Полные пути, обладающие достаточно большими резервами времени, называют ненапряженными. Продолжительность критического пути, резервы времени операций и событий относят к основным параметрам, а остальные – к вспомогательным. Кро-

ме параметров, рассмотренных при анализе сетевой модели, могут быть использованы и другие параметры, описание которых имеется в соответствующей литературе.

Методы расчета параметров сетевой модели

Методы расчета параметров сети подразделяются на методы с использованием ЭВМ и ручного расчета, в которых ЭВМ не используется.

Методы ручного расчета применяются в тех случаях, когда объем сети достаточно мал (300–400 операций), а также для проверочных расчетов и расчетов отдельных параметров, например, продолжительности критического пути.

Эти методы можно разделить на две группы: аналитические и статистические, основанные на статистическом моделировании.

Аналитические методы включают расчет параметров по формулам, непосредственно на сетевом графике, табличный и матричный методы.

Рассмотрим их.

Расчет параметров сетевой модели по формулам. Метод основан на использовании приведенных ранее аналитических зависимостей между параметрами сетевой модели и продолжительностью операций. Применение метода рассмотрим на примере.

Пример 11.1. Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком. Требуется рассчитать ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, продолжительность и состав критического пути, полные и частные резервы времени операций.

Решение. Вычисление искомых параметров производят следующим образом.

1. Ранние сроки свершения событий вычисляются по формуле

$$t_i^P = \max t(L_{li}) = \max_{\{k\}} \{t_k^P + t_{ki}\} \quad (11.47)$$

в которой множество $\{k\}$ определяет множество всех вершин сети, из которых исходят дуги, заходящие в i -ю вершину.

Вычисления начинают с исходного события и для упорядоченной сети выполняют последовательно в порядке возрастания номеров событий. Заканчивают вычисления на завершающем событии. Порядок вычислений и их результаты для рассматриваемого примера следующие:

$$\begin{aligned}
t_1^p &= 0; \\
t_2^p &= t_1^p + t_{12} = 0 + 4 = 4; \\
t_3^p &= t_2^p + t_{13} = 4 + 3 = 7; \\
t_4^p &= \max\{t_1^p + t_{14}, t_2^p + t_{25}\} = \max\{0 + 10, 4 + 2\} = 10; \\
t_5^p &= t_4^p + t_{45} = 10 + 9 = 19; \\
t_6^p &= \max\{t_2^p + t_{26}, t_3^p + t_{36}, t_4^p + t_{56}, t_5^p + t_{56}\} = \\
&= \max\{4 + 4, 7 + 8, 10 + 5, 19 + 4\} = 23; \\
t_7^p &= \max\{t_3^p + t_{37}, t_5^p + t_{57}, t_6^p + t_{64}\} = \max\{7 + 5, 19 + 4, 23 + 8\} = 31; \\
t_8^p &= \max\{t_3^p + t_{38}, t_5^p + t_{58}, t_7^p + t_{78}\} = \max\{7 + 3, 19 + 4, 31 + 8\} = 39.
\end{aligned}$$

2. Продолжительность критического пути. В рассматриваемой сети завершающим событием является восьмое событие, поэтому

$$T_{кр} = t_8^p = 39.$$

3. Поздние сроки свершения событий вычисляются по формуле

$$t_i^n = T_{кр} - \max_{\{L_{iC}\}} t(L_{iC}) = \min_{\{k\}} \{t_k^n - t_{ik}\}, \quad (11.48)$$

в которой множество $\{k\}$ определяет множество всех вершин сетевой модели, в которые заходят дуги, исходящие из i -й вершины.

Вычисления начинают с завершающего события и для упорядоченной сети выполняют последовательно в порядке убывания номеров событий. Заканчивают вычисления на исходном событии:

$$\begin{aligned}
t_8^n &= T_{кр} = 39; \\
t_7^n &= t_8^n - t_{78} = 39 - 8 = 31; \\
t_6^n &= t_7^n - t_{67} = 31 - 8 = 23; \\
t_5^n &= \min\{t_6^n - t_{56}, t_7^n - t_{57}, t_8^n - t_{58}\} = \min\{23 - 4, 31 - 4, 39 - 4\} = 19; \\
t_4^n &= \min\{t_5^n - t_{45}, t_6^n - t_{46}\} = \min\{19 - 9, 23 - 5\} = 10; \\
t_3^n &= \min\{t_6^n - t_{36}, t_7^n - t_{37}, t_8^n - t_{38}\} = \min\{23 - 8, 31 - 5, 39 - 3\} = 15; \\
t_2^n &= \min\{t_3^n - t_{23}, t_4^n - t_{24}, t_6^n - t_{26}\} = \min\{15 - 3, 10 - 2, 23 - 4\} = 8; \\
t_1^n &= \min\{t_2^n - t_{12}, t_4^n - t_{14}\} = \min\{8 - 4, 10 - 10\} = 0.
\end{aligned}$$

Результат вычисления позднего срока исходного события служит контролем правильности вычислений. Если он оказывается не равным нулю, то где-то в вычислениях допущена ошибка.

4. Резервы времени событий вычисляются по формуле

$$R_i = t_i^{\Pi} - t_i^{\text{P}}.$$

$$\begin{aligned} R_1 &= t_1^{\Pi} - t_1^{\text{P}} = 0 - 0 = 0; & R_5 &= t_5^{\Pi} - t_5^{\text{P}} = 19 - 19 = 0; \\ R_2 &= t_2^{\Pi} - t_2^{\text{P}} = 8 - 4 = 4; & R_6 &= t_6^{\Pi} - t_6^{\text{P}} = 23 - 23 = 0; \\ R_3 &= t_3^{\Pi} - t_3^{\text{P}} = 15 - 7 = 8; & R_7 &= t_7^{\Pi} - t_7^{\text{P}} = 31 - 31 = 0; \\ R_4 &= t_4^{\Pi} - t_4^{\text{P}} = 10 - 10 = 0; & R_8 &= t_8^{\Pi} - t_8^{\text{P}} = 39 - 39 = 0 \end{aligned}$$

Поскольку резервы времени 1-, 4-, 5-, 6-, 7- и 8-го событий равны нулю, то критический путь проходит через эти события.

5. Полные резервы времени операций вычисляются по формуле

$$R_{ij}^{\Pi} = t_j^{\Pi} - t_i^{\text{P}} - t_{ij}.$$

$$\begin{aligned} R_{12}^{\Pi} &= t_2^{\Pi} - t_1^{\text{P}} - t_{12} = 8 - 0 - 4 = 4; & R_{45}^{\Pi} &= t_5^{\Pi} - t_4^{\text{P}} - t_{45} = 19 - 10 - 9 = 0; \\ R_{14}^{\Pi} &= t_4^{\Pi} - t_1^{\text{P}} - t_{14} = 10 - 0 - 10 = 0; & R_{46}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_4^{\text{P}} - t_{46} = 23 - 10 - 5 = 8; \\ R_{23}^{\Pi} &= t_3^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{23} = 15 - 4 - 3 = 8; & R_{56}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{56} = 23 - 19 - 4 = 0; \\ R_{24}^{\Pi} &= t_4^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{24} = 10 - 4 - 2 = 4; & R_{57}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{57} = 31 - 19 - 4 = 8; \\ R_{26}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_2^{\text{P}} - t_{26} = 23 - 4 - 4 = 15; & R_{58}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_5^{\text{P}} - t_{58} = 39 - 19 - 4 = 16; \\ R_{36}^{\Pi} &= t_6^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{36} = 23 - 7 - 8 = 8; & R_{67}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_6^{\text{P}} - t_{67} = 31 - 23 - 8 = 0; \\ R_{37}^{\Pi} &= t_7^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{37} = 31 - 7 - 5 = 19; & R_{78}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_7^{\text{P}} - t_{78} = 39 - 31 - 8 = 0; \\ R_{38}^{\Pi} &= t_8^{\Pi} - t_3^{\text{P}} - t_{38} = 39 - 7 - 3 = 29; \end{aligned}$$

Полные резервы времени операции <1, 4>, <4, 5>, <5, 6>, <6, 7>, <7, 8> равны нулю, поэтому эти операции принадлежат критическому пути.

6. Частные резервы времени первого вида операций вычисляются по формуле

$$R'_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_i.$$

$$\begin{aligned} R'_{12} &= R_{12}^{\Pi} - R_1 = 4 - 0 = 4; & R'_{45} &= R_{45}^{\Pi} - R_4 = 0 - 0 = 0; \\ R'_{14} &= R_{14}^{\Pi} - R_1 = 0 - 0 = 0; & R'_{46} &= R_{46}^{\Pi} - R_4 = 8 - 0 = 8; \\ R'_{23} &= R_{23}^{\Pi} - R_2 = 8 - 4 = 4; & R'_{56} &= R_{56}^{\Pi} - R_5 = 0 - 0 = 0; \\ R'_{24} &= R_{24}^{\Pi} - R_2 = 4 - 4 = 0; & R'_{57} &= R_{57}^{\Pi} - R_5 = 8 - 0 = 8; \\ R'_{26} &= R_{26}^{\Pi} - R_2 = 15 - 4 = 11; & R'_{58} &= R_{58}^{\Pi} - R_5 = 16 - 0 = 16; \\ R'_{36} &= R_{36}^{\Pi} - R_3 = 8 - 8 = 0; & R'_{67} &= R_{67}^{\Pi} - R_6 = 0 - 0 = 0; \\ R'_{37} &= R_{37}^{\Pi} - R_3 = 19 - 8 = 11; & R'_{78} &= R_{78}^{\Pi} - R_7 = 0 - 0 = 0; \\ R'_{38} &= R_{38}^{\Pi} - R_3 = 29 - 8 = 21; \end{aligned}$$

6. Частные резервы времени второго вида операций вычисляются по формуле

$$R''_{ij} = R_{ij}^{\Pi} - R_j.$$

$$\begin{aligned}
R_{12}^* &= R_{12}^{\text{II}} - R_2 = 4 - 4 = 0; & R_{45}^* &= R_{45}^{\text{II}} - R_5 = 0 - 0 = 0; \\
R_{14}^* &= R_{14}^{\text{II}} - R_4 = 0 - 0 = 0; & R_{46}^* &= R_{46}^{\text{II}} - R_6 = 8 - 0 = 8; \\
R_{23}^* &= R_{23}^{\text{II}} - R_3 = 8 - 8 = 0; & R_{56}^* &= R_{56}^{\text{II}} - R_6 = 0 - 0 = 0; \\
R_{24}^* &= R_{24}^{\text{II}} - R_4 = 4 - 0 = 4; & R_{57}^* &= R_{57}^{\text{II}} - R_7 = 8 - 0 = 8; \\
R_{26}^* &= R_{26}^{\text{II}} - R_6 = 15 - 0 = 15; & R_{58}^* &= R_{58}^{\text{II}} - R_8 = 0 - 0 = 0; \\
R_{36}^* &= R_{36}^{\text{II}} - R_6 = 8 - 0 = 8; & R_{67}^* &= R_{67}^{\text{II}} - R_7 = 0 - 0 = 0; \\
R_{37}^* &= R_{37}^{\text{II}} - R_7 = 19 - 0 = 19; & R_{78}^* &= R_{78}^{\text{II}} - R_8 = 0 - 0 = 0; \\
R_{38}^* &= R_{38}^{\text{II}} - R_8 = 29 - 0 = 29;
\end{aligned}$$

Расчет параметров сетевой модели непосредственно на сетевом графике

Данный метод расчета может быть рекомендован для проведения поверочного расчета сети. Максимальный объем сети для расчета этим методом не должен превышать 1500 тысяч операций. Для анализируемой сетевой модели в терминах операций и событий составляется сетевой график, вершины которого изображаются геометрическими фигурами, например, кругами, разделенными на четыре сектора. В верхний сектор заносится номер события, в левый сектор – ранний срок свершения события, в правый сектор – поздний срок свершения события, в нижний сектор – резерв времени события (рис 11. 3).

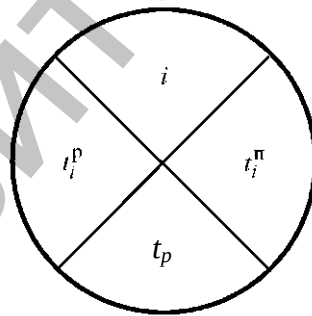


Рис. 11.3. Диаграмма вершины сети для расчета параметров непосредственно по сетевому графику

Процесс расчета параметров непосредственно по сетевому графику включает четыре этапа: расчет ранних и поздних сроков свершения событий; расчет резервов; времени событий; определение критического пути.

Выполнение расчета покажем на примере.

Пример 11.2. Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком (см. рис. 11.4). Требуется провести поверочный расчет ранних и поздних сроков свершения событий, резервов времени событий и продолжительности критического пути непосредственно на сетевом графике.

Решение. События на сетевом графике изображаем кругами, разделенными на четыре сектора. Длительности операций проставляем над соответствующими дугами. В верхние сектора заносим номера событий (рис. 11.4).

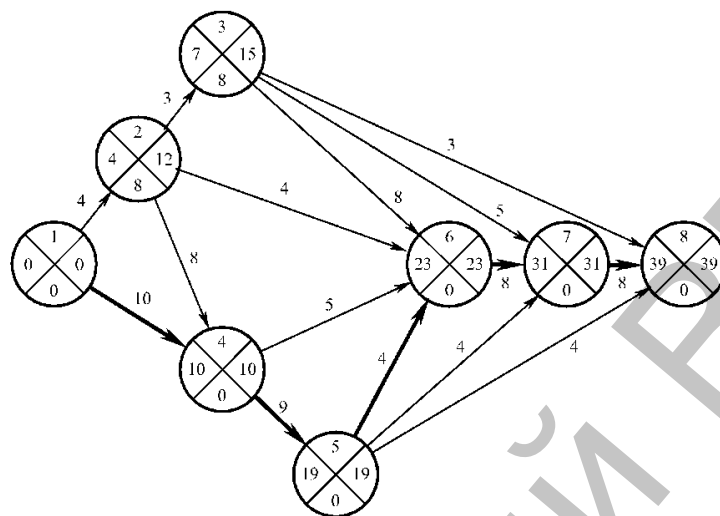


Рис. 11.4. Расчет параметров сети непосредственно по сетевому графику

1. Расчет ранних сроков свершения событий выполняют, начиная с исходного события, последовательно в порядке возрастания номеров событий с использованием формулы (11.47).

Результаты расчета заносят в левые сектора соответствующих вершин сетевого графика. Ранний срок свершения завершающего события, которым в данном примере является восьмое, равен продолжительности критического пути

$$T_{кр} = t_8^p = 39.$$

2. Расчет поздних сроков свершения событий вычисляем по формуле (11.48).

Вычисление начинают с завершающей (восьмой) вершины, выполняют последовательно в порядке убывания номеров вершин и заканчивают на исходной вершине. Результаты вычислений заносят в правый сектор соответствующих вершин.

Для завершающего события $t_8^n = t_8^p = 39$.

3. Расчет резервов времени события определяется по формуле

$$R_i = t_i^n - t_i^p.$$

При этом из содержимого правого сектора вычитают содержимое левого сектора, а результат заносят в нижний сектор.

4. Определение критического пути. При определении состава критического пути используют такое свойство, как отсут-

вие резервов у событий, принадлежащих критическому пути. Нулевые резервы времени имеют события 1, 4, 5, 6, 7, 8, поэтому критический путь проходит через них, а сам критический путь включает операции $\langle 1, 4 \rangle$, $\langle 4, 5 \rangle$, $\langle 5, 6 \rangle$, $\langle 6, 7 \rangle$, $\langle 7, 8 \rangle$.

Аналогичным образом можно произвести поверочный расчет параметров сети по сетевому графику в терминах операций, определяя при этом поздние и ранние сроки начала и окончания операций и полные резервы времени операций.

Табличный метод расчета параметров сети

При расчете параметров сетевой модели табличным методом составляется специальная таблица, строки и столбцы которой заполняются в определенном порядке, облегчающем выполнение расчетов. Метод применяется, когда число операций в комплексе не превышает четырехсот. Схема метода представлена в табл. 11.1.

Рассмотрим содержание и порядок выполнения этапов табличного метода расчета параметров сети.

I этап. Составление таблицы и занесение в таблицу исходных данных. В зависимости от рассчитываемых

Таблица 11.1

Расчет параметров сети табличным методом

Этап	Содержание этапа
I	1. Составление таблицы 2. Занесение исходных данных в таблицу
II	3. Вычисление ранних сроков начала и окончания операций 4. Вычисление частных резервов времени второго вида
III	5. Вычисление поздних сроков начала и окончания операций 6. Вычисление частных резервов времени первого вида
IV	7. Вычисление полных резервов времени операций

параметров таблица имеет различное число столбцов. Так, например, при расчете параметров операции шапка таблицы 11.2 имеет следующий вид:

Таблица 11.2

Таблица расчета параметров операции в сети

Количество непосредственно предшествующих операций	Код операции		Параметр									
	i	j	t_{ij}^{δ}	t_{ij}	$t_{ij}^{\delta,\hat{i}}$	r_{ij}''	r_{ij}'	$t_{ij}^{\gamma,\hat{i}}$	t_{ij}	$t_{ij}^{\gamma,\hat{i}}$	t_{ij}^{γ}	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1												

В столбец 2 заносят номера начальных, а в столбец 3 – номера конечных событий операций. Для упорядоченной сети коды операций заносят последовательно в порядке возрастания номе-

ров начальных событий. Занесение начинают с исходного события, и в случае наличия нескольких операций с одинаковыми номерами начальных событий выполняют в порядке возрастания номеров конечных событий.

Затем заполняют столбцы 5 и 10, в которые заносят продолжительность соответствующих операций, и столбец 1, определяя количество непосредственно предшествующих операций по сетевому графику либо подсчитывая количество операций, для которых начальное событие интересующей нас операции является конечным. При этом достаточно просмотреть только операции, расположенные в таблице выше интересующей.

II этап. Вычисление ранних сроков начала и окончания операций и частных резервов времени второго вида. В столбец 4 заносят ранние сроки начала операции, начиная с тех операций, для которых начальным событием служит исходное. В соответствующие строки заносятся нули. Одновременно в столбец 6 в эти же строки заносят продолжительность соответствующих операций, так как для них ранний срок окончания операции совпадает с ее продолжительностью.

Для последующих операций столбцы 4 и 6 заполняются следующим образом. Определяют количество непосредственно предшествующих операций (столбец 1). Затем среди операций, расположенных в таблице выше интересующей, выбирают все операции, для которых начальное событие интересующей операции служит конечным. Число этих операций должно быть равно числу непосредственно предшествующих операций. Для выбранных операций просматривают столбец 6, и наибольшее значение раннего срока окончания операций из всех просмотренных заносят в столбец 4 в качестве раннего срока начала интересующей операции. Столбец 6 для данной операции заполняют, суммируя содержимое столбцов 4 и 5 для данной строки. Заполнение столбцов 4 и 6 ведут до тех пор, пока эти столбцы не будут заполнены полностью.

После заполнения столбцов 4 и 6 приступают к столбцу 7, занося в него частные резервы времени второго вида операций следующим образом.

Просматривают столбец 3 номеров конечных событий операций. Если какой-либо номер встречается в столбце только один раз, то в соответствующую этому номеру строку столбца 7 заносят нуль, так как операция с таким номером конечного события имеет нулевой частный резерв времени второго вида. Если какой-либо номер конечного события встречается в столбце 3 более одного раза, то просматривают содержимое столбца 6 для всех

строк с данным номером, выбирают наибольшее из просмотренных значений, и затем разность между наибольшим значением и содержимым столбца 6 для каждой строки с данным номером заносят в эту строку столбца 7.

Процесс заполнения столбца 7 заканчивается, когда будут вычислены частные резервы времени второго вида для всех операций и все строки столбца 7 будут заполнены. Вычисления при этом фактически производятся по формуле, эквивалентной выражению (3.4.39)

$$R_{ij}'' = t_{jk}^{pn} - t_{ij}^{po},$$

III этап. Вычисление поздних сроков начала и окончания операций и частных резервов времени первого вида выполняется последовательно в порядке убывания номеров начальных событий операций. Начинают расчет с операций, конечные события которых совпадают с завершающим. Если такая операция принадлежит критическому пути, то для нее справедливо равенство

$$t_{ij}^{po} = t_{ij}^{no} = T_{kp}.$$

Поэтому просматривая строки столбца 6, соответствующие этим операциям, выбирают наибольшее значение и заносят его во все те строки столбца 11, которые соответствуют операциям, имеющим завершающее событие в качестве конечного. Кроме того, это же значение определяет продолжительность критического пути, поэтому его выделяют в таблице тем или иным способом. Поздний срок начала данных операций вычисляется по формуле

$$t_{ij}^{nn} = t_{ij}^{no} - t_{ij},$$

путем вычитания из содержимого строки столбца 11 содержимого этой же строки столбца 10. Результат заносят в соответствующую строку столбца 9.

Затем выбирают первую снизу незаполненную строку столбца 11. Просматривают начальные события всех операций, расположенных ниже выбранной. Для всех операций, у которых номера начальных событий совпали с номером конечного события выбранной операции, сравнивают содержимое строк столбца 9 и наименьшее из сравниваемых значений заносят в выбранную строку столбца 11. Вычитая из него содержимое этой же строки столбца 10, получают поздний срок начала выбранной операции, который заносят в эту же строку столбца 9. Таким образом, процесс заполнения столбцов 11 и 9 происходит практически параллельно.

После заполнения столбцов 9 и 11 переходят к вычислению частных резервов времени первого вида операций и заполнению столбца 8 таблицы, которое производят следующим образом.

Просматривают столбец 2 номеров начальных событий операций. Если этот номер в столбце единственный, то в строку столбца 8, соответствующую данному номеру, заносят нуль. Если номер встречается более одного раза, то для всех этих строк с данным номером просматривают содержимое столбца 9, выбирают наименьшее из просмотренных значений и затем разность между содержимым столбца 9 для строки с данным номером и наименьшим значением заносят в эту же строку столбца 8. Процесс соответствует вычислению частного резерва времени первого вида операции по формуле, эквивалентной выражению (3.4.38).

$$R'_{ij} = t_{ij}^{nn} - t_{ki}^{no}.$$

IV этап. Вычисление полных резервов времени операций выполняют по формуле

$$R_{ij}^n = t_{ij}^{nn} - t_{ij}^{pn} = t_{ij}^{no} - t_{ij}^{po}.$$

Для этого достаточно из содержимого строки столбца 9 вычесть содержимое этой же строки столбца 4 и результат занести в ту же строку столбца 12, либо из содержимого строки столбца 11 вычесть содержимое этой же строки столбца 9 и результат занести в ту же строку столбца 12.

После окончания заполнения столбца 12 все операции с нулевым полным резервом выделяются тем или иным способом, так как они принадлежат критическому пути. Продолжительность критического пути равна позднему или раннему сроку окончания операции, конечное событие которой совпадает с завершающим событием, а полный резерв времени равен нулю.

Результаты расчета сетевых параметров рассмотренным методом для сетевой модели, представленной сетевым графиком (см. рис. 11.4), приведены в табл. 11.3. Начальные и конечные события операций, составляющих критический путь, выделены жирным шрифтом. Продолжительность критического пути, представленная в последней строке столбцов 6 и 11, также выделена тем же шрифтом.

Матричный метод расчета параметров сети. Матричный метод позволяет определять ранние и поздние сроки свершения событий, а также состав и продолжительность критического пути.

Таблица 11.3

Результаты расчета сетевых параметров табличным методом

Число непосредственно предшествующих операций	Код операции		Параметр								
	i	j	t P-н	г. V	tP			t п.н	г. V	t '	'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	0	4	4	0	4	4	4	8	4
0	1	4	0	10	10	0	0	0	10	10	0
1	2	3	4	3	7	0	4	12	3	15	8
1	2	4	4	2	6	4	0	8	2	10	4
1	2	6	4	4	8	15	11	19	4	23	15
1	3	6	7	8	15	8	0	15	8	23	8
1	3	7	7	5	12	19	11	26	5	31	19
1	3	8	7	3	10	29	21	36	3	39	29
2	4	5	10	9	19	0	0	10	9	19	0
2	4	6	10	5	15	8	8	18	5	23	8
1	5	6	19	4	23	0	0	19	4	23	0
1	5	7	19	4	23	8	8	27	4	31	8
1	5	8	19	4	23	16	16	35	4	39	16
4	6	7	23	8	31	0	0	23	8	31	0
3	7	8	31	8	39	0	0	31	8	39	0

Результаты расчета сетевых параметров табличным методом

Этапы метода и последовательность их выполнения представлены в табл. 11.4. Для упрощения расчетов и перед их проведением сеть упорядочивают. Приведем пример расчета параметров сети матричным методом.

Таблица 11.4

Расчет параметров сети матричным методом

Этап	Содержание этапа
I	Построение матрицы
II	Вычисление ранних сроков свершения событий
III	Определение продолжительности и состава критического пути
IV	Вычисление поздних сроков свершения событий

Пример 11.3. Пусть сетевая модель, ориентированная на операции и события, задана сетевым графиком (см. рис. 11.4). Требуется определить ранние и поздние сроки свершения событий, а также состав и продолжительность критического пути.

Решение.

I этап. Построение матрицы, фактически представляющей собой взвешенную матрицу смежности вершин сетевой модели, элементы которой равны продолжительности соответствующих операций, с присоединенными справа столбцом ранних сроков

свершения событий и снизу – строкой поздних сроков свершения событий (рис. 11.5).

II этап. Вычисление ранних сроков свершения событий начинают с исходного события и выполняют в порядке возрастания номеров событий, последовательно заполняя при этом строки столбца t_i^P матрицы.

Поскольку ранний срок свершения исходного события всегда равен нулю, то заносят нуль в первую строку столбца t_i^P . Затем просматривают столбец 2 матрицы и содержимое первой строки данного столбца суммируют с содержимым этой же строки столбца t_i^P . Сумму заносят во вторую строку столбца t_i^P .

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	t_i^P
1		4		10					0
2			3	2		4			4(1)
3						8	5	3	7(2)
4					9	5			10(1)
5						4	4	4	19(4)
6							8		23(5)
7								8	31(6)
8									39(7)
t_j^n	0	8	15	10	19	23	31	39	39

Рис. 3.4.5. Матрица временных параметров событий сети

В скобках указывают номер строки, для которой вычислена эта сумма. Затем переходят к следующему столбцу и все вычисления в дальнейшем выполняют по следующей схеме.

Просматривают очередной столбец. Содержимое строк этого столбца суммируют с содержимым тех же строк столбца t_i^P . Наибольшая полученная сумма заносится в строку с номером, совпадающим с номером просматриваемого столбца, с указанием в скобках строки, для которой эта сумма получена. После этого переходят к следующему столбцу. Вычисления заканчивают на завершающем событии.

III этап. Определение продолжительности и состава критического пути. Ранний срок свершения завершающего события равен продолжительности критического пути. Поэтому это значение из строки 8 столбца t_i^P заносят в строку t_i^i столбца t_i^P .

Состав критического пути определяют следующим образом. Завершающее событие обязательно принадлежит критическому пути. Просматривают номера событий в скобках столб-

cat_i^P , начиная с завершающего события. В строке 8 в скобках указано событие 7, в строке 7 – событие 6, в строке 6 – событие 5, в строке 5 – событие 4, в строке 4 – событие 1, которое является исходным. Все указанные события принадлежат критическому пути.

IV этап. Вычисление поздних сроков свершения событий. Поздний срок свершения завершающего события равен раннему сроку его свершения. Поэтому заносим это значение в строку $t_i^{\ddot{}}$ столбца 8. Вычисление поздних сроков свершения остальных событий выполняют последовательно, начиная с события, номер которого меньше номера завершающего на единицу, в порядке убывания номеров событий. Общая схема вычислений имеет следующий вид.

Из содержимого строки $t_i^{\ddot{}}$ вычитают по столбцам содержимое строки, номер которой совпадает с номером события, для которого вычисляют поздний срок свершения. Сравнивают полученные разности и наименьшую из них заносят в строку $t_i^{\ddot{}}$ соответствующего столбца. После этого переходят к следующему событию. Вычисления заканчивают на исходном событии. Равенство нулю вычисленного значения позднего срока свершения исходного события служит контролем правильности проведенных вычислений.

Следует отметить, что матричный метод основан на унифицированном алгоритме Форда.

Методы расчета параметров сети, основанные на статистическом моделировании

Они включают моделирование реализаций продолжительностей операций и структуры комплекса в соответствии с заданными законами распределения методами статистических испытаний, вычисление для полученных реализаций конкретных значений искомых параметров одним из рассмотренных выше методов, обработку полученных данных методами математической статистики и получение необходимых оценок числовых характеристик этих параметров. Точность определения параметров данными методами на 15–20% выше, чем детерминированными. Однако трудоемкость статистических методов расчета параметров весьма велика, поэтому ручной счет возможен только для сетевых моделей малых объектов, а для остальных моделей необходимо использование ЭВМ.

При методах расчета параметров сети с использованием ЭВМ применяют универсальные и специализированные аналоговые ЭВМ.

Основными в настоящее время являются методы с использованием универсальных ЭВМ, так как они позволяют решать наиболее широкий спектр задач по расчету, анализу и оптимизации параметров сети. Для этого разработаны пакеты программ, реализующие различные алгоритмы. Достаточно полно многие из этих алгоритмов и программ описаны в литературе.

Методы, использующие специализированные аналоговые ЭВМ, основаны на создании аналогии между исследуемой сетевой моделью и электрической сетью, имеющей ту же топологию, что и исследуемая. Операции в этом случае моделируются с помощью отдельных цепей, включающих источники ЭДС и вентильные элементы, а топология исследуемой сетевой модели отображается соответствующим соединением этих цепей. Напряжения источников ЭДС устанавливаются пропорционально длительностям моделируемых операций, вентили обеспечивают направленность протекания тока в цепях. Исследуемые параметры сетевой модели определяются путем непосредственного измерения разности потенциалов между соответствующими точками электрической схемы при подключении к ней определенным образом источников тока.

Сетевой график сетевой модели в терминах операций и событий и эквивалентная ей электрическая сеть с подключением для измерения продолжительности критического пути источником тока I_0 представлены на рис. 11.6 и 11.7. Ток в сети между узлами идет по ветвям с максимальной суммой напряжений, включенных в них источников ЭДС, т.е. по ветви, соответствующей критическому пути, что позволяет измерить его в единицах напряжения, а также выделить цепи, входящие в этот путь, применяя различные индикаторы.

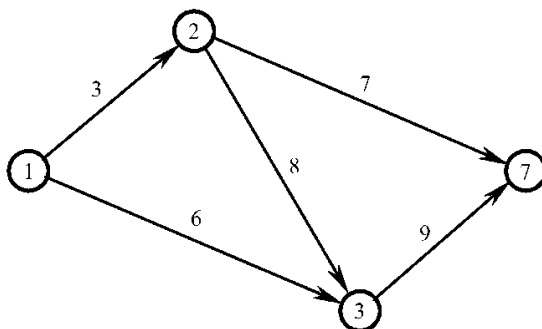


Рис. 11.6. Сетевой график в терминах операций и событий

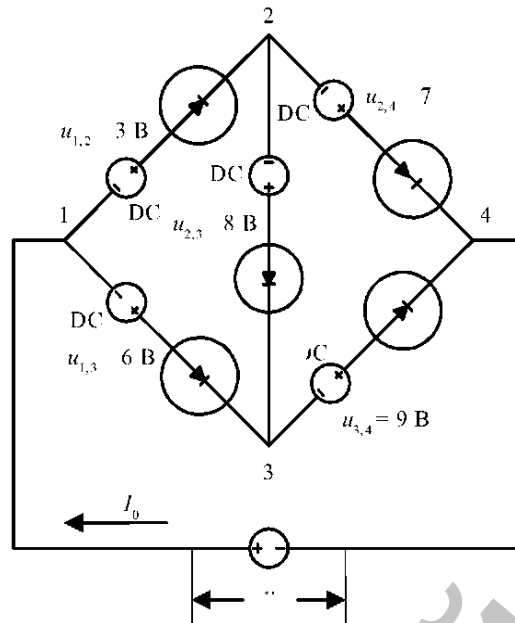


Рис. 11.7. Электрический аналог (аналоговая модель) сети, представленной на рис. 3.4.6

В рассматриваемом примере ток течет по ветвям $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$, $\langle 3, 4 \rangle$, так как $u_{1,2} + u_{2,3} > u_{1,3}$ и $u_{2,3} + u_{3,4} > u_{2,4}$. Следовательно, эти цепи составляют критический путь, а его продолжительность, измеренная в единицах напряжения, равна 20 В.

Аналоговое моделирование комплексов операций на специализированных ЭВМ целесообразно в тех случаях, когда число операций не превышает пятисот, а сама модель требует постоянной коррекции.

ТЕМА 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

В коммерческой деятельности приходится принимать решения, учитывая множество факторов различной природы. При этом специфика коммерческой деятельности такова, что учитываемые при принятии решений факторы нередко обладают так называемым свойством неопределенности, поскольку нельзя заранее определить точно, каково будет значение того или иного фактора или показателя. Отсюда следует, что и результат принятия решения также будет обладать свойством неопределенности. Например, объем продажи в значительной степени зависит от спроса населения на тот или иной товар. Спрос, как известно, является величиной случайной, следовательно, его значение имеет некоторый разброс и является точно неопределенным.

Неопределенность значений различных факторов приводит к тому, что рекомендации по решению проблемы не могут быть столь же четкими и однозначными, как в случаях полной определенности. В процессе поиска решений появляются возможные варианты решений. Поэтому принятие решения состоит в выборе наилучшего варианта из имеющихся.

Для решения любой проблемы независимо от ее характера существенным является вопрос: кто должен отвечать за решение проблемы? Другими словами, должно существовать некое ответственное лицо, принимающее решение. Это может быть директор, бухгалтер, коммерсант, заведующий секцией, продавец и т.д. или некоторая группа лиц: комиссия, совет директоров, бригада и т.д.

Лицо, принимающее решение, — это реально существующий индивидум (или группа), которого не устраивает состояние дел или перспектива их будущего развития и который имеет полномочия действовать так, чтобы это состояние изменить.

В настоящее время многие решения в коммерческой деятельности — заказ на поставку того или иного вида товаров, заключение договоров с поставщиками, распределение людей в учреждениях по должностям или операциям, управление движением товаров — все же не оптимальны. Принятие решений в этом случае является искусством и в большой степени зависит от субъективных качеств лица, принимающего решение. Однако в условиях широкого развития кооперации, усложнения производственных связей с поставщиками товаров народного потребления и, наконец, решения задач по

увеличению ассортимента и качества товаров в торговой сети и стремления к более полному удовлетворению потребностей населения приводят к тому, что ответственность человека за последствия принимаемых решений многократно возросла. При этом, несмотря на отсутствие полной определенности, необходимо проводить количественный анализ и на его основе принимать то или иное, но обоснованное решение. В настоящее время разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях неопределенности. В некоторых, наиболее простых, случаях эти методы позволяют найти множество решений и выбрать из них оптимальное. В более сложных случаях эти методы дают вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сущности явлений и оценить каждое из возможных решений с различных точек зрения, взвесить его преимущества и недостатки и в конечном счете принять если не единственно правильное, то по крайней мере близкое к оптимальному решение.

Следует заметить, что при выборе решения в условиях неопределенности всегда неизбежен элемент произвола, а следовательно, и риска. Недостаточность информации всегда опасна, и за нее приходится платить. Поэтому в условиях сложной ситуации необходимо представить варианты решения и их последствий в такой форме, чтобы сделать произвол выбора менее сильным, а риск – минимальным.

Задачами принятия решений в условиях полной или частичной неопределенности занимается теория игр и статистических решений.

В коммерческой деятельности приходится принимать решения в условиях противодействия другой стороны, которая может преследовать противоположные или иные цели, добиваться других путей достижения цели, препятствовать теми или иными действиями либо состояниями внешней среды достижению намеченной цели. Причем эти противодействия противоположной стороны могут носить пассивный или активный характер. В таких случаях приходится учитывать возможные варианты поведения противоположной стороны, ответные действия, возможную реакцию и соответственно исходы.

Возможные варианты поведения обеих сторон и их исходов для каждого сочетания альтернатив и состояний можно представить в виде математической модели, которая называется игрой.

Если в качестве противоположности выступает неактивная, пассивная сторона, которая явно активно не противодействует достижению намеченной цели, то такие игры называются играми с «природой». Такой стороной в коммерции являются неизвестность поведения клиентов, реакция населения на новые виды то-

варов, неясность погодных условий при перевозке товаров или проведении ярмарки, недостаточная информированность о коммерческих операциях, закупках, сделках и т.п.

В других ситуациях противоположная сторона активно, сознательно может противостоять достижению намеченной цели. В подобных случаях происходит столкновение противоположных интересов, мнений, целей. Такие ситуации называются конфликтными, а принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Известно, что противник сознательно стремится предпринять наименее выгодные для вас действия, чтобы обеспечить себе наибольший успех. Неизвестно, в какой мере противник умеет оценить обстановку и возможные последствия, как он оценивает ваши возможности и намерения. Обе стороны конфликта не могут точно предсказать взаимные действия. Несмотря на такую неопределенность, принимать решения приходится каждой стороне конфликта.

Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций. Основными ограничениями этой теории являются предположение о полной «идеальной» разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного решения.

Основные понятия теории игр

Конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры – партией, исход игры – выигрышем или проигрышем.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. Ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают личные и случайные. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, пасовка, сдача карт и т.п.).

Одним из основных понятий теории игр является стратегия. Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

В большинстве конфликтных ситуаций при выборе разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько показателей и факторов. Причем стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной и по другим.

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

- комбинаторные игры, в которых правила дают возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, выбрать тот из них, который ведет к наилучшему для игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии все их перебрать и проанализировать;

- азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Азартными играми теория игр не занимается;

- стратегические игры, в которых полная неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе свойства комбинаторных и азартных игр, стратегичность игр может сочетаться с комбинаторностью и т.д.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более игроков. Если в игре участвуют два игрока, игра называется парной, если число игроков больше двух – множественной. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Множественная игра с двумя постоянными коалициями превращается в парную. Парные игры получили наибольшее распространение в практике анализа игровых ситуаций.

Различают игры и по сумме выигрыша. Игра называется игрой с нулевой суммой, если каждый игрок выигрывает за счет других, а сумма выигрыша одной стороны равна проигрышу другой. В парной игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Парная игра с нулевой суммой называется антагонистической игрой. Наиболее полно исследованы в теории игр антагонистические игры. Игры, в которых выигрыш одного игрока и проигрыш другого не равны между собой, называются играми с ненулевой суммой.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий. Игра называется бесконечной, если хотя бы у одного игрока имеется бесконечное число стратегий.

По количеству ходов, которые делают игроки для достижения своих целей, игры бывают одношаговые и многошаговые. Одношаговые игры заключаются в том, что игрок выбирает одну из доступных ему стратегий и делает всего один-единственный ход. В многошаговых играх игроки для достижения своих целей делают последовательно ряд ходов, которые могут ограничиваться правилами игры либо могут продолжаться до тех пор, пока у одного из игроков не останется ресурсов для продолжения игры.

В последнее время получили большое распространение так называемые деловые игры. Деловая игра имитирует взаимодействие людей и проявляется как упражнение в последовательном принятии множества решений, основанное на некоторой модели коммерческой деятельности и на исполнении участниками игры конкретных ролей-должностей.

Деловые игры предназначены для воспроизведения и согласования коммерческих интересов. В основе конструкции игры лежат взаимосвязь ресурсов и использование знаний об их возможностях. Деловые игры имитируют организационно-экономические взаимодействия в различных звеньях коммерческих организаций и предприятий. Элементами игровой модели являются: участники игры; правила игры; информационный массив, отражающий состояние и движение ресурсов моделируемой хозяйственной системы. Преимущества игровой имитации перед реальным объектом таковы: наглядность последствий принимаемых решений, переменный масштаб времени; повторение имеющегося опыта с изменением установок; переменный масштаб охвата коммерческих явлений и объектов. Основными направлениями использования деловых игр являются следующие:

- учебный процесс, например, моделирование операций;
- аттестация персонала, проверка их компетентности;
- научные исследования;
- разработка бизнес-планов.

В деловых играх игрокам обычно задаются начальные условия, в которых они находятся, сообщаются правила проведения игры, представляются варианты возможных решений и оценка их последствий. В игре обязательно присутствует «ведущий», который руководит игрой, оценивает принятые игроками решения, состояния, в которых они могут находиться в процессе игры, и определяет выигрыши и проигрыши по исходам игры.

Приведенный перечень существующих в настоящее время игр далеко не исчерпан. Проведение классификации и группировки игр позволяет для однотипных игр найти общие методы модели поиска альтернатив в принятии решения, выработать рекомендации по наиболее рациональному образу действий в ходе развития конфликтных ситуаций в коммерческой деятельности.

Основными вопросами теории игр, которые возникают в коммерческой деятельности, являются:

1) в чем состоит оптимальность поведения каждого из игроков в игре, какие свойства стратегий следует считать признаками оптимальности;

2) существуют ли стратегии игроков, которые обладали бы атрибутами оптимальности;

3) если существуют оптимальные стратегии, то как их найти?

При управлении производством принимать решения очень часто приходится не имея достаточной информации, то есть в условиях неопределенности и риска.

Методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска занимается математическая теория игр.

В теории игр рассматриваются такие ситуации, когда имеются два участника выполнения операции, каждый из которых преследует противоположные цели. В качестве участников могут выступать коллективы, конкурирующие предприятия и т.д. Во всех случаях предполагается, что операция проводится против разумного противника (конкурента), преследующего свои собственные цели и сознательно противодействующего достижению цели другим участником.

Так как цели противоположны, а результат мероприятия каждой из сторон зависит от действий конкурента, то эти действия называют конфликтными ситуациями. В конфликтной ситуации сталкиваются противоположные интересы двух участников. Формализованная (схематизированная) модель конфликтной ситуации называется игрой. Результат игры – победа или поражение, которые не всегда имеют количественное выражение, можно выразить (условно) числами (например, в шахматах: 1, 0, 1/2).

Игра называется игрой с нулевой суммой, если один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Развитие игры во времени представляется как ряд последовательных «ходов». Ходы могут быть сознательные и случайные. Случайный ход – результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т.п.). Сознательный ход – выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегии) и принятие решения об его осуществлении.

Возможные варианты (исходы) игры сводятся в прямоугольную таблицу (табл. 12.1) – платежную матрицу, в которой строки соответствуют различным стратегиям игрока A , столбцы – стратегиям игрока B , g_{ij} . Для условности предположим, что игрок A – выигрывает, а игрок B – проигрывает.

В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$) однозначно определяется исход игры q_{ij} .

Цель теории игр – выработка рекомендаций для различного поведения игроков в конфликтной ситуации, то есть выбор оптимальной стратегии для каждого из них.

Для нахождения оптимальной стратегии необходимо проанализировать все возможные стратегии и рассчитывать на то, что разумный противник на каждую из них будет отвечать такой, при которой выигрыш игрока A минимален. Обычно минимальные числа в каждой строке обозначаются α_i и выписываются в виде добавочного столбца матрицы (табл. 12.2).

Они обозначают минимально возможный выигрыш игрока A при соответствующей стратегии A_i . В каждой строке будет свое $\alpha_i = \min q_{ij}$. Так как игрок A выигрывает, то предпочтительной для игрока A является стратегия, при которой α_i обращается в максимум, то есть $\alpha = \max \alpha_{ij}$ или $\alpha = \max \min q_{ij}$, где α – максиминный выигрыш (максимин), а соответствующая ей стратегия – максиминная.

Таблица 12.1

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}

Таблица 12.2

	B_1	B_2	...	B_n	α_i
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}	α_1
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}	α_i
β_i	β_1	β_2	...	β_n	

Если придерживаться максиминной стратегии, то при любом поведении стороны B (конкурента) гарантирован выигрыш,

во всяком случае не меньше α . Поэтому α называют также ценой игры – тот гарантированный минимум, который можно обеспечить при наиболее осторожной (перестраховочной) стратегии.

Очевидно, что аналогичные распределения можно провести и для конкурента B , который должен рассмотреть все свои стратегии, выделяя для каждой из них максимальные значения проигрыша $\beta_j = \max g_{ij}$ (последняя строка матрицы). Из всех значений β_j находят минимальное: $\beta_j = \min \max q_{ij}$, которое дает минимальный выигрыш, или минимакс. Такая β -стратегия – минимаксная, придерживаясь которой сторона B гарантировано, что в любом случае проиграет не больше β . Поэтому β называют верхней ценой игры.

Если $\alpha = \beta = C$, то число C называют чистой ценой игры, или седловой точкой.

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе пары максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными, так как любое отклонение от этих стратегий приводит к уменьшению выигрыша первого игрока и увеличению проигрыша второго игрока по сравнению с ценой игры C .

Однако не все матрицы имеют седловую точку. Тогда решение находят, применяя смешанные стратегии, то есть чередуя случайным образом несколько чистых стратегий (гибкая тактика).

Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называют смешанной стратегией данного игрока.

Из этого определения следует, что сумма компонент этого вектора равна единице, а сами компоненты не отрицательны.

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, а второго игрока – как вектор $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, где

$$u_i \geq 0 (i=1), z_j \geq 0 (j=1), \sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n z_j = 1. \quad (12.1).$$

Если u_i – оптимальная стратегия первого игрока, z_j – оптимальная стратегия второго игрока, то число $v = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m q_{ij} u_i z_j$ называют ценой игры.

Для того чтобы число v – было ценой игры, а u_i и z_j оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^m q_{ij} u_i \geq v \quad (j=1), \quad (12.2)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} z_j \leq v \quad (i=1). \quad (12.3)$$

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную, в том числе и чистые стратегии.

Внимание к седловым точкам в теории игр традиционно. Объясняется это недоверием к максимину, как к принципу оптимального выбора в том случае, когда нет седловой точки. Поэтому естественно стремление заполнить промежуток между максимумом и минимаксом путем применения смешанных стратегий.

Однако не следует забывать, что:

- 1) применение смешанных стратегий рискованно, когда игра не повторяется;
- 2) если игра повторяется, надо иметь уверенность, что у противника нет информации о конкретных решениях другого игрока;
- 3) противник не обязан применять смешанные стратегии, равно как и стремиться к цели, противоположной цели другого игрока.

Обозначим смешанную стратегию первого игрока $P = \{p_i\}, 1 \leq i \leq n$ где p_i – вероятность применения i -й стратегии, $\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0$. Пусть смешанная стратегия второго игрока $Q = \{q_j\}, 1 \leq j \leq m$, где q_j – вероятность применения j -й стратегии, $\sum_{j=1}^m q_j = 1, q_j \geq 0$. P и Q определяют математическое ожидание платежа:

$$W(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} p_i q_j = P \| F_{ij} \| Q.$$

Теорема фон Неймана. Любая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях.

Доказательство. Множества M и N ограничены и замкнуты, так как $0 \leq p_i \leq 1, 0 \leq q_j \leq 1$, а функция W непрерывна по P и Q . W линейна по P при фиксированных Q , следовательно, вогнута по P при фиксированных Q . Аналогично W выпукла по Q при фиксированных P . M и N выпуклы.

Действительно, рассмотрим такие $0 \leq p_i \leq 1$ и $0 \leq p_i^j \leq 1$, что

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i^j = 1, \text{ в таком случае получаем}$$

$$0 \leq \lambda p_i \leq \lambda, 0 \leq (1-\lambda)p_i^j \leq 1-\lambda.$$

Складывая, получим $0 \leq \lambda p_i + (1-\lambda)p_i^j \leq 1$.

Кроме того, $\sum (\lambda p_i + (1-\lambda)p_i^j) = \lambda \sum p_i + (1-\lambda) \sum p_i^j = 1$.

Следовательно, при $p = \{p_i\}$ и $p^j = \{p_i^j\}$, $\lambda p + (1-\lambda)p^j$ тоже смешанная стратегия.

Применяя фундаментальную теорему, получим то, что требуется доказать: $\max_P \min_Q W(P, Q) = \min_Q \max_P W(P, Q)$.

Опираясь на доказанную теорему, можно быть уверенным, что решение игры в смешанных стратегиях всегда существует (если только вообще их можно применять). В теории игр доказывается теорема, указывающая на эквивалентность решения матричной игры в смешанных стратегиях и двойственной задачи линейного программирования.

Пусть P и Q оптимальные смешанные стратегии, v – цена игры, тогда

$$\begin{aligned} v &= \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n F_{ij} p_i = \max_P \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n F_{ij} p_i = \\ &= \min_Q \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m F_{ij} q_j = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m F_{ij} q_j = \\ &= \max_P \min_Q W(P, Q) = \min_Q \max_P W(P, Q). \end{aligned}$$

Из теоремы следует, что:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ij} p_i \geq 0 \quad j=1, \dots, m; \quad \sum_{j=1}^m F_{ij} q_j \geq 0 \quad i= \\ =1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} p_i q_j = v \quad x_i = \frac{p_i}{v}. \end{aligned}$$

Поделим полученную формулу на v , получим

$$\sum_{i=1}^n F_{ij} x_i \geq 1, \quad j=1, \dots, m, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{v} \rightarrow \min.$$

Из этой задачи линейного программирования можно получить оптимальные стратегии первого игрока (оперирующей стороны).

Аналогично, если $y_j = \frac{q_j}{v}$, получится задача линейного программирования для получения оптимальных стратегий второго

игрока: $\sum_{j=1}^m F_{ij} y_j \geq 1, \quad i=1, \dots, n, \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m y_j = \frac{1}{v} \rightarrow \max.$

ТЕМА 13. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ

13.1. ОБЩИЙ ВИД МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Функциональное моделирование систем представляет собой процесс построения и исследования моделей функционирования (функциональных моделей), т.е. объектов, исследование которых позволяет получить информацию о функционировании или поведении системы-оригинала.

Основной задачей функционального моделирования является установление зависимости между входными воздействиями на систему, свойствами системы и ее реакцией на эти воздействия. При этом структура системы-оригинала в явном виде не рассматривается и не учитывается.

К наиболее общему виду моделей функционирования систем следует отнести «черный ящик», т.е. систему, у которой могут быть наблюдаемы лишь внешние воздействия и реакция на эти воздействия. Свойства же системы и процессы, в ней протекающие, считаются неизвестными и не наблюдаемыми (рис. 13.1).

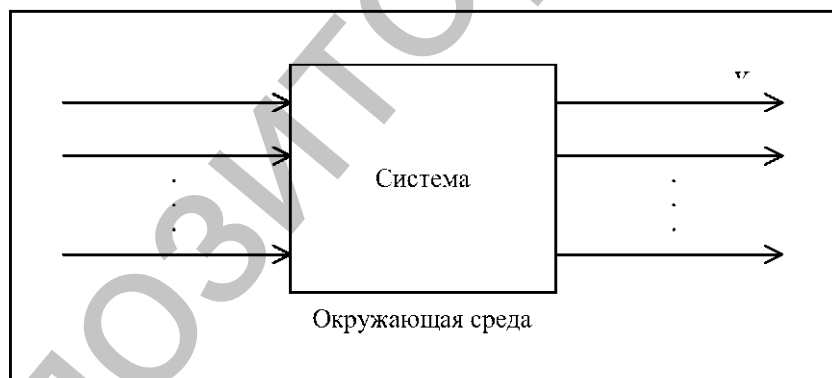


Рис. 13.1.1 Модель «черный ящик»

Процесс моделирования в данном случае заключается в построении модели

$$M_{\phi} = (Z, Y), \quad (13.1.1)$$

где Z – множество входных воздействий; Y – множество реакций, и преобразовании ее к виду

$$\Gamma = (Z, Y, G), \quad (13.1.2)$$

где G – соответствие; $G \subset Z \times Y$ – график соответствия.

В общем случае данное соответствие не является ни функциональным (есть пары с одинаковыми первыми и разными вторыми компонентами), ни инъективным (есть пары с одинаковыми

вторыми и разными первыми компонентами), поэтому одна и та же модель (13.1.2) описывает целый класс систем, гомоморфных для данной модели, которые при одинаковых входных воздействиях имеют разные реакции и, наоборот, одинаково реагируют на различные входные воздействия.

Такая неоднозначность моделей типа "черного ящика" может быть устранена путем введения определенных допущений или постулатов при формализованном описании функционирования систем.

1. Любая система функционирует во времени, взаимодействуя с внешней (окружающей) средой, и в каждый момент времени находится в одном из возможных состояний.

2. Состояние системы в данный момент времени определяется ее предыдущими состояниями и входными воздействиями на систему в данный и предыдущие моменты времени.

3. Реакция системы в данный момент времени определяется состояниями системы и входными воздействиями на нее в данный и предыдущие моменты времени.

4. Функционирование системы во времени рассматривается как процесс перехода системы из состояния в состояние.

13.2. МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В зависимости от способа построения и исследования модели функционирования системы различают следующие виды функционального моделирования: аналитическое, экспериментальное, имитационное.

Аналитическое моделирование

Сущность аналитического моделирования состоит в том, что модель функционирования системы, представляющая собой совокупность математических выражений, описывающих процессы, которые происходят или могут протекать в моделируемых системах, строится на основании результатов анализа этих процессов.

В основе аналитического моделирования лежит использование общих законов природы, а также законов и закономерностей протекания процессов в исследуемых системах, выявленных при анализе.

Построение модели включает следующие этапы:

- анализ процессов, протекающих в моделируемой системе;
- выбор процессов, существенно влияющих на функционирование системы;

- определение параметров, характеризующих выбранные процессы, описание этих процессов;
- построение аналитической модели функционирования системы.

Результатом построения аналитической модели является совокупность математических выражений, которые решаются аналитическими либо численными методами.

Достоинством аналитического моделирования следует считать возможность проведения полного исследования функционирования системы математическими методами (в любых условиях при любых управляющих и возмущающих воздействиях).

К недостаткам аналитического моделирования следует отнести:

- трудности, связанные с выявлением законов и закономерностей протекания процессов в сложных системах и обусловленные:
 - завуалированностью этих процессов,
 - трудностью выделения факторов, влияющих на процессы,
 - ложностью процессов, подлежащих анализу;
- необходимость существенных упрощений при построении аналитических моделей и неизбежная в связи с этим потеря информативности и адекватности моделей;
- сложность получаемой аналитической модели, несмотря на предпринятые упрощения.

Практически хорошие аналитические модели можно построить только для сравнительно простых и хорошо изученных систем.

Экспериментальное моделирование

Сущность экспериментального моделирования состоит в следующем. Проводится эксперимент над системой. По полученным результатам наблюдений входных и выходных переменных исследуемой системы строится математическая модель, позволяющая получить аналитическую зависимость между входом и выходом системы.

Структурная схема, поясняющая сущность экспериментального моделирования, представлена на рис. 14.2.1, где $X = \{U, Z\}$ – входное воздействие; U – управление; Z – возмущение;



Рис. 13.2.1. Структурная схема экспериментального моделирования

Y – реакция системы на входное воздействие; Y_M – реакция.

Степень адекватности модели системе определяется степенью близости реакций системы Y и модели Y_M . Для этого используется функция рассогласования

$$r = \rho(Y, Y_M) = \|Y - Y_M\|,$$

где $\| \cdot \|$ – норма, заданная в пространстве, которому принадлежат Y и Y_M .

Примеры функций рассогласования:

$$a) r = \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} (p(Y(t), Y_M(t)))^p dt \right\}^{1/p},$$

$$b) r = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} \rho(Y(t), Y_M(t)).$$

Если $Y(t) \in U(t)$ то, $Y(t) = Y(n)(t)$, $Y_M(t) = Y_M(n)(t)$. Тогда:

$$a) r(Y(t), Y_M(t)) = \left\{ \sum_{i=1}^n q_i |y_i(t) - y_{Mi}(t)|^p \right\}^{1/p},$$

где q_i , $i=1(1)n$ – вес i -й координаты; $q_i \geq 0$; $p \geq 1$;

$$b) \rho(Y(t), Y_M(t)) = \max_{\forall i \in [1(1)n]} ((q_i |y_i(t) - y_{Mi}(t)|)),$$

где $q_i \geq 0$.

Возможны и другие способы оценивания адекватности модели путем введения показателей, характеризующих пригодность модели для решения задач исследования моделируемой системы.

Обычно оператор, описывающий моделируемую функциональную зависимость, выбирают из вполне определенного класса. Наиболее часто используют класс линейных операторов (линейных дифференциальных, интегральных уравнений и т.д.). После выбора класса операторов определяют параметры модели. Достоинством экспериментального моделирования является то, что построение модели требует ограниченных априорных данных о системе. К недостаткам экспериментального моделирования можно отнести следующие:

- экспериментальная модель является, как правило, локальной, т.е. она адекватна только в узком диапазоне

изменения входных и выходных величин, в пределе которого производились исследования;

- экспериментальные модели плохо приспособлены к целям управления;
- построение модели возможно только для реально функционирующей системы;
- построение модели связано с проведением значительного числа экспериментов;
- не для любой системы возможно проведение экспериментов для построения модели, так как:
 - в результате эксперимента может быть нарушено нормальное функционирование системы;
 - в функциональных системах, составной частью которых являются люди, на результат экспериментов может повлиять эффект, проявляющийся в том, что люди, чувствуя, что за ними наблюдают, меняют свое поведение;
 - может оказаться невозможным проведение исследований вариантов функционирования системы, грозящих разрушением системы или ухудшением безопасности окружающей среды.

Имитационное моделирование

Имитационное моделирование представляет собой процесс построения модели исследуемой системы и экспериментирования с этой моделью для получения информации о функционировании моделируемой системы.

Сущность имитационного моделирования заключается в имитации на модели процессов функционирования исследуемой системы. При этом имитироваться может как весь процесс в целом, так и его составляющие с сохранением логической структуры процесса и последовательности протекания имитируемых явлений во времени.

К основным целям имитационного моделирования относятся:

- описание процессов функционирования систем;
- построение теорий и гипотез, объясняющих наблюдаемые процессы функционирования;
- предсказание хода функционирования системы в будущем.

Широкое применение имитационное моделирование получило с появлением компьютеров. Машинная имитационная модель представляет собой программу, реализующую с помощью компьютера алгоритм, отображающий динамику последователь-

ности смены состояний математической модели функционирования исследуемой системы. Такой алгоритм называется моделирующим. Поскольку моделирующий алгоритм воспроизводит работу математической модели, то при имитационном моделировании стремятся, чтобы математическая модель структурно и динамически соответствовала исследуемой системе.

Обычно моделирующий алгоритм включает:

- алгоритмы, моделирующие функционирование элементов системы;
- алгоритм, моделирующий взаимодействие элементов системы и объединяющий процессы их функционирования в единый процесс;
- алгоритм, обеспечивающий согласованную работу всех подалгоритмов моделирующего алгоритма (алгоритм-диспетчер); он определяет последовательность выполнения операций во времени.

Теоретически имитационные модели позволяют решать любые задачи по исследованию сложных систем. Исследование на этих моделях наиболее близко к натурному эксперименту, и его часто называют вычислительным экспериментом.

Применение имитационного моделирования следует считать целесообразным при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

- не существует законченной математической модели исследуемой системы, либо еще не разработаны аналитические методы ее исследования;
- аналитические методы исследования существуют, но столь сложны, что имитационное моделирование дает более простой способ исследования;
- аналитические методы не могут быть реализованы вследствие недостаточной профессиональной подготовки исследователей;
- невозможна постановка натурных экспериментов и наблюдение за функционированием реальных систем в реальных условиях;
- реальный процесс слишком скоротечен либо слишком длителен для того, чтобы обеспечить возможность эффективного наблюдения за ним.

Достоинства имитационного моделирования:

- достаточно информации только о функционировании элементов системы;
- допустимы любые классы входных воздействий при моделировании;

- не обязательно наличие реальной системы;
- удобно для исследования с точки зрения управления;
- имеет широкие возможности для применения в обучении. Недостатки имитационного моделирования:
 - сложность оценивания адекватности модели оригиналу,
 - громоздкость имитационной модели,
 - сложность интерпретации получаемых результатов;
 - исследование на имитационных моделях всегда имеет частный характер, так как каждая модель применима для моделирования относительно узкого класса систем с ограниченным числом условий функционирования, параметров системы и их значений.

Имитационное динамическое моделирование

Динамическое программирование связано с возможностью представления процесса управления в виде цепочки последовательных действий или шагов, развернутых во времени и ведущих к цели. Таким образом, процесс управления можно разделить на части и представить его в виде динамической последовательности и интерпретировать в виде пошаговой программы. Это позволяет спланировать программу будущих действий. Поскольку вариантов возможных планов-программ множество, то необходимо из них выбрать лучший, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью, что позволяют методы динамического программирования.

ТЕМА 14. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина «динамическое программирование». Следует заметить, что методы динамического программирования успешно применяются и при решении задач, в которых фактор времени не учитывается. В целом математический аппарат можно представить как пошаговое или поэтапное программирование. Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р.Э. Беллманом **принципа оптимальности**: оптимальное поведение обладает тем свойством, что какими бы ни были первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.

Из этого следует, что планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Таким образом, динамическое программирование в широком смысле представляет собой оптимальное управление процессом посредством изменения управляемых параметров на каждом шаге, и, следовательно, воздействовать на ход процесса, изменяя на каждом шаге состояние системы.

Необходимость такого подхода к управлению можно пояснить на следующем примере. Так, простая оптимизация лыжной гонки на 30 км относительно только одного критерия показывает на необходимость бежать спортсмену изо всех сил на каждом участке дистанции. В таком случае он рискует быстро выбиться из сил и не дойти до финиша вообще. Очевидно, в ходе процесса изменяется состояние спортсмена (системы), которое и следует учитывать в пошаговой оптимизации управления движением спортсмена.

Динамическое программирование (ДП) является одним из разделов оптимального программирования. Для него характерны специфические методы и приемы, применимые к операциям, в которых процесс принятия решения разбит на этапы (шаги). Од-

нако если в задачах линейного программирования зависимости между критериальной функцией и переменными обязательно линейны, то в задачах ДП эти зависимости могут иметь еще и нелинейный характер. ДП можно использовать как для решения задач, связанных с динамикой процесса или системы, так и для статических задач, связанных, например, с распределением ресурсов. Это значительно расширяет область применения ДП для решения задач управления. А возможность упрощения процесса решения, которая достигается за счет ограничения области и количества исследуемых при переходе к очередному этапу вариантов, усиливает достоинства этого метода.

Вместе с тем ДП свойственны и недостатки. Прежде всего, в нем нет единого универсального метода решения. Практически каждая задача, решаемая этим методом, характеризуется своими особенностями и требует проведения поиска наиболее приемлемой совокупности методов для ее решения. Кроме того, большие объемы и трудоемкость решения многошаговых задач, имеющих множество состояний, приводят к необходимости отбора задач малой размерности либо использования сжатой информации. Последнее достигается с помощью методов анализа вариантов и переработки списка состояний.

Для процессов с непрерывным временем ДП рассматривается как предельный вариант дискретной схемы решения. Получаемые при этом результаты практически совпадают с теми, которые получаются методами максимума Л.С. Понтрягина, или Гамильтона–Якоби–Беллмана.

ДП применяется для решения задач, в которых поиск оптимума возможен при поэтапном подходе, например, распределение дефицитных капитальных вложений между новыми направлениями их использования; разработка правил управления спросом или запасами, устанавливающими момент пополнения запаса и размер пополняющего заказа; разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; составления календарных планов текущего и капитального ремонтов оборудования и его замены; поиск кратчайших расстояний на транспортной сети; формирование последовательности развития коммерческой операции и т.д.

Имитационное динамическое моделирование, или метод системной динамики (System Dynamics), основы которого были разработаны Дж. Форрестелом (США) в 50-х годах XX века, применяется для исследования сложных систем и является разновидностью имитационного моделирования. Данный метод дал

хорошие результаты при создании моделей динамики развития производственно-сбытовой фирмы, урбанизированных территорий, конфликтов и сотрудничества между государствами. А.В. Федотов успешно использовал имитационное динамическое моделирование для построения и исследования моделей высшего учебного заведения.

Метод имитационного динамического моделирования обладает рядом достоинств, существенных при моделировании сложных систем, так как позволяет:

- строить модели отдельных подсистем моделируемой системы, которые могут быть объединены в единую модель, отражающую все аспекты функционирования и влияния подсистем на систему в целом;
- формализовать слабоструктурированное описание исследуемой системы в соответствии с объективно выявленными причинно-следственными связями;
- использовать промежуточные результаты моделирования для повышения эффективности управления моделируемой системой;
- прогнозировать результаты выполнения того или иного управленческого решения, выбирая по результатам прогноза лучшее.

При имитационном динамическом моделировании модель строится с учетом структуры моделируемой системы. Для этого используется специфический аппарат, позволяющий отобразить причинно-следственные связи между элементами системы и динамику изменений каждого элемента. При построении имитационной динамической модели (ИДМ) обычно применяют специализированный язык моделирования DYNAMO. В имитационном динамическом моделировании используются следующие основные понятия.

Диаграмма причинно-следственных связей – графическое изображение причинно-следственных связей между элементами. Дуги в диаграмме направлены от причины к следствию. Связь будет положительной, если изменение причины вызывает аналогичное изменение следствия, и отрицательной, если изменение причины вызывает противоположное изменение следствия.

На рис. 14.1 приведена диаграмма, в которой $\langle A, B \rangle$ – положительная причинно-следственная связь, где A – причина, B – следствие;

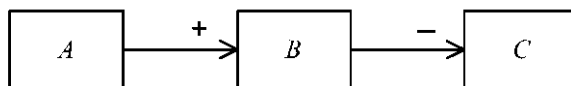


Рис. 14.1. Диаграмма причинно-следственных связей

$\langle B, C \rangle$ – отрицательная причинно-следственная связь, где B – причина, C – следствие.

Диаграмма потоков и уровней – графическое изображение уровней и связывающих их потоков.

Уровень – элемент диаграммы, соответствующий какой-либо характеристике моделируемой системы. Обычно уровень обозначается прямоугольником, внутри которого помещают обозначение уровня (наименование характеристики и момент, на который определяется ее значение) и номер уравнения, описывающего динамику изменения характеристики.

Поток – переносимый ингредиент. Вливаясь в уровень или вытекая из него, определяет динамику изменения уровня. Потоки в диаграмме потоков и уровней изображают штриховыми стрелками, если они информационные, и сплошными стрелками, если они имеют любую иную природу.

Темп потока – характеристика потока, описывающая количество переносимого потоком ингредиента в единицу времени. Темп потока изображается на диаграмме специального вида фигурой, острием своим касающейся стрелки, которая изображает соответствующий поток. Внутри пятиугольника помещают обозначение темпа (наименование темпа и интервал, на котором темп считается постоянным).

Вспомогательные элементы (запаздывание, различные промежуточные элементы и т.д.) обозначают окружностями. Их вводят в модель по мере необходимости в процессе построения ИДМ.

Основные символы, используемые при построении диаграммы потоков и уровней, приведены в табл. 14.1.

Шаг моделирования – интервал времени, через который вычисляются все параметры модели. Он обозначается DT .

На протяжении всего интервала DT все параметры модели считаются постоянными, определенными на момент начала интервала и меняющимися скачкообразно в момент окончания интервала. Таким образом, ИДМ представляет собой дискретную модель с интервалом дискретности, равным шагу моделирования. Так как в модели одновременно могут быть рассмотрены только три момента: предшествующий настоящему – J , настоящий – K и будущий – L , то данная модель является моделью с ограниченным последствием.

Расстояние между настоящим K и предшествующим J , а также между будущим L и настоящим K моментами равно шагу моделирования DT .

Таблица 14.1.

Основные символы диаграммы потоков и уровней (графической модели)

Название	Обозначение		Назначение (использование)
	буквенное	графическое	
1. Озеро	O		Истоки и стоки
2. Информационная связь	I		Информационные потоки
3. Неинформационная (прочие) связь			Материальные, вещественные и прочие неинформационные потоки
4. Уровень	L		Переменные состояния
5. Запозывание	L		Различные виды запозывания; D_s – число уровней запозывания
6. Темп	R		Интенсивность потока, проходящего по соответствующей дуге
7. Вспомогательная переменная	A		
8. Дополнительный вход	C		Экзогенные переменные, константы
9. Дополнительный выход	S		Дополнительные переменные (параметры), которые интересуют пользователя

Фрагмент диаграммы потоков и уровней приведен на рис. 14.2, где приняты обозначения:

LEV – уровень (level); RT – темп потока (rate torrent);

C – константа пропорциональности темпа потока уровню;

m – номер уравнения вычисления уровня (L означает, что уравнение относится к уровню);

n – номер уравнения вычисления темпа (R означает, что уравнение относится к темпу).



Рис. 14.2. Фрагмент диаграммы потоков и уровней

Уравнения модели, соответствующие данному фрагменту диаграммы потоков и уровней, имеют вид:

$$LEV. K = LEV. J + DT \times RT. JK, \quad (m, L)$$

$$RT. KL = C \times LEV. K, \quad (n, R)$$

где $LEV. K$ – уровень в настоящий момент K ;

$LEV. J$ – уровень в предшествующий момент J ;

$RT. JK$ – темп на интервале $[J, K]$; $RT. KL$ – темп на интервале $[K, L]$. Начальные условия $LEV.0 = LEV(0)$.

Проведя моделирование, получаем результаты, соответствующие численному решению однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dLEV}{dt} + C \times LEV = 0,$$

имеющему вид:

$$LEV(t) = LEV(0) \times e^{-ct}.$$

Следует несколько подробнее остановиться на таком элементе имитационной динамической модели, как запаздывание. В реальных системах запаздывание существует всегда, так как любой процесс, протекающий в таких системах, обладает инерцией. Поэтому реакция системы на входные воздействия всегда наступает с некоторой задержкой. Запаздывания позволяют смоделировать возникающие в системе временные задержки в тех случаях, когда они существенно влияют на функционирование моделируемой системы и возникает необходимость их учета при моделировании. Графическое изображение запаздывания приведено на рис. 14.3.

Обозначения на рисунке: IN – входящий в запаздывание поток (темп потока); OUT – выходящий из запаздывания поток (темп потока);

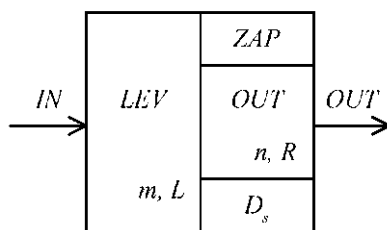


Рис. 14.3. Графическое изображение запаздывания

ZAP – общее время запаздывания; D_s – количество уровней запаздывания (порядок запаздывания); LEV – наименование запаздывающего параметра (характеристики); m, L – номер уравнения, определяющего общее количество ингредиента, перемещающегося в запаздывании; n, R – номер уравнения выходного потока.

Запаздывания в имитационно-динамической модели могут задаваться различными способами. Наиболее простым является использование показательных запаздываний, которым в теории управления соответствуют инерционные (апериодические) звенья. Порядок запаздывания определяет число последовательно соединенных инерционных звеньев первого порядка, сумма постоянных времени которых равна постоянной времени запаздывания. Изменение порядка запаздывания позволяет обеспечить желаемую динамику изменения потока на выходе запаздывания.

Уравнение запаздывания в сжатой форме имеет вид:

$$OUT.KL = DELAY_s, (IN. JK, ZAP), \quad (n, R)$$

$$LEV. K = LEV. J + DT \times (IN. JK - OUT. JK), \quad (m, L)$$

где $DELAY_s(*)$ – запаздывание s -го порядка.

Развернутая диаграмма для двухуровневого запаздывания представлена на рис. 14.4.

Пусть $ZAP1 = ZAP2 = 0.5ZAP$.

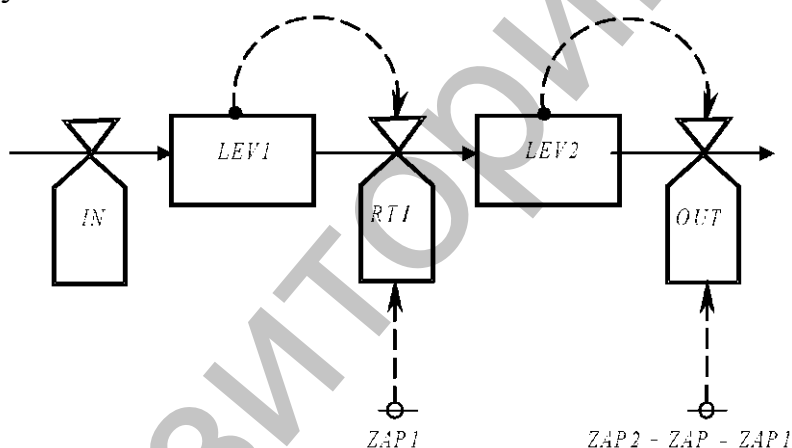


Рис. 14.4. Диаграмма двухуровневого запаздывания

Тогда уравнение запаздывания в развернутой форме имеет вид:

$$RT1.KL = \frac{LEV1.K}{ZAP/2}, \quad (1 R)$$

$$LEV1.K = LEV1. J + DT \times (IN. JK - RT1. JK), \quad (2, L)$$

$$OUT.KL = \frac{LEV2.K}{ZAP/2} = DELAY_s(IN.JK, ZAP) \quad (3, R)$$

$$LEV2.K = LEV2. J + DT \times (RT1. JK - OUT. JK), \quad (4, L)$$

$$LEV.K = LEV1.K + LEV2.K = LEV.J + DT \times (IN.JK - OUT.JK). \quad (5, L)$$

Имитационную динамическую модель исследуемой системы в целом строят путем объединения соответствующих диаграмм потоков и уровней.

Процесс построения имитационных динамических моделей можно представить в виде последовательности следующих этапов (рис. 14.5).

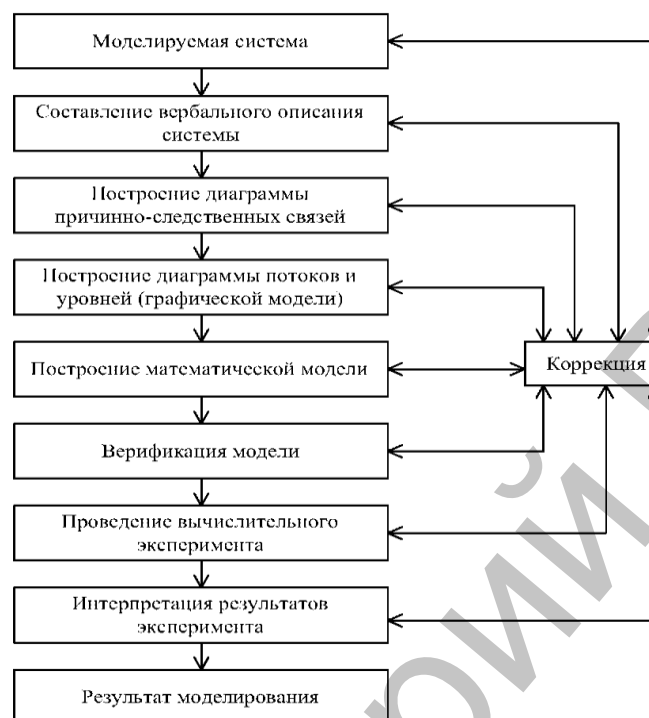


Рис. 14.5. Этапы имитационного динамического моделирования

Составление и анализ вербального описания моделируемой системы:

- 1) преобразование вербального описания в диаграмму причинно-следственных связей;
- 2) построение диаграмм потоков и уравнений для подсистем и моделируемой системы в целом (графической модели);
- 3) построение математической модели системы;
- 4) верификация модели (проверка на адекватность и чувствительность модели);
- 5) проведение вычислительного эксперимента на ЭВМ;
- 6) интерпретация результатов моделирования;
- 7) процесс имитационного динамического моделирования является итерационным, где на каждом этапе может потребоваться коррекция как содержимого этапов, так и внесения изменений в моделируемую систему для повышения качества ее функционирования.

ТЕМА 15. СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В настоящее время появилось большое количество литературы, посвященной непосредственно теории массового обслуживания, развитию ее математических аспектов, а также различных сфер ее приложения – военной, медицинской, транспортной, торговле, авиации и др.

Теория массового обслуживания опирается на теорию вероятностей и математическую статистику. Первоначальное развитие теории массового обслуживания связано с именем датского ученого А.К. Эрланга (1878–1929), с его трудами в области проектирования и эксплуатации телефонных станций.

Теория массового обслуживания – область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно, например, на предприятиях бытового обслуживания; в системах приема, переработки и передачи информации; автоматических линиях производства и др. Большой вклад в развитие этой теории внесли российские математики А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, Е.С. Вентцель и др.

Предметом теории массового обслуживания является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами. Задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге включают экономический аспект по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и от простоев каналов обслуживания.

В коммерческой деятельности применение теории массового обслуживания пока не нашло желаемого распространения. В основном это связано с трудностью постановки задач, необходимостью глубокого понимания содержания коммерческой деятельности, а также надежного и точного инструментария, позволяющего просчитывать в коммерческой деятельности различные варианты последствий управленческих решений.

Массовое обслуживание в коммерческой деятельности

Природа массового обслуживания, особенно в такой сфере, какой является коммерческая деятельность, весьма тонка и слож-

на. Коммерческая деятельность связана с выполнением множества операций на этапах движения, например, товарной массы из сферы производства в сферу потребления. Такими операциями являются погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация. Кроме таких основных операций, процесс движения товаров сопровождается большим количеством предварительных, подготовительных, сопутствующих, параллельных и последующих операций с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.

Для перечисленных фрагментов коммерческой деятельности характерны массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени, затем их последовательное обслуживание (удовлетворение требований, запросов, заявок) путем выполнения соответствующих операций, время выполнения которых носит также случайный характер. Все это создает неравномерность в работе, порождает недогрузки, простой и перегрузки в коммерческих операциях. Много неприятностей доставляют очереди, например, посетителей в кафе, столовых, ресторанах, или водителей автомобилей на товарных базах, ожидающих разгрузки, погрузки или оформления документов. В связи с этим возникают задачи анализа существующих вариантов выполнения всей совокупности операций, например, торгового зала супермаркета, ресторана или в цехах производства собственной продукции для целей оценки их работы, выявления слабых звеньев и резервов для разработки в конечном итоге рекомендаций, направленных на увеличение эффективности коммерческой деятельности.

Кроме того, возникают другие задачи, связанные с созданием, организацией и планированием нового экономического, рационального варианта выполнения множества операций в пределах торгового зала, кондитерского цеха, всех звеньев обслуживания ресторана, кафе, столовой, планового отдела, бухгалтерии, отдела кадров и др.

Задачи организации массового обслуживания возникают практически во всех сферах человеческой деятельности, например, обслуживание продавцами покупателей в магазинах, обслуживание посетителей на предприятиях общественного питания, а также клиентов на предприятиях бытового обслуживания, обеспечение телефонных разговоров на телефонной станции, оказание медицинской помощи больным в поликлинике и т.д. Во всех приведенных примерах возникает необходимость в удовлетворении запросов большого числа потребителей.

Перечисленные задачи можно успешно решать с помощью методов и моделей специально созданной для этих целей теории

массового обслуживания (ТМО). В этой теории поясняется, что обслуживать необходимо кого-либо или что-либо, что определяется понятием «заявка (требование) на обслуживание», а операции обслуживания выполняются кем-либо или чем-либо, называемыми каналами (узлами) обслуживания.

Роль заявок в коммерческой деятельности выполняют товары, посетители, деньги, ревизоры, документы, а роль каналов обслуживания – продавцы, администраторы, повара, кондитеры, официанты, кассиры, товароведы, грузчики, торговое оборудование и др. Важно заметить, что в одном варианте, например, повар в процессе приготовления блюд является каналом обслуживания, а в другом – выступает в роли заявки на обслуживание, например, к заведующему производством за получением товара.

Заявки в силу массовости поступления на обслуживание образуют потоки, которые до выполнения операций обслуживания называются входящими, а после возможного ожидания начала обслуживания, т.е. простоя в очереди, образуют потоки обслуживания в каналах, а затем формируется выходящий поток заявок. В целом совокупность элементов входящего потока заявок, очереди, каналов обслуживания и выходящего потока заявок образует простейшую одноканальную систему массового обслуживания – СМО.

Под системой понимается совокупность взаимосвязанных и целенаправленно взаимодействующих частей (элементов). Примерами таких простейших СМО в коммерческой деятельности являются места приема и обработки товаров, узлы расчета с покупателями в магазинах, кафе, столовых, рабочие места экономиста, бухгалтера, коммерсанта, повара на раздаче и т.д.

Процедура обслуживания считается завершенной, когда заявка на обслуживание покидает систему. Продолжительность интервала времени, требуемого для реализации процедуры обслуживания, зависит в основном от характера запроса заявки на обслуживание, состояния самой обслуживающей системы и канала обслуживания.

Действительно, продолжительность пребывания покупателя в супермаркете зависит, с одной стороны, от личностных качеств покупателя, его запросов, от ассортимента товаров, который он собирается приобрести, а с другой – от формы организации обслуживания и обслуживающего персонала, что может значительно повлиять на время пребывания покупателя в супермаркете и интенсивность обслуживания. Например, овладение кассирами-контролерами работы «слепым» методом на кассовом аппарате позволило увеличить пропускную способность узлов расчета

в 1,3 раза и сэкономить время, затрачиваемое на расчеты с покупателями по каждой кассе более чем на 1,5 ч в день. Внедрение единого узла расчета в супермаркете дает ощутимые преимущества покупателю. Так, если при традиционной форме расчетов время обслуживания одного покупателя составляло в среднем 1,5 мин, то при введении единого узла расчета – 67 с. Из них 44 с уходят на оформление покупки в секции и 23 с – непосредственно на расчеты за покупки. Если покупатель делает несколько покупок в разных секциях, то потери времени сокращаются при приобретении двух покупок в 1,4 раза, трех – в 1,9, пяти – в 2,9 раза.

Под обслуживанием заявок будем понимать процесс удовлетворения потребности. Обслуживание имеет различный характер по своей природе. Однако во всех примерах поступившие заявки нуждаются в обслуживании со стороны какого-либо устройства. В некоторых случаях обслуживание производится одним человеком (обслуживание покупателя одним продавцом, в некоторых – группой людей (обслуживание больного врачебной комиссией в поликлинике), а в некоторых случаях – техническими устройствами (продажа газированной воды, бутербродов – автоматами). Совокупность средств, которые осуществляют обслуживание заявок, называется каналом обслуживания.

Если каналы обслуживания способны удовлетворить одинаковые заявки, то каналы обслуживания называются однородными. Совокупность однородных каналов обслуживания называется обслуживающей системой.

В систему массового обслуживания поступает большое количество заявок в случайные моменты времени, длительность обслуживания которых также является случайной величиной. Последовательное поступление заявок в систему обслуживания называется входящим потоком заявок, а последовательность заявок, покидающих систему обслуживания, – выходящим потоком.

Случайный характер распределения длительности выполнения операций обслуживания наряду со случайным характером поступления требований на обслуживание приводит к тому, что в каналах обслуживания протекает случайный процесс, который может быть назван (по аналогии с входным потоком заявок) потоком обслуживания заявок или просто потоком обслуживания.

Заметим, что заявки, поступающие в систему обслуживания, могут покинуть ее и будучи не обслуженными. Например, если покупатель не найдет в магазине нужный товар, то он покидает магазин, будучи не обслуженным. Покупатель может покинуть магазин также, если нужный товар имеется, но большая очередь, а покупатель не располагает временем.

Теория массового обслуживания занимается изучением процессов, связанных с массовым обслуживанием, разработкой методов решения типичных задач массового обслуживания.

При исследовании эффективности работы системы обслуживания важную роль играют различные способы расположения в системе каналов обслуживания.

При параллельном расположении каналов обслуживания требование может быть обслужено любым свободным каналом. Примером такой системы обслуживания является расчетный узел в магазинах самообслуживания, где число каналов обслуживания совпадает с числом кассиров-контролеров.

На практике часто обслуживание одной заявки осуществляется последовательно несколькими каналами обслуживания. При этом очередной канал обслуживания начинает работу по обслуживанию заявки после того, как предыдущий канал закончил свою работу. В таких системах процесс обслуживания носит многофазовый характер, обслуживание заявки одним каналом называется фазой обслуживания. Например, если в магазине самообслуживания имеются отделы с продавцами, то покупатели сначала обслуживаются продавцами, а потом уже кассирами-контролерами.

Организация системы обслуживания зависит от воли человека. Под качеством функционирования системы в теории массового обслуживания понимают не то, насколько хорошо выполнено обслуживание, а то, насколько полно загружена система обслуживания, не простаивают ли каналы обслуживания, не образуется ли очередь.

В коммерческой деятельности заявки, поступающие в систему массового обслуживания, выступают с высокими претензиями еще и на качество обслуживания в целом, которое включает не только перечень характеристик, исторически сложившихся и рассматриваемых непосредственно в теории массового обслуживания, но и дополнительные характерные для специфики коммерческой деятельности, в частности, отдельные процедуры обслуживания, требования к уровню которых к настоящему времени сильно возросли. В связи с этим необходимо учитывать еще и показатели коммерческой деятельности.

Работу системы обслуживания характеризуют такие показатели, как время ожидания начала обслуживания, длина очереди, возможность получения отказа в обслуживании, возможность простоя каналов обслуживания, стоимость обслуживания и в конечном итоге удовлетворение качеством обслуживания, которое еще включает показатели коммерческой деятельности.

Чтобы улучшить качество функционирования системы обслуживания, необходимо определить, каким образом распределить поступающие заявки между каналами обслуживания, какое количество каналов обслуживания необходимо иметь, как расположить или сгруппировать каналы обслуживания или обслуживающие аппараты для улучшения показателей коммерческой деятельности. Для решения перечисленных задач существует эффективный метод моделирования, включающий и объединяющий достижения разных наук, в том числе математики.

Моделирование систем массового обслуживания

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий – поступления заявок и их обслуживания. Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует так называемый поток событий. Примерами таких потоков в коммерческой деятельности являются потоки различной природы – товаров, денег, документов, транспорта, клиентов, покупателей, телефонных звонков, переговоров. Поведение системы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания; в этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя.

Рассмотренный граф является частным случаем непрерывной марковской цепи – так называемой цепи размножения–гибели. Этот граф представляет собой одну цепочку, в которой каждое из состояний связано прямой и обратной связью с соседними состояниями. Во многих случаях задачи массового обслуживания могут быть решены путем построения и анализа соответствующей цепи «рождения–гибели».

Системы массового обслуживания в коммерческой деятельности являются базовой основой самой природы коммерции, поскольку каждый шаг в этой сфере неизменно связан с обслуживанием. Для облегчения процесса моделирования следует пользоваться классификацией СМО по различным признакам, для которых пригодны определенные группы методов и моделей теории массового обслуживания, упрощающие подбор адекватных математических моделей к решению задач обслуживания в коммерческой деятельности.

Существующие варианты заявок, особенности их обслуживания и образования очередей, расположение, количество и орга-

низация каналов обслуживания послужили причиной появления большого разнообразия СМО. В целом структура включает следующие десять основных классификационных признаков: организация потока заявок, количество каналов обслуживания, характер образования очереди, ограничения на очередь, дисциплина очереди, характеристика каналов, расположение каналов, вид ограничений на очередь, правило отбора заявок, наличие и характеристика приоритета. Перечисленные признаки являются ключевыми в проведении исследования и позволяют подобрать перечень необходимых и достаточных характеристик СМО в самом начале решения. Например, при проведении анализа системы массового обслуживания посуды в кафе полагают, что система является замкнутой, многофазной, с ожиданием обслуживания, например, какого-либо вида посуды: стаканов, тарелок, ложек, вилок, затем продуктов для приготовления пищи, потом посетителей и др. Это позволяет выявить, прежде всего, наиболее существенные свойства СМО.

По числу каналов обслуживания СМО разделяются на одноканальные $n = 1$ и многоканальные, для которых $n > 2$. К одноканальным СМО в коммерческой деятельности можно отнести практически любой вариант локального обслуживания, например, выполняемые на рабочем месте операции одним бухгалтером, менеджером, коммерсантом, товароведом, экономистом, торговым аппаратом. В зависимости от взаимного расположения каналов системы подразделяются на СМО с параллельными и с последовательными каналами. В СМО с параллельными каналами входной поток заявок на обслуживание является общим, поэтому заявки в очереди могут обслуживаться любым свободным каналом, например, официантами в ресторане. В таких СМО очередь на обслуживание можно рассматривать как общую. В СМО с последовательным расположением каналов каждый канал может рассматриваться как отдельная одноканальная СМО, или фаза обслуживания. Очевидно, выходной поток обслуженных заявок одной СМО является входным потоком для последующей СМО.

Практически любые заявки в коммерческой деятельности: товары, посетители, торговое оборудование, деньги, документы, проходят множество фаз обслуживания, следовательно, коммерческие системы являются многофазными.

В зависимости от характеристик каналов обслуживания многоканальные СМО подразделяются на СМО с однородными и неоднородными каналами. Отличие состоит в том, что в СМО с однородными каналами заявка потока может обслуживаться любым свободным каналом, а в СМО с неоднородными каналами

отдельные заявки обслуживаются только специально для этой цели предназначенными каналами. В кафе, например, посетитель проходит несколько разных по своему содержанию операций обслуживания, каждая из которых может быть представлена в виде простейшей одноканальной СМО, называемой фазой обслуживания, а в целом весь процесс обслуживания только посетителей может быть представлен в виде структурной модели многофазной СМО.

К другим сложным СМО коммерческой деятельности относятся посреднические фирмы, мини-маркеты, магазины, торговые павильоны, столовые, кафе, склады, базы, сети коммерческой деятельности районов города.

Модельное описание необходимо для целей анализа, который может учитывать не только характеристики входящих потоков и процессов обслуживания, но и внутреннюю структуру взаимосвязей, взаимопомощи, дисциплину и приоритеты обслуживания. Такой подход позволит более объективно прогнозировать перспективу работоспособности и разрабатывать действенные рекомендации по эффективному перестроению совокупностей существующих СМО, а также разработать рекомендации для вновь проектируемых сложных систем обслуживания.

Каждая простейшая или сложная СМО в зависимости от числа каналов обслуживания и их производительности, от характера потока заявок имеет пропускную способность, позволяющую ей более или менее успешно справляться с потоком заявок. Поэтому предметом исследования СМО в коммерческой деятельности является установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, их расположением, производительностью, правилами и эффективностью обслуживания для успешного достижения поставленной цели при малых затратах на создание и функционирование системы в целом.

СМО в зависимости от возможности образования очереди подразделяются на два основных типа: СМО с отказами обслуживания и СМО с ожиданием (очередью) обслуживания. В СМО с отказами возможен отказ в обслуживании, если все каналы уже заняты обслуживанием, а образовывать очередь и ожидать обслуживания нельзя. Примером таких СМО является множество коммерческих фирм, связь с которыми устанавливается по телефону, номера которых указаны в рекламной газете «Экстра-М». В СМО с ожиданиями пришедшая заявка, находящая все каналы обслуживания занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится хотя бы один из каналов. Такие системы в коммерческой сфере имеют большое распространение, поскольку все

поступающие заявки в коммерческие предприятия вынуждены ожидать начала обслуживания.

Примерами СМО с ограничением на длину очереди являются СМО, предназначенные для приема, например, поступающих товаров в подсобные помещения, склады, хранилища, холодильные камеры, емкости, вместимость которых, естественно, не беспределельна, а время хранения и сроки реализации весьма ограничены. Отказы получают заявки, поступившие и нашедшие полностью заполненными такие накопители, как, например, торговые залы ресторана, кафе.

Примером СМО с ограничением на время ожидания является обслуживание скоропортящихся товаров, готовых блюд в производстве ресторана, кафе, плодоовощной продукции и продовольственных товаров, время хранения которых и обслуживания на всех операциях от начала до конца, конечно, ограничено по причине большой скорости потери их свойств (качества, количества, товарного вида и стоимости). В подобного типа СМО получают отказ в обслуживании и не участвуют в дальнейшем процессе наиболее «старые» заявки, т.е. испорченные товары, дольше всех находившиеся на хранении и, следовательно, подлежащие списанию.

В зависимости от организации потока заявок СМО подразделяются на разомкнутые и замкнутые. В разомкнутых СМО выходной поток обслуженных заявок не связан с входным потоком заявок на обслуживание и имеет неограниченный источник заявок.

В замкнутых СМО обслуженные заявки в общем случае после некоторой временной задержки снова поступают на вход СМО и входят в состав СМО. Примером такой системы в коммерческой деятельности является система обслуживания механиками торгового оборудования, которое через некоторое время после ремонта все же опять приходит в неисправное состояние и поступает с заявкой на обслуживание. В замкнутой СМО циркулирует одно и то же конечное число потенциальных заявок, например, объем посуды (ложки, вилки, ножи, тарелки, стаканы) в кафе, столовой через торговый зал, мойку и раздачу, хотя следует заметить, что их количество по разным причинам постоянно изменяется. Пока потенциальные заявки циркулируют и не преобразовались на входе СМО в заявку на обслуживание, считается, что они находятся в линии задержки.

Фазы обслуживания разнородных заявок могут осуществляться параллельно или последовательно, одновременно или неодновременно, иметь пересечения в местах схождения потоков заявок, например, посетителей, блюд готовой продукции и денег у контролера-кассира.

Типовые варианты СМО определяются также установленной дисциплиной очереди, которая зависит от правил преимущества в обслуживании, т.е. приоритета. Приоритет отбора заявок на обслуживание может быть следующий: первый пришел – первый обслужен; последний пришел – первый обслужен; случайный отбор. Для СМО с ожиданием и обслуживанием по приоритету возможны следующие виды: абсолютный приоритет, например, для сотрудников контрольно-ревизионного управления, министра; относительный приоритет, например, для директора в подведомственных ему предприятиях; специальные правила приоритета, когда обслуживание заявок, например, специальными служащими банков денег в магазинах, что оговорено в соответствующих документах. Существуют и другие виды СМО: с поступлением групповых заявок, с каналами разной производительности, с надежными каналами обслуживания, с групповым обслуживанием, со смешанным потоком заявок.

Перечисленные варианты СМО имеют место и распространены в коммерческой деятельности. В своих совокупностях разные типы СМО, последовательно и параллельно объединенные, образуют более сложные многофазные структуры СМО: супермаркет, торговое предприятие, столовая, кафе, ресторан, предприятие и организация общественного питания района, города и т.д. Моделирование СМО позволяет выявить существенные связи в коммерческой деятельности, а для их описания применить методы и модели теории массового обслуживания и разработать рекомендации по реорганизации, направленные на совершенствование систем массового обслуживания, базируясь на количественном обосновании управленческих решений. Важнейшим началом в этой работе являются замысел и экономикоматематическая постановка задач массового обслуживания.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение экономико-математической модели.
2. Классификация экономико-математических моделей.
3. Сущность и область применения корреляционно-регрессионного анализа.
4. Содержание и применение метода наименьших квадратов.
5. Определение производственной функции.
6. Средние и предельные показатели, производные от производственной функции.
7. Содержание систем эконометрических уравнений.
8. Смысл эндогенных и экзогенных переменных в системах эконометрических уравнений.
9. Сущность методов математического программирования.
10. Сущность методов и моделей управления хозяйственной деятельностью предприятий.
11. Сущность и содержание методов оперативно-календарного планирования на предприятиях.
12. Основы теории и приложений динамического программирования.
13. Описание методов и моделей теории массового обслуживания.
14. Модели управления запасами в экономических системах.
15. Математические зависимости межотраслевого баланса.
16. Сущность и область применения коэффициентов прямых и полных материальных затрат в межотраслевом балансе.
17. Экономико-математические основы динамической модели межотраслевого баланса.
18. Балансовая экономико-математическая модель производства и распределения продукции отдельного предприятия.
19. Экономико-математические зависимости предложения, спроса, потребления, цен в условиях рынка.
20. Уравнение для характеристики спроса и потребления.
21. Описание нормативных моделей потребления.
22. Сущность методов и моделей социально-экономического прогнозирования.
23. Основные понятия теории графов.
24. Метод построения и расчета сетевых графиков.
25. Особенности экономико-математических задач в условиях неопределенности и риска.
26. Основы и экономические положения теории игр.

ТЕСТЫ

1. Разделы математики, наиболее широко используемые в эконометрике:

- а) дифференциальное и интегральное исчисление;
- б) корреляционно-регрессионный анализ;
- в) теория вероятности и математическая статистика.

2. Для чего в эконометрике применяется метод наименьших квадратов:

- а) для расчета параметров уравнений регрессии;
- б) для расчета скорости движения астрономических объектов;
- в) для определения ошибок выборочной совокупности данных.

3. Что позволяет изучать анализ производственных функций:

- а) эффективность основных производственных ресурсов;
- б) способы повышения производительности труда;
- в) эффект расширения масштабов производства;
- г) воздействие на производство научно-технического прогресса.

4. Каково различие между эндогенными и экзогенными переменными в системах эконометрических уравнений:

- а) различие определяется экономическим содержанием системы уравнений;
- б) различие в расчете переменных при решении или до решения системы уравнений;
- в) определяется характеристикой самих переменных.

5. Каковы составные части модели задачи линейного программирования:

- а) уравнения спроса и предложения;
- б) целевая функция и система ограничений;
- в) взаимосвязи экономического равновесия.

6. В чем состоит смысл двойственных оценок в линейном программировании:

- а) в определении размеров прибыли или убытков в процессе производства;
- б) в оценке целесообразности торгово-экономических мероприятий;
- в) в определении сравнительной дефицитности различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности.

7. *Основные разделы математического программирования:*
- а) линейное, нелинейное, динамическое программирование;
 - б) алгебра, геометрия, тригонометрия;
 - в) закономерности на монопольном, конкурентном и монополистически конкурентном рынке.
8. *Модель оптимизации производственной программы предприятия:*
- а) задача качественного анализа;
 - б) задача из теории риска и неопределенности;
 - в) экономико-математическая задача.
9. *Классификация систем массового обслуживания:*
- а) по времени ожидания и длине очереди;
 - б) с ожиданием, с потерями и смешанного типа;
 - в) со случайными характеристиками.
10. *Перечень факторов, влияющих на величину спроса и потребления:*
- а) доходы потребителей, цены на товары и услуги, количество семей;
 - б) величины экспорта и импорта различных видов продукции;
 - в) природно-географические факторы.
11. *Что характеризуют коэффициенты эластичности спроса от доходов потребителей:*
- а) влияние доходов на жизненный уровень населения;
 - б) относительное изменение спроса на единицу относительного изменения доходов;
 - в) динамику потребностей семей потребителей.
12. *От чего зависит формирование цен равновесия на рынке товаров и услуг:*
- а) от рыночных условий конкуренции;
 - б) от факторов внешнеэкономического характера;
 - в) от условий выравнивания спроса и предложения.
13. *Что определяется кривой безразличия в теории спроса и потребления:*
- а) статистические зависимости в условиях неопределенности;
 - б) сроки удовлетворения потребностей покупателей;
 - в) равновесие предельной полезности наборов потребительских товаров.

14. Назовите основные элементы графа как геометрической схемы:

- а) стартовые и финишные события;
- б) треугольники и прямоугольники;
- в) вершины и ребра.

15. Сформулируйте, что представляет собой сетевой график:

- а) рисунок всевозможных зависимостей;
- б) связный ориентированный граф без контуров и петель;
- в) графическую схему различных работ и событий.

16. Что понимается под критическим путем в сетевом графике:

- а) последовательность работ между исходным и завершающим событиями графика, имеющая наибольшую общую протяженность во времени;
- б) неопределенная последовательность вероятностных событий;
- в) понятие аналогичное «дереву целей».

17. Какие ситуации изучаются теорией игр:

- а) ситуации аналогичные игре в шахматы;
- б) конфликтные ситуации в экономике, военном деле, спортивных играх;
- в) состязания в большинстве видов спорта.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бир С. Мозг фирмы: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
2. Браверман Э.М. Математические модели планирования и управления в экономических системах. – М.: Наука, 1976. – 366 с.
3. Брусиловский Б.Я. Математические модели в прогнозировании и организации науки. – Киев: Наук. думка, 1975. – 232 с.
4. Заболотский В.П., Оводенко А.А., Степанов А.Г. Математические модели в управлении. – СПб.: СПбГУАП, 2001. – 196 с.
5. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
6. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

Дополнительная

1. Громова Н.Б., Минько Э.В., Прохоров В.И. Методы исследования операций в моделировании организационно-экономических задач. – М.: МАИ, 1992. – 240 с.
2. Губин Н.М., Добронравов А.С., Дорохов Б.С. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи. – М.: Радио и связь, 1993. – 376 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Вища шк., 1979. – 392 с.
4. Николаев В.И., Брук В.М. Системотехника: методы и приложения. – Л.: Машиностроение, 1985. – 199 с.
5. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 646 с.
6. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 418 с.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Брусиловский Б.Я. Математические модели в прогнозировании и организации науки. – Киев: Наук. думка, 1975. – 232 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – Киев: Вища шк., 1979. – 392 с.
3. Заболотский В.П., Оводенко А.А., Степанов А.Г. Математические модели в управлении. – СПб.: СПбГУАП, 2001. – 196 с.
4. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
5. Прицкер А. Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II: пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 646 с.
6. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
7. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука: пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 418 с.