Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020

УДК 519.853(076.5)
ББК 22.185.42я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 30.12.2019.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова**

Рецензент:
доцент кафедры математики и информационных технологий УО «ВГТУ»,
кандидат физико-математических наук *Т.В. Никонова*

Сурин, Т.Л.

С90 Методы оптимизации. Нелинейное программирование : методические рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 50 с.

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов третьего курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Программное обеспечение информационных технологий». В нем содержатся разработки лабораторных работ по теме «Нелинейное программирование».

УДК 519.853(076.5)
ББК 22.185.42я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов третьего курса факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Программное обеспечение информационных технологий». Его основное назначение – помочь студентам при подготовке к лабораторной работе и дать рекомендации по выполнению самой лабораторной работы.

Издание охватывает вопросы методов оптимизации, относящиеся к разделу «Нелинейное программирование», а именно: аналитические методы нахождения безусловных экстремумов функции одной и нескольких переменных, методы нахождения условного экстремума функции нескольких переменных при различных видах ограничений, а также вычислительные методы нахождения безусловного экстремума. В нем содержатся методические рекомендации и задания к 7 лабораторным работам. В каждом параграфе приведен необходимый теоретический материал, дан алгоритм выполнения работы, разобраны примеры, иллюстрирующие применение алгоритма, и приведены задания для лабораторной работы.

Материал, приведенный в методических рекомендациях, соответствует учебным программам по предмету «Методы оптимизации» для специальности «Прикладная математика» и предмету «Методы оптимизации и алгоритмы принятия решений» для специальности «Программное обеспечение информационных технологий».

Издание может быть полезно для студентов специальности «Прикладная информатика» при изучении предмета «Методы оптимизации».

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
Необходимые и достаточные условия безусловного экстремума

1. Безусловный экстремум функции одной переменной. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Определение* 1.** *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *называется* ***точкой максимума (минимума) **(*или точкой локального максимума*, *локального минимума*)** *функции*, *если существует такая* δ-*окрестность точки* x_0, *содержащаяся в интервале* (a, b), *что для всех точек* $x \in U_\delta(x_0)$ $(x \neq x_0)$ *выполняется неравенство* $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$.

Напомним, что δ-окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Обозначение: $U_\delta(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции.

***Теорема* 1 (*необходимое условие экстремума дифференцируемой функции*).** *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *и имеет в этой точке экстремум*, *то* $f'(x_0) = 0$.

***Замечание* 1**. Функция $f(x)$ может иметь экстремум в точке x_0, в которой $f(x)$ непрерывна, но не является дифференцируемой.

Точки, в которых функция определена, непрерывна, а производная функции равна нулю или не существует, называются **критическими точками** функции. Критические точки не всегда являются точками экстремума функции. Для определения их характера необходимо дальнейшее исследование.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть точка x_0 является критической точкой функции $f(x)$.

***Теорема* 2.** *Пусть* $f(x)$ *дифференцируема всюду в некоторой* δ-*окрестности точки* x_0, *за исключением*, *может быть*, *самой точки* x_0. *Если производная функции при переходе через точку* x_0 *меняет знак*, *то точка* x_0 *является точкой экстремума функции. В частности*

– *если* $f'(x) > 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta, 0)$, *а* $f'(x) < 0$, *при* $x \in (0, x_0 + \delta)$, *то точка* x_0 *является точкой максимума функции*;

– *если* $f'(x) < 0$ *при* $x \in (x_0 - \delta, 0)$, *а* $f'(x) > 0$, *при* $x \in (0, x_0 + \delta)$, *то точка* x_0 *является точкой минимума функции*;

– *если при переходе через точку* x_0 *производная не меняет знак, то экстремума в точке* x_0 *функция не имеет.*

Второе достаточное условие экстремума.

***Теорема* 3.** *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *вторую производную и* $f'(x_0) = 0$. *Тогда*, *если* $f''(x_0) > 0$, *то точка* x_0 *является точкой минимума функции. Если* $f''(x_0) < 0$, *то точка* x_0 *– точка максимума функции.*

***Пример* 1.** *Найти точки экстремума функции* $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\,(x-1)}{4x-5}$.

Решение. Область определения функции

$$D(f)\colon x \in \left(-\infty, 1\frac{1}{4}\right) \cup \left(1\frac{1}{4}, \infty\right).$$

Найдем производную функции: $y' = \dfrac{(8x-5)(x-2)}{3\sqrt[3]{x}(4x-5)^2}$.

Найдем нули производной и точки, в которых производная не существует. Для этого решаем уравнение

$$\frac{(8x-5)(x-2)}{3\sqrt[3]{x}(4x-5)^2} = 0.$$

Производная функции равна нулю в точках $x_1 = \dfrac{5}{8}$, $x_2 = 2$. Производная не существует в точках $x_3 = 0$ и $x_4 = \dfrac{5}{4}$. При этом функция непрерывна в точке $x_2 = 0$, а в точке $x_3 = 1\dfrac{1}{4}$ функция не определена. Следовательно, критическими точками функции являются точки $x_1 = \dfrac{5}{8}$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 0$.

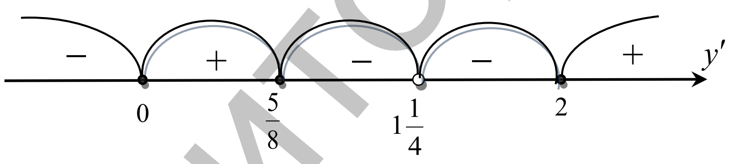

Рис. 1.

Проверим достаточные условия экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием. Изобразим координатную ось и нанесём на неё все найденные точки.

Точка $x_4 = 1\dfrac{1}{4}$ не может быть точкой экстремума функции, так как в этой точке функция не является непрерывной. Точки $x_3 = 0$ и $x_2 = 2$ являются точка миминимума функции, так как при переходе через эту точку знак производной меняется с «–» на «+». Точка $x_1 = \dfrac{5}{8}$ является точкой максимума функции, так как при переходе через эту точку знак производной меняется с «+» на «–».

Ответ. Точки $x_3 = 0$ и $x_2 = 2$ – точки минимума функции. Точка $x_1 = \dfrac{5}{8}$ – точка максимума. $f(0) = 0$, $f(2) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $f\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3}{32\sqrt[3]{2}}$.

Пример 2. *Исследовать на экстремум функцию*

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14,$$

воспользовавшись вторым достаточным условием экстремума.

Решение. Область определения функции $D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$.

Находим точки подозрительные на экстремум. Так как $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$, то критические точки: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

$f''(x) = 12x - 30$. $f''(2) = -6 < 0$, значит, $x = 2$ – точка максимума. $f''(3) = 6 > 0$, значит, точка $x = 3$ – точка минимума.

Ответ. $x = 2$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума. $f(2) = 14$, $f(3) = 13$.

2. Безусловный экстремум функции многих переменных.

Квадратичные формы. Пусть в некоторой окрестности точки M_0 задана функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, которая имеет в этой точке непрерывные производные второго порядка. Тогда второй дифференциал функции $d^2u\big|_{M_0} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ является **симметричной квадратичной формой** от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Обозначим $a_{ij} = \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}$. Тогда матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители $\delta_1 = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$

$\delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называются **главными минорами матрицы *A***.

Квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ называется **положительно определенной**, если для любых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, одновременно не равных нулю, $Q(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

Квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_n)$ называется **отрицательно определенной**, если для любых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, одновременно не равных нулю, $Q(x_1, \ldots, x_n) < 0$.

Положительно или отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными** квадратичными формами.

Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется **знакопеременной** формой.

***Теорема* 4.** *Для того чтобы квадратичная форма* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры были положительные, т.е.* $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0$.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, причем $\delta_1 < 0$, *т.е.* $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \ldots$.

Определение локального экстремума.

***Определение* 2.** *Пусть функция* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Точка* M_0 *называется точкой* ***локального максимума* (*минимума*)** *данной функции, если существует такая окрестность точки* M_0, *в которой выполняется неравенство*:

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)), \text{ для всех } M \neq M_0.$$

Точки локального максимума и минимума называются **точками экстремума** функции $u = f(M)$.

***Теорема* 5 (*необходимое условие локального экстремума*).** *Пусть функция* $u = f(M)$ *имеет в точке* M_0 *локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные первого порядка, то все эти частные производные равны нулю.*

***Замечание* 2.** Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$du\Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{M_0} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{M_0} dx_n \equiv 0 \qquad \backslash$$

при любых значениях дифференциалов независимых переменных.

Точки, в которых все частные производные функции (дифференциал функции) равны 0, называются ***точками возможного экстремума*** функции.

Для отыскания этих точек необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

***Теорема* 6 (*достаточное условие локального экстремума*).**

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (M_0 *– точка возможного экстремума*). *Пусть все частные производные второго порядка данной функции непрерывны в точке* M_0. *Тогда, если* $d^2u\Big|_{M_0}$ *- знакоопределенная квадратичная форма от дифференциалов* $dx_1, \ldots, dx_n$, *то точка* M_0 *- точка экстремума.*

При этом, если $d^2u(M_0) < 0$ ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$), то точка M_0 - точка максимума; если $d^2u(M_0) > 0$ ($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$), то точка M_0 - точка минимума.

Если $d^2u(M_0)$ знакопеременная квадратичная форма, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Пример 3. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение 1. Находим точки возможного экстремума функции. Для этого находим частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ u'_z = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему. Получим точки возможного экстремума функции: $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума в этих точках, при этом воспользуемся теоремой 6. Найдем частные производные второго порядка в произвольной точке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_{11} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{21} = -1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_{22} = 6y,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = a_{13} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_{31} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = a_{23} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = a_{32} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_{33} = 2.$$

Рассмотрим точку $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Найдем значения частных производных функции в точке M_1:

$$a_{11} = 4, \ a_{12} = a_{21} = -1, \ a_{13} = a_{31} = 2, \quad a_{22} = 4, a_{23} = a_{32} = 0, \ a_{33} = 2.$$

Рассмотрим второй дифференциал функции в точке M_1: $d^2u(M_1) = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz + 4dy^2 + 2dz^2$. Это − квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.. Построим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдем миноры матрицы:

$$\delta_1 = 4 > 0, \ \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Значит, $d^2u\big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой, и точка $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ – точка минимума функции.

Находим значение частных производных в точке $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$: $a_{11} = 4, a_{12} = -1, a_{13} = 2, a_{22} = 4, a_{23} = 0, a_{33} = 2$. Матрица для второго дифференциала функции в точке M_2 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим миноры матрицы:

$$\delta_1 = 4 > 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Значит, $d^2u\big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой и точка M_2 не является точкой экстремума.

***Пример* 4.** Найти точки локального экстремума функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение 1. Находим точки возможного экстремума. Проверяем необходимые условия экстремума.

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 3x^2 = 0, \\ z'_y = 3x^2 - 4y^3. \end{cases}$$

Из этой системы находим точки возможного экстремума: $M_1(0, 0)$, $M_2(6, 3)$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума. Найдем частные производные второго порядка функции.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_{11} = 6y - 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_{12} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_{22} = -12y^2.$$

Находим значение частных производных в точке M_1 (0, 0):

$$a_{11} = 0, \ a_{12} = 0, \ a_{22} = 0,$$

следовательно, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, т.е. требуются дополнительные исследования.

Найдем значение функции в точке M_1: $z(0, 0) = 0$. Рассмотрим прямую $y = 0$. На этой прямой $z(x, 0) = -x^3$, тогда $z(x, 0) > 0$ при $x < 0$, $z(x, 0) < 0$ при $x > 0$, т.е. в любой окрестности точки M_1 существуют точки, в которых функция принимает как значения большие, чем $z(M_1)$, так и значения меньшие, чем $z(M_1)$. Следовательно, точка M_1 не является точкой экстремума.

Находим значение частных производных в точке $M_2(6, 3)$:

$$a_{11} = -18,\ a_{12} = 36,\ a_{22} = -108,$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 648 > 0$ ($a_{11} < 0$), значит, по теореме 6, точка M_2 – точка максимума.

3. Задания для лабораторной работы

1. Найти точки экстремума функции одной переменной

1. *a*) $y=x^4 - 2x - 3$; *b*) $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$.
2. *a*) $y = x^3(10 - 3x^2)$; *b*) $y = x^2 - \ln x$.
3. *a*) $y = (x^2-1)^3$; *b*) $y = (x-1)\,e^{3x-1}$.
4. *a*) $y = (x^2 - 2x + 3)^2$; *b*) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.
5. *a*) $y = (x^2-4)^3$; *b*) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.
6. *a*) $y = x - 2x^4 - 1$; *b*) $y = e^{2x-x^2}$.
7. *a*) $y = (x^3-1)^2$; *b*) $y = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$.
8. *a*) $y = 3x^3 - 40x^2 + 240x$; *b*) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
9. *a*) $y = \dfrac{x^5+x^3}{5} + 3x$; *b*) $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.
10. *a*) $y=x^2(x^3-20)$; *b*) $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.
11. *a*) $y = (3x-5)^6$; *b*) $y = x^2 \, arctg\, x$.
12. *a*) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; *b*) $y = x \ln x$.
13. *a*) $y = 36x(x-1)^3$; *b*) $y = x^3 e^{-4x}$.
14. *a*) $y = 32x^2(x^2-1)^3$; *b*) $y = x^2 e^{-x}$.
15. *a*) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; *b*) $y = x^2 e^{-x^2}$.
16. *a*) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; *b*) $y = \ln(x^2+1)$.
17. *a*) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; *b*) $y = x + \sin x$.

18. $a)\ y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; $\qquad$ $b)$ $y = \ln \cos x$.

19. $a)\ y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $\qquad$ $b)$ $y = x\, e^{-x}$.

20. $a) y = x^3 - 3x;^2$ $\qquad$ $b)$ $y = x\sqrt{x+3}$.

21. $a)\ y = \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x - 3)$; $\qquad$ $b)$ $y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

22. $a)\ y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$; $\qquad$ $b)$ $y = e^{4x - x^2}$.

23. $a)\ y = x^3 - 3x^2 + 4$; $\qquad$ $b)$ $y = x \ln^2 x$.

24. $a)\ y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; $\qquad$ $b)$ $y = x^2 \ln x$.

25. $a)\ y = (x-1)^2 (x+2)$; $\qquad$ $b)$ $y = e^{1-x^2}$.

26. $a)\ y = (x+2)^2 (x-1)^2$; $\qquad$ $b)$ $y = \dfrac{x}{2} - arctgx$.

2. Найти точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

1) $z = 3x + y - xy,$

2) $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2,$

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$

4) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10,$

5) $z = 5x^2 - 3xy + y^2,$

6) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$

7) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1,$

8) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,$

9) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,$

10) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y,$

11) $z = 15x + x^2 - xy - 2y^2,$

12) $z = 3x^3 + 3y^3 + y^2 - 9xy + 10,$

13) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10,$

14) $z = x^2 - 4xy - y^2 - 6x - 2y,$

15) $z = x^2 y(2 - x - y),$

16) $z = x^3 + 6y^2 - 6xy,$

17) $z = x^3 + y^3 - 3xy,$

18) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,$

19) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1,$

20) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$

21) $z = x^2 y - x - y,$

22) $z = 2x^2 + 3y^2 + 1,$

23) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,$

24) $z = 3x + y - xy,$

25) $z = x^2 + 2xy - x - 8y$,

26) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x.$

3. Найти точки локального экстремума следующих функций трех переменных:

1) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;

2) $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$;

3) $u = \dfrac{xyz}{16} - x - y - 2z$;

4) $u = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2$.

5) $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1 + \cos x_3$;

6) $f(x) = x_1^3 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3 + 2x_1x_3 - x_2$;

7) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2$;

8) $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26z^2 - 13z$;

9) $f(x) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2) + (3x_3^2 - 6x_3)$;

10) $f(x) = -x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_3$;

11) $f(x) = x_1^3 + x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 + 6x_2 + 4$;

12) $f(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_3^2$;

13) $f(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

14) $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$;

15) $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_2x_3$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Условный экстремум функции при ограничениях-равенствах

1. Постановка задачи. Даны дважды непрерывно дифференцируемые ***целевая функция*** $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ и ***функции ограничений*** $g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, ..., x_n)$, $(j = \overline{1,m}$, $m < n)$. Для функций $g_j(\mathbf{x})$ справедливы равенства, называемые ***уравнениями связи***

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, ..., x_n) = 0, \ (j = \overline{1,m}), \tag{1}$$

определяющие множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(\mathbf{x})$ на экстремум на множестве $X = \{\mathbf{x} / g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = \overline{1,m}\}$.

Если найдется точка $\mathbf{x}^0$, удовлетворяющая системе уравнений (1) и дающая минимум (максимум) функции $z = f(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in X$, то ее называют точкой ***глобального условного минимума*** (***максимума***).

Задача на ***локальный условный экстремум*** ставится следующим образом: найти точку $\mathbf{x}^0$, удовлетворяющую ограничениям (1), такую, что при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$, для всех допустимых векторов $\mathbf{x}$ из ε-окрестности точки $\mathbf{x}^0$: $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство $f(\mathbf{x}_0) \ge f(\mathbf{x})$ для точки максимума ($f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x})$ для точки минимума).

Есть два метода решения данной задачи.

2. Метод исключения части переменных. При решении задачи этим методом:

а) разрешают уравнения связи относительно каких-либо m переменных, например $x_1, ..., x_m$;

б) подставляют эти переменные в функцию $f(\mathbf{x})$ и получают $f(\mathbf{x}) = F(x_{m+1}, ..., x_n)$;

в) исследуют на безусловный экстремум новую функцию $n-m$ переменных;

г) Подставляют координаты полученных точек экстремума в выражения для $x_j, (j = \overline{1, m})$ и находят точки экстремума функции $f(\mathbf{x})$.

3. Метод Лагранжа. Задача об условном экстремуме функции $f(\mathbf{x})$ решается с помощью обобщенной функции Лагранжа

$$F(\mathbf{x}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x),$$

где λ_j - произвольные числа.

Теорема* 1** (необходимые условия экстремума первого порядка***).

Пусть $\mathbf{x}^0$ *есть точка условного экстремума функции* $f(\mathbf{x})$. *Тогда найдутся числа* $\lambda_0^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0$, *не равные одновременно нулю и такие, что выполняются условия*:

– *условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по* $\boldsymbol{x}$

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \lambda_0^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1, n});$$

– *условие допустимости решения*: $g_j(\mathbf{x}) = 0, (j = \overline{1, m})$.

***Замечание* 1.** Из условия стационарности следует, что число λ_0^0 и вектор Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_0^0, \ldots, \lambda_m^0)$ находятся неоднозначно, причем, если $\lambda_0^0 \neq 0$,то всегда можно считать, что $\lambda_0^0 > 0$.

Замечание* 2.** Если $\mathbf{x}^0$ точка условного экстремума функции $f(\mathbf{x})$ и для всех векторов Лагранжа, соответствующих этой точке, выполняется $\lambda_0^0 \neq 0$, то точку $\mathbf{x}^0$ называют ***нормальной точкой условного экстремума, а задачу на условный экстремум – ***нормальной задачей на условный экстремум.***

Замечание* 3.** Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называют ***условно-стационарными.

Можно показать, что точка $\mathbf{x^0}$ − нормальная точка условного экстремума тогда и только тогда, когда в этой точке выполняются условия регулярности, т.е. линейно независимы градиенты функций $g_j(\mathbf{x})$ $(j=1,m)$ (векторы $\dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}\right)^T$ $(j=\overline{1,m})$).

Если в точке $\mathbf{x}^0$ выполняются условия регулярности, то можно считать что $\lambda_0^0=1$, и вместо обобщенной функции Лагранжа рассматривать классическую функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\lambda_1 g_1(\mathbf{x})+\lambda_2 g_2(\mathbf{x})+\cdots+\lambda_m g_m(\mathbf{x}).$$

***Теорема* 2 (*необходимые условия экстремума второго порядка*).**

Пусть $\mathbf{x}^0$ − *регулярная точка условного экстремума функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $\boldsymbol{\lambda}^0=(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0)$ *соответствующий ей вектор Лагранжа. Тогда*

1) *если* $\mathbf{x}^0$ − *точка условного минимума, то* $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)\ge 0$;

2) *если* $\mathbf{x}^0$ − *точка условного максимума, то* $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)\le 0$ *для всех* $\mathbf{dx}=(dx_1,\ldots,dx_n)\in\mathbf{R}^n$, *таких что*

$$dg_j(\mathbf{x}^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\mathbf{x^0})}{\partial x_i}dx_i=0,\quad (j=\overline{1,m}). \qquad (2)$$

***Теорема* 3 (*достаточные условия экстремума*).**

Пусть $(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)$ − *точка, удовлетворяющая условиям*:

а) $\dfrac{\partial L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i}=0,(i=\overline{1,n})$, *б*) $g_j(\mathbf{x}^0)=0,(j=\overline{1,m})$.

Если в этой точке $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)>0$ $(d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)<0)$ *для всех ненулевых* $d\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ *таких, что выполнено условие* (2), *то точка* $\mathbf{x}^0$ *является точкой локального условного минимума* (*максимума*).

4. Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Найти градиенты функций $g_j(\mathbf{x})$ $(j=1,m)$ и проверить их на линейную независимость в области *X*. Если они всюду линейно независимы, то переходим к шагу 3. Если градиенты функций в некоторых точках линейно зависимы или задача определения линейной зависимости вызывает затруднения, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Составить обобщенную функцию Лагранжа: $F(\mathbf{x},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda})=\lambda_0 f(x)+\lambda_1 g_1(x)+\lambda_2 g_2(x)+\cdots+\lambda_m g_m(x)$ и записать необходимые условия первого порядка:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^0,\lambda_0^{\ 0},\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i}=0,\ (i=\overline{1,n});\ g_j(\mathbf{x})=0,\ (j=\overline{1,m}).$$

Решить полученную систему для случая $\lambda_0 = 0$ и найти точки $(\mathbf{x}^o, 0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$.

Шаг 3. Положить $\lambda_0 = 1$ и составить классическую функцию Лагранжа: $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(\mathbf{x})$.

Записать необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i}=0,\ (i=\overline{1,n})$, *б*) $g_j(\mathbf{x}^0)=0,\ (j=\overline{1,m})$.

Решить систему и найти регулярные условно стационарные точки $(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)$.

Шаг 4. Для полученных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

а) Найти $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j$;

б) Продифференцировать уравнения связи:

$$dg_j(\mathbf{x}^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}dx_i=0 \quad (j=\overline{1,m});$$

в) Из полученной системы выразить любые m дифференциалов через остальные $(n-m)$ и подставить в $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)$;

г) Если $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)>0$ при ненулевых $d\mathbf{x}$, то в точке $\mathbf{x}^0$ – условный локальный минимум, если $d^2L(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)<0$ при ненулевых $d\mathbf{x}$, то в точке $\mathbf{x}^0$ – условный локальный максимум. Если достаточные условия не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (теорема 2). Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке $\mathbf{x}^0$ нет условного экстремума.

Шаг 5. Вычислить значения функции в точках условного экстремума, а также в точках, полученных в шаге 2. Наименьшее из этих значений и есть значение глобального минимума, а наибольшее – значение глобального максимума. Соответствующие точки $\mathbf{x}^0$ являются точками глобального минимума и максимума соответственно.

***Пример* 1.** На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удалённую от точки (0, 0, 3).

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$, лежащую на эллипсоиде. Расстояние от точки (0, 0, 3) до точки $M(x, y, z)$ определяется формулой $\rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$. Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ при условии связи $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$.

Найдем решение задачи м**етодом исключения части переменных.** Из уравнения связи выражаем x^2 через y и z, получаем

$$x^2 = 8 - 2y^2 - 4z^2. \qquad (3)$$

Подставляем полученное значение в целевую функцию и получаем функцию от двух переменных

$$u\,(y, z) = 8 - 2y^2 - 4z^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17 - y^2 - 3z^2 - 6z\,,$$

которую исследуем на безусловный экстремум.

Находим точки возможного экстремума функции $u\,(y, z)$, для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} u'_y = -2y = 0, \\ u'_z = -6z - 6 = 0. \end{cases}$$

Точка $N_0\,(0,\ -1)$ – точка возможного экстремума функции $u\,(y, z)$.

Проверим, выполняются ли для этой точки достаточные условия локального экстремума, для этого находим второй дифференциал функции.

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 = -2dy^2 - 6dz^2\,.$$

Очевидно, что $d^2u = -2dy^2 - 6dz^2 < 0$, для всех dyи dz одновременно не равных нулю, значит точка $N_0\,(0, -1)$ – точка локального максимума функции $u\,(y, z)$.

Подставим координаты точки N_0 в равенство (3), получим значение $x = \pm 2$. Итак, функция $u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ имеет две точки условного максимума: $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$.

Следовательно, точками эллипса, наиболее удаленными от точки $(0, 0, 3)$, являются точки $M_1(2, 0, -1)$ и $M_2(-2, 0, -1)$.

***Пример* 2.** Методом Лагранжа найти экстремум функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. *Шаг* 1. $g_1(x, y, z) = z - x - 1$, $g_2(x, y, z) = y - xz - 1$.

Найдем градиенты этих функций:

$$\text{grad } g_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z}\right)^T = (-1, 0, 1)^T, \quad \text{grad } g_2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial z}\right)^T = (-z, 1, -x)^T.$$

Полученные векторы являются линейно независимыми в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, следовательно, можно перейти к шагу 3.

Шаг 3. Составим классическую функцию Лагранжа $L = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$ и рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ L'_y = 1 + \lambda_2 = 0, \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ g_1 = z - x - 1 = 0, \; g_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, значит, точка $M_0\,(-1, 1, 0)$ − единственная точка возможного экстремума функции $u = x + y + z^2$ при условиях связи (2).

Шаг 4. Дифференцируя уравнения связи, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0\,, \\ dy - xdz - zdx = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)dx. \end{cases}$$

Теперь находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = L''_{x^2}\,dx^2 + L''_{y^2}\,dy^2 + L''_{z^2}\,dz^2 + 2\,L''_{xy}\,dxdy + 2\,L''_{xz}\,dxdz + 2\,L''_{yz}\,dydz =$$

$$= 2dz^2 - 2\lambda_2 dxdz.$$

Подставляя координаты точки $M_0\,(-1, 1, 0)$, значение $\lambda_2 = -1$ и выражения $dz = dx$, $dy = (x + z)dx$, $dy\,(M_0) = -dx$в d^2L, получаем положительно определённую квадратичную форму от одной переменной dx: $d^2L = 4dx^2 > 0$. Отсюда следует, что функция $u = x + y + z^2$ при условиях связи (4) имеет в точке M_0 условный минимум.

Шаг 5. В точке условного минимума $M_0\,(-1, 1, 0)$ значение функции $u_{min} = 0$.

5. Задания для лабораторной работы

1.Найти точки условного экстремума функции $u = f\,(\mathbf{x})$ при наличии условий связи $g_j(\mathbf{x}) = 0$:

№	$u = f\,(\mathbf{x})$	Уравнения связи $g_j(\mathbf{x}) = 0$
1.	$u = x_1 x_2$,	$3x_1 + x_2 - 6 = 0.$
2.	$u = e^{x_1 x_2}$,	$x_1 + x_2 - 1 = 0.$
3.	$u = 2x_1^2 + x_2^2$,	$2x_1 + x_2 - 1 = 0.$
4.	$u = x_1 + x_2 + x_3^2$,	$-x_1 + x_3 - 1 = 0.$
5.	$u = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$,	$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$
6,	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$,	$x_1 + x_2 - x_4 - 6 = 0,\ x_1 + x_3 + x_4 - 9 = 0.$
7.	$u = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$,	$x_1 + x_2 - a = 0.$
8.	$u = x_1^2 - x_2^2$,	$x_1 - x_2 - 10 = 0.$
9.	$u = x_1^2 + x_2^2 + 3$,	$x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0.$
10.	$u = 2x_1 + x_2$,	$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 = 0.$

11.	$u = 4x_1x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0.$
12.	$u = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$
13.	$u = x_1 + x_2 + x_3,$	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 1 = 0.$
14.	$u = 3x_1 - x_2,$	$9x_1^3 - x_2^2 = 0.$
15.	$u = x_1 - 3x_2,$	$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0,\ (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

2.Найти условный экстремум функции $u = f(\mathbf{x})$ при данных уравнениях связи. Решение проиллюстрировать геометрически.

	$u = f(\mathbf{x})$	Уравнения связи
1.	$u = x_1 + x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0.$
2.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0.$
3.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_2^2 - x_1 = 0.$
4.	$u = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3,$	$x_1 + x_2 + 6 = 0.$
5.	$u = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2,$	$-3x_1 - 2x_2 = 6.$
6.	$u = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3,$	$-x_1 - x_2 = 2.$
7.	$u = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5,$	$2x_1 - x_2 = 6.$
8.	$u = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7,$	$2x_1 + 3x_2 = -6.$
9.	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0.$
10.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$x_1 + x_2 = 2.$
11.	$u = x_1 + x_2,$	$x_1^2 + x_2^2 = 2.$
12.	$u = x_1^2 + x_2^2,$	$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0.$
13.	$u = x_1^2 - x_2^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$
14.	$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$
15.	$u = 0{,}5((x_1 - 1)^2 + x_2^2),$	$-x_1 + 2x_2^2 = 0.$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
Условный экстремум функции при ограничениях-неравенствах

1. Постановка задачи. Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ и функции ограничений $g_j(\mathbf{x})$, $(j = \overline{1,m})$. Функции $g_j(\mathbf{x})$ удовлетворяют неравенствам $g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1, ..., x_n) \le 0$, $(j = \overline{1,m})$, определяющим множество допустимых решений X.

Требуется исследовать функцию $f(\mathbf{x})$ на экстремум на множестве X.

Замечание. В случае ограничений-неравенств число m может быть любым.

2. Основные теоретические сведения. Строится обобщенная функция Лагранжа $F(\mathbf{x},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$, где λ_0 — неизвестное произвольное число, а $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ – некоторый неизвестный числовой вектор (множитель Лагранжа).

***Теорема* 1 (*необходимые условия экстремума первого порядка*).**

Пусть $\mathbf{x}^0$ *– точка условного локального минимума* (*максимума*) *в данной задаче. Тогда найдётся такое число* λ_0^0 *и такой вектор* $\boldsymbol{\lambda}^0$ (*не равные нулю одновременно*), *что будут выполняться следующие условия*:

– условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по ***x***

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^0,\lambda_0{}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n}); \tag{1}$$

– условие допустимости решения

$$g_j(\mathbf{x}^0) \le 0, (j = \overline{1,m}); \tag{2}$$

– условие неотрицательности для условного минимума (*условие неположительности для условного максимума*)

$$\lambda_j^0 \ge 0\ (j = \overline{1,m}); \quad (\lambda_j^0 \le 0\ (j = \overline{1,m})\ ); \tag{3}$$

– условие дополняющей нежёсткости

$$\lambda_j^0\ g_j(x^0) = 0, \quad (j = \overline{1, m}). \tag{4}$$

Замечание* 1.** Точки $\mathbf{x}^0$, удовлетворяющие системе (1)–(4), называются ***условно стационарными.

Замечание* 2.** Ограничение $g_j(\mathbf{x})$ называется ***активным в точке $\mathbf{x}^0$, если $g_j(\mathbf{x}^0) = 0$, и ***пассивным*** в этой точке, если $g_j(\mathbf{x}^0) < 0$.

Множество индексов ограничений, активных в точке $\mathbf{x}^0$, обозначим через J_a.

Говорят, что в точке $\mathbf{x}^0$ выполняются ***условия регулярности***, если градиенты активных в этой точке ограничений линейно независимы. В этом случае, если $\mathbf{x}^0$ – точка условного экстремума функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ при ограничениях $g_j(\mathbf{x}^0) \le 0, (j = \overline{1,m})$, то ей соответствуют множители Лагранжа с $\lambda_0^0 \ne 0$ и можно считать, что $\lambda_0^0 = 1$. Тогда вместо обобщенной функции Лагранжа можно брать классическую функцию Лагранжа $L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m g_m(\mathbf{x})$.

***Теорема* 2 (*достаточные условия экстремума первого порядка*).** *Пусть точка* $(\mathbf{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)$ *удовлетворяет системе* (1)–(4). *Пусть в этой точке выполняются условия регулярности и число активных ограничений в этой точке совпадает с числом переменных, т.е. равно n.*

Если $\lambda_j^0 > 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* $\mathbf{x}^0$ *– точка условного локального минимума*.

Если $\lambda_j^0 < 0$ *для всех* $j \in J_a$, *то точка* $\mathbf{x}^0$ *– точка условного локального максимума*.

Теорема 3 **(*необходимые условия экстремума второго порядка*).** *Пусть* $\mathbf{x}^0$ *регулярная точка экстремума в рассматриваемой задаче и имеется решение* $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *системы* (1)–(4). *Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычислений в точке* $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, *неотрицателен* (*для минимума*) (*неположителен* (*для максимума*)):

$$d^2L(\mathbf{x}^{0}, \boldsymbol{\lambda}^0) \ge 0 \qquad (d^2L(\mathbf{x}^{0}, \boldsymbol{\lambda}^0) \le 0), \tag{5}$$

для всех $d\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *таких что*

$$dg_j(\mathbf{x}^0) = 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 > 0 (\lambda_j^0 < 0), \tag{6}$$

$$dg_j(\mathbf{x}^0) \le 0,\ j \in J_a,\ \lambda_j^0 = 0. \tag{7}$$

Теорема 4 **(*достаточные условия экстремума второго порядка*).**

Пусть $\mathbf{x}^{0}$ *– регулярная точка. Пусть точка* $(\mathbf{x}^{0}, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *удовлетворяет системе* (1)–(4). *Если в этой точке* $d^2L(\mathbf{x}^{0}, \boldsymbol{\lambda}^0) > 0 \quad (d^2L(\mathbf{x}^{0}, \boldsymbol{\lambda}^0) < 0)$ *для всех ненулевых* $d\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющих условиям* (6) *и* (7), *то точка* $\mathbf{x}^0$ *является точкой локального минимума* (*максимума*).

3. Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Найти градиенты функций $g_j(\mathbf{x})$ ($j=1,m$) и проверить их на линейную независимость в области X. Если они всюду линейно независимы, то переходим к шагу 3. Если градиенты функций в некоторых точках линейно зависимы или задача определения линейной зависимости вызывает затруднения, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. Составить обобщенную функцию Лагранжа $F(\mathbf{x}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$ и записать необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial F(\mathbf{x}^0, \lambda_0^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$;

б) $g_j(\mathbf{x}^0) \le 0, (j = \overline{1,m})$;

в) $\lambda_j^0 g_j(x^0) = 0, (j = \overline{1,m})$.

Решить полученную систему для случая $\lambda_0 = 0$ и найти точки $(\mathbf{x}^{0}, \lambda_0^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$. Решение необходимо начинать с условия *в*) и рассмотреть 2^m возможных вариантов выполнения условий дополняющей нежесткости.

Шаг 3. Положить $\lambda_0 = 1$ и составить классическую функцию Лагранжа: $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$.

Записать необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i} = 0, (i = \overline{1,n})$; *б*) $g_j(\mathbf{x}^0) \le 0, (j = \overline{1,m})$;

в) $\lambda_j^0 g_j(x^0) = 0, (j = \overline{1,m})$.

Решить систему и найти регулярные условно стационарные точки $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$. Решение необходимо начинать с условия дополняющей нежесткости.

Замечание. Нельзя забывать, что множители Лагранжа должны удовлетворять условию неотрицательности для условного минимума $\lambda_j^0 \ge 0$ $(j = \overline{1,m})$, условию неположительности для условного максимума $\lambda_j^0 \le 0$ $(j = \overline{1,m})$.

Шаг 4. Для полученных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума первого порядка. Для этого нужно определить количество активных ограничений в точке $\mathbf{x}^0$. Если их число равно числу переменных и $\lambda_j^0 > 0$ для всех $j \in J_a$, то точка $\mathbf{x}^0$ – точка условного локального минимума. Если $\lambda_j^0 < 0$ для всех $j \in J_a$, то точка $\mathbf{x}^0$ – точка условного локального максимума. Если число активных в точке $\mathbf{x}^0$ ограничений меньше числа переменных или соответствующие множители Лагранжа не удовлетворяют достаточным условиям первого порядка, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Проверяем достаточные условия второго порядка.

Для этого необходимо:

а) записать выражение для второго дифференциала функции Лагранжа в точке $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$: $d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$;

б) записать условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке $\mathbf{x}^0$ ограничений:

$$\begin{cases} dg_j(\mathbf{x}^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j \in J_a, \ \lambda_j^0 > 0 \ (\lambda_j^0 < 0), \\ dg_j(\mathbf{x}^0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g_j(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} dx_i \le 0, \quad j \in J_a, \ \ \lambda_j^0 = 0; \end{cases} \tag{8}$$

в) исследовать знак второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых $d\mathbf{x}$, удовлетворяющих системе (8). Если $d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) > 0$, причем $\lambda_j^0 \ge 0\,(j = \overline{1,m})$, то в точке $\mathbf{x}^0$ – условный локальный минимум, если $d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) < 0$ и $\lambda_j^0 \le 0\,(j = \overline{1,m})$, то в точке $\mathbf{x}^0$ – условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка.

Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке $\mathbf{x}^0$ нет условного экстремума.

Шаг 6. Вычислить значения функции в точках условного экстремума, а также в точках, полученных на шаге 2. Наименьшее из этих значений и есть значение глобального минимума, а наибольшее – значение глобального максимума. Соответствующие точки $\mathbf{x}^0$ являются точками глобального минимума и максимума соответственно.

***Пример* 1.** Найти условный минимум целевой функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$ при наличии ограничений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3. \end{cases}$

Решение.

Шаг 1. Очевидно, что $g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_1 - x_2 - x_3$, $g_2(\mathbf{x}) = 3 - x_1 - 3x_2$. $\dfrac{\partial g_1}{\partial x} = (-1, -1, -1)^T$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial x} = (-1, -3, 0)^T$. Градиенты ограничений линейно независимы всюду, следовательно, если у функции есть точки условного экстремума, то они являются регулярными. Перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Запишем ограничения в виде $\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 - x_3 \le 0, \\ 3 - x_1 - 3x_2 \le 0. \end{cases}$ и составим классическую функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) + \lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3).$$

Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) $L'_{x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$; $L'_{x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$;

$L'_{x_3} = 4x_3 - \lambda_1 = 0$.

б) $-x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0$; $-x_1 - 3x_2 + 3 \le 0$.

в) $\lambda_1(-x_1 - x_2 - x_3 + 1) = 0$; $\lambda_2(-x_1 - 3x_2 + 3) = 0$.

Рассмотрим 4 варианта, которые удовлетворяют условию *в*) дополняющей нежёсткости:

1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

Тогда из *а*) следует $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. При этом условия *б*) не выполняются.

2) $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$.

Тогда $g_1(\mathbf{x}) = 0$ и имеет место система

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 - \lambda_1 = 0, \\ 2x_2 - \lambda_1 = 0, \\ 4x_3 - \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

решая которую, получим $\lambda_1 = \dfrac{4}{5}$, $x_1 = x_2 = \dfrac{2}{5}$, $x_3 = \dfrac{1}{5}$.

Подставив полученные значения во второе неравенство условия *б*), видим, что оно не выполняется.

3) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Тогда $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

Аналогично 2), находим $\lambda_2 = \frac{3}{5}, x_1 = \frac{3}{10}, \quad x_2 = \frac{9}{10}, x_3 = 0$.

Проверяем условие *б*). Первое неравенство в условии *б*) выполняется. Имеем условно-стационарную точку $A\left(\frac{3}{10}, \frac{9}{10}, 0\right), \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$.

4) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. Тогда $g_1(\mathbf{x}) = 0$, $g_2(\mathbf{x}) = 0$.

Решая полученную систему, находим $\lambda_1 = -\frac{4}{9}, \lambda_2 = \frac{7}{9}$. Так как множители Лагранжа разных знаков, то не выполняются условия (3) теоремы 1.

Итак, получена одна условно стационарная точка $A\left(\frac{3}{10}, \frac{9}{10}, 0\right) \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$.

Шаг 4. Проверим первое достаточное условие экстремума. В точке A одно активное ограничение, а именно ограничение $-x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0$. Поэтому $k = 1 < n = 3$ и достаточные условия первого порядка не выполняются.

Шаг 5. Проверим достаточные условия второго порядка. Второй дифференциал функции Лагранжа равен $d^2L(A) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2$. Дифференцируем активное ограничение, причем, так как $\lambda_2 = \frac{3}{5}$, то ограничение дифференцируем как ограничение-равенство: $dg_2(A) = -dx_1 - 3dx_2 = 0$. Отсюда получаем $dx_1 = -3dx_2$. Подставляя выражение для dx_1 в формулу для $d^2L(A)$, имеем $d^2L(A) = 2\cdot(-3dx_2)^2 + 2dx_2^2 + 4dx_3^2 > 0$ при $d\mathbf{x} \neq 0$ и $\lambda_j^0 \geq 0 \ (j = \overline{1,2})$. Значит, в точке A целевая функция имеет условный локальный минимум.

Шаг 6. Находим значение функции в точке условного локального минимума $f(A) = \frac{9}{100} + \frac{81}{100} + 0 = \frac{9}{10}$.

4. Задания для лабораторной работы

1. Найти точки условного экстремума целевой функции $f(\mathbf{x})$, при ограничениях-неравенствах.

	$f(\mathbf{x})$	Ограничения
1.	$f(x) = (x_1+4)^2 + (x_2-4)^2 + 1$,	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 \leq 0, \\ -x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$

2.	$f(x)=(x_1+2)^2+(x_2-2)^2$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 1, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\le 0. \end{cases}$
3.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$,	$\begin{cases} x_1+4x_2^2\le 16, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
4.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$,	$(x_1-2)^2+4x_2^2\le 16$.
5.	$f(x)=x_1^2+x_2^2$,	$2x_1^2+(x_2-4)^2\le 1$.
6.	$f(x)=x_1+x_2$,	$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 4, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
7.	$f(x)=x_1^2+(x_2-4)^2$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 4, \\ 4x_1^2+x_2^2\ge 4. \end{cases}$
8.	$f(x)=2x_1^2+x_2^2$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 4, \\ 4x_1^2+x_2^2\ge 4. \end{cases}$
9.	$f(x)=(x_1-2)^2+x_2^2$,	$\begin{cases} x_1+x_2\le 1, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
10.	$f(x)=(x_1+3)^2+(x_2+3)^2+2$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1\le 0, \\ x_1\le 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
11.	$f(x)=-x_1-x_2-x_3$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_3\le 0, \\ x_3\le 2. \end{cases}$
12.	$f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2$,	$\begin{cases} 3x_1^2+2x_2^2\le 21, \\ 4x_1+5x_2\le 20, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$

2. Найти точки условного экстремума целевой функции $f(\mathbf{x})$, при ограничениях-неравенствах.

	$f(\mathbf{x})$	Ограничения
1.	$f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-3)^2$,	$\begin{cases} 3x_1^2+2x_2^2\le 21, \\ 4x_1+5x_2\le 20, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
2.	$f(x)=3x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$,	$\begin{cases} x_1+x_2\ge 4, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$
3.	$f(x)=(x_1+2)^2+(x_2+2)^2-10$,	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1\le 0, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$

4.	$f(x)=(x_1+4)^2+(x_2-4)^2,$	$\begin{cases}2x_1-x_2\le 0,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
5.	$f(x)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2,$	$\begin{cases}3x_1+2x_2\ge 7,\\ 10x_1-x_2\le 8,\\ -18x_1+4x_2\le 12,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
6.	$f(x)=6x_1-x_1^2+x_2,$	$\begin{cases}2x_1+3x_2\le 24,\\ x_1+2x_2\le 15,\\ 3x_1+2x_2\le 24,\\ x_1\ge 0,\ 0\le x_2\le 4.\end{cases}$
7.	$f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2,$	$\begin{cases}2x_1+3x_2\ge 6,\\ 3x_1-2x_2\le 18,\\ -x_1+2x_2\le 8,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$
8.	$f(x)=x_1+x_2,$	$x_1^2+x_2^2-1\le 0.$
9.	$f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2,$	$x_1^2+x_2^2-52\le 0.$
10.	$f(x)=(x_1-2)^2+x_2^2,$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 1,\\ x_1\ge 0.\end{cases}$
11.	$f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2,$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 1,\\ x_1\ge 0.\end{cases}$
12.	$f(x)=x_1^2+(x_2-2)^2,$	$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 1,\\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0.\end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
Условный экстремум при смешанных ограничениях

1. Постановка задачи. Пусть даны дважды непрерывно дифференцируемая целевая функция $u=f(\mathbf{x})=f(x_1,...,x_n)$ и функции ограничения $h_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$, $g_k(\mathbf{x})$ $(k=\overline{1,l})$. Требуется найти экстремум функции $u=f(\mathbf{x})$ при выполнении условий

$$h_i(\mathbf{x})=0,\ (i=\overline{1,m}), \tag{1}$$

$$g_k(\mathbf{x})\le 0,\ (k=\overline{1,l}). \tag{2}$$

Множество $X=\left\{\mathbf{x}\left|\begin{matrix}h_i(\mathbf{x})=0, & i=\overline{1,m},\\ g_k(\mathbf{x})\le 0, & k=\overline{1,l}\end{matrix}\right.\right\}$ называется ***множеством допустимых значений***, или ***множеством планов***. Точки $\mathbf{x}^*\in X$, для которых выполняется $f(\mathbf{x}^*) = extr\ f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$, называются ***точками условного экстремума***.

2. Основные теоретические сведения. Задачу на нахождение условного экстремума функции $u = f(\mathbf{x})$ сводим к эквивалентной задаче на нахождение экстремума обобщенной функции Лагранжа

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k g_k(\mathbf{x}), \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_m)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_l)^T$ – некоторые неизвестные числовые векторы, λ_0 – некоторое неизвестное число.

***Теорема* 1 (*необходимые условия экстремума первого порядка*).**

Пусть $\mathbf{x}^0$ *точка условного локального экстремума в рассматриваемой задаче. Тогда найдутся такое число* λ_0^0 *и такие вектора* $\boldsymbol{\mu}^0$ *и* $\boldsymbol{\lambda}^0$, *не равные одновременно нулю, что будут выполняться условия*:

– *условие стационарности функции Лагранжа по* $\mathbf{x}$

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = 0, \ (j = \overline{1, n}), \qquad (4)$$

– *условие допустимости решения*

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \ (i = \overline{1, m}), \ g_k(\mathbf{x}) \le 0 (k = \overline{1, l}), \qquad (5)$$

– *условие неотрицательности для условного минимума*

$$\lambda_k^0 \ge 0, (k = \overline{1, l}), \qquad (6)$$

– *условие неположительности для условного максимума*

$$\lambda_k^0 \le 0 \ (k = \overline{1, l}),$$

– *условие дополняющей нежёсткости*

$$\lambda_k^0 g_k(x^0) = 0, \ \ (k = \overline{1, l}). \qquad (7)$$

Точку $\mathbf{x}^0$, удовлетворяющую условиям (4) – (7) называют ***условно стационарной***.

Замечание. Если в точке $\mathbf{x}^0$ выполняются условия регулярности, т.е. градиенты ограничений-равенств и градиенты активных ограничений-неравенств линейно-независимы, то ей соответствуют множители Лагранжа с $\lambda_0^0 \ne 0$ и можно считать, что $\lambda_0^0 = 1$. Тогда вместо обобщенной функции Лагранжа можно брать классическую функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k g_k(\mathbf{x}).$$

Теорема 2 (***достаточные условия экстремума первого порядка***).

Пусть точка $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *удовлетворяет условиям* (4)–(7) *и суммарное число ограничений-равенств и активных ограничений-неравенств в точке* $\mathbf{x}^0$ *совпадает с числом переменных* (*при этом выполняются условия регулярности*). *Если* $\lambda_k^0 > 0$ *для всех* $k \in J_a$, *то точка* $\mathbf{x}^0$ – *точка условного локального минимума. Если* $\lambda_k^0 < 0$ *для всех* $k \in J_a$, *то точка* $\mathbf{x}^0$ – *точка условного локального максимума.*

Теорема 3 (***необходимые условия экстремума второго порядка***).

Пусть точка $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *удовлетворяет условиям* (4)–(7) (*точка* $\mathbf{x}^0$ – *регулярная точка условного экстремума*). *Тогда второй дифференциал функции Лагранжа*, *вычисленный в точке* $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *неотрицателен для минимума* (*неположителен для максимума*): $d^2L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \ge 0$, ($d^2L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \le 0$) *для всех* $d\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *таких*, *что*

$$dh_i(\mathbf{x}^0) = 0,\ (i = \overline{1,m})$$

$$dg_k(\mathbf{x}^0) = 0, k \in J_a,\ \lambda_k^0 > 0\ (\lambda_k^0 < 0)$$

$$dg_k(\mathbf{x}^0) \le 0,\ k \in J_a,\ \lambda_k^0 = 0.$$

Теорема 4 (***достаточные условия экстремума второго порядка***).

Пусть точка $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ *удовлетворяет системе* (4)–(7). *Если в этой точке* $d^2L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) > 0$, ($d^2L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) < 0$) *для всех ненулевых* $d\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *таких*, *что*

$$dh_i(\mathbf{x}^0) = 0,\ (i = \overline{1,m}),$$

$$dg_k(\mathbf{x}^0) = 0,\ \ k \in J_a,\ \lambda_k^0 > 0\ (\lambda_k^0 < 0).$$

$$dg_k(\mathbf{x}^0) \le 0,\ k \in J_a,\ \lambda_k^0 = 0,$$

то точка $\mathbf{x}^0$ *является точкой локального условного минимума* (*максимума*).

Замечание **1**. Так как точка $\mathbf{x}^0$ заранее неизвестна, то проверка выполнения условий регулярности в случае задачи на условный экстремум при смешанных ограничениях обычно вызывает затруднения, и поэтому решение задачи следует начинать с построения обобщенной функции Лагранжа и ее исследования на экстремум.

Замечание **2.** В случае, если все ограничения являются линейными, исследование функции на условный экстремум следует начинать с построения классической функции Лагранжа.

3. Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Составить обобщенную функцию Лагранжа

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k g_k(\mathbf{x}).$$

Шаг 2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка, т.е. условия (4)–(7).

Шаг 3. Решить полученную систему для случая $\lambda_0^0 = 0$.

Начинать решение следует с рассмотрения всевозможных вариантов удовлетворения условия (7) дополняющей нежёсткости.

Шаг 4. Положить $\lambda_0^0 = 1$, построить классическую функцию Лагранжа и записать для нее необходимые условия экстремума первого порядка, аналогичные условиям (4)–(7). Решить систему и получить условно стационарные точки.

Шаг 5. Для выделенных на шаге 4 точек проверить достаточные условия первого порядка. Для этого необходимо:

а) определить число *p* активных в точке $\mathbf{x}^0$ ограничений-неравенств;

б) найти число *p* + *m* и сравнить его с *n*;

в) если $n = p + m$ и $\lambda_k^0 > 0$ для всех $k \in J_a$, то в точке $\mathbf{x}^0$ есть условный локальный минимум, если $\lambda_k^0 < 0$ для всех $k \in J_a$, то в точке $\mathbf{x}^0$ есть условный локальный максимум;

г) если какое-то условие не выполняется, то переходим к *шагу* 6.

Шаг 6. Проверим достаточные условия второго порядка. Для этого необходимо:

а) записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$

$$d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

б) записать условия, накладываемых на первый дифференциал ограничений:

для ограничений- равенств

$$dh_i(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad (i = \overline{1, m}); \tag{8}$$

для активных ограничений-неравенств:

$$\begin{cases} dg_k(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k} dx_k = 0, \; k \in J_a, \; \lambda_k^0 > 0 (\lambda_k^0 < 0), \\ dg_k(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k} dx_k \le 0, \; k \in J_a, \; \lambda_k^0 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

в) исследовать знаки второго дифференциала функции Лагранжа для ненулевых $d\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям (8) и (9). Если $d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) > 0$, то в точке $\mathbf{x}^0$ условный локальный минимум, если $d^2 L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) < 0$, то в точке $\mathbf{x}^0$ - условный локальный максимум.

Если достаточные условия первого и второго порядка не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка.

Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если нет, то в точке $\mathbf{x}^0$ нет условного экстремума.

Шаг 7. Вычислить значение функции в точках условного экстремума.

***Пример* 1**.Решить задачу $f = x_1^2 - x_2 \to extr$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6 = 0, \\ 1 - x_1 \le 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0. \end{cases}$$

Решение проиллюстрировать геометрически.

Решение. *Шаг* 1. Составим обобщенную функцию Лагранжа: $F(\mathbf{x}, \mu, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 (x_1^2 - x_2) + \mu(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_1 (1 - x_1) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 - 26)$.

Шаг 2. Выпишем необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \mu - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0;\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = -\lambda_0 + \mu + 2\lambda_2 x_2 = 0;$

б) $\lambda_1 (1 - x_1) = 0;\ \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0;$

в) $x_1 + x_2 - 6 = 0;\ 1 - x_1 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0.$

Шаг 3. Решим полученную систему для случая $\lambda_0 = 0$. Рассмотрим варианты, удовлетворяющие условиям дополняющей нежёсткости.

а) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$. Из условий стационарности получаем, что $\mu = 0$ и $\lambda_1 = 0$. Это противоречит условию $\lambda_1 \ne 0$.

б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Из условий стационарности получаем, что $\mu + 2\lambda_2 x_1 = 0;\ \mu + 2\lambda_2 x_2 = 0.$

Так как $\lambda_2 \ne 0$, то $x_1 = x_2$. Подставив это в уравнение $x_1 + x_2 - 6 = 0$, получаем, что $x_1 = x_2 = 3$. Поскольку $\lambda_2 \ne 0$, то из условия дополняющей нежесткости $\lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0$ следует, что $x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0$. Очевидно, что $x_1 = x_2 = 3$ не удовлетворяет этому уравнению.

в) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Тогда из условий дополняющей нежёсткости $x_1 = 1$, $x_2 = \pm 5$. Первому из условий *в*) удовлетворяет только точка (1, 5). Подставим ее в условия стационарности. Получаем $\mu - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0;\ \mu + 10\lambda_2 = 0.$ Из данной системы следует, что $\lambda_1 = -8\lambda_2$, т.е. числа λ_1 и λ_2 разных знаков. Это противоречит условиям теоремы 1.

Итак, условно стационарных точек, соответствующих случаю $\lambda_0 = 0$ нет.

Шаг 4. Положим $\lambda_0 = 1$ и построим классическую функцию Лагранжа

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mu, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 - x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 6) + \lambda_1 (1 - x_1) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 - 26).$$

Запишем для нее необходимые условия первого порядка:

а) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \mu - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0;\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + \mu + 2\lambda_2 x_2 = 0;$

б) $\lambda_1(1 - x_1) = 0;\ \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0;$

в) $x_1 + x_2 - 6 = 0;\ 1 - x_1 \le 0;\ x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0.$

Решим эту систему. При этом рассмотрим 4 варианта условий дополняющей нежесткости.

а) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда $\mu = 1$, $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и не выполняется условие $1 - x_1 \le 0$.

б) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 = 0$. Так как $\lambda_1 \ne 0$, то $x_1 = 1$, $\mu = 1$, $\lambda_1 = 3$, $x_2 = 5$. Имеем условно стационарную точку $M_1(1, 5)$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\mu = 1$.

в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 + \mu + 2\lambda_2 x_1 = 0, \\ -1 + \mu + 2\lambda_2 x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 6 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0, \\ x_1 \ge 1. \end{cases}$$

Тогда для точки M_1 (1, 5) имеем $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{8}$, $\mu = -\dfrac{11}{4}$. Для точки $M_2(5, 1)$ имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\dfrac{11}{8}$, $\mu = \dfrac{15}{4}$.

г) $\lambda_1 \ne 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Тогда из условий дополняющей нежёсткости $x_1 = 1$, $x_2 = \pm 5$.

Первому из условий *в*) удовлетворяет только точка (1, 5). Она нами уже получена.

Шаг 5. Проверим достаточные условия экстремума первого порядка. В точке M_1 активны оба ограничения-неравенства, причем одному из них соответствует $\lambda_1 > 0$. Кроме этого, у нас есть одно ограничение-равенство. Следовательно, по достаточному условию первого порядка M_1 - точка условного минимума.

Аналогично для точки M_2 получаем, что это точка условного максимума.

Шаг 6. Найдем значение функции в точках условного экстремума: $f(M_1) = 1 - 5 = -4$, $f(M_2) = 25 - 1 = 24$.

Проиллюстрируем решение задачи геометрически (рисунок 1).

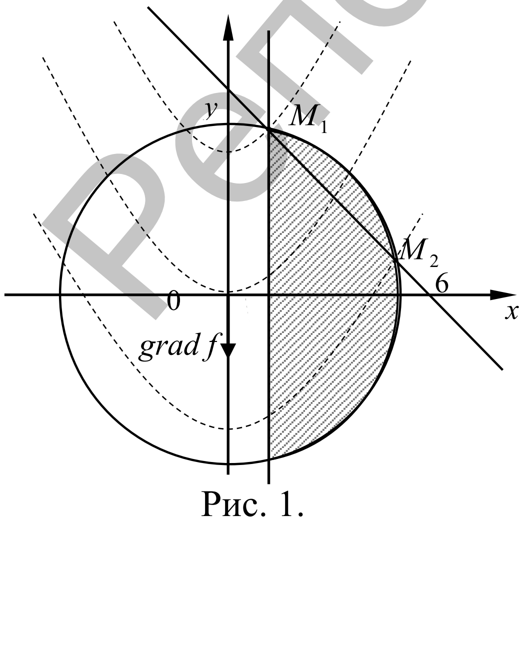

Рис. 1.

Нарисуем линии, задающие область допустимых значений. Учитывая условия системы ограничений

$$x_1 + x_2 - 6 = 0;\ 1 - x_1 \le 0; \quad x_1^2 + x_2^2 - 26 \le 0,$$

можно заметить, что областью допустимых значений является отрезок M_1, M_2.

Штриховыми линиями изобразим линии уровня целевой функции $x_1^2 - x_2 = C$, т.е. $x_2 = x_1^2 - C$. Это множество парабол.

Найдем градиент функции: $\operatorname{grad} f = (2x_1, -1)$.

Вычислим grad$f$ в точке (0, 0): grad$f$ (0, 0) = (0, −1) и изобразим его на рисунке. Этот вектор указывает направление наибольшего возрастания функции.

Из рисунка видно, что максимум возможен в точке $M_2(5, 1)$, а минимум в точке $M_1(1, 5)$. Находим значение функций в этих точках $f(5, 1) = 24, f(1, 5) = -4$.

4. Задания для лабораторной работы

1. Найти точки условного экстремума функции $f(x)$. Решение проиллюстрировать геометрически.

1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 1 = 0, \\ g_2 = x_1 + x_2 - 2 \le 0. \end{cases}$$

2) $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0, \\ g_2(x) = 1 - x_1 \le 0. \\ g_3 = x_1 + x_2 - 26 \le 0. \end{cases}$$

3) $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ g_2 = x_1 + x_2 - 5 \le 0. \end{cases}$$

4) $f(x) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0, \\ g_2 = -x_1 \le 0. \end{cases}$$

5) $f(x) = x_1^3 - 3x_1x_2 + 4 \to \min,$
$$\begin{cases} g_1(x) = 5x_1 + 2x_2 \ge 18, \\ g_2 = 2x_1 + x_2^2 = 5. \end{cases}$$

6) $f(x) = \dfrac{1}{4}x_1^4 - \dfrac{1}{2}x_1^2 - x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 = 4; \\ g_2 = x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$$

7) $f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ g_2 = -x_1 \le 0. \end{cases}$$

8) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 2 = 0, \\ g_2 = x_1 + x_2 - 3 \le 0. \end{cases}$$

9) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_2 - 1 = 0, \\ g_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0. \end{cases}$$

10) $f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to extr,$
$$\begin{cases} g_1(x) = x_2 - 2 = 0, \\ g_2 = 2x_1 + x_2 - 6 \le 0. \end{cases}$$

11) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,$

12) $f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 2)^2 \to extr,$

$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 1 = 0, \\ g_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0. \end{cases}$ $\begin{cases} g_1(x) = x_2 - 3 = 0, \\ g_2 = x_1^2 + x_2 \le 9. \end{cases}$

13) $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 3)^2 \to extr,$
$\begin{cases} g_1(x) = x_2 - 2 = 0, \\ g_2 = x_1^2 + x_2 - 4x_1 \le 9. \end{cases}$

14) $f(x) = 2x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \to extr,$
$\begin{cases} g_1(x) = x_2 - 3 = 0, \\ g_2 = x_1^2 + x_2 - 4 \le 9. \end{cases}$

15) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to extr,$
$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, \\ g_2 = -x_1 \le 0. \end{cases}$

16) $f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to extr,$
$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0, \\ g_2 = x_1 \le 0. \end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
Методы поиска точек экстремума функции одной переменной

1. Постановка задачи. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и требуется найти значение глобального экстремума этой функции на этом отрезке с определенной точностью, причем у функции на данном отрезке может быть несколько локальных экстремумов. Заметим, что нахождение максимума функции $f(x)$ эквивалентно нахождению минимума функции $-f(x)$, поэтому рассматривается только задача нахождения минимума функции. Предположим, что минимизируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица с известной константой L:

$$|f(x) - f(x')| \le L|x - x'|, \ x, x' \in [a, b].$$

***Замечание* 1.** Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную производную, то она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с константой $L \ge \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$

Считаем, что задано либо число N вычислений значений функции, либо точность $\varepsilon > 0$ отыскания значения минимума.

***Замечание* 2.** Если функция достигает минимального значения $f(x^*)$ в некоторой точке x^*, а в качестве приближенного значения берем $f(x_0)$, то его погрешностью будем считать величину $f(x_0) - f(x^*)$, при этом расстояние точки x_0 до точки глобального минимума x^* во внимание не принимается.

2. Методы решения.

Метод перебора.

а) Пусть задано число вычислений N. Положим $x_i = a + (2i - 1)h$, $i = \overline{1, N}$, где h – шаг разбиения: $h = \dfrac{b - a}{2N}$. Вычислив значения $f(x)$ в точках x_i, путём сравнения найдём точку x_0, для которой выполняется $f(x_0) = \min\limits_{1 \le i \le N} f(x_i)$. Легко проверить, что $0 \le f(x_0) - f(x^*) \le \dfrac{b - a}{2N}$.

б) Пусть указана погрешность ε > 0. Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$ и разобьём отрезок [*a, b*] на *n* равных частей точками $x_i = a + ih$, $i = \overline{1, n}$, где h – шаг разбиения, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $n \geq \dfrac{b-a}{\delta}$. Взяв в качестве x_0 точку, удовлетворяющую условию $f(x_0) = \min\limits_{0 \le i \le n} f(x_i)$, получим, что $0 \le f(x_0) - f(x^*) \le \varepsilon$.

Метод ломаных. Метод ломаных рассчитан на минимизацию произвольных функций одной переменной, удовлетворяющих условию Липшица.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке [*a, b*] с константой L. Положим

$$x_1^* = \frac{1}{2L}(f(a) - f(b) + L(a+b)),\ p_1^* = \frac{1}{2}(f(a) + f(b) + L(a-b)).$$

Шаг 1. Вместо пары чисел (x_1^*, p_1^*) образуем две новые пары (x_1', p_1) и (x_1'', p_1) следующим образом:

$$x_1' = x_1^* - \Delta_1,\ x_1'' = x_1^* + \Delta_1,\ p_1 = \frac{1}{2}(f(x_1^*) + p_1^*),\ \text{где}\ \Delta_1 = \frac{1}{2L}(f(x_1^*) - p_1^*).$$

Шаг 2. Из полученных двух пар (x_1', p_1) и (x_1'', p_1) выберем ту, у которой вторая компонента минимальна. Обозначим её (x_2^*, p_2^*) и исключим из рассматриваемого множества. Вместо пары (x_2^*, p_2^*) добавляем две новые пары (x_2', p_2) и (x_2'', p_2), компоненты которых находятся по формулам:

$$x_2' = x_2^* - \Delta_2, x_2'' = x_2^* + \Delta_2,\ p_2 = \frac{1}{2}(f(x_2^*) + p_2^*),\ \text{где}\ \Delta_2 = \frac{1}{2L}(f(x_2^*) - p_2^*).$$

Получим множество, состоящее из трех пар.

Шаг n. Пусть на предыдущих шагах получено *n* пар (*x, p*). Выбираем из них ту, у которой вторая компонента минимальна. Обозначим её (x_n^*, p_n^*) и исключим из рассматриваемого множества. Вместо пары (x_n^*, p_n^*) добавляем две новые пары (x_n', p_n) и (x_n'', p_n), компоненты которых находятся по формулам:

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n,\ x_n'' = x_n^* + \Delta_n,\ p_n = \frac{1}{2}(f(x_n^*) + p_n^*),\ \text{где}\ \Delta_n = \frac{1}{2L}(f(x_n^*) - p_n^*).$$

Полагая $x^* \approx x_n^*,\ f^* \approx f(x_n^*)$, получим приближенное решение задачи минимизации. Точность определения f^* характеризуется неравенствами $0 \le f(x_n^*) - f^* \le 2L\Delta_n$.

***Замечание* 3.** Число вычислений *N* задается заранее. Если же нужно обеспечить поиск значения минимума с точностью не хуже ε, то вычисления прекращают, как только $2L\Delta_n \le \varepsilon$.

***Пример* 1.** Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 6x$ на отрезке $[a_1, b_1] = [-1, 4]$ методом перебора при $\varepsilon = 0{,}1$.

Решение. Найдем $|f'(x)| = |4x - 6| \le 10,\ x \in [-1,\ 4]$. Функция удовлетворяет условию Липшица с константой L=10. Возьмем $\delta = \varepsilon/L = 0{,}1/10 = 0{,}01$ и найдем $(b-a)/\delta = 5\cdot 10/0{,}1 = 500$. Разобьём отрезок $[a,\ b]$ на 500 равных частей точками $x_i = -1+ih,\ i=0,1,\ldots,n$, где $h = 5/500 = 0{,}01$ – шаг разбиения. Получаем:

$x_0 = -1, f(x_0) = 8;$

$x_1 = -0{,}99, f(x_1) = 7{,}9002;$

$x_2 = -0{,}98, f(x_2) = 7{,}8008;$

$x_3 = -0{,}97, f(x_3) = 7{,}7018; \ldots,$

$x_{247} = 1{,}47, f(x_{247}) = -4{,}4982;$

$x_{248} = 1{,}48, f(x_{248}) = -4{,}4992;$

$x_{249} = 1{,}49,\ f(x_{249}) = -\,4{,}4998;$

$x_{250} = 1{,}5, f(x_{250}) = -4{,}5;$

$x_{251} = 1{,}51, f(x_{251}) = -4{,}4998;$

$x_{252} = 1{,}52, f(x_{252}) = -4{,}4992;$

$x_{253} = 1{,}53, f(x_{253}) = -4{,}4982; \ldots,$

$x_{499} = 3{,}99,\ f(x_{499}) = 7{,}9002;$

$x_{500} = 4, f(x_{500}) = 8.$

Минимальное значение функции равно $f(x_{250}) = -4{,}5$.

***Пример* 2.** Найти точку минимума функции $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ на отрезке $[a_1,\ b_1] = [10,\ 15]$: *а*) методом перебора при $N = 10$, *б*) методом ломаных при $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема на указанном отрезке.

$$|f'(x)| = \left|\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}\right| < \frac{x|\sin x| + |\cos x|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \le 0{,}11 \quad \text{при } x \in [10, 15].$$

Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L=0,11.

а) Найдем значение минимума методом перебора.

Положим $x_i = 10 + (2i-1)h$, $i=1,\ldots,10$, где h – шаг разбиения, h=5/20=0,25.

$x_1 = 10{,}25; f(x_1) = -0{,}054;$

$x_2 = 10{,}75; f(x_2) = -0{,}023;$

$x_3 = 11{,}25; f(x_3) = 0{,}022;$

$x_4 = 11{,}75; f(x_4) = 0{,}058;$

$x_5 = 12{,}25; f(x_5) = 0{,}078;$

$x_6 = 12{,}75; f(x_6) = 0{,}077;$

$x_7 = 13{,}25; f(x_7) = 0{,}059;$

$x_8 = 13{,}75; f(x_8) = 0{,}027;$

$x_9 = 14{,}25; f(x_9) = -0{,}008;$

$x_{10} = 14{,}75; f(x_{10}) = -0{,}039.$

Сравнив значения функции, можно заметить, что $f^* \approx f\ (10{,}25) \approx -\,0{,}054$. При этом ошибка не превзойдет числа равного

$$\frac{L(b-a)}{2N} = \frac{0{,}55}{20} = 0{,}0275 < 0{,}1.$$

б) Найдем минимум этой же функции методом ломаных. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Искомая точка минимума – $x \approx 10{,}018$, $f^* \approx f(10{,}018) \approx -0{,}083$.

*Таблица*1.

n	Исключаемая пара (x,p)		Δ_n	$2L\Delta_n$	Включенные пары (x,p)		
	x_n^*	p_n^*			x'_n	x''_n	p_n
1	12,349	−0,342	1,914	0,421	10,435	14,263	−0,131
2	10,435	−0,131	0,364	0,08	10,355	10,071	−0,091
3	14,263	−0,131	0,556	0,122	13,707	14,819	−0,070
4	10,355	−0,091	0,151	0,033	10,204	10,506	−0,074
5	10,071	−0,091	0,053	0,012	10,018	10,124	−0,085
6	10,018	−0,085	0,010	0,002<ε	10,008	10,028	−0,084

3. Задания для лабораторной работы

1. Найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$: *а*) методом ломаных с точностью ε; *б*) методом перебора ($n = 100$).

1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$, [7; 11], $\varepsilon = 0{,}01$.

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$, [6; 10],$\varepsilon = 0{,}01$.

3) $f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0{,}01\sin x$,[9; 11], $\varepsilon = 0{,}05$.

4) $f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0{,}01\sin x$, [10; 12], $\varepsilon = 0{,}05$.

5) $f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0{,}01\sin x$, [8; 10], $\varepsilon = 0{,}05$.

6) $f(x) = (0{,}1x - 5)^8 + \cos 0{,}02x$, [49; 51], $\varepsilon = 0{,}02$.

7) $f(x) = (0{,}1x - 5)^8 + \cos 0{,}02x$, [50; 52], $\varepsilon = 0{,}02$.

8) $f(x) = \ln x + 0{,}1\sin 0{,}1x$, [10; 12], $\varepsilon = 0{,}01$.

9) $f(x) = \ln x + 0{,}1\sin 0{,}1x$,[9; 11], $\varepsilon = 0{,}01$.

10) $f(x) = \ln x + 0{,}1\sin 0{,}1x$, [8; 10], $\varepsilon = 0{,}01$.

11) $f(x) = (x - 0{,}9)^2 + (x - 1{,}1)^4$, [0,8; 1,2], $\varepsilon = 0{,}05$.

12. $f(x) = (x - 0{,}9)^2 + (x - 1{,}1)^4$, [0,7; 1,1], $\varepsilon = 0{,}05$.

13. $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$, [5; 10], ε = 0,01.

14. $f(x)=(0{,}1x-5)^8+\cos 0{,}02x$, [52; 54], $\varepsilon = 0{,}02$.

15. $f(x)=(x-0{,}9)^2+(x-1{,}1)^4$, [0,6; 1,0], $\varepsilon = 0{,}05$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
Методы поиска точек минимума унимодальных функций

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу $f(x)\to \min, x\in[a,b]$.

Определение. *Непрерывная функция $f(x), x\in[a,b]$, называется **унимодальной**, если существует такая точка $x^*\in[a,b]$, что на отрезке$[a, x^*]$ функция $f(x)$ убывает, а на отрезке $[x^*, b]$ – возрастает.*

В дальнейшем будем считать, что функция $f(x)$ является унимодальной.

Точный локальный минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неизвестен, поэтому отрезок $[a, b]$ называется интервалом локализации точки минимума. Цель далее рассматриваемых методов поиска – уменьшить интервал локализации. Для унимодальных функций интервал локализации может быть сокращён с помощью вычисления значения функции $f(x)$ в двух точках, принадлежащих отрезку $[a,b]$.

2. Методы решения.

Метод дихотомии. К началу решения задаются: константа различимости $\varepsilon>0$, длина конечного интервала локализации точки минимума $l>0$, начальный интервал локализации $[a_1, b_1]$.

Алгоритм поиска решения. Пусть на k-й итерации интервал локализации $[a_k, b_k]$.

Шаг 1. Если $b_k-a_k<l$, то процесс решения задачи заканчивается. Точка минимума локализована в интервале длины l. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^*=\dfrac{a_k+b_k}{2}$

В противном случае полагаем, что $x_1^k=\dfrac{a_k+b_k}{2}-\varepsilon,\ x_2^k=\dfrac{a_k+b_k}{2}+\varepsilon$.

Шаг 2. Вычисляем значения $f(x_1^k),\ f(x_2^k)$. Если выполняется неравенство $f(x_1^k)\le f(x_2^k)$, то полагаем $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=x_2^k$. В противном случае, полагаем $a_{k+1}=x_1^k$, $b_{k+1}=b_k$. Переходим к шагу 1.

***Пример* 1.** Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ на отрезке $[a_1, b_1]=[-9, 5]$ методом дихотомии при $l=1$; $\varepsilon=0{,}1$.

Решение.

Шаг 1. Начальный интервал $[a_1, b_1]=[-9, 5]$. $b_1-a_1=14>1$.

Шаг 2. Вычислим $x_1^1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \varepsilon = -2{,}1$; $x_2^1 = \frac{a_1 + b_1}{2} + \varepsilon = -1{,}9$; $f(x_1^1) = 34{,}02$; $f(x_2^1) = 30{,}02$.

Шаг 3. Так как $f(x_1^1) > f(x_2^1)$, то $a_2 = x_1^1 = -2{,}1$, $b_2 = b_1 = 5$. Переходим к шагу 1. Дальнейшие результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1.

k	a_k	b_k	$b_k - a_k$	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
1	−9	5	14	−2,1	−1,9	34,02	30,02
2	−2,1	5	7,1	1,35	1,55	−12,555	−13,795
3	1,35	5	3,65	3,075	3,275	−17,989	−17,849
4	1,35	3,275	1,925	2,21	2,41	−16,75	−17,3
5	2,21	3,275	1,065	2,64	2,84	−17,74	−17,95
6	2,64	3,275	0,635<1				

Конечный интервал локализации: [2,64; 3,275].

$$x^* = \frac{2{,}64 + 3{,}275}{2} \cong 2{,}96,\ f(x^*) \approx 17{,}997.$$

Метод «золотого сечения». В основе метода лежит понятие *золотого сечения.* Золотое сечение – деление отрезка на две неравные части, при котором отношение длины большей части отрезка к длине меньшей части отрезка равно отношению длины всего отрезка к длине большей части отрезка. Если рассмотреть отрезок $[a_0,b_0]$, то на нем имеются две симметричные относительно его концов точки a_1и b_1, такие что будет выполняться:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - a_1} = \frac{b_0 - a_1}{a_1 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{b_1 - a_0} = \frac{b_1 - a_0}{b_0 - b_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

Кроме того, точка a_1 производит золотое сечение отрезка $[a_0,b_1]$, а точка b_1 – отрезка $[a_1,b_0]$ (рисунок 1).

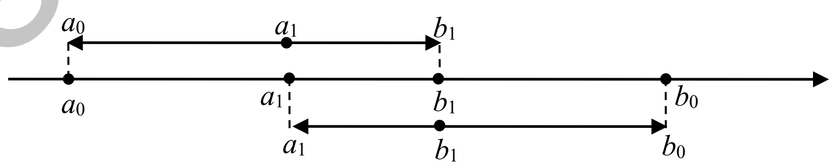

Рис. 1

Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Пусть $[a_0,b_0]$ – начальный интервал локализации. Зададим длину конечного интервала локализации $l > 0$.

Шаг 2. Полагаем $k = 0$.

Шаг 3. Вычислим $x_1^0 = a_0 + (1-\alpha)(b_0 - a_0)$ и $x_2^0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$, где $\alpha \cong 0{,}618$.

Шаг 4. Вычислим $f(x_1^{\mathbf{k}}),\ f(x_2^{\mathbf{k}})$.

Шаг 5. Сравним значения $f(x_1^{\mathbf{k}}),\quad f(x_2^{\mathbf{k}})$:

а) если $f(x_1^{\mathbf{k}}) \le f(x_2^{\mathbf{k}})$, то положим $a_{k+1}= a_k$, $b_{k+1}= x_2^k$ и $x_1^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}- x_1^k$, $x_2^{k+1} = x_1^k$, перейдем к шагу 6.

б) если $f(x_1^{\mathrm{k}}) > f(x_2^{\mathrm{k}})$, то положим $a_{k+1}= x_1^k$, $b_{k+1}= b_k$ и $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} =a_{k+1} + b_{k+1}- x_2^k$.

Шаг 6. Если $b_{k+1} - a_{k+1} \le l$, то задача решена (в качестве точки минимума можно взять середину интервала). В противном случае, можно положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

***Пример* 2.** Найти минимум функции $f(x)=2x^2 - 12x$ на отрезке $[a_0, b_0] = [-9, 5]$ методом «золотого сечения». $l=1$.

Решение. *Шаг* 1. $[-9,5]$ – начальный интервал локализации. Длина конечного интервала локализации $l = 1$.

Шаг 2. Положим $k = 0$.

Шаг 3. Вычислим $x_1^0 = -9 + 0{,}382 \cdot 14 = -3{,}66$ и $x_2^0 = -9 + 0{,}618 \cdot 14 = -0{,}35$.

Шаг 4. Вычислим $f(x_1^{\mathbf{0}}) = 70{,}71,\ f(x_2^{\mathbf{0}}) = 4{,}45$.

Шаг 5. Сравним значения $f(x_1^{\mathbf{0}}),\ f(x_2^{\mathbf{0}})$. Так как $f(x_1^0) > f(x_2^0)$, то положим $a_1= x_1^0 = -3{,}66$, $b_1= b_0 =5$ и $x_1^1 = x_2^0 = -0{,}35$, $x_2^1 =a_1 + b_1- x_2^0 = 1{,}69$.

Шаг 6. Находим $b_1 - a_1 = 8{,}66 > l = 1$. Полагаем $k=1$ и переходим к шагу 4.

Результаты остальных вычислений приведены в таблице 2.

*Таблица*2.

k	a_k	b_k	$b_k - a_k$	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
0	−9	5	14	−3,66	−0,35	70,71	4,45
1	−3,66	5	8,66	−0,35	1,69	4,45	−14,57
2	−0,35	5	5,35	1,69	2,96	−14,57	−18,00
3	1,69	5	3,31	2,96	3,73	−18,00	−16,93
4	1,69	3,73	2,04	2,46	2,96	−17,42	−18,00
5	2,46	3,73	1,27	2,96	3,23	−18,00	−17,89
6	2,46	3,23	0,77<1				

Конечный интервал локализации: [2,46; 3,23].

$$x^* = \frac{2{,}46 + 3{,}23}{2} \cong 2{,}85.\ f(x^*) \approx 17{,}98.$$

Метод Фибоначчи. Данный метод основан на применении последовательности чисел Фибоначчи:

$$F_0 = F_1 = 1, \qquad F_{k+1} = F_k + F_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Эта последовательность имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Алгоритм решения задачи.

Шаг 1. Задаем начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$, выбираем длину конечного интервала локализации $l > 0$, константу различимости $\varepsilon > 0$.

Шаг 2. Число N вычислений функции $f(x)$ выбирается из условия $F_N > \dfrac{b_0 - a_0}{l}$, где F_N – число Фибоначчи.

Шаг 3. Полагаем $k = 0$.

Шаг 4. Находим $x_1^0 = a_0 + \dfrac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0)$, $x_2^0 = a_0 + \dfrac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0)$.

Шаг 5. Находим $f(x_1^k)$, $f(x_2^k)$.

Шаг 6. Сравниваем значения $f(x_1^k)$, $f(x_2^k)$:

а) если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$, то следует положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2^k$ и $x_1^{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$, $x_2^{k+1} = x_1^k$, перейти к шагу 7.

б) если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то положить $a_{k+1} = x_1^k$, $b_{k+1} = b_k$ и $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$.

Шаг 7. *а*) если $k \ne N-3$, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 5;

б) если $k = N-3$, то $x_1^{N-2} = x_2^{N-2}$, т.е. отсутствует точка нового вычисления функции. Нужно взять $x_1^{N-1} = x_1^{N-2} = x_2^{N-2}$, $x_2^{N-1} = x_1^{N-1} + \varepsilon$. Вычисляем значения функции в точках x_1^{N-1} и x_2^{N-1} и находим границы конечного интервала неопределенности:

− если $f(x_1^{N-1}) \le f(x_2^{N-1})$, то берем $a_{N-1} = a_{N-2}$, $b_{N-1} = x_2^{N-1}$;

− если $f(x_1^{N-1}) > f(x_2^{N-1})$, то берем $a_{N-1} = x_1^{N-1}$, $b_{N-1} = b_{N-2}$.

Точка минимума принадлежит отрезку $[a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку последнего интервала, например, его середину.

***Пример* 3.** Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[a_0, b_0] = [-9, 5]$ методом Фибоначчи при $l = 1$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. *Шаг* 1. Начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0] = [-9, 5]$, длина конечного интервала локализации $l = 1$.

Шаг 2. Число N вычислений функции $f(x)$ выбираем из условия $F_N > \dfrac{b_0 - a_0}{l} = 14$, т.е. N=7.

Шаг 3. Полагаем $k = 0$.

Шаг 4. Вычислим $x_1^0 = a_0 + \dfrac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0) = -9 + 14 \cdot \dfrac{8}{21} \approx -3{,}67$,

$x_2^0 = a_0 + \dfrac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0) = -9 + 14 \cdot \dfrac{13}{21} \approx -0{,}33$.

Шаг 5. Находим $f(x_1^{\mathbf{0}}) = 70{,}98$, $f(x_2^{\mathbf{0}}) = 4{,}18$.

Шаг 6. Сравним значения $f(x_1^{\mathbf{0}})$, $f(x_2^{\mathbf{0}})$.

Так как $f(x_1^{\mathbf{0}}) > f(x_2^{\mathbf{0}})$, то положим $a_1 = x_1^{\mathbf{0}} = -3{,}67$, $b_1 = b_0 = 5$ и $x_1^{\mathbf{1}} = x_2^{\mathbf{0}} = -0{,}33$, $x_2^{\mathbf{1}} = a_1 + \dfrac{F_{N-2}}{F_{N-1}}(b_1 - a_1) = -3{,}67 + 8{,}67 \cdot \dfrac{8}{13} = 1{,}67$.

Шаг 7. Так как $k = 0 \neq N-3 = 4$, то положим $k = 1$ и перейдем к шагу 5.

Дальнейшие результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3.

k	a_k	b_k	b_k-a_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
0	−9	5	14	−3,67	−0,33	70,98	4,18
1	−3,67	5	8,67	−0,33	1,67	4,18	−14,46
2	−0,33	5	5,33	1,67	3,00	−14,46	−18,00
3	1,67	5	3,33	3,00	3,67	−18,00	−17,10
4	1,67	3,67	2,00	2,34	3,00	−17,13	−18,00
5	2,34	3,67	1,33	3,00	3,01	−18,00	−17,9998
6	2,34	3,01	0,67<l=1				

Конечный интервал локализации: [2,34; 3,01].

$x^* = \dfrac{2{,}34 + 3{,}01}{2} \cong 2{,}68$. $f(x^*) \approx 17{,}80$.

3. Задания для лабораторной работы

Задание 1**.** Пусть функция $f(x) = 3x^2 - 12x$ задана на отрезках: *а*) $[-n, -n+10]$ при $n \in [1, 6]$; *б*) $[-n+8; -n+16]$ при $n \in [7, 15]$. Найти минимум функции методами:

1) дихотомического поиска;
2) «золотого сечения»;

3) методом Фибоначчи, взяв константу различимости $\varepsilon = 0{,}1$, длину конечного интервала $l = 0{,}5$.

***Задание* 2.** Найти минимум функции $f(x) = e^{-x} + nx^2$ заданной на отрезке [0, 1] методами

1) дихотомического поиска;

2) «золотого сечения»;

3) методом Фибоначчи, взяв константу различимости $\varepsilon = 0{,}01$ и длину конечного интервала $l = 0{,}1$.

Замечание. *n* – номер варианта.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
Методы нахождения безусловного экстремума функции нескольких переменных

1. Градиентные методы. Рассмотрим следующую задачу:

$f(\mathbf{x}) \to \min, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, где $f \in C^{(1)}$.

Градиентные методы основаны на свойстве вектора-градиента функции $f(\mathbf{x})$. ***Градиент*** $grad\ f(\mathbf{x}) = \partial f / \partial x$ функции $f(\mathbf{x})$ указывает направление наискорейшего возрастания функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ (вектор $-grad\ f(\mathbf{x})$ называют ***антиградиентом***, он указывает направление наискорейшего убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$).

Реализация алгоритмов, использующих направление градиента (антиградиента), начинается с выбора начального приближения $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{R}^n$, задания констант остановки $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ и предельного числа итераций *N*.

Точки последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ вычисляются по правилу $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \theta_k grad\ f(\mathbf{x}^k)$. Выбор величины шага θ_k вдоль направления $l^k = -grad\ f(\mathbf{x}^k)$ является вспомогательной задачей. Существуют следующие способы построения шага θ_k:

а) шаг постоянен: $\theta_k \equiv \theta$;

б) величина шага находится из условия $f(\mathbf{x}^k + \theta_k l^k) = \min\limits_{\theta \ge 0} f(\mathbf{x}^k + \theta\, l^k)$.

Замечание* 1.** Метод с выбором шага по правилу *а*) называется ***градиентным методом; если шаг выбирается по правилу *б*), то метод называется методом ***наискорейшего спуска***.

В градиентном методе шаг θ_k задается пользователем и постоянен до тех пор, пока выполняется неравенство $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$. Если это неравенство не выполняется, то берут $\theta_{k+1} = \dfrac{\theta_k}{2}$. Построение последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ заканчивается в точке $\mathbf{x}^k$, для которой $\|grad\ f(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon_1$, или $k \ge N$, или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств

$\left\|\mathbf{x}^{v+1}-\mathbf{x}^{v}\right\|<\varepsilon_2$ и $\left|f(\mathbf{x}^{v+1})-f(\mathbf{x}^{v})\right|<\varepsilon_2$, которые выполняются при $v=k-1$ и $v=k$.

Алгоритм градиентного спуска.

Шаг 1. Задать $\mathbf{x}^1\in\mathbf{R}^n$, константы остановки $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0$ и предельное число итераций *N*. Найти градиент функции в произвольной точке $grad\ f(\mathbf{x})=(\partial f/\partial x_1,...,\partial f/\partial x_n)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 2. Положить $k = 1$.

Шаг 3. Вычислить $grad\ f(\mathbf{x}^k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия остановки $\left\|grad\ f(\mathbf{x}^k)\right\|<\varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, то расчет закончен: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k$;

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k \geq N$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k$;

б) если неравенство не выполнено, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Задать величину шага θ_k.

Шаг 7. Вычислить $\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k-\theta_k\cdot grad\ f(\mathbf{x}^k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$:

а) если условие выполнено, то перейти к шагу 9;

б) если нет, то положить $\theta_k = \theta_k/2$ и перейти к шагу 7.

Шаг 9. Проверить выполнение условий

$$\left\|\mathbf{x}^{v+1}-\mathbf{x}^{v}\right\|<\varepsilon_2,\ \left|f(\mathbf{x}^{v+1})-f(\mathbf{x}^{v})\right|<\varepsilon_2,$$

а) если оба условия выполняются при $v=k-1$ и $v=k$, то расчет окончен: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k$;

б) если хотя бы одно условие не выполнено, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

***Пример* 1.** Методом градиентного спуска найти минимум функции $f(x)=x_1^2+2x_2^2+x_1x_2-7x_1-7x_2$.

***Решение. Итерация* 1.** *Шаг* 1. Зададим $\mathbf{x}^1=(0{,}0)^T$, константы остановки $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0{,}1$ и предельное число итераций $N = 4$. Найдем градиент функции в произвольной точке: $grad\ f(\mathbf{x})=(2x_1+x_2-7;\ \ 4x_2+x_1-7)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 2. Положим $k = 1$.

Шаг 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^1)=(-7;\ \ -7)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\left\|grad\ f(\mathbf{x}^1)\right\|=\sqrt{49+49}<\varepsilon_1=0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 1 \geq N = 4$.
Неравенство не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Зададим величину шага $\theta_1 = 1$.

Шаг 7. Вычислим $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \theta_1 grad\ f(\mathbf{x}^1) = (0, 0)^{\text{T}} - (-7,\ -7)^{\text{T}} = (7,\ 7)^{\text{T}}$.

Шаг 8. Проверим выполнение условия

$$f(\mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1): \qquad f(\mathbf{x}^2) = 98 > f(\mathbf{x}^1) = 0.$$

Условие не выполнено, положим $\theta_1 = 1/2$ и перейдем к шагу 7.

Шаг 7. Вычислим

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \theta_1 grad\ f(\mathbf{x}^1) = (0,\ 0)^{\text{T}} - \frac{1}{2}(-7,\ -7)^{\text{T}} = \left(\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}\right).$$

Шаг 8. Проверим выполнение условия $f(\mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1)$: $f(\mathbf{x}^2) = 0$. Условие не выполнено, положим $\theta_1 = 1/4$ и перейдем к шагу 7.

Шаг 7. Вычислим

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \theta_1 grad\ f(\mathbf{x}^1) = (0,\ 0)^{\text{T}} - \frac{1}{4}(-7,\ -7)^{\text{T}} = \left(\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right).$$

Шаг 8. Проверим выполнение условия

$$f(\mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1): \quad f(\mathbf{x}^2) = -12{,}25 < 0.$$

Условие выполнено, перейдем к шагу 9.

Шаг 9. Проверим выполнение условий

$$\left\|\mathbf{x}^{\nu+1} - \mathbf{x}^{\nu}\right\| < \varepsilon_2,\ \left|f(\mathbf{x}^{\nu+1}) - f(\mathbf{x}^{\nu})\right| < \varepsilon_2.$$

Эти условия не выполняются. Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 3.

Итерация 2. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^2) = (-1{,}75;\ \ 1{,}75)^{\text{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\left\|grad\ f(\mathbf{x}^2)\right\| = \sqrt{(-1{,}75)^2 + (1{,}75)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 2 \geq N = 4$. Неравенство не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Зададим величину шага $\theta_2 = 1/4$.

Шаг 7. Вычислим $\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 - \theta_2 grad\ f(\mathbf{x}^2) = (1{,}75;\ 1{,}75)^{\text{T}} - \frac{1}{4}(-1{,}75; 1{,}75)^{\text{T}} =$

$= (2{,}1875;\ \ 1{,}3125)^{\text{T}}$.

Шаг 8. Проверим выполнение условия $f(\mathbf{x}^3) < f(\mathbf{x}^2)$:

$$f(\mathbf{x}^3) = -13{,}398 < -12{,}25 = f(\mathbf{x}^2).$$

Условие выполнено, перейдем к шагу 9.

Шаг 9. Проверим выполнение условий

$$\left\|\mathbf{x}^{\nu+1} - \mathbf{x}^{\nu}\right\| < \varepsilon_2,\ \left|f(\mathbf{x}^{\nu+1}) - f(\mathbf{x}^{\nu})\right| < \varepsilon_2.$$

Эти условия не выполняются. Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 3.

Итерация 3. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^3) = (-1{,}3125;\ \ 0{,}4375)^{\text{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\|grad\ f(\mathbf{x}^3)\| = \sqrt{(-1{,}3125)^2 + (0{,}4375)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 3 < N = 4$. Условие не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Зададим величину шага θ_3=1/4.

Шаг 7. Вычислим $\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^3 - \theta_3 grad\ f(\mathbf{x}^3) = (2{,}5156;\ \ 1{,}2031)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 8. Проверим выполнение условия

$$f(\mathbf{x}^4) < f(\mathbf{x}^3): f(\mathbf{x}^4) \approx -13{,}77 < -13{,}398 = f(\mathbf{x}^3).$$

Условие выполнено, перейдем к шагу 9.

Шаг 9. Проверим выполнение условий

$$\|\mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v\| < \varepsilon_2,\ |f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^v)| < \varepsilon_2.$$

Эти условия не выполняются. Положим $k = 4$ и перейдем к шагу 3.

Итерация 4. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^4) = (-0{,}7657;\ \ 0{,}328)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\|grad\ f(\mathbf{x}^4)\| = \sqrt{(-0{,}7657)^2 + (0{,}328)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 4 = N = 4$. Неравенство выполнено, расчет окончен:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^4 = (2{,}5156;\ \ 1{,}2031)^{\mathrm{T}}, \qquad f^* = f(\mathbf{x}^4) \approx -13{,}77.$$

Алгоритм метода наискорейшего спуска.

Шаги 1-5 алгоритма метода наискорейшего спуска совпадают с шагами 1-5 метода градиентного спуска.

Шаг 6. Вычисляем шаг θ_k из условия $f(\mathbf{x}^k + \theta_k \cdot l^k) = \min\limits_{\theta \geq 0} f(\mathbf{x}^k + \theta \cdot l^k)$.

Шаг 7. Находим $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \theta_k grad\ f(\mathbf{x}^k)$.

Шаг 8. Проверяем условия $\|\mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v\| < \varepsilon_2$, $|f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^v)| < \varepsilon_2$:

а) если оба условия выполнены при $v = k-1$ и $v = k$, то задача решена: $\mathbf{x}^k$ требуемое приближение к оптимальному плану.

б) если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 3.

Пример 2. Методом наискорейшего спуска найти минимум функции $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

Решение. **Итерация 1.** *Шаг* 1. Зададим $\mathbf{x}^1 = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, константы остановки $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$ и предельное число итераций $N = 4$. Найдем градиент функции в произвольной точке $grad\ f(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2 - 7,\ \ 4x_2 + x_1 - 7)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 2. Положим $k = 1$.

Шаг 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^1) = (-7,\ \ -7)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\left\| grad\ f(\mathbf{x}^1) \right\| = \sqrt{49+49} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 1 \geq N = 4$. Неравенство не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляем шаг θ_1 из условия $f(\mathbf{x}^1 + \theta_1 \cdot l^1) = \min\limits_{\theta \geq 0} f(\mathbf{x}^1 + \theta \cdot l^1)$.

Найдем $\mathbf{x}^1 - \theta\ grad\ f(\mathbf{x}^1) = (0,\ 0)^{\mathrm{T}} - \theta(-7,\ -7)^{\mathrm{T}} = (7\theta,\ 7\theta)^{\mathrm{T}}$. Рассмотрим функцию $\Phi(\theta) = f(\mathbf{x}^1 + \theta \cdot l^1) = 98(2\theta^2 - \theta)$. $\Phi'(\theta) = 98(4\theta - 1)$. $\Phi'(\theta) = 0$ при $\theta = 0{,}25$. При этом значении θ функция $\Phi(\theta)$ достигает минимума.

Шаг 7. Находим

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - \theta_1 grad\ f(\mathbf{x}^1) = (0,0)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4}(-7,-7)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right).$$

Шаг 8. Проверяем условие $\left\| \mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v \right\| < \varepsilon_2$, $\left| f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^v) \right| < \varepsilon_2$. Условия не выполняются, полагаем $k = 2$ и переходим к шагу 3.

Итерация 2. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^2) = (-1{,}75;\ 1{,}75)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\left\| grad\ f(\mathbf{x}^2) \right\| = \sqrt{(-1{,}75)^2 + (1{,}75)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 2 \geq N = 4$. Неравенство не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляем шаг θ_2 из условия $f(\mathbf{x}^2 + \theta_2 \cdot l^2) = \min\limits_{\theta \geq 0} f(\mathbf{x}^2 + \theta \cdot l^2)$.

Найдем $\mathbf{x}^2 - \theta\ grad\ f(\mathbf{x}^2) = (1{,}75 + 1{,}75\theta;\ \ 1{,}75 - 1{,}75\theta)^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\theta) = f(\mathbf{x}^2 + \theta \cdot l^2) = \frac{9}{16}(1+\theta)^2 + \frac{49}{8}(1-\theta)^2 +$$

$$+ \frac{49}{16}(1-\theta^2) - \frac{49}{2} = \frac{49}{16}(2\theta^2 - 3\theta - 4),$$

$$\Phi'(\theta) = \frac{49}{16}(4\theta - 3). \quad \Phi'(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0{,}75.$$

При этом значении θ функция $\Phi(\theta)$ достигает минимума.

Шаг 7. Находим $\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 - \theta_2 grad\ f(\mathbf{x}^2) = (1{,}75;\ 1{,}75)^{\mathrm{T}} - 0{,}75(-1{,}75; 1{,}75)^{\mathrm{T}} = = (3{,}0625;\ 0{,}4375)^T$.

Шаг 8. Проверяем условия $\left\| \mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v \right\| < \varepsilon_2$, $\left| f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^v) \right| < \varepsilon_2$. Условия не выполняются, полагаем $k = 3$ и переходим к шагу 3.

Итерация 3. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^3) = (-0{,}4375;\ \ -2{,}1875)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки

$$\left\| grad\ f(\mathbf{x}^2) \right\| = \sqrt{(-0{,}4375)^2 + (-2{,}1875)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1.$$

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 3 \geq N = 4$. Неравенство не выполнено, перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Вычисляем шаг θ_3. Найдем

$$\mathbf{x}^3 - \theta\ grad\ f(\mathbf{x}^3) = (3{,}0625 + 0{,}4375\theta;\quad 0{,}4375 + 2{,}1875\theta)^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi\ (\theta) = f(\mathbf{x}^3 + \theta\, l^3) = \frac{49}{256}(56\theta^2 - 34\theta - 70),$$

$$\Phi'(\theta) = \frac{49}{256}(112\theta - 34). \quad \Phi'(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta \approx 0{,}3.$$

При этом значении θ функция $\Phi\ (\theta)$ достигает минимума.

Шаг 7. Находим $\mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^3 - \theta_3 \mathrm{grad}\, f(\mathbf{x}^3) = (3{,}0625;\ 0{,}4375)^{\mathrm{T}} - {}$ $- 0{,}3(-0{,}4375; 2{,}1875)^{\mathrm{T}} = (3{,}19;\ 1{,}09)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 8. Проверяем условие $\left\| \mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^{v} \right\| < \varepsilon_2$, $\left| f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^{v}) \right| < \varepsilon_2$. Условия не выполняются, полагаем $k =$ 4 и переходим к шагу 3.

Итерация 4. *Шаг* 3. Вычислим $grad\ f(\mathbf{x}^4) = (0{,}47;\ \ 0{,}55)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия остановки $\left\| grad\ f(\mathbf{x}^4) \right\| = \sqrt{(0{,}47)^2 + (0{,}55)^2} < \varepsilon_1 = 0{,}1$.

Критерий не выполнен, перейдем к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \geq N$: $k = 4 \geq N = 4$. Неравенство выполнено. Расчет окончен: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^4 = (3{,}19;\ 1{,}09)^{\mathrm{T}}$. $f^* = f(\mathbf{x}^4) \approx -13{,}93$.

2. Метод Ньютона. В градиентных методах для определения направления убывания функции использовалась линейная часть разложения функции в ряд Тейлора. Если же использовать квадратичную часть разложения Тейлора, то она аппроксимирует функцию гораздо точнее, чем линейная. Следовательно, методы, основанные на квадратичных аппроксимациях, сходятся быстрее, чем методы первого порядка.

Метод Ньютона применяется для безусловной минимизации выпуклых дважды дифференцируемых функций.

Пусть задано некоторое приближение $\mathbf{x}^1$. Если известно k-е приближение $\mathbf{x}^k$, то приближение $\mathbf{x}^{k+1}$ определим следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \theta_k \cdot l^k.$$

Здесь $l^k = -A_k b_k$, где $b_k = \partial f(\mathbf{x}^k)/\partial x$, $A_k = \partial^2 f(\mathbf{x}^k)/\partial x^2$; шаг θ_k удовлетворяет неравенствам $0 \leq \theta_k \leq 1$. Вектор $l^k = -A_k^{-1} b_k$ называется ***направлением Ньютона.***

Если l^k – направление Ньютона, шаг $\theta_k \equiv 1$, то метод называется ***методом Ньютона.*** Если шаг выбираем из условия $f(x^k - \theta_k A^{-1} b_k) = \min_{\theta \ge 0} f(x^k - \theta A_k^{-1} b_k)$, то метод называется ***методом Ньютона–Рафсона.***

Метод Ньютона обычно применяется на завершающем этапе вычислений, при этом начальное приближение находят при помощи методов, использующих первые производные.

Алгоритм метода Ньютона. Задаем начальное приближение $\mathbf{x}^1$, константу остановки $\varepsilon > 0$, предельное число итераций N. Пусть k-е приближение $\mathbf{x}^k$ найдено. Опишем итерацию метода.

Шаг 1. Проверяем условие $k \ge N$. Если оно выполнено, то $\mathbf{x}^k$ может рассматриваться как приближение минимума. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычисляем $grad\, f(\mathbf{x}^k) = b_k$ и матрицу вторых производных $\partial^2 f(\mathbf{x}^k)/\partial x^2 = A_k$.

Шаг 3. Вычисляем матрицу A_k^{-1}.

Шаг 4. Определяем $l^k = -A_k^{-1} b_k$ и полагаем $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \theta_k A_k^{-1} b_k$, где $\theta_k \equiv 1$ (метод Ньютона).

Шаг 5. Проверяем условия $\left\|\mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v\right\| < \varepsilon, \left|f(\mathbf{x}^{v+1}) - f(\mathbf{x}^{v})\right| < \varepsilon$. Если оба условия выполнены при $v = k-1$ и $v = k$, то решение задачи завершено: $\mathbf{x}^{k+1}$- требуемое приближение к оптимальному плану. Если хотя бы одно из условий не выполнено, переходим к шагу 1.

***Пример* 3.** Сделать одну итерацию методом Ньютона в примере 1, взяв в качестве начальной точки приближение, полученное методом наискорейшего спуска.

Решение. *Шаг* 1. В примере 1 получено $\mathbf{x}^* = (3{,}19;\ 1{,}09)^{\mathrm{T}}$. Возьмем эту точку в качестве $\mathbf{x}^1$.

Шаг 2. Вычислим $grad\, f(\mathbf{x}^1) = (0{,}47;\ \ 0{,}55)^{\mathrm{T}}$ и матрицу вторых производных $\partial^2 f(\mathbf{x}^1)/\partial x^2 = A_1$. Получим $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Вычислим матрицу $A_1^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Шаг 4. Определим $l^1 = -A_1^{-1} b_1 = (-0{,}056;\ -0{,}09)^{\mathrm{T}}$ и полагаем $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 - A_1^{-1} b_1 = (3{,}134;\ \ 1{,}00)^{\mathrm{T}}$. Расчет окончен: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^2 = (3{,}134;\ 1{,}00)^{\mathrm{T}}$. $f^* = f(\mathbf{x}^2) \approx -13{,}98$.

3. Задания для лабораторной работы

Задание 1. Решить задачи градиентным методом (методом градиентного спуска (подъема)), начиная оптимизационный процесс с указанной точки x^0 и сопровождая решение графической иллюстраций.

1. $f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min$, $x^0 = (1, 3)$.
2. $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \to \min$, $x^0 = (2, 8)$.
3. $f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 20 \to \min$, $x^0 = (1, 1)$.
4. $f = 10x_1 + 10x_2 - 5x_2^2 \to \max$, $x^0 = (0, 0)$.
5. $f = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$, $x^0 = (0, 0)$.
6. $f = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 13 \to \max$, $x^0 = (1, 2)$.
7. $f = 5x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$, $x^0 = (3, 1)$.
8. $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 \to \max$, $x^0 = (0, 0)$.
9. $f = 8x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$, $x^0 = (2, 1)$.
10. $f = 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min$, $x^0 = (1, 1)$.
11. $f = 8x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$, $x^0 = (1, 2)$.
12. $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \to \min$, $x^0 = (1, 1)$.
13. $f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 + 20 \to \min$, $x^0 = (0, 0)$.
14. $f = 10x_1 + 10x_2 - 5x_2^2 \to \max$, $x^0 = (1, 1)$.
15. $f = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \min$, $x^0 = (1, 0)$.

Задание 2. Решить задачи задания 1 методом наискорейшего подъема (спуска).

Задание 3. Сделать одну итерацию методом Ньютона в задании 1, взяв в качестве начальной точки приближение, полученное градиентным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1981.-350 с.

2. Альсевич, В.В. Методы оптимизации: упражнения и задания / В.В. Альсевич. – Минск: БГУ, 2005. – 405 с.

3. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 288 с.

4. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

5. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. – Минск: Высшая школа, 2002. – 544 с.

6. Иванова, Ж.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2010. – 98 с.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Е.А. Барышева*

Подписано в печать 2020. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 1,48. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.