Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

● РЯДЫ
● КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Курс лекций

2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
И20

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент *С.А. Шлапаков*

Курс лекций «Математический анализ. Ряды. Криволинейные интегралы» подготовлен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математический анализ» и предназначен для студентов заочной формы обучения математического факультета. В нем излагается теоретический материал и рассматриваются наиболее типичные задачи по изучаемым разделам математического анализа.

Предназначено для самостоятельной работы студентов.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

Настоящее учебное издание «Математический анализ. Ряды. Криволинейные интегралы» является продолжением опубликованных ранее учебных изданий «Математический анализ. Введение в анализ. Производная», «Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной», «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных» и предназначено для студентов второго курса заочного отделения математического факультета. В этой части содержится теоретический материал, который обычно изучается на втором курсе заочного отделения и включает в себя следующие разделы: «Числовые ряды», «Функциональные последовательности и ряды», «Криволинейные интегралы», «Формула Грина». Курс лекций написан в соответствии с учебным планом по математическому анализу для специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика», который предусматривает изучение математического анализа в течение 4 семестров в объеме 764 часов. Материал излагается в простой, доступной для самостоятельного изучения форме. Приводится большое количество примеров, которые способствуют более основательному, осмысленному изучению теоретического материала, а также будут полезны при решении контрольной работы за 4-ый семестр.

Данный курс лекций будет полезен также студентам очного отделения, занимающимся на математическом и физическом факультетах.

В конце данного издания приведен список основной и дополнительной литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов математического анализа.

I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И ИХ СХОДИМОСТЬ

1. Понятие числового ряда. Основные определения

Рассмотрим бесконечную последовательность действительных чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. Построим из элементов этой последовательности бесконечную сумму вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_k . \qquad (1)$$

Сумма (1) называется **числовым рядом**.

Отдельные слагаемые $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются **членами числового ряда**, элемент u_n называется ***n*-ым или общим членом ряда**.

Ряд считается заданным, если известен закон, по которому для любого n можно найти ***n*-ый член** ряда u_n.

Способы задания рядов. Числовой ряд, так же, как и числовая последовательность, может задаваться следующим образом:

1) перечислением достаточного числа членов ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \ldots ;$$

2) с помощью задания его n-го члена

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} .$$

Сумма первых n элементов ряда (1) называется ***n*-ой частичной суммой ряда** и обозначается символом S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{n=1}^{n} u_k . \qquad (2)$$

Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда сходится, то предел этой последовательности

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \qquad (3)$$

называется **суммой ряда**, а ряд называется **сходящимся.**

Если предел (3) не существует или равен бесконечности, то ряд называется **расходящимся**.

Пример 1. Рассмотрим ряд, который является суммой элементов бесконечной геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Его n-ая частичная сумма будет равна

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad |q| \neq 1.$$

Найдем предел частичных сумм данного ряда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{при } |q| < 1, \\ \infty, & \text{при } |q| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел, т.е. ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$. При $|q| > 1$ ряд расходится.

При $q = 1$ наш ряд имеет вид $a + a + \ldots$, n-ая частичная сумма ряда $S_n = na$, предел этой суммы $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$. Следовательно, ряд расходится.

При $q = -1$ наш ряд имеет вид $a - a + \ldots$. Частичные суммы ряда находятся по формуле

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2k, \\ a, & \text{при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует, ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{n} aq^n$ сходится при $|q| < 1$.

Рассмотрим ряд $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, полученный из ряда (1) отбрасыванием n первых членов ряда. Этот ряд называется ***n* –ым остатком ряда** (1).

***Замечание* 1.** Из сходимости ряда (1) следует сходимость его n-го остатка $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, и наоборот, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ следует сходимость ряда (1).

***Замечание* 2.** Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление конечного числа членов ряда) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

Одной из основных задач теории числовых рядов является установление признаков, по которым можно решить вопрос о сходимости или расходимости числовых рядов, не прибегая к нахождению сумм этих рядов.

2. Критерий Коши (необходимый признак сходимости ряда)

***Теорема* 1 (*критерий Коши*).** *Для того, чтобы числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N, *что для любого номера* $n > N$ *и любого натурального числа* p *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon . \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1). Для того, чтобы эта последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для неё выполнялся критерий Коши сходимости числовой последовательности, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ должен существовать номер N такой, что для любого $n > N$ и любого натурального числа p будет выполняться неравенство

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon .$$

Учитывая, что

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

$$S_{n+p} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots + u_{n+p},$$

получим

$$| S_n - S_{n+p} | = |u_{n+1} + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} | = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| .$$

Следовательно, теорема доказана. ■

Пример 2. Используя критерий Коши, доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

расходится.

Решение.

Докажем, что критерий Коши для данного ряда не выполняется, т.е. существуют такие ε и p для которых выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| > \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 1$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, критерий Коши не выполняется и ряд расходится.

Замечание. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим рядом** и используется для исследования сходимости других рядов.

Теорема **2 (*необходимый признак сходимости ряда*).**

Для сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *необходимо, чтобы последовательность* $\{u_n\}$ *его членов являлась бесконечно малой, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходится. Следовательно, для ряда (1) выполняется критерий Коши, т.е. для любого ε существует такой номер N, что для любого $n > N$ и для любого натурального числа p выполняется неравенство (4).

Пусть $p = 1$, тогда данное неравенство можно записать в виде $|u_{n+1}| < \varepsilon$. Возьмём $N_0 = N + 1$, тогда для любого $n > N_0$ выполняется неравенство $|u_n| < \varepsilon$, т.е последовательность $\{u_n\}$ является бесконечно малой последовательностью. ■

Теорема **3.** *Если ряд* (1) *сходится, то последовательность* $\{r_n\}$, где $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *, является бесконечно малой, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n-1}$.

Решение.

Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{n+1}{n-1}\right\}$ членов ряда и найдем ее предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-1}=1$. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{n+1}{n-1}\right\}$ не является бесконечно малой и ряд расходится.

3. Арифметические операции над рядами

Рассмотрим два сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n\,. \tag{6}$$

***Определение* 1. *Суммой* (*разностью*)** *рядов* (5) *и* (6) *называет-ся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\ \pm v_n)\,. \tag{7}$$

***Теорема* 4.** *Если ряды* (5) *и* (6) *сходятся*, *то сходится и ряд* (7) *и сумма ряда* (7) *равна сумме* (*разности*) *рядов* (5) *и* (6).

Доказательство. Пусть U_n, V_n, C_n соответственно частичные суммы рядов (5), (6) и (7), U и V – суммы рядов (5) и (6). Тогда

$$C_n=(u_1\ \pm v_1)+(u_2\ \pm v_2)+...+(u_n\ \pm v_n)=$$

$$=(u_1\ +u_2\ +...+u_n)\ \pm(v_1+v_2+...\ v_n\ )=U_n\pm V_n\,.$$

Перейдя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}(U_n\pm V_n)=\lim_{n\to\infty}U_n\pm\lim_{n\to\infty}V_n=U\pm V,$$

что и доказывает наше утверждение. ■

***Замечание* .** Из сходимости ряда (7) не следует сходимость рядов (5) и (6).

Например, ряд (1–1)+(1–1)+… можно рассматривать, как сумму рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$. Данный ряд сходится, хотя ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ – расходятся.

***Определение* 2.** *Произведением* ряда (5) на число c называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n \,. \qquad (8)$$

***Теорема* 5.** *Если ряд* (5) *сходится, то сходится и ряд* (8), *и сумма ряда* (8) *равна сумме ряда* (5) *умноженной на число с. Если ряд* (5) *расходится, то и ряд* (8) *расходится.*

Справедлива и теорема обратная теореме 5.

Замечание. Операция произведения рядов (5) и (6) будет определена в п. 2, § 1.3.

§1.2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с положительными членами. Признак сравнения

В этом параграфе мы будем рассматривать ряды с неотрицательными членами, которые принято называть **рядами с положительными членами или положительными рядами.**

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \qquad (1)$$

где $u_n \geq 0$.

***Теорема* 1.** *Для того чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.*

Доказательство. Ряд (1) сходится, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$. Это неубывающая последовательность

$$S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots \,.$$

Для сходимости такой последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху. ■

***Теорема* 2 (*признак сравнения*).**

Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \,. \qquad (3)$$

I. *Если для любого n выполняется неравенство* $u_n \le v_n$*, то из сходимости ряда* (3) *вытекает сходимость ряда* (2), *а из расходимости ряда* (2) *следует расходимость ряда* (3).

II. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A, \qquad (0 < A < \infty),$$

то ряды (2) *и* (3) *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство.

I. Пусть ряд (3) сходится и V − сумма этого ряда. Пусть

$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ − n-ая частичная сумма ряда (2),

$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ − n-ая частичная сумма ряда (3).

Тогда, так как все элементы ряда (2) не больше соответствующих элементов ряда (3), то выполняется неравенство:

$$U_n \le V_n \le V,$$

т.е. частичные суммы ряда (2) ограничены, и по теореме 1 ряд (3) сходится.

Пусть ряд (2) расходится, тогда последовательность его частичных сумм неограниченна, а, следовательно, неограниченна и последовательность частичных сумм ряда (3), и этот ряд также расходится.

II. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A.$ Тогда, по определению предела последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon,$$

или неравенство

$$-\varepsilon < \frac{u_n}{v_n} - A < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \varepsilon + A,$$

$$v_n(A-\varepsilon) < u_n < v_n(\varepsilon + A).$$

Пусть ряд (2) сходится, тогда в силу первой части теоремы сходится и ряд $\sum_{n=1}^{n} v_n (A-\varepsilon) = (A-\varepsilon)\sum_{n=1}^{n} v_n$. Следовательно, сходится и ряд (3).

Пусть ряд (2) расходится, тогда расходится и ряд $\sum_{n=1}^{n} v_n (A+\varepsilon) = (A+\varepsilon)\sum_{n=1}^{n} v_n$, следовательно, расходится и ряд (3).

Аналогично из сходимости (расходимости) ряда (3) следует сходимость (расходимость) ряда (2). ■

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды

а) $\dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2^2} + \ldots + \dfrac{1}{1+2^n} + \ldots,$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^4 - n + 1}}.$

Решение.

а) Так как для всех *n* выполняется неравенство $\dfrac{1}{1+2^n} < \dfrac{1}{2^n}$, то по теореме 2 данный ряд будет сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, который является суммой элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ – сходится, следовательно, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+2^n}$.

б) Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме (вторая часть теоремы 2). В качестве ряда сравнения возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Найдем предел отношения *n*-ых членов полученных рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4 - n + 1}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4 - n + 1}} = 1.$$

Так как данный предел равен 1 и гармонический ряд расходится, то, по второй части теоремы 2, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^4 - n + 1}}$ также расходится.

2. Признаки Д'Аламбера и Коши

***Теорема* 3 (*признак Д'Аламбера*).**

Рассмотрим ряд (1).

I *Если для любого* n *или, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1,$$

то ряд сходится,

если $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *то ряд расходится.*

II *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \qquad (4)$$

и $l < 1$, *то ряд сходится*; *при* $l > 1$ – *ряд расходится.*

Доказательство.

I. Пусть $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$. Следовательно, $u_{n+1} \le qu_n$. Тогда выполняются неравенства

$$u_2 \le qu_1,$$

$$u_3 \le qu_2 \le q^2 u_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n \le q^{n-1} u_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $0 < q < 1$, следовательно, он сходится. Значит, сходится и ряд $u_1\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Тогда, по признаку сравнения, сходится и ряд (1).

Пусть $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Следовательно, $u_{n+1} > u_n$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ − возрастающая последовательность с положительными членами. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0,$$

т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Значит ряд (1) расходится.

Первая часть теоремы доказана.

II. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon.$$

При $l<1$ можно выбрать ε таким, что $l+\varepsilon<1$, тогда $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon<1$ и, согласно первой части теоремы, ряд сходится.

При $l>1$ можно выбрать ε таким, что $l-\varepsilon>1$, тогда $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>l-\varepsilon>1$ и, согласно первой части теоремы, ряд расходится. ■

Замечание. Если число $l=1$, то о сходимости или расходимости ряда ничего сказать нельзя.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

Решение.

Воспользуемся второй частью теоремы 3. Рассмотрим предел (4), где $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$, $u_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, по второй части теоремы, данный ряд сходится.

***Теорема* 4 (*признак Коши*).**

Рассмотрим ряд (1).

I *Если для любого* n *или, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q<1,$$

то ряд сходится;

если $\sqrt[n]{u_n}>1$, *то ряд расходится.*

II *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l \qquad (5)$$

и $l < 1$, *то ряд сходится*; *при* $l > 1$ *– ряд расходится*.

Теорема (4) доказывается аналогично теореме (3).

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n+1}\right)^n$.

Решение.

Воспользуемся признаком Коши в предельной форме (второй частью теоремы 4). Рассмотрим предел (5), где $u_n = \left(\frac{5n}{3n+1}\right)^n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{3n+1} = \frac{5}{3} > 1.$$

Следовательно, по второй части теоремы 4, данный ряд расходится.

3. Интегральный признак Коши-Маклорена

***Теорема* 5.** *Пусть функция* $f(x)$ *– неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой* $x \ge m$, *где* m *– некоторое натуральное число*. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(m+n) + \ldots \quad (6)$$

сходится, *если сходится несобственный интеграл*

$$\int_m^{\infty} f(x)dx, \quad (7)$$

и расходится, *если интеграл* (7) *расходится*.

Доказательство.

Проведем предварительные выкладки.

Пусть k – любое натуральное число, большее, чем $m + 1$. Пусть x – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $k - 1 \le x \le k$. Так как функция $f(x)$ не возрастает на отрезке $[k - 1, k]$, то выполняется неравенство

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1),$$

и, по свойствам определенного интеграла,

$$\int_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx,$$

или

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k-1).$$

Это неравенство справедливо для любого натурального числа $k \ge m+1$.

Придавая k значения $k = m + 1$, $k = m + 2$, … , получим

$$f(m+1) \le \int_{m}^{m+1} f(x)dx \le f(m),$$

$$f(m+2) \le \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx \le f(m+1),$$

….

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1).$$

Просуммируем неравенства. Имеем:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Пусть S_n – частичная сумма ряда (6), тогда $\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = S_n - f(m)$, $\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$. Неравенство принимает вид

$$S_n - f(m) \le \int_{m}^{n} f(x)dx \le S_{n-1}.$$

Необходимость. Пусть ряд $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ – сходится. Докажем, что интеграл (7) также сходится. Сходимость данного интеграла равносильна сходимости числовой последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = \int_{m}^{n} f(x)dx$. Так как ряд (6) сходится, то, по теореме 1, последовательность его частичных сумм ограничена сверху, т.е. выполняется неравенство $S_{n-1} \le S$, где S – сумма ряда. А так как $a_n = \int_{m}^{n} f(x)dx \le S_{n-1} \le S$, то последовательность $\{a_n\}$ также ограничена сверху. Кроме того, так как функция $f(x)$ неубывающая на промежутке $[m, \infty)$, то для всех элементов последовательности $\{a_n\}$ выполняется неравенство $a_n = \int_{m}^{n} f(x)dx \le a_{n+1} = \int_{m}^{n+1} f(x)dx$, и последовательность $\{a_n\}$ – неубывающая. Следовательно, $\{a_n\}$ – сходится. Значит, сходится и интеграл (7).

Достаточность. Пусть интеграл (7) сходится. Отсюда следует, что сходится и последовательность $\{a_n\}$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, а так как $S_n - f(m) \le a_n$, то $S_n \le a_n + f(m)$. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ так же ограничена, и ряд (6) – сходится по теореме 1. ■

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение.

При $\alpha < 0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = \infty$, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится. При $\alpha = 0$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, который тоже расходится.

Пусть $\alpha > 0$. При таких значениях α функция $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ – положительная и убывает на промежутке $[1;\infty)$. Следовательно, ряд сходится, если сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx$.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_1^{R} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim\limits_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \lim\limits_{R\to\infty} \ln R = \infty$.

Если $\alpha \ne 1$, то

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, можно сделать вывод, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$.

Замечание. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ называется **рядом Дирихле** и часто используется для исследования на сходимость других рядов с помощью признака сравнения. При $\alpha = 1$ ряд Дирихле является **гармоническим рядом.**

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

Решение.

Исходя из вида n-го члена ряда, построим функцию $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^2$. Функция $f(x)>0$ и непрерывна при $x\geq 1$. Можно доказать также, что эта функция убывает при $x\geq 1$ (для этого надо определить знак производной функции на данном промежутке).

Для исследования ряда на сходимость воспользуемся интегральным признаком .

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2dx=\int_1^{\infty}\frac{(1+x^2)+2x}{(1+x^2)^2}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx+2\int_1^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(\int_1^{R}\frac{1}{1+x^2}dx+2\int_1^{R}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx\right)=\lim_{R\to\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_1^R+\int_1^{R}\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}\right)=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left((\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2})\Big|_1^R\right)=\lim_{R\to\infty}\left(\operatorname{arctg}R-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{1+R^2}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Так как интеграл сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$ также сходится.

§ 1.3. РЯДЫ С ЧЛЕНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

1. Понятие абсолютно и условно сходящихся рядов

Будем рассматривать ряд с членами произвольного знака

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{1}$$

и ряд, составленный из модулей элементов ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|. \tag{2}$$

***Теорема* 1.** *Из сходимости ряда* (2) *следует сходимость ряда* (1).

Доказательство. Пусть ряд (2) сходится, следовательно, для этого ряда выполняется критерий Коши, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n \geq N$ и любого $p \in N$ выполняется неравенство:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon .$$

Учитывая свойства модулей, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon .$$

Следовательно, критерий Коши выполняется и для ряда (1), значит, этот ряд сходится. ■

Определение 1. *Если ряд* (2) *сходятся, то говорят, что ряд* (1) *сходится* ***абсолютно.***

Определение 2. *Ряд* (1) *называется* ***условно*** *сходящимся, если ряд* (1) *сходится, а ряд* (2) *– расходится.*

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}. \tag{3}$$

Решение.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов ряда (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|.$$

Так как для всех n выполняется неравенство $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, как ряд Дирихле с показателем $\alpha = 2 > 1$, то, по признаку сравнения, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$. Следовательно, по теореме 1, ряд (3) сходится абсолютно.

Замечание. Рассмотрим ряды (1) и (2). Для установления абсолютной сходимости ряда (1) к ряду (2) могут быть применены признаки сходимости рядов с положительными членами, например , признаки Д’Аламбера и Коши. Но если ряд (2) окажется расходящимся и расходимость будет доказана с помощью этих признаков, то ряд (1) также расходится, так как для этого ряда не будет выполняться необходимый признак сходимости ряда (теорема 2, п. 2, §1.1).

Действительно, если, например, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=l>1$, то по свойству пределов последовательностей, существует номер N, что для всех $n>N$, выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\ge 1 \quad \text{или} \quad |u_{n+1}|\ge|u_n|.$$

Последовательность $\{|u_n|\}$ имеет неотрицательные элементы и является неубывающей, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

Поэтому признаки Д'Аламбера и Коши могут быть сформулированы применительно к рядам произвольного знака.

Теорема 2 (***признак Д'Аламбера для произвольного ряда***).

Если для ряда (1) *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=l$, *то при* $l<1$ *ряд* (1) *абсолютно сходится, при* $l>1$ *ряд* (1) *расходится.*

Теорема 3 (***признак Коши для произвольного ряда***). *Если для ряда* (1) *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$, *то при* $l<1$, *ряд* (1) *абсолютно сходится, при* $l>1$ *ряд* (1) *расходится.*

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n!}{2^n}$.

Решение.

Данный ряд является знакопеременным. Исследуем на сходимость ряд, составленный из модулей элементов данного ряда, т.е. ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$. Применим признак Д''Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 2^n}{2^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2}=\infty>1.$$

Следовательно, по теореме 2, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$ расходится, значит расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n!}{2^n}$.

2. О перестановке членов абсолютно и условно сходящихся рядов

Одним из законов суммы конечного числа действительных слагаемых является переместительный закон, который говорит о том, что при перестановке слагаемых сумма не меняется. Возникает вопрос: справедлив ли этот закон и в случае бесконечного числа слагаемых, т.е может ли сумма сходящегося ряда изменится при перестановке членов этого ряда? Приведем без доказательства две теоремы, дающие ответ на этот вопрос.

***Теорема* 4 (*теорема Римана*).** *Если ряд сходится условно, то, какое бы ни было число L, можно переставить члены ряда так, чтобы ряд сходился к числу L (S = L).*

***Теорема* 5 (*теорема Коши*).** *Если ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

В п.3, §1.1. мы ввели понятие суммы и разности двух рядов. Введем понятие произведения двух рядов.

***Определение* 3.** *Произведением двух рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *называется ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *, элементами которого являются всевозможные произведения вида* $u_i v_j$ ($i=\overline{1,2,\ldots}$, $j=\overline{1,2,\ldots}$)*, занумерованные в каком угодно порядке.*

***Теорема* 6.** *Если два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся абсолютно и имеют суммы соответственно равные U и V, то ряд, являющийся произведением этих двух рядов, также сходится абсолютно и его сумма равна UV.*

3. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

***Определение* 4.** *Ряд вида*

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n+1} p_n + \ldots \qquad (4)$$

называется ***знакочередующимся рядом****.*

Числа $p_i > 0$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$ называются **членами** ряда (4).

***Теорема* 7 (*признак Лейбница*).** *Если члены знакочередующегося ряда* (4) *образуют последовательность, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *последовательность* $\{p_n\}$ − *невозрастающая;*
2) *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$,

то этот ряд сходится.

Доказательство.

Пусть последовательность $\{p_n\}$ – невозрастающая и бесконечно малая. Рассмотрим четную частичную сумму этого ряда

$$S_{2n} = p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + p_{2n-1} - p_{2n} =$$
$$= (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}).$$

Так как последовательность $\{p_n\}$ – невозрастающая, то все скобки в правой части данного равенства неотрицательные, следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}$ является неубывающей последовательностью.

С другой стороны:

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n}.$$

Следовательно, $S_{2n} < p_1$. Значит, последовательность $\{S_{2n}\}$ – ограничена. По теореме Вейерштрасса (п. 1, §2.3 [9]), существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Кроме того, так как $S_{2n-1} = S_{2n} - p_{2n}$ и, по второму условию теоремы, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - p_{2n}) = S.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ сходится к S. ■

Замечание **1.** Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 7, называется **рядом Лейбница.**

Замечание **2.** Из доказательства теоремы следует, что последовательность $\{S_{2n}\}$ сходится к пределу S не убывая. Аналогично, из равенства

$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

вытекает, что последовательность нечетных частичных сумм сходится к пределу S не возрастая.

Таким образом, для всех элементов последовательности выполняется неравенство

$$S_{2n} \le S \le S_{2n-1}.$$

А так как $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$, то можно сделать вывод, что

$$S - S_{2n} \le p_{2n} \quad \text{и} \quad S_{2n-1} - S \le p_{2n} \le p_{2n-1}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$|S - S_n| < p_n. \tag{5}$$

Это неравенство широко используется при приближенных вычислениях. *Если ряд заменить его частичной суммой, то погрешность вычислений не превзойдет первого из отброшенных членов.*

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из модулей элементов данного ряда. Этот ряд – гармонический, следовательно, он расходится.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Этот ряд – ряд Лейбница, так как последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, составленная из членов ряда, монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, этот ряд условно сходится.

Пример 4. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ с точностью до $\frac{1}{10^3}$.

Решение.

Из замечания 2 следует, что погрешность вычисления при замене суммы ряда его частичной суммой не превосходит первого из отброшенных членов. Поэтому посмотрим, какой из членов ряда удовлетворяет неравенству $u_n \le \frac{1}{10^3}$. Очевидно, что такое неравенство выполняется при $n \ge 10^3$. Следовательно, для того, чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо сумму ряда заменить 999-ой частичной суммой

$$S \approx S_{999} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}- \ldots +\frac{1}{999}.$$

II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 2.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

1. Понятие функциональной последовательности и функционального ряда

Определение* 1.** *Если любому натуральному числу n ставится в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, заданная на множестве X, то множество занумерованных функций называется* ***функциональной последовательностью

$$\{f_n(x)\} \equiv f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \,. \tag{1}$$

Функции $f_n(x)$ называются **элементами** функциональной последовательности. Множество X называется **областью определения** этой функциональной последовательности.

***Определение* 2.** *Сумму*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2}$$

бесконечного числа членов функциональной последовательности $\{u_n(x)\}$ будем называть ***функциональным рядом***.

Множество X на котором определены функции $u_n(x)$ называется областью определения функционального ряда.

Так же, как и для числового ряда, сумма первых n элементов ряда (2) называется ***n*-ой частичной суммой ряда** и обозначается символом $S_n(x)$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,. \tag{3}$$

Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ – n-ая частичная сумма ряда (2). Тогда любому функциональному ряду соответствует последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$. И, наоборот, любой функциональной последовательности соответствует функциональный ряд с элементами

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_2(x) = S_2(x) - S_1(x),\ \ldots,\ u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x),\ \ldots,$$

для которого последовательность $\{S_n(x)\}$ является последовательностью его частичных сумм.

Поэтому функциональные ряды и функциональные последовательности имеют аналогичные свойства.

2. Сходимость функциональной последовательности и функционального ряда в точке и на множестве

Рассмотрим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, определенную на множестве X. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Если в точке x_0 последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** числовой последовательности $\{f_n(x)\}$. Множество всех точек сходимости называется **областью сходимости** функциональной последовательности. Эта область может совпадать с областью определения X, а может быть подмножеством множества X.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве D. Следовательно, в любой точке $x \in D$ последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет предел при $n \to \infty$, зависящий от выбора точки x, значит, являющийся функцией $f(x)$ от аргумента x. Функцию $f(x)$ называют **предельной функцией последовательности** $\{f_n(x)\}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Аналогичные понятия вводятся для функционального ряда.

Точка x_0 в которой сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$ к своей сумме $S(x_0)$ называется **точкой сходимости** данного ряда.

Множество всех точек сходимости образует **область сходимости ряда.** В любой точке x из области сходимости числовой ряд $\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$ сходится к функции $S(x)$, которая, является предельной функцией последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ и называется **суммой ряда**. Таким образом

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Ряд

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots + u_{n+k}(x) + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x),$$

полученный из ряда (2) отбрасыванием n первых членов ряда называется ***n*-ым остатком ряда** и обозначается $r_n(x)$. Очевидно, что в точках сходимости $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Пример 1. Найти предельную функцию последовательности

$$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Решение.

Зафиксируем произвольное *x*, Найдем предел полученной числовой последовательности. Так как при $n \to \infty$ для любого фиксированного значения *x* исходное выражение представляет неопределенность вида $[1^{\infty}]$ то, используя второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}x}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x=e^x.$$

Следовательно, предельной функцией последовательности является функция $y = e^x$.

Пример 2. Найти область сходимости функциональных рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x^{2n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(x-3)^n}$.

Решение.

а) Так как при любом *x* выполняется неравенство $|\cos nx| \le 1$, то $\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, так как является рядом Дирихле с показателем $\alpha=\frac{3}{2}>1$. Следовательно, для любого действительного числа *x* по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right|$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ при любом $x \in (-\infty, \infty)$ сходится абсолютно. Значит область сходимости данного ряда – вся числовая прямая.

б) Воспользуемся признаком Д'Аламбера (теорема 2, п.1, §1.3). Учитывая, что для любых *x* члены ряда принимают только положительные значения, получим, что $|u_n| = u_n$, $|u_{n+1}| = u_{n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^{2n}}{(n+1)^2x^{2(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2x^2}.$$

В данном пределе x рассматривается, как постоянное число, тогда множитель $\frac{1}{x^2}$ можно вынести за знак предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{x^2}.$$

Ряд сходится, если выполняется неравенство $\frac{1}{x^2}<1$. Это неравенство выполняется при $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Ряд расходится при $\frac{1}{x^2}>1$, т.е. на интервале $x\in(-1,1)$. При $x=\pm 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Исследуем ряд на сходимость в точках $x=\pm 1$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится как ряд Дирихле с показателем $\alpha=2>1$.

Следовательно, ряд сходится при $x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

в) Для нахождения области сходимости ряда воспользуемся признаком Коши (теорема 3, п.1, §1.3).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|2^n(x-3)^n\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2|x-3|}=\frac{1}{2|x-3|}.$$

Ряд сходится, если выполняется неравенство $\frac{1}{2|x-3|}<1$ или неравенство $|x-3|>\frac{1}{2}$, т.е. ряд сходится при $x\in(-\infty,\frac{5}{2})\cup(\frac{7}{2},\infty)$. Ряд расходится при $x\in(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$.

Рассмотрим точки $x=\frac{5}{2}$ и $x=\frac{7}{2}$.

В точке $x=\frac{7}{2}$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\ldots$. Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$. Значит, точка $x=\frac{7}{2}$ не является точкой сходимости функционального ряда.

В точке $x = \dfrac{5}{2}$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - \ldots$. Этот ряд расходится, так как для него также не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Следовательно, ряд сходится при $x \in (-\infty, \dfrac{5}{2}) \cup (\dfrac{7}{2}, \infty)$.

3. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ на множестве X.

Определение* 3.** *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется* ***равномерно сходящейся *к* $f(x)$ *на множестве* X*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N*, что для любого* $n > N$ *и для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

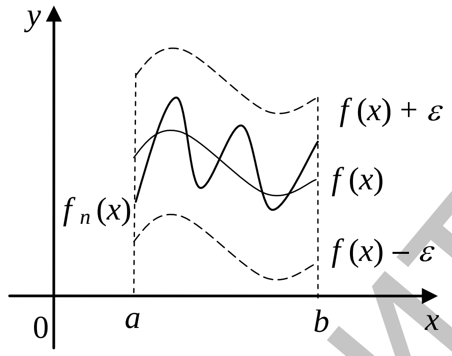

Рис. 1.

***Замечание* 1.** Из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ не вытекает ее равномерная сходимость.

***Замечание* 2.** *Пусть функции* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ определены на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим полосу П: $\{a \le x \le b,\ f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}$, шириной 2ε.

Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что графики функций $f_n(x)$ с номерами $n > N$ попадают в полосу П на отрезке $[a, b]$ (рис. 1).

Сформулируем необходимый и достаточный признак равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

***Теорема* 1 (*критерий Коши сходимости функциональной последовательности*).**

Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходилась к функции* $f(x)$ *на множестве* X *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N*, что для любого* $n > N$*, любого натурального числа* p *и для всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь функциональный ряд (2). Пусть этот ряд сходится на множестве *X*. Дадим определение равномерной сходимости этого ряда.

***Определение* 4.** *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

называется равномерно сходящимся на множестве X к своей сумме $S(x)$, *если последовательность его частичных сумм* $\{S_n(x)\}$ *равномерно сходится на множестве X к функции* $S(x)$.

Из определения равномерной сходимости функционального ряда и из теоремы 1 следует необходимый и достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда.

***Теорема* 2 (*критерий Коши сходимости функционального ряда*).** *Для того чтобы ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился к функции* $S(x)$ *на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер N, что для любого n > N, любого натурального числа p и для всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon .$$

Действительно, для равномерной сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм равномерно сходилась на множестве X, т.е. для этой последовательности должен выполняться критерий Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер *N*, что для любого *n* > *N* и для любого натурального числа *p* выполняется неравенство:

$$\left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| < \varepsilon$$

или

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon ,$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon .$$

4. Признак Вейерштрасса

Критерий Коши является необходимым и достаточным признаком сходимости функциональной последовательности и функционального ряда, но при решении задач им пользоваться достаточно сложно. Сформулируем достаточный признак сходимости функционального ряда.

***Теорема* 3 (*признак Вейерштрасса*).** *Если функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *определен на множестве X и если существует сходящийся числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *такой, что для всех* $x \in X$ *и для любых номеров n справедливо неравенство*

$$|u_n(x)| \le c_n, \qquad (4)$$

то функциональный ряд (2) *сходится равномерно на множестве X.*

Доказательство.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для него выполняется критерий Коши сходимости числового ряда (теорема 1, п.2, §1.1.), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ и любого натурального числа p выполняется неравенство:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon.$$

Так как по условию $|u_n(x)| \le c_n$, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, для функционального ряда (2) выполняется критерий Коши и ряд (2) сходится. ■

Замечание. Можно сформулировать теорему аналогичную теореме 3 для функциональной последовательности.

***Теорема* 4.** *Последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве X, если существует такая последовательность положительных чисел* $\{\alpha_n\} \to 0$, *при* $n \to \infty$, *что для всех* $x \in X$ *и для всех функций* $f_n(x)$ *выполняется неравенство*:

$$|f_n(x) - f(x)| < \alpha_n.$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$.

Решение.

Так как при любом x выполняется неравенство $|\sin nx| \le 1$, то

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как ряд Дирихле с показателем $\alpha = 3 > 1$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ сходится равномерно на всей числовой прямой.

5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Рассмотрим множество X и точку a – предельную точку данного множества.

***Теорема* 5.** *Пусть*

1) *функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* X;
2) *для любого n существует предел* $\lim\limits_{x\to a}u_n(x) = b_n$.

Тогда существует предел функции $S(x)$ *в точке a и выполняется равенство*

$$\lim_{x\to a}S(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

т.е. если ряд сходится равномерно на множестве X, то знак предела и знак суммы можно менять местами.

Следствие. *Если элементы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *непрерывны в точке a и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x)$, *тогда функция* $S(x)$ *– непрерывна в точке a.*

***Теорема* 6.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *равномерно сходится к своей предельной функции* $S(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *и для любого члена ряда существует интеграл* $\int\limits_a^b u_n(x)dx$, *тогда существует интеграл* $\int\limits_a^b S(x)dx$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Теорема 7. *Пусть для функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *выполняются следующие условия*:

1) все элементы ряда имеют производные $u_n'(x)$ *на отрезке* $[a, b]$,

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *равномерно сходится,*

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке;*

тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к своей сумме* $S(x)$, *которая имеет производную на отрезке* $[a, b]$ *и выполняется равенство*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Замечание. Теоремы, аналогичные теоремам 5, 6, 7 справедливы и для функциональных последовательностей.

§2.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Понятие степенного ряда. Область сходимости

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, …, a_n, … – постоянные числа, которые называются коэффициентами ряда (1). Очевидно, что ряд (1) всегда сходится в точке $x = x_0$.

При $x_0 = 0$ ряд (1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (2)$$

Ряд (2) всегда сходится в точке $x = 0$.

Теорема 1 (Абеля). *Если ряд* (2) *сходится в некоторой точке* $\bar{x}$ *отличной от нуля, то этот ряд сходится абсолютно при любом x, удовлетворяющем неравенству* $|x| < |\bar{x}|$.

Доказательство. Так как ряд (2) сходится в точке $\bar{x}$, то для числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \ldots + a_n\bar{x}^n + \ldots$$

последовательность $\{a_n\bar{x}^n\}$ его членов является бесконечно малой (необходимый признак сходимости ряда (теорема 2, п.2, §1.1), а, следовательно, ограниченной. Значит, существует такое действительное число *M*, что для всех элементов последовательности $\{a_n\bar{x}^n\}$ выполняется неравенство

$$\left|a_n\bar{x}^n\right| \le M\,.$$

Рассмотрим произвольное число *x*, удовлетворяющее неравенству $|x| < |\bar{x}|$, и составим ряд из модулей членов ряда (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (3)$$

Так как

$$|a_n x^n| = \left|a_n\bar{x}^n\right| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \le M\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

то члены ряда (3) являются меньшими, чем члены ряда, являющегося сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n < 1$, следовательно, по признаку сравнения (теорема 2, п.1, §1.2) сходится ряд (3). Таким образом, ряд (2) сходится абсолютно в выбранной точке *x*. Так как точка *x* – произвольная точка, удовлетворяющая неравенству $|x| < |\bar{x}|$, то теорема доказана. ■

***Следствие* 1.** *Если ряд* (2) *расходится в некоторой точке* $\bar{\bar{x}}$ *отличной от нуля, то этот ряд расходится при любом x, удовлетворяющем неравенству* $|x| > |\bar{\bar{x}}|$.

Предположим противное. Пусть ряд (2) сходится в точке *x*, удовлетворяющей неравенству $|x| > |\bar{\bar{x}}|$. Тогда, по теореме Абеля, ряд должен сходиться и в точке $\bar{\bar{x}}$, что противоречит условию. ■

***Следствие* 2.** *Для каждого степенного ряда* (2), *если только он не является сходящимся в единственной точке x* = 0, *существует такое положительное действительное число R* (*оно может быть равным* ∞), *что*

1) *ряд абсолютно сходится для* $|x| < R$;

2) *ряд расходится для* $|x| > R$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{x}$ точки сходимости ряда (2), и рассмотрим множество $\{|\bar{x}|\}$. Это множество обязательно содержит точку $x = 0$. По условию, это множество содержит также точки отличные от нуля.

Возможны два случая.

1) Множество $\{|\bar{x}|\}$ ограничено сверху.

2) Множество $\{|\bar{x}|\}$ сверху не ограничено.

В первом случае множество $\{|\bar{x}|\}$ имеет точную верхнюю границу. Обозначим ее через R $(0 < R < \infty)$. Тогда при $|x| > R$ ряд (2) расходится, так как точки x, удовлетворяющие этому неравенству, не являются точками сходимости данного ряда. Пусть x произвольное число, удовлетворяющее неравенству $|x| < R$. По определению точной верхней границы, для этой точки x, существует такое $\bar{x}$, что $|x| < |\bar{x}| \leq R$. Поэтому ряд (2) абсолютно сходится в точке x.

Во втором случае для любого x всегда существует такое $\bar{x}$, что $|x| < |\bar{x}|$. Следовательно, ряд (2) абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае говорят, что $R = \infty$.■

Число R называется **радиусом сходимости ряда** (2).

Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости ряда** (2). Во всех точках этого интервала ряд (2) сходится абсолютно. Если ряд сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$, и интервал сходимости состоит из одной точки.

На концах интервала $(-R, R)$, т.е. в точках $x = \pm R$ ряд может сходиться, а может расходиться. Поэтому сходимость этого ряда исследуется дополнительно.

Определим формулы для нахождения радиуса сходимости ряда (2).

Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Рассмотрим ряд из модулей членов ряда (2) и воспользуемся теоремой 3, § 1.3. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = L|x|.$$

Ряд сходится для всех значений x, для которых выполняется неравенство $L|x| < 1$, или для x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \dfrac{1}{L}$. Тогда для нахождения радиуса сходимости можно воспользоваться формулами

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Для нахождения радиуса сходимости можно также пользоваться формулами

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \tag{5}$$

***Замечание* 2.** Если пределы (4) и (5) не существуют, то радиус сходимости можно найти по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{6}$$

***Замечание* 3.** Из сказанного выше следует, что если

$L = 0$, т.е. $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой,

$L = \infty$, т.е. $R = 0$, то ряд сходится только в точке $x = 0$.

***Замечание* 4.** Формулы для нахождения радиуса сходимости ряда (1), такие же, как и для ряда (2). Интервал сходимости ряда (1), если $R \neq \infty$, $R \neq 0$, имеет вид $(x_0 - R, x_0 + R)$.

2. Свойства степенных рядов

Сформулируем свойства для ряда (2), для ряда (1) свойства аналогичны. Пусть ряд (2) имеет радиус сходимости $R > 0$.

***Теорема* 2.** *Пусть степенной ряд* (2) *имеет радиус сходимости отличный от нуля, т.е.* $R > 0$. *Тогда для любого* $0 < r < R$ *степенной ряд равномерно сходится на отрезке* $[-r, r]$ ($|x| \le r$).

Доказательство. Так как $r < R$, то ряд (2) сходится в точке $x = r$ абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$. При $|x| \le r$ члены ряда (2) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов этого ряда. Тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд (2) сходится равномерно для $|x| \le r$.■

***Следствие* 1.** *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри интервала сходимости.*

Доказательство.

Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится к функции $S(x)$ на интервале $(-R, R)$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in (-R, R)$. Тогда, для данной точки найдется такое r, что $|x| < r < R$. Ряд (2) равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$, и, по свойству равномерно сходящихся функциональных рядов, функция $S(x)$ – непрерывна на отрезке $[-r, r]$, т.е. в выбранной нами точке x. Так как точка x - произвольная точка интервала $(-R, R)$, то функция $S(x)$ непрерывна на интервале $(-R, R)$. ■

Замечание. Если степенной ряд на одном из концов интервала сходимости сходится хотя бы условно, то сумма ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости с включенным концом.

Теорема 4. *Степенной ряд* (2) *на отрезке* $[0, x]$, *где* $0 < x < R$ ($[x, 0]$, *где* $-R < x < 0$) *можно почленно интегрировать. При этом получим ряд*

$$\int_0^x S(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n,$$

который имеет тот же радиус и интервал сходимости, что и исходный ряд.

Теорема 5. *Степенной ряд* (2) *внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать, так что для суммы* $S(x)$ *выполняется равенство*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Полученный в результате почленного дифференцирования ряд имеет тот же радиус и интервал сходимости, что и исходный ряд.

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

Решение.

Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулами (5), где $|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$, $|a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$.

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

тогда $R = 1$. Следовательно, ряд сходится на интервале $(-1, 1)$.

При $x = -1$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$, который расходится (это гармонический ряд).

При $x = 1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, который является рядом Лейбница, следовательно, он сходится. Так как ряд из модулей членов данного ряда расходится, то данный ряд сходится условно.

Областью сходимости данного степенного ряда является промежуток $(-1, 1]$.

Пусть сумма ряда есть некоторая функция $S(x)$. По свойству степенных рядов ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости. При этом выполняется равенство

$$S'(x) = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots .$$

Этот ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q = -x$. Тогда

$$S'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Найдем функцию $S(x)$

$$S(x) = \int_0^x S'(x)dx = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| \Big|_0^x = \ln|1+x|.$$

3. Разложение функций в степенные ряды

***Определение* 1.** *Будем говорить, что функция $f(x)$ на множестве X может быть разложена в степенной ряд на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале.*

***Теорема* 6 (*необходимое условие*).** *Для того, чтобы функция $f(x)$ была разложена в степенной ряд на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ необходимо, чтобы она имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка.*

Доказательство. Степенной ряд внутри своего интервала сходимости можно почленно дифференцировать сколь угодное число раз, при этом полученные в результате дифференцирования ряды сходятся внутри этого же интервала. Следовательно, сумма данного ряда также должна быть непрерывно дифференцируемой функцией сколь угодное число раз на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$. ■

***Теорема* 7.** *Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ может быть разложена в степенной ряд, то это разложение единственное.*

Доказательство.

Пусть $f(x)$ раскладывается в степенной ряд на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$. Дифференцируя этот ряд почленно n раз, получим

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot (n+1)!(x - x_0) + \ldots .$$

Отсюда при $x = x_0$ найдем

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!,$$

тогда коэффициенты ряда находятся по формуле:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \qquad (7)$$

Таким образом, коэффициенты степенного ряда, в который может быть разложена функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, однозначно определяются формулой (7). ■

Степенной ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (8)$$

коэффициенты которого определяются формулой (7), называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$. При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

***Теорема* 8.** *Для того, чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора для этой функции стремился к нулю при $n \to \infty$ на указанном интервале.*

***Теорема* 9.** *Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные равномерно ограничены на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ (т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что в любой точке x принадлежащей интервалу $(x_0 - R, x_0 + R)$ и для любого n выполняется неравенство: $|f^{(n)}(x)| \le M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), тогда на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора* (8).

4. Разложение некоторых элементарных функций

Рассмотрим разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. Для этого используем выкладки, аналогичные приведенным в п.4, §1.3, [10].

1. Ряд Маклорена для функции $y = e^x$ имеет вид

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Для того, чтобы доказать, что этот ряд сходится к функции e^x, воспользуемся теоремой 7. На любом отрезке $[-r, r]$, где r – произвольное действительное положительное число, для производных функции $y = e^x$ выполняется неравенство $e^x \le e^r$. Следовательно, производные данной функции равномерно ограничены на отрезке

$[-r, r]$, и ряд Маклорена равномерно сходится к функции e^x на этом отрезке. В силу произвольности выбора числа r, можно сделать вывод, что данный ряд сходится к функции $y = e^x$ на всей числовой прямой и выполняется равенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (9)$$

2. Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ряд Маклорена имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots, \qquad (10)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots. \qquad (11)$$

Сходимость этих рядов соответственно к функциям $\sin x$ и $\cos x$ на всей числовой прямой следует из теоремы 9, и из того факта, что для производных этих функций любого порядка выполняются неравенства

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}n + x\right)\right| \le 1,$$

$$\left|(\cos x)^{(n)}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}n + x\right)\right| \le 1.$$

3. Ряд Маклорена для функции $y = \ln(x + 1)$ имеет вид

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots. \qquad (12)$$

Этот ряд сходится к данной функции на интервале $(-1, 1]$.

4. Функция $y = (1 + x)^\alpha$ раскладывается в ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots (13)$$

всюду на интервале $(-1, 1)$.

5. Используя формулы (9) – (13), можно получить разложение других функций.

Рассмотрим, например, функции $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Для разложения этих функций в ряд воспользуемся разложением (9) функции e^x. Для того, чтобы получить разложение функции e^{-x} в разложении (9) вместо x подставим $-x$. Получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots. \qquad (14)$$

Тогда

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Найдем разложение функции $a$rcsi$n$ x в ряд. Заметим, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Разложим функцию $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд, используя ряд (13)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n},$$

(здесь $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$). Радиус сходимости получившегося ряда равен единице. Проинтегрируем ряд от 0 до x, где $|x| < 1$. Получим

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1) n!} x^{2n+1}.$$

§2.3. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1. Нахождение значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ с заданной степенью точности. Предположим, что функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

в интервале $(x_0 - R, x_0 - R)$ и точка $x \in (a - R, a - R)$. Тогда приближенное значение функции $f(x)$ в точке x можно найти с помощью равенства

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

точность которого увеличивается с возрастанием n. Абсолютная погрешность приближенного равенства (1) равна модулю остатка ряда

$$|r_n(x)| = |f(x) - S_n(x)|,$$

где $r_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \ldots$.

В зависимости от конкретной задачи применяются различные методы оценки остатка ряда. Например, если ряд знакочередующийся, то его n-ый остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов (замечание 2 к теореме 7, п.3, § 1.3, п.3).

В приближенных вычислениях используются также свойства степенных рядов.

Пример 1. Вычислить cos 10° с точностью до 0,0001.

Решение.

Так как $10° = \dfrac{\pi}{18} \approx 0{,}17453$, то используя разложение функции $\cos x$ в ряд (см. формулу 11, п.4, §2.2), получим

$$\cos 10° = \cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^6 + \ldots$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\pi}{18}\right)^n\right\}$ его элементов является убывающей и стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно, ряд удовлетворяет условиям теоремы теореме 7, п.3, § 1.3. Поэтому остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = \frac{(0{,}17453)^4}{24} < \frac{(0{,}2)^4}{24} = \frac{0{,}0016}{24} \approx 0{,}00006 < 0{,}0001,$$

то для достижения требуемой точности, достаточно взять два члена ряда, т.е.

$$\cos 10° \approx 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2} \approx 1 - \frac{0{,}03046}{2} = 1 - 0{,}01523 \approx 0{,}98477 \approx 0{,}9848.$$

Пример 2. Вычислить ln 1,1 с точностью до 0,0001.

Решение.

Используем разложение функции ln x в ряд (формула 12, п. 4, § 2.2). Тогда

$$\ln 1{,}1 = \ln(1 + 0{,}1) =$$

$$= 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{0{,}1^n}{n} + \ldots .$$

Получился знакочередующийся ряд, элементы которого образуют убывающую бесконечно малую последовательность. Следовательно, это ряд Лейбница, и погрешность замены суммы ряда его частичной суммой не превосходит первого из отброшенных членов. Так как

$$\frac{0{,}1^4}{4} = \frac{0{,}0001}{4} < 0{,}0001 \quad \text{и} \quad \frac{0{,}1^3}{3} = \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}00033 > 0{,}0001,$$

то для достижения требуемой точности достаточно взять три первых члена ряда. Тогда имеем:

$$\ln 1{,}1 = \ln(1 + 0{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} \approx 0{,}0953.$$

Замечание. С помощью формулы 12 можно найти значение натурального логарифма для чисел, лежащих в промежутке между 0 и 2. Получим формулу для нахождения логарифмов от произвольного положительного числа.

Кроме ряда (12) будем рассматривать ряд

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots .$$

Найдем разность первого и второго ряда

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \ln\frac{(1+x)}{(1-x)} =$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right). \qquad (2)$$

Данный ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$, так как его радиус сходимости равен $R = 1$. Это легко установить с помощью формулы 5, п.1, §2.2.

Положим, что $\frac{1+x}{1-x} = n$, откуда $x = \frac{n-1}{n+1}$, тогда при любом $n > 0$, выполняется неравенство $|x| < 1$. Следовательно, используя ряд (2) можно находить приближенное значение логарифмов любых положительных действительных чисел. Однако, обычно формула (2) используется для нахождения логарифмов чисел больших 1.

Пример 3. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,001.

Решение.

Используем разложение 2. Положим $\frac{1+x}{1-x}=3$, тогда $x=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$. По формуле 2

$$\ln 3=\ln\frac{(1+1/2)}{(1-1/2)}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots\right).$$

Для нахождения суммы ряда с указанной точностью, надо найти такое n, при котором модуль n-го остатка ряда меньше 0,001, т.е. при котором выполняется неравенство

$$r_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\ldots\right)<0{,}001.$$

Поскольку числа $2n+3$, $2n+5$, … больше, чем $2n+1$, то заменив их на $2n+1$, мы увеличим каждую дробь в данном равенстве, т.е.

$$r_n<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{2n+3}}+\ldots\right)=\frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{3\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n-2}}.$$

Путем подбора значений n находим, что при

$n=3$, $\quad \frac{1}{3\cdot(2\cdot 3+1)\cdot 2^{2\cdot 3-2}}=\frac{1}{336}>0{,}001,$

$n=4$, $\quad \frac{1}{3\cdot(2\cdot 4+1)\cdot 2^{2\cdot 4-2}}=\frac{1}{1728}<0{,}001.$

Значит, для нахождения $\ln 3$ с точностью до 0,001 надо взять четыре слагаемых ряда.Тогда

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}\right)\approx 0{,}0981.$$

2. Нахождение интегралов

Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости, то с помощью разложения подынтегральных функций в степенные ряды можно находить приближенное значение определенных интегралов.

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Используем разложение 10 п.4, §2.2, заменив в нем x на x^2. Получим

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots .$$

Он сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать. Следовательно:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots \right) dx =$$

$$\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} - \dots \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \frac{1}{5!\cdot 11} - \dots .$$

Этот ряд является рядом Лейбница и уже третий член данного ряда меньше 0,001. Значит, для нахождения приближенного значения определенного интеграла, достаточно взять два слагаемых полученного ряда.

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 7} \approx 0{,}3333 - 0{,}0381 \approx 0{,}2952 = 0{,}295$$

III. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 3.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

1. Понятие криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим плоскую непрерывную спрямляемую кривую L и функцию $f(M) = f(x, y)$, заданную на этой кривой. Предположим для начала, что кривая L – незамкнута и ограничена точками A и B.

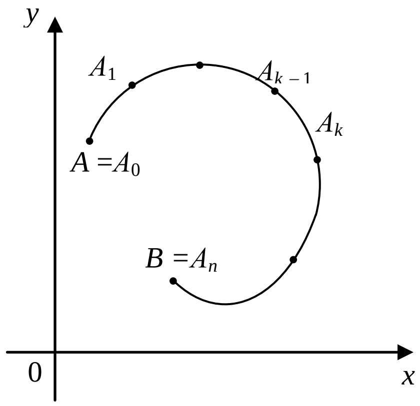

Рис. 2.

Разобьем кривую L на n частей точками $A_0 = A$, $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Выберем на каждой частичной дуге $A_{k-1}A_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Обозначим через Δl_k длину дуги $A_{k-1}A_k$, через $\Delta = \max \Delta l_k$. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k, \qquad (1)$$

которая называется **интегральной.**

***Определение* 1.** *Число I называется пределом интегральной суммы* σ *при* $\Delta \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $\delta > 0$, *что при любом разбиении, при котором* $\Delta < \delta$, *выполняется неравенство* $|\sigma - I| < \varepsilon$.

***Определение* 2.** *Если предел интегральной суммы* σ *при* $\Delta \to 0$ *существует, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции* $f(x, y)$ *по кривой L.*

Обозначение: $\int\limits_L f(x, y)dl$ или $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$.

Следовательно:

$$\int\limits_L f(x, y)dl = \lim_{\Delta \to 0} \sigma. \qquad (2)$$

Из построения криволинейного интеграла по кривой AB вытекает **геометрический смысл интеграла** (2): длина l кривой L равна интегралу $\int\limits_L dl$

$$l = \int\limits_L dl. \qquad (3)$$

Физический смысл криволинейных интегралов первого рода. Пусть вдоль кривой AB распределена масса с линейной плотностью $\rho(x, y)$. Для вычисления массы этой кривой, разобьем кривую на малые участки $A_{k-1}A_k$, считая, что на каждом участке плотность изменяется незначительно. На каждом частичном участке разбиения выберем произвольную точку N_k и вычислим плотность $\rho(N_k)$ кривой в этой точке. Приближенно считаем, что такова же плотность кривой во всех точках данного участка. Обозначим длину дуги $A_{k-1}A_k$ через Δl_k, а наибольшую из длин Δl_k через Δ. Тогда масса дуги $A_{k-1}A_k$ приближенно равна $m_k \approx \rho(N_k)\cdot\Delta l_k$, а для массы всей кривой справедливо приближенное равенство

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k.$$

Погрешность нахождения массы по данной формуле стремится к нулю при $\Delta \to 0$. Следовательно, точная формула имеет вид

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k .$$

Под знаком предела стоит интегральная сумма для функции $\rho(x, y)$, и если данный предел существует, то он равен криволинейному интегралу по кривой AB от функции $\rho(x, y)$, т.е. масса кривой AB находится по формуле

$$m = \int_{AB} \rho(x, y)dl . \tag{4}$$

2. Нахождение криволинейного интеграла первого рода

Рассмотрим на плоскости кривую L, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \le t \le b, \tag{5}$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[a, b]$ производные, для которых выполняется неравенство $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$. Такую кривую будем называть **гладкой.**

Кривую L мы будем называть **кусочно-гладкой**, если она непрерывна и распадается на конечное число кусков, каждый из которых представляет собой гладкую кривую.

***Теорема* 1.** *Пусть кривая L=AB гладкая кривая, а функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль этой кривой. Тогда для $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл первого рода и справедливо равенство*

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt . \tag{6}$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = b$, что вызывает разбиение кривой AB на n дуг $A_{k-1}A_k$. Длину Δl_k дуги $A_{k-1}A_k$ можно найти по формуле

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt .$$

Тогда интегральную сумму (1) можно записать следующим образом:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt .$$

Так как $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, где τ_k – некоторое значение параметра t, удовлетворяющее условию $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$, то

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(\tau_k), y(\tau_k))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt .$$

Рассмотрим интеграл

$$K = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt .$$

Тогда

$$\sigma - K = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t))]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt .$$

Функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой AB, а функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то, по свойству сложной функции, функция $f(x(t), y(t))$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, эта функция равномерно непрерывна на данном отрезке. Кроме того, разбиение отрезка $[a, b]$ на части, влечет за собой разбиение кривой AB на частичные дуги. При этом, при стремлении к нулю наибольшей из длин Δl_k частичных дуг, стремится к нулю наибольшая из разностей $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$. Тогда, для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует действительное число $\delta > 0$, что для всех разбиений кривой AB на части (отрезка $[a, b]$ на части), для которых $\Delta < \delta$ (Δ – наибольшая из длин Δl_k), колебание функции $f(x(t), y(t))$ на отрезке $[a, b]$ меньше $\dfrac{\varepsilon}{l}$.

Так как $\tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$, то выполняется неравенство

$$| f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t)) | < \frac{\varepsilon}{l}.$$

Следовательно, для любого разбиения кривой AB, для которого $\Delta < \delta$ верно неравенство

$$|\sigma - K| < \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \frac{\varepsilon}{l} \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon .$$

В силу произвольности числа ε можно утверждать, что $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sigma = K$. Так как $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sigma$ существует, то этот предел равен криволинейному интегралу (1) и для этого интеграла справедливо равенство (6). ■

Замечание 1. Если кривая L – кусочно-гладкая, то интеграл по этой кривой определяется как сумма интегралов по ее гладким кускам.

Аналогично находится интеграл в случае если $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода в конечном числе точек кривой L.

Замечание 2. Если кривая L – кривая, заданная явно уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то формула для нахождения криволинейного интеграла (2) имеет вид

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (7)$$

Замечание 3. Если L пространственная кривая, заданная параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \gamma(t), \quad a \le t \le b,$$

то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$ находится по формуле

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

Пример 1. Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{dl}{y}$, если L есть кривая, заданная уравнением $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \le x \le 1$.

Решение.

Кривая L задана явно, поэтому воспользуемся формулой (7), учитывая, что $y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, тогда

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}dx = \sqrt{\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4}}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}dx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx.$$

$$\int_L \frac{dl}{y} = \int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$$

Пример 2. Найти криволинейный интеграл $\int\limits_L (x + y)\, dl$, где L – четверть окружности, полученной в результате пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $y = x$, лежащей в первом октанте (рисунок 3).

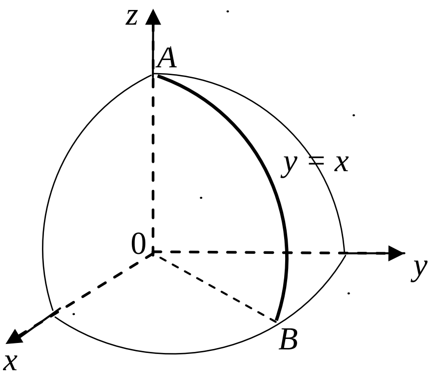

Рис 3.

Решение.

Кривая L задана пересечением двух поверхностей: сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $y = x$. Зададим эту кривую параметрически. Положим $x = t$. Тогда $y = t$, $z = \sqrt{R^2 - 2t^2}$.

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt =$$

$$= \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}}\, dt = \frac{R\sqrt{2}dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}.$$

Определим пределы интегрирования. Из параметрических уравнений линии находим, что для точки $A(0, 0, R)$ $t = 0$, $B\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $t = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Тогда, по формуле (6),

$$\int_L (x + y)\, dl = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} (t + t)\frac{R\sqrt{2}dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} =$$

$$= R\sqrt{2}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{2tdt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R\sqrt{2}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{dt^2}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = -R\sqrt{2}\left(R^2 - 2t^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = R^2\sqrt{2}.$$

Пример 3. Найти массу дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, если линейная плотность распределения массы равна $\rho = xy$.

Решение.

По формуле (4) масса дуги эллипса находится с помощью криволинейного интеграла первого рода $\int_L xy\, dl$.

Зададим эллипс параметрически $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Тогда, по формуле (6), имеем

$$m = \int_L xy\, dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t\, \sqrt{(a\cos t)'^2 + (b\sin t)'^2}dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\;dt = \left|\begin{array}{c} u=\cos 2t, \\ \frac{1}{2}du=-\sin 2t\;dt \end{array}\right| =$$

$$= \frac{ab}{4}\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}u}\;\;du =$$

$$= \frac{ab}{2(b^2-a^2)}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}u\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

3. Свойства криволинейных интегралов первого рода

1. Криволинейные интегралы первого рода не зависят от направления обхода кривой AB, т.е.

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl\,.$$

2. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы на кривой AB, и λ и β – любые постоянные, то функция $\lambda f(x,y)+\beta g(x,y)$ также интегрируема на кривой AB и выполняется равенство

$$\int_{AB}[\lambda f(x,y)+\beta g(x,y)]dl = \lambda\int_{AB} f(x,y)dl+\beta\int_{AB} g(x,y)dl\,.$$

2. Если кривая AB разбита точкой C на две кривые AC и CB, и для функции $f(x, y)$ существует криволинейный интеграл по дуге AB, то для этой функции существует интеграл и по дугам AC и CB, причем

$$\int_{AB} f(x,y) = \int_{AC} f(x,y)dl+\int_{CB} f(x,y)dl\,.$$

3. Если существует $\int_{AB} f(x,y)dl$, то существует и $\int_{AB}|\,f(x,y)\,|\,dl$, причем $|\int_{AB} f(x,y)dl\,|\le\int_{AB}|\,f(x,y)\,|\,dl$

4. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой существует точка M^*, такая что выполняется равенство

$$\int_{AB} f(x,y)dl = f(M^*)l\,, \qquad (8)$$

где l-длина кривой AB.

Формула (8) называется **формулой среднего значения**.

§ 3.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

1. Понятие криволинейного интеграла второго рода

Рассмотрим плоскую непрерывную спрямляемую кривую L и функции $P(x,y)$ и Q(x,y) –определенные на кривой L.

Как и в случае криволинейного интеграла первого рода, предположим, что кривая L – незамкнута и ограничена точками A и B (см. рисунок 2).

Разобьем кривую L на n частей точками $A_0 = A$, $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Выберем на каждой частичной дуге $A_{k-1}A_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Обозначим через Δl_k длину дуги $A_{k-1}A_k$, через $\Delta = \max \Delta l_k$. Составим суммы

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k, \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k. \quad (2)$$

которые называются **интегральными суммами.**

***Определение* 1.** *Число* I_k (k=1,2) *называется пределом интегральной суммы* σ_k (k=1,2) *при* $\Delta \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$, *существует такое* $\delta > 0$, *что при любом разбиении, при котором* $\Delta < \delta$, *выполняется неравенство* $|\sigma_k - I_k| < \varepsilon$ (k = 1, 2).

Определение* 2.** *Если предел интегральной суммы* σ_1 (σ_2) *при* $\Delta \to 0$ *существует, то этот предел называется* ***криволинейным интегралом второго рода *от функции P(x,y)* (Q(x,y)) *по кривой L.*

Обозначение: $\int\limits_L P(x, y)\, dx$ ($\int\limits_L Q(x, y)\, dy$).

Тогда

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k = \int\limits_L P(x, y)\, dx,$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k = \int\limits_L Q(x, y)\, dy.$$

Сумму $\int\limits_L P(x, y)\, dx + \int\limits_L Q(x, y)\, dy$ принято называть **общим криволинейным интегралом второго рода** и обозначать символом

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad (3)$$

***Замечание* 1.** Из построения криволинейного интеграла второго рода следует, что он зависит от направления обхода кривой AB. Изменение направления обхода кривой ведет к изменению знака интеграла, т.е.

$$\int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{BA} P(x,y)dy,$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = -\int_{BA} Q(x,y)dy.$$

***Замечание* 2**. Для пространственной кривой аналогично вводятся три криволинейных интеграла второго рода

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx,\ \int_{AB} Q(x,y,z)dy,\ \int_{AB} R(x,y,z)dz$$

и общий интеграл

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2. Нахождение криволинейного интеграла второго рода

***Теорема* 1**. *Пусть кривая L задана параметрически уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \le t \le b$$

и является гладкой, а функции P (x, y) и Q (x, y) непрерывны вдоль этой кривой. Тогда существуют криволинейные интегралы второго рода для функций P (x, y) и Q (x, y), сводящиеся к определенным интегралам по формулам:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt, \tag{4}$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt. \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, п.2, §3.1.

***Замечание* 1.** В случае кусочно-гладкой кривой L криволинейные интегралы по этой кривой определяются как сумма интегралов по всем гладким кускам, составляющим кривую L. Таким образом, равенства (4) и (5) оказываются справедливыми и для кусочно-гладкой кривой.

***Замечание* 2.** Если кривая L задана явно уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль этой кривой, а функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то формулы для нахождения криволинейных интегралов второго рода имеют вид

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, y(x))\, dx, \tag{6}$$

$$\int_{AB} Q(x, y)\, dy = \int_a^b Q(x, y(x))y'(x)\, dx. \tag{7}$$

***Замечание* 3.** Для пространственной кривой L, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, справедливы формулы

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)dx = \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)dx = \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt.$$

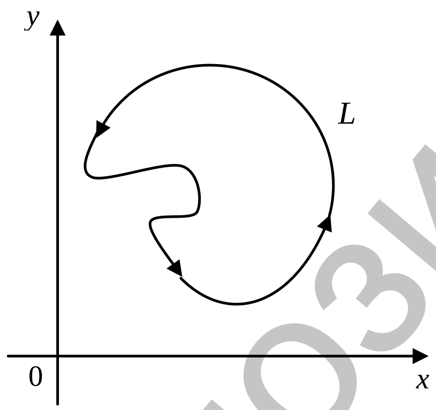

Рис. 4.

***Замечание* 4**. Если кривая L замкнута (точки A и B совпадают), то под **положительным** направлением обхода данной кривой будем понимать такое направление, при котором область, ограниченная данной кривой, остается слева по отношению к точке совершающей обход (на рисунке 4 положительное направление обхода указано стрелками).

Будем считать, что в криволинейных интегралах второго рода по замкнутой кривой, если не оговорено противное, кривая обходится в положительном направлении.

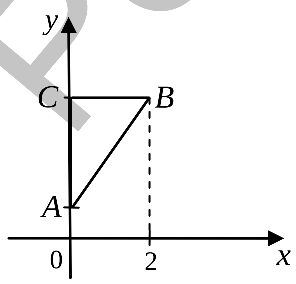

Рис. 5.

***Замечание* 5**. Криволинейный интеграл второго рода обладает свойствами, аналогичными свойствам сформулированным для криволинейного интеграла перового рода, за исключением свойства, касающегося изменения направления обхода.

Пример 1. Даны точки $A\,(0, 1)$, $B\,(2, 5)$, $C\,(0, 5)$. Вычислить интеграл $\int_L (x + y)dx - 2ydy$: *а*) по прямой AB; *б*) по ломаной ACB (см. рисунок

5).

Решение.

а) Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

находим, что уравнение прямой AB имеет вид $y = 2x + 1$ $(0 \le x \le 2)$. Тогда, по формулам (6) и (7) сводим данный интеграл к определенному

$$\int_L (x+y)dx-2ydy=\int_0^2((x+2x+1)-2(2x+1)\cdot 2)dx=$$

$$=\int_0^2(-5x-3)\,dx=\left(-\frac{5}{2}x^2-3x\right)\Bigg|_0^2=-16.$$

б) Ломаная ACB состоит из отрезков AC и CB, тогда по свойствам криволинейных интегралов второго рода получим

$$\int_{ACB}(x+y)dx-2ydy=\int_{AC}(x+y)dx-2ydy+\int_{CB}(x+y)dx-2ydy\,.$$

Уравнение прямой AC имеет вид $x = 0$. Тогда $dx = 0$ и, учитывая, что при движении от точки A к точке B переменная y изменяется от 1 до 5, имеем

$$\int_{AC}(x+y)dx-2ydy=\int_1^5(-2y)\,dy=(-y^2)\Big|_1^5=-25+1=-24.$$

Уравнение прямой CB имеет вид $y = 5$ $(0 \le x \le 2)$. Тогда $dy = 0$ и получаем

$$\int_{CB}(x+y)dx-2ydy=\int_0^2(x+5)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_0^2=12.$$

Следовательно,

$$\int_{ACB}(x+y)dx-2ydy=12-24=-12.$$

Пример 2. Найти $\int_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ (см. рисунок 6).

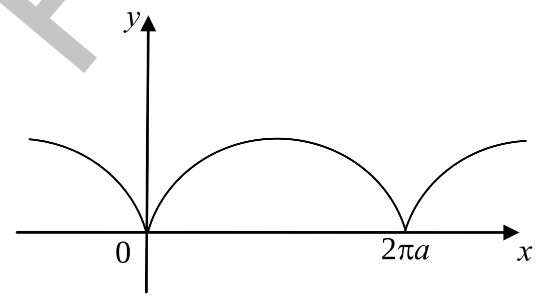

Рис. 6.

Решение.

Кривая L в этом случае задана параметрически, следовательно, криволинейный интеграл сводится к определенному по формулам (4), (5). При этом,

$$dx = a(1 - \cos t)dt,$$

$$dy = a \sin t dt.$$

Так как при движении из начальной точки O (0, 0) в конечную A ($2\pi a$, 0) переменная интегрирования t в определенном интеграле изменяется от 0 до 2π, то по формулам (4), (5)

$$\int_L (2a - y)dx - (a - y)dy =$$

$$\int_0^{2\pi} ((2a - a(1 - \cos t))\, a(1 - \cos t) - (a - a(1 - \cos t))\, a \sin t))\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos t \sin t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t\, d(\cos t) =$$

$$= \frac{a^2}{2} (t - \frac{1}{2} \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} + a^2 \frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi a^2.$$

Пример 2. Найти $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz,$ где L – отрезок прямой, соединяющей точки A (1, 1, 1) и B (2, 3, 4).

Решение.

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

составим уравнение прямой AB

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}.$$

Зададим прямую AB параметрически уравнениями $x = t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 3t + 1$. При движении из точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1, тогда

$$\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz =$$

$$= \int_0^1 (t + 1) + (2t + 1) \cdot 2 + (t + 1 + 2t + 1 - 1) \cdot 3)dt =$$

$$= \int_0^1 (14t + 6)dt = (7t^2 + 6t)\Big|_0^1 = 13.$$

3. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Рассмотрим одно из физических приложений криволинейного интеграла второго рода.

Работа силового поля. Пусть материальная точка $M(x, y)$ с единичной массой движется по кривой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \text{где } a \le t \le b,$$

под действием силы

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Если сила $\vec{F}$ постоянна и под действием этой силы точка M перемещается прямолинейно из точки A в точку B, то работа силы $\vec{F}$ по перемещению точки M находится по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

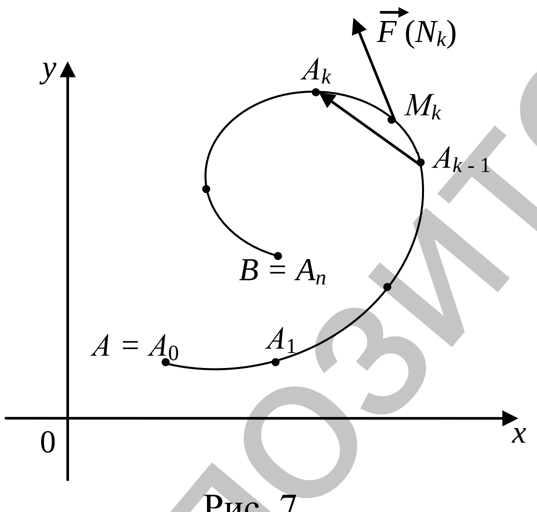

Рис. 7.

В случае непостоянной силы и непрямолинейного движения работа определяется с помощью некоторого предельного процесса.

Разобьем дугу AB на n частей точками $A_0 = A$, $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Выберем на каждой частичной дуге $A_{k-1}A_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$. При достаточно малой длине дуги $A_{k-1}A_k$ движение материальной точки по дуге $A_{k-1}A_k$ можно рассматривать как прямолинейное, а силу, действующую на точку, как постоянную силу, равную значению силы $\vec{F}$ в точке $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Тогда работа по перемещению материальной точки M по отрезку $A_{k-1}A_k$ под действием силы $\vec{F}$ находится следующим образом:

$$A_k \approx \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = P(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) =$$

$$= P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Следовательно, работа по перемещению материальной точки M по кривой AB под действием переменной силы $\vec{F}$ равна

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k =$$

$$= \int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

где Δl_k – длина дуги $A_{k-1}A_k$, $\Delta = \max \Delta l_k$.

Аналогично находится работа силы

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

по перемещению материальной точки по пространственной кривой *AB*, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \text{ где } a \le t \le b. \\ z = z(t), \end{cases}$$

В этом случае

$$A = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

4. Формула Грина

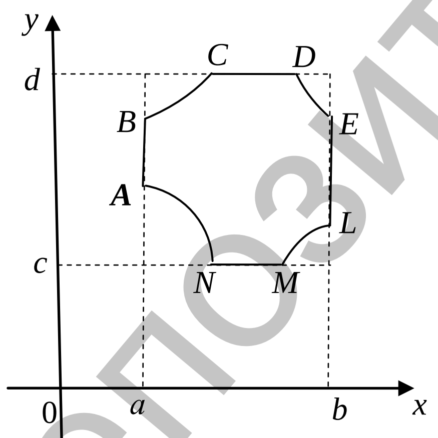

Рис. 8.

Рассмотрим область *D*, односвязную конечную область с кусочно-гладкой границей *L* ориентированной в положительном направлении (см. замечание 4, п.2). Пусть граница *L* является объединением графиков непрерывных функций, однозначно проектирующихся как на ось *OX*, так и на ось *OУ*, и, может быть, отрезков прямых, параллельных координатным осям (см. рис 8). Такую область будем называть **элементарной областью**.

Теорема **2.** *Пусть D элементарная область,ограниченная кусочно-гладкой кривой L, ориентированной положительно. Если на замыкании области D заданы функции P* (x, y) и *Q* (x, y), *непрерывные вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, *то имеет место формула*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (8)$$

Доказательство.

Так как область D элементарная, то ее границу можно представить как объединение двух кусочно-дифференцируемых функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где $\varphi(x) \le \psi(x)$, $a \le x \le b$, и, может быть, отрезков прямых $x = a$, $x = b$ (на рис. 8 графиком функции $y = \varphi(x)$ является кривая $ANML$, а графиком функции $y = \psi(x)$ – кривая $BCDE$). Кроме того, границу L можно представить, как объединение графиков двух кусочно-дифференцируемых функций $x = \alpha(y)$ и $x = \beta(y)$, где $\alpha(x) \le \beta(x)$, $c \le y \le d$ и, может быть, отрезков прямых $y = c$, $y = d$ (на рис. 8 графиком функции $x = \alpha(y)$ является кривая $NABC$, а графиком функции $x = \beta(y)$ – кривая $DELM$).

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Если рассматривать область D как область, ограниченную графиками функции $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где $\varphi(x) \le \psi(x)$, $a \le x \le b$, то двойной интеграл $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ можно свести к повторному следующим образом:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))]\, dx =$$

$$= \int_a^b P(x, \psi(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi(x))dx =$$

$$= \int_{ANML} P(x, y)dx - \int_{BCDE} P(x, y)dx = -\int_{LMNA} P(x, y)dx - \int_{BCDE} P(x, y)dx.$$

Так как $\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{DL} P(x, y)dx = 0$, то

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{LMNA} P(x, y)dx - \int_{AB} P(x, y)dx -$$

$$- \int_{BCDE} P(x, y)dx - \int_{EL} P(x, y)dx = -\oint_L P(x, y)dx. \qquad (*)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x, y)dy. \qquad (**)$$

Вычитая из равенства (*) равенство (**) получим формулу Грина (8). ■

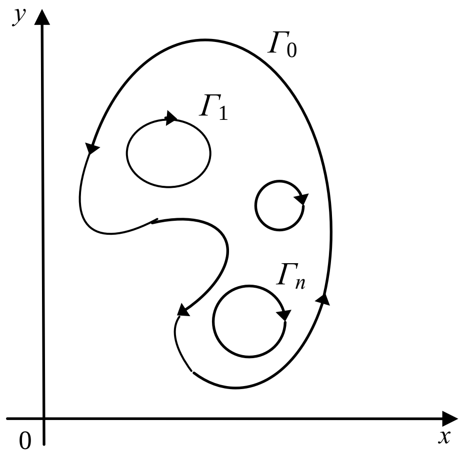

Рис. 9

***Замечание* 1.** Формула (8) называется **формулой Грина**.

***Замечание* 2.** Пусть граница области D состоит из внешнего кусочно-гладкого контура Γ_0, ориентированного против часовой стрелки, и внутренних кусочно-гладких контуров Γ_1, Γ_2, …, Γ_n, ориентированных по часовой стрелке. Пусть область D может быть разбита на конечное число элементарных областей. Тогда формула Грина имеет вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\Gamma_0} Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i} Pdx + Qdy. \quad (9)$$

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ как и выше предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании области D.

***Замечание* 3.** Так как двойной интеграл от единичной функции по области D равен площади области D, то выбирая функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, мы можем получить различные выражения площади данной области через криволинейный интеграл. В частности, если $P(x, y) = -\frac{y}{2}$, а $Q(x, y) = \frac{x}{2}$, имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_L -ydx + xdy. \quad (10)$$

Пример 3. Применяя формулу Грина, найти криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_L xy^2dy - x^2dx$, где кривая L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

Воспользуемся формулой (8), где $P(x, y) = -x^2$, $Q(x, y) = xy^2$, область G - это круг $x^2 + y^2 \le a^2$:

$$\oint_L xy^2dy - x^2dx = \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-x^2)\right)dxdy = \iint_G y^2dxdy =$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\rho \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^a \rho^3 d\varphi = \frac{a^4}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}d\varphi = \frac{a^4}{4}\pi.$$

Пример 4. Вычислить площадь ограниченную эллипсом $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Решение.

Согласно формуле (10) имеем:

$$S = \frac{1}{2}\int_L -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt = \pi\,ab.$$

5. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

***Теорема* 3.** *Пусть функции* $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области* D *, тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *криволинейный интеграл второго рода по любой замкнутой (возможно самопересекающейся) кусочно-гладкой кривой L, лежащей в D, равен нулю, т.е.*

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0\,;$$

2) *для любых двух точек A и B, лежащих в области D, значение интеграла* $\int_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy$ *не зависит от кусочно-гладкой кривой AB, соединяющей точки A и B и расположенной в D.*

3) *выражение Pdx + Qdy является полным дифференциалом некоторой функции u (x, y), т.е. в области D, существует функция u (M) = u (x, y), такая что du = Pdx + Qdy. При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в области D, имеет место равенство*:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)\,. \tag{11}$$

4) в области D выполняется тождество $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство.

Проведем доказательство по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

I. Докажем, что из первого условия следует второе условие $(1 \to 2)$.

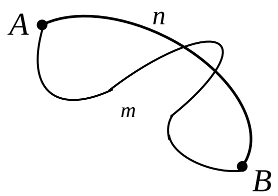

Рис. 10.

Пусть выполняется условие 1. Рассмотрим A и B – две произвольные точки области D. $\overset{\cup}{AmB}$ и $\overset{\cup}{AnB}$ – любые две кусочно-гладкие кривые, соединяющие указанные точки и расположенные в D (рис. 10).

Объединение этих кривых представляет собой замкнутую, возможно самопересекающуюся кривую L, расположенную в области D. $L = \overset{\cup}{AmB} + \overset{\cup}{BnA}$.

Так как первое условие теоремы выполняется, то имеет место равенство

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{AmB} Pdx + Qdy + \int_{BnA} Pdx + Qdy = 0.$$

Учитывая, что при изменении обхода на кривой, знак криволинейного интеграла второго рода меняется на противоположный, получим

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{AmB} Pdx + Qdy - \int_{AnB} Pdx + Qdy = 0,$$

или

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy = \int_{AnB} Pdx + Qdy.$$

Значит, выполняется второе условие.

2. Докажем, что из второго условия теоремы следует третье ($2 \rightarrow 3$).

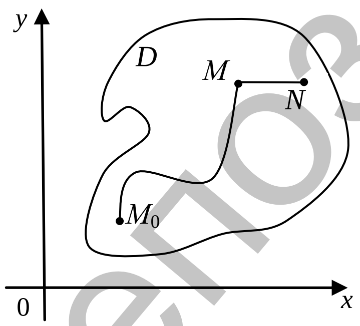

Рис. 11.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная фиксированная точка области D, а $M\,(x, y)$ – любая другая точка области. M_0M – любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки M_0 и $M\,(x, y)$ и целиком расположенная в области D.

Из второго условия следует, что криволинейный интеграл по кривой M_0M $u(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} Pdx + Qdy$ зависит от выбора точки M и не зависит от пути интегрирования M_0M. Поэтому в области D этот интеграл представляет собой функцию $u\,(M)$.

Докажем, что в любой точке $M \in D$ существуют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (*)$$

Зафиксируем точку $M(x, y)$ и придадим аргументу x приращение Δx, так, чтобы отрезок $\overline{MN}$, где $N(x+\Delta x, y)$, целиком лежал в области D.

Получим:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int\limits_{M_0MN} Pdx + Qdy - \int\limits_{M_0N} Pdx + Qdy = \int\limits_{MN} Pdx + Qdy.$$

На отрезке MN переменная y имеет постоянное значение, и поэтому $\int\limits_{MN} Qdy = 0$. Следовательно,

$$\Delta u = \int\limits_{MN} Pdx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)dt.$$

Применяя в последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta u = P(x + \Delta x\theta, y)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$.

Тогда $\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x + \Delta x\theta, y)$, $0 < \theta < 1$.

Так как $P(x, y)$ − непрерывна в области D, то правая часть данного равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный значению этой функции в точке $M(x, y)$. Следовательно, частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ существует, и выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (P(x + \theta\Delta x, y)) = P(x, y).$$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

Докажем теперь формулу (11).

Пусть A и B – произвольные точки области D. AB − произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки A и B и расположенная в области D. Эта кривая определяется параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $a \le t \le b$. Тогда

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int\limits_{a}^{b} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt = \int\limits_{a}^{b} u'_t \, dt =$$

$$= u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(B) - u(A).$$

3. Докажем, что из третьего условия следует четвертое (3$\to$ 4).

Пусть в области D существует функция $u(x, y)$, такая, что $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

Так как функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области D, то функция $u(x, y)$ дважды дифференцируема в области D. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Значит, условие 4 выполнено.

4) Докажем, что из четвертого условия следует третье(4 $\to$ 1).

Пусть в области D выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим произвольный замкнутый контур L (кусочно-гладкий без самопересечений) ограничивающий область $D^* \subset D$. Тогда по формуле Грина (формула 8) получим:

$$\oint_L Pdx - Qdy = \iint_{D^*} (\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x})dxdy = 0.$$

Если кривая L имеет конечное число точек самопересечения, то для каждой петли τ кривой L справедливо равенство $\oint_\tau Pdx + Qdy = 0$, это равенство справедливо и для всей кривой L. ■

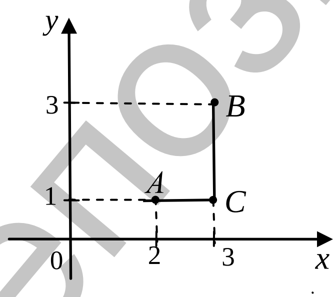

Рис. 12.

Пример 5. Вычислить $\int_L \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$, где кривая L – кривая, соединяющая точки $A(2, 1)$ и $B(3, 3)$.

Решение.

Так как для данного интеграла функции $P(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ определены и дифференцируемы на всей плоскости, за исключением начала координат, кроме того,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

то, по теореме 3, этот интеграл не зависит от вида кривой, соединяющей точки A и B. В качестве кривой возьмем ломаную ACB со звеньями параллельными координатным осям (рис.12). Тогда интеграл по кривой L равен сумме интегралов по отрезкам AC и CB.

Отрезок AC задается уравнением $y = 1$, где переменная $2 \le x \le 3$ Тогда $dy = 0$, значит

$$\int\limits_{AC} \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_2^3 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln\,(x^2 + 1)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Отрезок CB задается уравнением $x = 3$, где переменная $1 \le y \le 3$ Тогда $dx = 0$, значит

$$\int\limits_{AC} \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int\limits_1^3 \frac{ydy}{9 + y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^3 \frac{d(y^2 + 9)}{y^2 + 9} = \frac{1}{2} \ln\,(y^2 + 9)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 18 - \ln 10) = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{AC} \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2}\,(\ln 2 + \ln \frac{9}{5}) = \frac{1}{2} \ln \frac{18}{5}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982. – Ч. 2.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – Т. 2.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1990. – Т. 2.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – Т. 2.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Физматгиз, 1960. – Т. 2.

Дополнительная литература

6. Гусак А.А., Гусак Г.М, Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
8. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
9. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
10. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной пpеременной. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
11. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010.
12. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2005. – Ч. 1.