



Особенности применения алгоритма Вейерштрасса для возвратных алгебраических уравнений

Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко

Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Исследовано применение алгоритма Вейерштрасса одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени для класса возвратных алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решен полностью. Выявлена геометрическая природа свойства возвратности, получены удобные аналитические формулы для корней уравнений четвертой и шестой степени, содержащие не только радикалы; проведено сравнение с методом функций Никипорца. Продемонстрированы многочисленные примеры, подтверждающие сходимость соответствующего итерационного процесса при «почти» произвольном выборе вектора начального приближения. Такое поведение итерационного процесса объясняется системой инвариантов, т.е. системой поверхностей, на которых расположены точки итерационного процесса. Доказаны необходимые и достаточные условия расположения всех корней такого класса уравнений на окружности комплексной плоскости.

Ключевые слова: полином, возвратные алгебраические уравнения, итерационный процесс, метод Вейерштрасса, инварианты.

Peculiarities of applying Weierstrass algorithm for reverse algebraic equations

Y.V. Trubnikov, O.V. Pyshnenko

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Application of Weierstrass algorithm of simultaneous establishment of all roots of an algebraic equation of arbitrary degree for the class of reverse algebraic equations, for which the problem of the choice of primary nearing vector is solved fully, is studied. Geometric nature of the characteristic of the reverse is found out, convenient analytical formulas for the fourth and sixth degree equation roots, which contain not only radicals, are obtained; comparison with the method of Nikiporets functions is made. Numerous examples are given which confirm convergence of the corresponding iteration process with «almost» arbitrary choice of the primary nearing vector. Such behaviour of the iteration process is explained by the system of invariants, i.e. the system of surfaces on which points of iteration process are located. Necessary and sufficient conditions of the location of all roots of such class equations on the circumference of a complex surface are proved.

Key words: polynome, reverse algebraic equations, iteration process, Weierstrass method, invariants.

Алгоритм Вейерштрасса является эффективным алгоритмом одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени. Многочисленные примеры подтверждают сходимость соответствующего итерационного процесса при «почти» произвольном выборе вектора начального приближения. Такое поведение итерационного процесса объясняется, по нашему мнению, системой инвариантов, т.е. системой поверхностей, на которых расположены точки итерационного процесса. Цель данной работы: исследование класса алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решается полностью, – это класс возвратных алгебраических уравнений; выяснение геометрической природы свойства возвратности; получение удобных аналитических формул для корней уравнений четвертой и шестой степени, содержащих не только радикалы; проведено сравнения с методом функций Никипорца.

Материал и методы. Объектами исследования являются итерационный процесс Вейерштрасса и возвратные алгебраические уравнения. В качестве метода исследования применяются теория определителей, свойства неявных функций и некоторые общие теоремы функционального анализа.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$P_{2n} z \equiv z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + a_2 z^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} z + a_{2n} = 0, \quad a_0 = 1 \quad (1)$$

с действительными коэффициентами

$$a_j \quad j=1, 2, \dots, 2n,$$

удовлетворяющими равенствам:

$$a_{n+k} = a_{n-k} r^{2k} \quad r > 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2)$$

Лемма 1. Подстановка

$$y = z + \frac{r^2}{z} \quad (3)$$

приводит уравнение (1) к виду:

$$\Delta_n + a_1 \Delta_{n-1} + a_2 \Delta_{n-2} + \dots + a_{n-1} \Delta_1 + a_n \Delta_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$\Delta_0 = 1,$$

$$\Delta_1 = z + \frac{r^2}{z},$$

$$\Delta_2 = z^2 + \frac{r^4}{z^2},$$

...

$$\Delta_{n-1} = z^{n-1} + \frac{r^{2n-2}}{z^{n-1}},$$

$$\Delta_n = z^n + \frac{r^{2n}}{z^n},$$

при этом величины $\Delta_k \quad k=0, 1, \dots, n$ можно выразить через степени переменной y из следующей системы линейных относительно $\Delta_k \quad k=0, 1, \dots, n$ уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_0 & & & & = & 1, \\ & \Delta_1 & & & = & y, \\ 2r^2 \Delta_0 & + & \Delta_2 & & = & y^2, \\ & 3r^2 \Delta_1 & + & \Delta_3 & = & y^3, \\ 6r^2 \Delta_0 & + & 4r^2 \Delta_2 & + & \Delta_4 & = & y^4, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases} \quad (5)$$

где структура k -го уравнения системы (5) зависит от четности k .

Доказательство. Запишем уравнение (1) с учетом равенств (2):

$$P_{2n} z \equiv z^{2n} + \sum_{s=1}^n a_s z^{2n-s} + \sum_{s=1}^n a_{n-s} r^{2s} z^{n-s} = 0. \quad (6)$$

Разделив обе части уравнения (6) на z^n и группируя соответствующим образом слагаемые, получаем уравнение (4).

Далее установим структуру k -го уравнения системы (5). Если $k=2m+1$, то, обозначив $t=r^2$, получаем:

$$y^{2m+1} = \left(z + \frac{t}{z} \right)^{2m+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= z^{2m+1} + C_{2m+1}^1 z^{2m} \cdot \frac{t}{z} + C_{2m+1}^2 z^{2m-1} \cdot \frac{t^2}{z^2} + \dots + \\
&\quad + C_{2m+1}^m z^{m+1} \cdot \frac{t^m}{z^m} + C_{2m+1}^{m+1} z^m \cdot \frac{t^{m+1}}{z^{m+1}} + \dots + \\
&\quad + C_{2m+1}^{2m-1} z^2 \cdot \frac{t^{2m-1}}{z^{2m-1}} + C_{2m+1}^{2m} z \cdot \frac{t^{2m}}{z^{2m}} + C_{2m+1}^{2m+1} \cdot \frac{t^{2m+1}}{z^{2m+1}} = \\
&\quad = C_{2m+1}^{2m} t^m \Delta_1 + C_{2m+1}^{m-1} t^{m-1} \Delta_3 + \dots + \\
&\quad + C_{2m+1}^2 t^2 \Delta_{2m-3} + C_{2m+1}^1 t \Delta_{2m-1} + C_{2m+1}^0 \Delta_{2m+1}.
\end{aligned}$$

Если $k = 2m$, то

$$\begin{aligned}
y^{2m} &= \left(z + \frac{t}{z} \right)^{2m} = \\
&= C_{2m}^0 z^{2m} + C_{2m}^1 z^{2m-1} \cdot \frac{t}{z} + C_{2m}^2 z^{2m-2} \cdot \frac{t^2}{z^2} + \dots + \\
&\quad + C_{2m}^{m-1} z^{m+1} \cdot \frac{t^{m-1}}{z^{m-1}} + C_{2m}^m z^m \cdot \frac{t^m}{z^m} + C_{2m}^{m+1} z^{m-1} \cdot \frac{t^{m+1}}{z^{m+1}} + \dots + \\
&\quad + C_{2m}^{2m-2} z^2 \cdot \frac{t^{2m-2}}{z^{2m-2}} + C_{2m}^{2m-1} z \cdot \frac{t^{2m-1}}{z^{2m-1}} + C_{2m}^{2m} \cdot \frac{t^{2m}}{z^{2m}} = \\
&= C_{2m}^m t^m \Delta_0 + C_{2m}^{m-1} t^{m-1} \Delta_2 + \dots + C_{2m}^1 t \Delta_{2m-2} + C_{2m}^0 \Delta_{2m}.
\end{aligned}$$

Здесь C_m^k – биномиальные коэффициенты.

Лемма доказана.

Запишем матрицу A коэффициентов системы (5) для случая $n = 2$ (т.е. $[5 \times 5]$ матрицу):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 & 1 & 0 \\ 6t^2 & 0 & 4t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица A легко обратима, например:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t & 0 & 1 & 0 \\ 2t^2 & 0 & -4t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь выясним геометрический смысл равенств (2).

Теорема 1. *Необходимыми и достаточными условиями расположения всех корней уравнения (1) с действительными коэффициентами на окружности $|z| = r$ являются равенства (2) и локализация всех корней уравнения (4) на отрезке*

$$-2r \leq y_j \leq 2r \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (1) имеет n пар комплексно сопряженных корней, расположенных на окружности $|z| = r$.

При $n=1$ уравнение (1) будет иметь вид:

$$z^2 - 2r \cos \varphi z + r^2 \quad a_0 = 1, \quad (8)$$

т.е. его корни $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = re^{-i\varphi}$ и

$$a_2 = a_0 r^2 \quad n=1, \quad k=1.$$

Кроме того, уравнение

$$y = z + \frac{r^2}{z} = 2r \cos \varphi$$

имеет решение, удовлетворяющее условию (7).

Сделаем предположение индукции, т.е. допустим, что

$$\begin{aligned} P_{2n} z &= z^{2n} + \sum_{s=1}^n b_s z^{2n-s} + \sum_{s=1}^n b_{n+s} z^{n-s} = \\ &= z^{2n} + \sum_{s=1}^n b_s z^{2n-s} + \sum_{s=1}^n b_{n-s} r^{2s} z^{n-s}, \end{aligned}$$

тогда, присоединяя еще одну пару сопряженных корней, определяемую многочленом $z^2 - qz + r^2$ $-2r \leq q \leq 2r$, получаем:

$$\begin{aligned} P_{2n+2} z &= P_{2n} z \cdot z^2 - qz + r^2 = \\ &= z^{2n+2} + \sum_{s=1}^n b_s z^{2n+2-s} + \sum_{s=1}^n b_{n-s} r^{2s} z^{n+2-s} - \\ &- q \left(z^{2n+1} + \sum_{s=1}^n b_s z^{2n+1-s} + \sum_{s=1}^n b_{n-s} r^{2s} z^{n+1-s} \right) + \\ &+ r^2 \left(z^{2n} + \sum_{s=1}^n b_s z^{2n-s} + \sum_{s=1}^n b_{n-s} r^{2s} z^{n-s} \right) = \\ &= z^{2n+2} + b_1 - q z^{2n+1} + b_2 - b_1 q + r^2 z^{2n} + \\ &+ b_3 - b_2 q + b_1 r^2 z^{2n-1} + \dots + \\ &+ b_n - b_{n-1} q + b_{n-2} r^2 z^{n+2} + \\ &+ b_{n+1} r^2 - b_n q + b_{n-1} r^2 z^{n+1} + \\ &+ b_{n-2} r^4 - b_{n-1} q r^2 + b_n r^2 z^n + \dots + \\ &+ b_0 r^{2n} - b_1 q r^{2n-2} + b_2 r^{2+2n-2} z^2 + \\ &+ -b_0 q r^{2n} + b_1 r^{2+2n-1} z + b_0 r^{2n+2} \quad b_0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$P_{2n+1} = \sum_{s=0}^{2n+1} a_s z^{2n+1-s},$$

то

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= r^2 b_{n-2} r^2 - b_{n-1} q + b_n = r^2 a_n, \\ &\dots \\ a_{2n} &= r^{2n-2} b_2 - b_1 q + b_0 r^2 = r^{2n-2} a_2, \\ a_{2n+1} &= r^{2n} b_1 - b_0 q = r^{2n} a_1, \\ a_{2n+2} &= a_0 r^{2n+2}. \end{aligned}$$

Последние равенства означают, что

$$\begin{aligned} a_{n+1+k} &= a_{n+1-k} \cdot r^{2k} \\ 1 \leq k \leq n+1, \quad a_0 &= b_0 = 1. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть выполнены равенства (2), тогда подстановка (3) приводит уравнение (1) к уравнению (4), а свойство (7) гарантирует расположение всех корней уравнения (1) на окружности $|z|=r$.

Теорема доказана.

Рассмотрим особенности применения алгоритма Вейерштрасса для уравнений вида (1), все корни которых расположены на окружности $|z|=r$. При этом значение r определяется сразу же:

$$r = \sqrt[n]{a_{2n}}, \quad (9)$$

а для системы косинусов

$$\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_n \quad (10)$$

эффективным образом строится алгебраическое уравнение n -й степени, все корни которого расположены на отрезке $-1; 1$, т.е. решается проблема выбора начального вектора. Кроме того, при $n=1, 2$ для корней уравнения (1) получаются удобные аналитические выражения, содержащие не только радикалы.

Например, при $n=1$, т.е. для квадратного уравнения

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0, \quad (11)$$

имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= r e^{i\varphi}, \quad z_2 = r e^{-i\varphi}, \\ z_1 + z_2 &= r e^{i\varphi} + r e^{-i\varphi} = 2r \cos \varphi, \\ z_1 \cdot z_2 &= r^2 = a_2, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a_2}, \quad 2r \cos \varphi = -a_1, \\ \cos \varphi &= -\frac{a_1}{2r} = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \\ \varphi &= \arccos \left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, корни уравнения (11) находятся по формуле

$$z_{1,2} = \sqrt{a_2} e^{\pm i \arccos \left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \right)}. \quad (12)$$

При $n=2$

$$\begin{aligned} P_4 z &\equiv z^2 - 2rz \cos \varphi_1 + r^2 \quad z^2 - 2rz \cos \varphi_2 + r^2 = \\ &= z^4 - 2r \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \quad z^3 + \\ &+ 2r^2 \quad 1 + 2 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \quad z^2 - \\ &- 2r^3 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \quad z + r^4, \end{aligned}$$

т.е. должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} -2r \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 &= a_1, \\ 2r^2 \quad 1 + 2 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 &= a_2, \\ -2r^3 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 &= a_3, \\ r^4 &= a_4. \end{aligned}$$

Эти равенства дают возможность в удобном аналитическом виде найти корни уравнения

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0. \quad (13)$$

Для этого запишем систему уравнений для нахождения $\cos \varphi_j \quad j=1, 2$:

$$\begin{cases} \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = -\frac{a_1}{2r}, \\ \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{2r^2} - 1 \right), \end{cases}$$

т.е. косинусы $\varphi_j \quad j=1, 2$ являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + \frac{a_1}{2r}t + \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{2r^2} - 1 \right) = 0. \quad (14)$$

Таким образом,

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4}}}{4\sqrt[4]{a_4}}, \quad (15)$$

а этот факт означает, что

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \sqrt[4]{a_4} e^{\pm i\varphi_1}, \\ z_{3,4} &= \sqrt[4]{a_4} e^{\pm i\varphi_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arccos \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4}}}{4\sqrt[4]{a_4}} \right), \\ \varphi_2 &= \arccos \left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4}}}{4\sqrt[4]{a_4}} \right). \end{aligned}$$

Например, для уравнения

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (16)$$

значения косинусов:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ, \\ \cos \varphi_2 &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 144^\circ, \end{aligned}$$

т.е. корни уравнения (16) имеют вид

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \\ z_{3,4} &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm i \cdot \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Для уравнения шестой степени, обозначив $t_j = \cos \varphi_j \quad j=1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} & z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + a_3 z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 \equiv \\ & \equiv z^2 - 2rt_1 z + r^2 \quad z^2 - 2rt_2 z + r^2 \quad z^2 - 2rt_3 z + r^2 = \\ & = z^6 - 2r(t_1 + t_2 + t_3)z^5 + \\ & + r^2[3 + 4(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)]z^4 - \\ & - 4r^3(t_1 + t_2 + t_3 + 2t_1 t_2 t_3)z^3 + \\ & + r^4[3 + 4(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)]z^2 - \\ & - 2r^5(t_1 + t_2 + t_3)z + r^6. \end{aligned} \quad (17)$$

Равенство (17) означает, что

$$r = \sqrt[6]{a_6},$$

а косинусы комплексно сопряженных пар можно найти, применяя алгоритм Вейерштрасса, из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{a_1}{2r}, \\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{a_2}{r^2} - 3 \right), \\ t_1 t_2 t_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{2r^3} \right). \end{cases} \quad (18)$$

Система уравнений (18) эквивалентна кубическому уравнению

$$t^3 + \frac{a_1}{2r} t^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_2}{r^2} - 3 \right) t - \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{2r^3} \right) = 0. \quad (19)$$

Относительно уравнения (19) известно, что все его корни расположены на отрезке $-1; 1$. Этот факт снимает трудности выбора начального приближения.

Похожая ситуация возникает, если структура корней уравнения (например, для уравнения четвертой степени) такова:

$$z_{1,2} = r_1 e^{\pm i\varphi}, \quad z_{3,4} = r_2 e^{\pm i\varphi},$$

т.е. корни образуют две комплексно сопряженные пары, расположенные на разных окружностях, но на двух сопряженных прямых.

Проведем анализ виетовской системы в этом случае. Так как

$$\begin{aligned} & z^2 - 2r_1 z \cos \varphi + r_1^2 \quad z^2 - 2r_2 z \cos \varphi + r_2^2 = \\ & = z^4 - 2 \cos \varphi (r_1 + r_2) z^3 + (r_1^2 + r_2^2 + 4r_1 r_2 \cos^2 \varphi) z^2 - \\ & \quad - 2r_1 r_2 (r_1 + r_2) z \cos \varphi + r_1^2 r_2^2, \end{aligned}$$

то

$$\begin{cases} 2(r_1 + r_2) \cos \varphi = -a_1, \\ r_1^2 + r_2^2 + 4r_1 r_2 \cos^2 \varphi = a_2, \\ 2r_1 r_2 (r_1 + r_2) \cos \varphi = -a_3, \\ r_1^2 r_2^2 = a_4. \end{cases} \quad (20)$$

Систему (20) можно решить следующим образом. Обозначив $r_1 + r_2 = r$, $\cos \varphi = t$, $r_1 r_2 = s$, получаем

$$\begin{cases} 2rt = -a_1, \\ r^2 - 2s + 4st^2 = a_2, \\ 2str = -a_3, \\ s^2 = a_4. \end{cases}$$

Выражая s из четвертого уравнения, имеем

$$s = \sqrt{a_4}$$

и, подставив это значение во второе и третье уравнения, получаем

$$\begin{cases} 2rt = -a_1, \\ r^2 - 2\sqrt{a_4} + 4\sqrt{a_4} t^2 = a_2, \\ 2\sqrt{a_4} tr = -a_3. \end{cases}$$

Далее выразим t из первого уравнения и подставим во второе:

$$r^2 - 2\sqrt{a_4} + 4\sqrt{a_4} \frac{a_1^2}{4r^2} = a_2.$$

Для нахождения r получаем биквадратное уравнение

$$r^4 - 2\sqrt{a_4} + a_2 r^2 + a_1^2 \sqrt{a_4} = 0. \quad (21)$$

После этого находим $\cos \varphi$ из равенства

$$t = \cos \varphi = -\frac{a_1}{2r}. \quad (22)$$

Покажем эффективность формул (15) на примере уравнения ([1], с. 106):

$$z^4 - 4(1 + \cos 0,1)z^3 + (8 + 16\cos 0,1)z^2 - 16(1 + \cos 0,1)z + 16 = 0. \quad (23)$$

В [1] уравнение (23) решается приближенно методом функций Никипорца. Соответствующий алгоритм является очень громоздким.

С другой стороны, легко заметить, что равенства (2) выполнены:

$$a_3 = -16(1 + \cos 0,1) = 4[-4(1 + \cos 0,1)] = 4a_1;$$

$$a_4 = 16 = 1 \cdot 4^2.$$

Это означает, что $r = 2$, т.е. все корни расположены на окружности $|z| = 2$, и осталось найти косинусы по формуле (15); для этого вычислим дискриминант d уравнения (14):

$$\begin{aligned} d &= a_1^2 - 4a_2 + 8\sqrt{a_4} = \\ &= 16(1 + \cos 0,1)^2 - 4(8 + 16\cos 0,1) + 32 = \\ &= 16 + 32\cos 0,1 + 16\cos^2 0,1 - 32 - 64\cos 0,1 + 32 = \\ &= 16 - 32\cos 0,1 + 16\cos^2 0,1 = 16(1 - \cos 0,1)^2. \end{aligned}$$

После этого имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{1,2} &= \frac{4(1 + \cos 0,1) \pm 4(1 - \cos 0,1)}{8} = \\ &= \frac{1 + \cos 0,1 \pm 1 - \cos 0,1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= 1, & \text{т.е. } \varphi_1 &= 0, \\ \cos \varphi_2 &= \cos 0,1, & \text{т.е. } \varphi_2 &= 0,1, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = 2, \\ z_3 &= z_4 = 2e^{i \cdot 0,1}. \end{aligned}$$

Приведем примеры систем, аналогичных системе (18), для нахождения косинусов. Для уравнения восьмой степени

$$z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + \dots + a_7 z + a_8 = 0$$

такая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{a_1}{2r}, \\ \sigma_2 = \frac{a_2}{4r^2} - 1, \\ \sigma_3 = \frac{1}{8r} \left(3a_1 - \frac{a_3}{r^2} \right), \\ \sigma_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{a_4}{2r^4} - \frac{a_2}{r^2} + 1 \right), \end{cases}$$

где σ_k $k=1,2,3,4$ – элементарные симметрические многочлены переменных $t_j = \cos \varphi_j$ $j=1,2,3,4$.

Рассмотрим, например, уравнение

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \quad (24)$$

Для уравнения (24)

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = -\frac{3}{4}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{4}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{16},$$

т.е. $t_j = \cos \varphi_j$ $j=1,2,3,4$ являются корнями уравнения

$$t^4 + \frac{t^3}{2} - \frac{3t^2}{4} - \frac{t}{4} + \frac{1}{16} = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{9} &\approx 0,766046, & \cos \frac{4\pi}{9} &\approx 0,173652, \\ \cos \frac{6\pi}{9} &= -0,5, & \cos \frac{8\pi}{9} &\approx -0,939693. \end{aligned}$$

Таким образом, решениями уравнения (24) являются числа:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \cos \frac{2\pi}{9} \pm i \cdot \sin \frac{2\pi}{9}, \\ z_{3,4} &= \cos \frac{4\pi}{9} \pm i \cdot \sin \frac{4\pi}{9}, \\ z_{5,6} &= -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_{7,8} &= \cos \frac{8\pi}{9} \pm i \cdot \sin \frac{8\pi}{9}. \end{aligned}$$

Для уравнения десятой степени

$$z^{10} + a_1 z^9 + a_2 z^8 + \dots + a_9 z + a_{10} = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 1, система для нахождения $t_j = \cos \varphi_j$ $j=1,2,\dots,5$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = -\frac{a_1}{2r}, \\ \sigma_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a_2}{r^2} - 5 \right), \\ \sigma_3 = -\frac{a_3}{8r^3} + \frac{a_1}{2r}, \\ \sigma_4 = \frac{1}{16} \left(\frac{a_4}{r^4} - \frac{3a_2}{r^2} + 5 \right), \\ \sigma_5 = \frac{1}{16r} \left(\frac{a_3}{r^2} - a_1 - \frac{a_5}{2r^4} \right). \end{cases}$$

Заключение. В настоящей статье исследовано применение алгоритма Вейерштрасса [2] одновременного нахождения всех корней алгебраического уравнения произвольной степени для класса возвратных алгебраических уравнений, для которых вопрос выбора вектора начального приближения решен полностью. Выяснена геометрическая природа свойства возвратности, получены удобные аналитические формулы для корней уравнений четвертой и шестой степени, содержащие не только радикалы; проведено сравнение с методом функций Никипорца. Продемонстрированы многочисленные примеры, подтверждающие сходимость соответствующего итерационного процесса при «почти» произвольном выборе вектора начального приближения. Такое поведение итерационного процесса объясняется системой инвариантов, т.е. системой поверхностей, на которых расположены точки итерационного процесса. Доказаны необходимые и достаточные условия расположения всех корней такого класса уравнений на окружности комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ -алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
2. Трубников, Ю.В. Оптимальные итерационные процессы: монография / Ю.В. Трубников, О.В. Пышненко, И.А. Орехова. – Витебск: УО «ВГУ имени П.М. Машерова», 2011. – 95 с.

Поступила в редакцию 24.10.2012. Принята в печать 20.02.2013.

Адрес для корреспонденции: e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.