

```

//получить коммутант
public Group<T> getCommutatorSubgroup();

//является ли группа разрешимой
public boolean isSolvable();

//получить таблицу Кэли для элементов
public T[][] getCayleyTable();

//получить класс сопряженности для элемента element
public List<T> getConjugacyClass(T element);

//получить стабилизатор элемента element
public Group<T> getStabilizer(T element);

//получить список всех подгрупп
public List<Group<T>> getAllSubgroups();

//получить норму подгруппы
public List<T> getNorm();

//получить все перестановочные с element элементы
public List<T> getPermutationElements(T element);
}

```

Заключение. В результате исследования был разработан интерфейс взаимодействия с библиотекой для работы с элементами теории групп. Материалы проведенного исследования могут применяться при использовании теории групп в java-приложениях.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Черных В.В.,

студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машиерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

При исследовании автоизометрий (автоморфизмов алгебры Ли, сохраняющих скалярное произведение) используются два специальных класса преобразований, образующих однопараметрические группы преобразований.

Цель работы – найти все двумерные инвариантные подпространства рассматриваемых преобразований.

Материал и методы. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли, с лоренцевым скалярным произведением. Используются методы линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Риманово или лоренцево многообразие (M, g) называется самоподобным, если оно допускает однопараметрическую группу подобий. Пусть рассматриваемое многообразие G представляет связную односвязную группу Ли, а $\mathfrak{g}$ – соответствующая ей алгебра Ли. Для того, чтобы найти все левоинвариантные лоренцевы метрики на группе Ли G , при которых она является самоподобным многообразием, необходимо сначала решить следующую задачу. Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задано лоренцево скалярное произведение. Требуется найти все однопараметрические группы автоподобий $h_t: G \rightarrow G$, т.е. подобий, сохраняющих операцию скобки Ли.

Пусть рассматриваемая алгебра Ли четырёхмерна. Согласно [1] любая однопараметрическая группа подобий h_t пространства G в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задаётся одной из матриц $H_1(t) = e^{vt}F_1(t)$ или $H_2(t) = e^{ut}F_2(t)$, где

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} e^{vt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-vt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (1) \quad F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$t \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$. При этом матрица Грама базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) имеет соответственно вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Минор, расположенный в 3, 4 строках и 3, 4 столбцах матрицы $F_1(t)$ может состоять из единичной матрицы. Этот тривиальный случай мы не будем рассматривать.

Расположение базисных векторов относительно конуса изотропных во втором случае показано на рисунке 1.

Предположим, что алгебра Ли является прямой суммой двух двумерных алгебр Ли. Для того чтобы найти все её однопараметрические группы автоподобий, необходимо найти все двумерные инвариантные подпространства преобразований, задающихся матрицами $H_1(t)$ и $H_2(t)$. Эти подпространства будут инвариантными и для изометрий $f_1(t)$ и $f_2(t)$, задающихся матрицами $F_1(t)$ и $F_2(t)$.

Линейную оболочку векторов x, y будем обозначать $\langle x, y \rangle$.

Теорема. 1. Двумерные подпространства $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_3, e_4 \rangle$, и только они являются инвариантными относительно преобразований, задающихся матрицами $F_1(t)$, $t \in \mathbf{R}$, $v > 0$.

2. Двумерные подпространства $\langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4 \rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, и только они являются инвариантными относительно преобразований, задающихся матрицами $F_2(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

При решении этой задачи будем использовать следующий метод. Рассмотрим произвольный вектор $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и пусть $X' = f_1(t)X$, $X'' = f_1(t)X'$, $i = 1, 2$. Если X принадлежит инвариантному подпространству, то векторы X , X' , X'' линейно зависимы. Поскольку преобразования $f_i(t)$ образуют группу, то подпространство инвариантное при всех $t \in \mathbf{R}$, будет инвариантно и при каждом фиксированном значении t .

Для преобразований $f_1(t)$, очевидно, что существуют два инвариантных двумерных подпространства $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_3, e_4 \rangle$. Требуется доказать, что других не существует. Выберем $t = \pi/2$. Тривиальный случай $v = 0$ отбросим. Составим матрицу из координат векторов X, X', X'' , обозначив для удобства $k = e^{v\pi/2} > 1$, а затем прибавим к третьей строке первую строку.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ kx_1 & k^{-1}x_2 & -x_4 & x_3 \\ k^2x_1 & k^{-2}x_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ kx_1 & k^{-1}x_2 & -x_4 & x_3 \\ (k^2-1)x_1 & (k^{-2}-1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор порядка 3, расположенный в 1, 3 и 4 столбцах и приравняем его к нулю. Получим $x_1 = 0$ или $x_3^2 + x_4^2 = 0$. Аналогично, выбрав минор, расположенный в 2, 3 и 4 столбцах, получим $x_2 = 0$ или $x_3^2 + x_4^2 = 0$. Итак, имеем только два инвариантных подпространства $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_3, e_4 \rangle$.

Для преобразований $f_2(t)$ очевидно, что существуют два инвариантных двумерных подпространства $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_1, e_4 \rangle$. Мы покажем, что существуют ещё такие подпространства и найдем все. Выберем $t = 1$. Составим матрицу из координат векторов X, X', X'' , а затем вычтем первую строку из третьей и четвертой строк:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3/2 & x_2 + x_3 & x_3 & x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & x_2 + 2x_3 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 + x_3/2 & x_3 & 0 & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & 2x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем миноры порядка 3, расположенные в столбцах с номерами 1, 2, 3 и 1, 2, 4; приравняем их к нулю. Мы получим, что $x_3 = 0$.

Итак, если двумерное инвариантное пространство L_2 существует, то оно содержится в трёхмерном подпространстве L_3 , которое задаётся уравнением $x_3 = 0$. Тогда L_2 можно задать одним уравнением в L_3 :

$$ax_1 + bx_2 + cx_4 = 0.$$

При $a^2 + b^2 = 0$ получаем подпространство $\langle e_1, e_2 \rangle$, а при $a^2 + c^2 = 0$ получаем подпространство $\langle e_1, e_4 \rangle$. Ограничение $f_2(t)$ на L_1 и обратное преобразование задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Под действием $f_2(t)$ подпространство L_2 переходит в подпространство, которое задаётся уравнением

$$a(x_1 - x_2) + bx_2 + cx_4 = 0 \Leftrightarrow ax_1 + (b - a)x_2 + cx_4 = 0.$$

Это будет то же подпространство, если выполнено

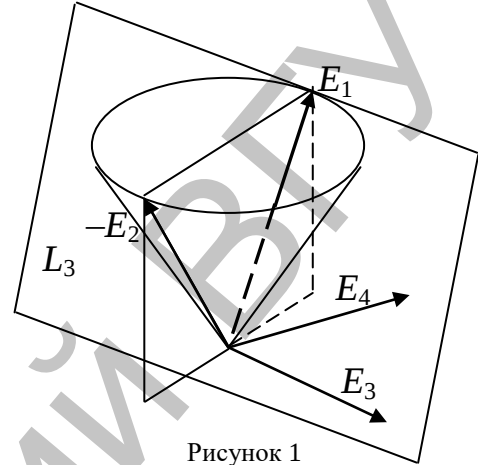


Рисунок 1

$$\frac{a}{a} = \frac{b-a}{b} = \frac{c}{c}.$$

Отсюда получаем $a = 0$. Итак, подпространство L_2 задаётся в L_3 уравнением: $bx_2 + cx_4 = 0$. Тем самым, все инвариантные двумерные подпространства содержат базисный вектор e_1 . Это значит, что они являются линейной оболочкой векторов $\langle e_1, \alpha e_2 + \beta e_4 \rangle$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Нетрудно убедиться что они будут инвариантными при любом значении параметра t . ■

Заключение. В данной работе мы исследовали два класса преобразований четырёхмерного пространства Минковского, сохраняющих скалярное произведение, а именно нашли все их двумерные инвариантные подпространства. Полученные результаты используются при изучении автоподобий четырёхмерных алгебр Ли, являющихся прямой суммой двух двумерных алгебр Ли.

О ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА С ВЫРОЖДЕННОЙ МЕТРИКОЙ

Черных В.В.,

студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Хорошо известно, что представляет собой ортогональное дополнение к подпространству и проекция вектора на подпространство, если в пространстве задано евклидово и лоренцево скалярное произведение.

Цель данной работы – выяснить это для пространства с вырожденным скалярным произведением и доказать одну лемму, которая используется при исследовании автоизометрий алгебр Ли.

Материал и методы. Рассматривается трёхмерное пространство с вырожденным скалярным произведением. Используются методы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Результаты и их обсуждение. Пусть L – трёхмерное пространство, на котором задано евклидово или лоренцево скалярное произведение (в дальнейшем – метрика), а H – его двумерное подпространство. Рассмотрим вектор $x \notin H$. Существует единственное разложение $x = y + z$, такое что $y \in H$, $z \in H^\perp$. Тогда вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство H . Это определение не работает, если на H индуцируется вырожденное скалярное произведение, т.к в этом случае $H^\perp \subset H$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что на H индуцируется невырожденная метрика.

Существует единственное направление в H ортогональное одновременно векторам x и y . Пусть вектор u принадлежит этому направлению (рисунок 1). Направление вектора y можно определить следующим образом.

Пусть $J = x^\perp \cap H$. Тогда в H существует единственное направление, ортогональное J . Это и будет направление Ry . Это определение работает даже в том случае, когда вектор x изотропный (т.е. когда $x \in x^\perp$).

Предположим, что линейное преобразование $F: L \rightarrow L$ сохраняет скалярное произведение, вектор x является его собственным вектором, а подпространство H инвариантно относительно этого преобразования. Тогда $H^\perp$ тоже инвариантно и, в силу единственности разложения $x = y + z$, векторы y , z и u являются собственными векторами преобразования F .

Вектор, скалярный квадрат которого равен 1 или -1 будем называть единичным. Выберем в L базис (E_1, E_2, E_3) , состоящий из единичных векторов, такой что $E_1 \notin H$, $E_1 \notin H^\perp$, $E_3 \in H$, $E_3 \cdot E_1 = E_3 \cdot E_2 = 0$, при этом E_2 сонаправлен ортогональной проекции вектора E_1 на двумерное подпространство H (рисунок 2).

Лемма 1. Пусть линейное преобразование $F: L \rightarrow L$ сохраняет скалярное произведение. Если вектор E_1 является собственным вектором этого преобразования, а подпространство H инвариантно относительно этого преобразования, то F действует по формулам:

$$F(E_1) = \theta E_1, F(E_2) = \theta E_2, F(E_3) = \pm E_3, \theta = \pm 1.$$

Доказательство. Преобразование F сохраняет ортогональность векторов. Направление RE_3 является единственным направлением в H ортогональным вектору E_1 . Поэтому это направление инвариантно, а требование сохранения скалярного квадрата E_3^2 приводит к тому, что $F(E_3) = \pm E_3$. По этой же причине $F(E_1) = \pm E_1$.

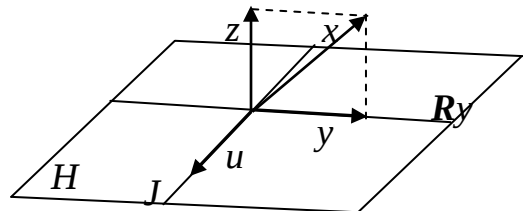


Рисунок 1

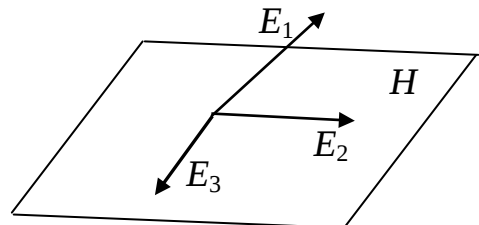


Рисунок 2