$$\frac{a}{a} = \frac{b-a}{b} = \frac{c}{c}.$$

Отсюда получаем a = 0. Итак, подпространство L_2 задаётся в L_3 уравнением: $bx_2 + cx_4 = 0$. Тем самым, все инвариантные двумерные подпространства содержат базисный вектор e_1. Это значит, что они являются линейной оболочкой векторов $\langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4 \rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Нетрудно убедиться что они будут инвариантными при любом значении параметра t. ■

Заключение. В данной работе мы исследовали два класса преобразований четырёхмерного пространства Минковского, сохраняющих скалярное произведение, а именно нашли все их двумерные инвариантные подпространства. Полученные результаты используются при изучении автоподобий четырёхмерных алгебр Ли, являющихся прямой суммой двух двумерных алгебр Ли.

О ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА С ВЫРОЖДЕННОЙ МЕТРИКОЙ

Черных В.В.,
студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Хорошо известно, что представляет собой ортогональное дополнение к подпространству и проекция вектора на подпространство, если в пространстве задано евклидово и лоренцево скалярное произведение.

Цель данной работы – выяснить это для пространства с вырожденным скалярным произведением и доказать одну лемму, которая используется при исследовании автоизометрий алгебр Ли.

Материал и методы. Рассматривается трёхмерное пространство с вырожденным скалярным произведением. Используются методы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Результаты и их обсуждение. Пусть L – трёхмерное пространство, на котором задано евклидово или лоренцево скалярное произведение (в дальнейшем – метрика), а H – его двумерное подпространство. Рассмотрим вектор $x \notin H$. Существует единственное разложение $x = y + z$, такое что $y \in H$, $z \in H^{\perp}$. Тогда вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство H. Это определение не работает, если на H индуцируется вырожденное скалярное произведение, т.к в этом случае $H^{\perp} \subset H$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что на H индуцируется невырожденная метрика.

Существует единственное направление в H ортогональное одновременно векторам x и y. Пусть вектор u принадлежит этому направлению (рисунок 1). Направление вектора y можно определить следующим образом. Пусть $J = x^{\perp} \cap H$. Тогда в H существует единственное направление, ортогональное J. Это и будет направление $\boldsymbol{R}y$. Это определение работает даже в том случае, когда вектор x изотропный (т.е. когда $x \in x^{\perp}$).

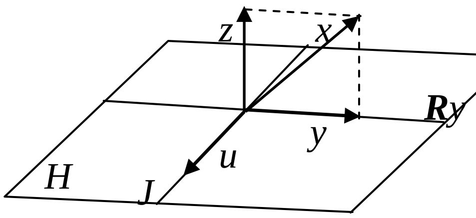

Рисунок 1

Предположим, что линейное преобразование $F: L \to L$ сохраняет скалярное произведение, вектор x является его собственным вектором, а подпространство H инвариантно относительно этого преобразования. Тогда $H^{\perp}$ тоже инвариантно и, в силу единственности разложения $x = y + z$, векторы y, z и u являются собственными векторами преобразования F.

Вектор, скалярный квадрат которого равен 1 или –1 будем называть единичным. Выберем в L базис (E_1,E_2,E_3), состоящий из единичных векторов, такой что $E_1 \notin H$, $E_1 \notin H^{\perp}$, $E_3 \in H$, $E_3 \cdot E_1 = E_3 \cdot E_2 = 0$, при этом E_2 сонаправлен ортогональной проекции вектора E_1 на двумерное подпространство H (рисунок 2).

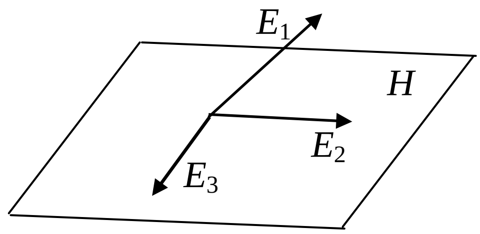

Рисунок 2

***Лемма* 1.** Пусть линейное преобразование $F: L \to L$ сохраняет скалярное произведение. Если вектор E_1 является собственным вектором этого преобразования, а подпространство H инвариантно относительно этого преобразования, то F действует по формулам:

$$F(E_1) = \theta E_1,\ F(E_2) = \theta E_2,\ F(E_3) = \pm E_3,\ \theta = \pm 1.$$

Доказательство. Преобразование F сохраняет ортогональность векторов. Направление $\boldsymbol{R}E_3$ является единственным направлением в H ортогональным вектору E_1. Поэтому это направление инвариантно, а требование сохранения скалярного квадрата E_3^2 приводит к тому, что $F(E_3) = \pm E_3$. По этой же причине $F(E_1) = \pm E_1$.

Направление $\boldsymbol{R}E_2$ является единственным направлением в H ортогональным вектору E_3. Поэтому получаем $F(E_2) = \pm E_2$. При этом должно выполняться $F(E_1)\cdot F(E_2) = E_1\cdot E_2$. Поэтому векторы E_1 и E_2 под действием F сохраняют или меняют направление одновременно. ■

***Замечание* 1.** Эта лемма верна и в случае, когда вектор E_1 является изотропным.

***Замечание* 2.** Мы покажем, что описанный выше базис возможно построить даже, в том случае, когда в L задано вырожденное скалярное произведение сигнатуры $(0,+,+)$. Для этого сначала разберемся, как выглядят ортогональные дополнения в таком пространстве и действует ли определение ортогональной проекции вектора на подпространство.

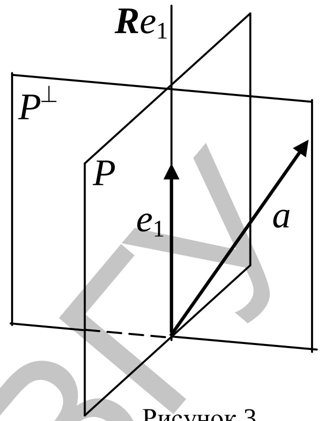

Рисунок 3

Пусть относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3) скалярное произведение векторов $x(x_1, x_2, x_3)$, $y(y_1, y_2, y_3)$ задаётся формулой

$$x\cdot y = x_2y_2 + x_3y_3.$$

Пусть относительно данного базиса $a(a_1,a_2,a_3)$. Тогда подпространство $P=a^{\perp}$ задаётся уравнением $a_2x_2+a_3x_3=0$. Оно двумерное и содержит вектор e_1. В свою очередь, $a\in P^{\perp}$. Но вектор e_1 ортогонален всем векторам из L. Поэтому $e_1\in P^{\perp}$. Следовательно, линейная оболочка $\langle a,e_1\rangle$ этих векторов и есть $P^{\perp}$ (рисунок 3). Тем самым, ортогональным дополнением двумерного подпространства с вырожденной метрикой является подпространство такого же типа.

Пусть двумерное подпространство H не содержит e_1, тогда $H^{\perp} = \boldsymbol{R}e_1$ – одномерное подпространство. Посмотрим, как выглядит ортогональная проекция вектора $x \notin H$ на это подпространство. Это должен быть такой вектор y, что $x-y \in H^{\perp}$ (рисунок 4). Так же, как и в случае пространства с евклидовой метрикой, направление вектора y можно получить так. Пусть $P = x^{\perp}$, $u \in x^{\perp} \bigcap H$, тогда $u^{\perp} \bigcap H = \boldsymbol{R}y$.

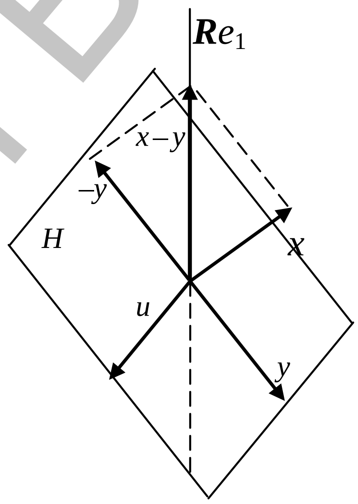

Рисунок 4

Выберем теперь единичные векторы: E_1 коллинеарный вектору x, E_2 коллинеарный y и E_3 коллинеарный u. Мы получили искомый базис (рисунок 5).

Матрица Грама данного базиса:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & g_{23} & 0 \\ g_{23} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку скалярное произведение является вырожденным, то её определитель должен быть равен нулю. Следовательно, $g_{23} = \pm 1$. Изменив, при необходимости, направление одного из векторов E_1 или E_2, получим $g_{23} = 1$. На рисунке 5 изображён вектор $-E_2$, поскольку изотропному направлению принадлежит не сумма $E_1 + E_2$, а разность $E_1 - E_2$. Для пространства с невырожденной метрикой g_{23} может быть произвольным.

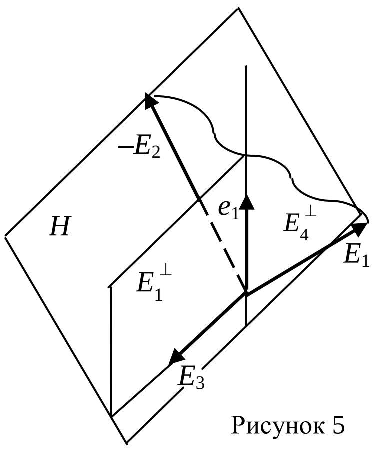

Рисунок 5

Заключение. В данной работе мы доказали лемму, которая используется при исследования автоизометрий (автоморфизмов, сохраняющих скалярное произведение) четырёхмерных алгебр Ли, снабжённых лоренцевым скалярным произведением. Мы показали, что данная лемма имеет место и для трёхмерного пространства с вырожденной метрикой. Этот результат очень важен, в связи с тем, что четырёхмерное пространство Минковского содержит трёхмерные подпространства с вырожденной метрикой.