

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ИСКУССТВЕННЫХ  
ЭКОСИСТЕМАХ**

*Курс лекций*

2010

УДК 574(075.8)  
ББК 28.081в631я73  
М34

Авторы-составители: доцент кафедры экологии и охраны природы УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат технических наук **В.Е. Савенок**; доцент кафедры экологии и охраны природы УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат биологических наук **М.В. Шилина**

Р е ц е н з е н т:

доцент кафедры информатики и информационных технологий УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат биологических наук *А.А. Чиркина*

Научный редактор: заведующий кафедрой экологии и охраны природы УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат биологических наук, доцент А.М. Дорофеев

Курс лекций составлен для студентов специальности 1-33 01 01 «Биоэкология». В учебном издании изложены принципы математического моделирования: системный анализ, классификация моделей и методы моделирования, их возможности и ограничения. Приводятся примеры применения моделирования в биологии, физиологии, промышленной экологии. Учебное издание может быть использовано студентами и магистрантами биологических специальностей.

УДК 574(075.8)  
ББК 28.081в631я73

© УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                     |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>                                                                               | <b>5</b>  |
| <b>1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ .....</b>                                                                    | <b>6</b>  |
| 1.1. Системы .....                                                                                  | 6         |
| 1.2. Системный подход .....                                                                         | 8         |
| 1.2.1. Принцип системности .....                                                                    | 8         |
| 1.2.2. Основные понятия системного анализа .....                                                    | 10        |
| 1.2.3. Структура и иерархия .....                                                                   | 12        |
| 1.2.4. Модульное строение системы и информация .....                                                | 13        |
| 1.2.5. Процессы в системе .....                                                                     | 14        |
| 1.2.6. Целенаправленные системы и управление .....                                                  | 15        |
| <b>2. ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>                                              | <b>17</b> |
| 2.1. Стадии разработки моделей .....                                                                | 17        |
| 2.2. Общие и конкретные модели .....                                                                | 18        |
| 2.3. Модель и ее свойства .....                                                                     | 21        |
| 2.3.1. Формальная запись модели .....                                                               | 21        |
| 2.3.2. Свойства модели .....                                                                        | 23        |
| 2.4. Имитационное моделирование .....                                                               | 24        |
| 2.5. Моделирование сложных систем .....                                                             | 25        |
| 2.5.1. Возможности компьютерного моделирования<br>сложных систем .....                              | 27        |
| <b>3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b> | <b>28</b> |
| 3.1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики .....                         | 28        |
| 3.1.1. Основные понятия моделей статистики .....                                                    | 28        |
| 3.1.2. Свойства множеств и действия с ними .....                                                    | 29        |
| 3.1.3. Частота события. Непосредственный подсчет вероятностей .....                                 | 30        |
| 3.1.4. Основные функции комбинаторики .....                                                         | 34        |
| 3.1.5. Распределения случайных событий .....                                                        | 35        |
| 3.2. Статистическая обработка данных экологического мониторинга природной среды .....               | 37        |
| 3.2.1. Значимость результатов .....                                                                 | 37        |
| 3.2.2. Воспроизводимость результатов .....                                                          | 38        |
| 3.2.3. Оценка надежности результата .....                                                           | 39        |
| 3.2.4. Параметрические критерии проверки гипотез .....                                              | 41        |
| 3.2.5. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов .....                       | 41        |

|                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. ПОПУЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ .....</b>                                                     | <b>45</b> |
| 4.1. Модель Мальтуса для популяции .....                                                 | 45        |
| 4.1.1. Дифференциальная модель .....                                                     | 46        |
| 4.1.2. Исследование автономных моделей .....                                             | 47        |
| 4.2. Логистическая модель популяции .....                                                | 49        |
| 4.2.1. Дифференциальное логистическое уравнение .....                                    | 49        |
| 4.2.2. Популяция типа Олли .....                                                         | 50        |
| 4.2.3. Дискретное логистическое уравнение .....                                          | 50        |
| 4.3. Модель Лотки–Вольтерра .....                                                        | 52        |
| 4.3.1. Математическая модель «хищник–жертва» .....                                       | 52        |
| 4.4. Устойчивость популяционных моделей .....                                            | 55        |
| 4.4.1. Исследование стационарных точек .....                                             | 55        |
| 4.4.2. Обобщения моделей .....                                                           | 57        |
| <b>5. БАЛАНСОВЫЕ, ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ И АГРОЭКО-<br/>ЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....</b>             | <b>59</b> |
| 5.1. Модель баланса вещества и энергии .....                                             | 59        |
| 5.2. Биологический метод борьбы с нежелательным видом .....                              | 62        |
| 5.3. Модель эпидемии .....                                                               | 63        |
| 5.4. Модели динамики возрастных групп .....                                              | 65        |
| 5.5. Вероятностные модели .....                                                          | 68        |
| 5.6. Приложения в экологии .....                                                         | 74        |
| 5.7. Моделирование в медицине .....                                                      | 76        |
| 5.8. Модель агробактериоза .....                                                         | 77        |
| <b>6. МОДЕЛИ МОНИТОРИНГА ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ .....</b>                                         | <b>80</b> |
| 6.1. Описательная модель распространения загрязняющей<br>примеси в грунтовых водах ..... | 80        |
| 6.1.1. Основные положения, параметры и функции модели .....                              | 80        |
| 6.1.2. Моделирование источников воды и примеси .....                                     | 83        |
| 6.1.3. Закон диффузии примеси .....                                                      | 83        |
| 6.2. Динамические уравнения перемещения воды с приме-<br>сью в пористой среде .....      | 84        |
| 6.2.1. Уравнение движения воды в грунте .....                                            | 84        |
| 6.2.2. Уравнение перемещения примеси в грунтовых водах .....                             | 86        |
| 6.3. Моделирование очистных сооружений .....                                             | 88        |
| 6.4. Уравнения гидродинамики и газодинамики .....                                        | 89        |
| 6.4.1. Уравнение Эйлера движения идеальной жидкости .....                                | 90        |
| 6.4.2. Уравнение неразрывности .....                                                     | 92        |
| 6.4.3. Уравнение состояния .....                                                         | 92        |
| 6.5. Уравнения акустики .....                                                            | 92        |
| <b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>                                                           | <b>95</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Моделирование как метод исследования используется в различных областях знаний. Причем методы моделирования во многом сходны, хотя специфику объекта моделирования необходимо учитывать.

Сложность биологических систем заставляет с осторожностью относиться к данным, полученным при использовании их моделей. Поэтому анализ результатов моделирования должен сопровождаться тщательным сопоставлением со сведениями об оригинале. Это позволяет не только выявить те звенья причинно-следственной цепи, которые ускользают от исследователя при изучении модели, но и органически включить моделируемые свойства в целостное функционирование живых систем. Возникает вопрос о корректном использовании математических моделей и, главное, о роли правильной интерпретации математических идей.

Специфичность биологических систем требует применения адекватного математического аппарата. Однако это вовсе не значит, что необходимо ждать появления новой биологической математики. В биологических исследованиях накоплен обширный опыт использования существующих математических методов и моделей.

Сложность математических моделей с неизбежностью ведет к широкому использованию компьютерной техники как для обработки данных и уточнения параметров моделей, так и для постановки машинного эксперимента, во многих случаях призванного заменить дорогостоящий натурный эксперимент. Поэтому дальнейшее развитие математического моделирования видится на пути создания новых информационных технологий как инструмента построения содержательных моделей, накопления и хранения информации, полученной в результате исследования этих моделей.

Цель учебного издания – познакомить студентов биологических, прежде всего экологических, специальностей с основными идеями, методами, возможностями и ограничениями современного моделирования в широком диапазоне применения. Поэтому материал иллюстрирован упрощенными примерами из теории эволюции, растениеводства, физиологии и защиты растений, медицины, демографии, промышленной экологии. Более подробное изложение как теории моделирования, так и примеров можно найти в литературе, список которой приведен в конце учебного издания.

# 1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

## **Вопросы:**

1.1. Системы.

1.2. Системный подход.

## 1.1. Системы

Внимание многих исследователей привлекают проблемы взаимодействия человека и биосферы в современных условиях, когда возможность человека влиять на изменение процессов в биосфере стали сравнимы с энергией естественного происхождения. Поэтому одним из важнейших направлений экологии стала математическая экология (возникла в XX в.) [1].

Необходимость решения экологических проблем требует от математиков разработки специальных методов построения и исследования математических моделей экологических процессов. Основой для разработки таких методов служат фундаментальные исследования в области теории управления, теории игр, теории систем, мат. статистики и т.д.

*Система* – совокупность взаимосвязанных элементов, обособленных от среды и взаимодействующей с ней как целое.

*Сложные системы* – совокупность объектов, элементов, имеющих между собой многочисленные и разные по типу связи. Характерной особенностью сложных систем является наличие у них функции, которой нет у составляющих ее частей.

*Кибернетика* – это наука управления сложными системами на высшем – 3<sup>м</sup> уровне – с помощью ЭВМ (1<sup>й</sup> уровень – механизация; 2<sup>й</sup> уровень – автоматизация) [2].

Два подхода к изучению в кибернетике:

- 1) анализ – разделение сложного на части в виде совокупности более простых компонентов;
- 2) синтез – обратный процесс.

Основоположник кибернетики американский математик Норберт Винер в 1948 г. опубликовал книгу «Кибернетика» и в ней определил: «Кибернетика – это наука об управлении и связи в животных и машинах».

Параллельно с кибернетикой развивается еще один подход к науке о системах – *общая теория систем*. Идея теории, применимой к системам любой природы, была выдвинута австрийским биологом Л. Берталанди. Один из путей реализации этой идеи – отыскивать структурное сходство законов, установленных в различных дисциплинах, и, обобщая их, выводить общесистемные закономерности.

У Н. Винера изучаются внутрисистемные, обратные связи, а функционирование систем рассматривается просто как отклик на внешние воздействия. Однако, Л. Берталанти ввел понятие *открытой системы*: в ней происходит обмен веществом, энергией и информацией (негэнтропией) с окружающей средой. В открытой системе устанавливается динамическое равновесие, которое может быть направлено в сторону усложнения организации (вопреки 2-му закону термодинамики, благодаря вводу негэнтропии извне), и функционирование является не просто откликом на изменение внешних условий, а сохранением старого или установлением нового подвижного внутреннего равновесия.

При классификации системы разделяют на три основных типа: искусственные, естественные, смешанные (табл. 1.1) [3].

Таблица 1.1

| Классификация систем |                |                    |
|----------------------|----------------|--------------------|
| Типы систем          |                |                    |
| Искусственные        | Естественные   | Смешанные          |
| орудия               | живые          | эргономические     |
| механизмы            | неживые        | биотехнические     |
| машины               | социальные     | организационные    |
| автоматы             | экологические  | автоматизированные |
| роботы, компьютеры   | топологические | технологические    |

*Искусственные системы* – созданные человеком для своих целей.

Цель *искусственной системы* определяется как идеальный образ желаемого результата ее деятельности, т.е. образ того, что должно быть (для человека).

*Естественные системы* – возникшие в природе без участия человека (экосистемы).

Классификация *естественных систем* может быть дополнена. Например, *вирус* можно рассматривать как живую систему и как неживую систему.

*Смешанные системы* – это эргономические (машина-оператор), биотехнические ( в них входят как живые организмы, так технические устройства), организационные (состоят из людских коллективов, которые оснащены необходимыми средствами).

Здесь целесообразно привести понятие экосистемы. *Экосистемы* – единые природные комплексы, образованные живыми организмами и средой обитания. Экосистемы могут быть всех трех типов: естественные, смешанные, искусственные. В большинстве случаев смешанные экосистемы можно отнести к искусственным экосистемам.

**Искусственные экосистемы** – это экосистемы, подвергшиеся воздействию человеческой деятельности с целью достижения желаемого результата (лес, река) или изменившиеся в результате этой деятельности (атмосферный воздух – из-за выбросов загрязняющих веществ, почва, вода – из-за сбросов).

## 1.2. Системный подход

Основной принцип моделирования – системный подход.

*Системный подход* – это методика правильного мышления. Он опирается на проверенные веками приемы диалектической логики. Его функцией выступают выявление и обострение (а не погружение в подсознание) конфликтов между потребностью новых знаний и консервативной устойчивостью старых представлений. Системный подход предлагает конкретные приемы (системные принципы) оптимального хода исследовательской мысли.

### 1.2.1. Принцип системности

Любой объект природы (косный, живой, идеальный) можно рассматривать как систему, как совокупность взаимосвязанных частей. Принципы системного мышления приложимы к любой системе.

В рамках системного подхода понятие «система» используется как логическая категория, т.е. как способ мышления объектов природы. С этим термином возникает серьезная путаница, поскольку частные науки также используют термин «система» (экосистема, кровеносная система, солнечная система, неравновесная система и т.д.). Однако в этих случаях под системами понимаются объекты природы, но не способ их исследования. Поэтому логический термин «система» есть просто омоним «системы» частной науки. В системном подходе подразумевается относительная (целесообразная) обособленность объекта исследования, возможность применить к нему системные принципы мышления, например, возможность (хотя бы умозрительно) разделить объект на части. Отсюда вытекает первая рекомендация принципа системности – *четко назвать объект исследования*.

Система определяется выполняемой функцией. Внешне эта функция выглядит как цель, то, «для чего» существует система. Функция предписывает системе определенное строение и динамику (организацию). Система состоит только из тех элементов, которые участвуют в выполняемой функции. В состав системы включаются только те части, которые, на взгляд исследователя, и осуществляют системную функцию. Границы системы (совокупности ее частей) определяются тем, какая функция исследуется. Например, организм традиционно отделяется от среды как гомеостатическая система. Однако,

исследования по «экологии человека» рассматривают другую систему: человек + воздух + вода + пища + загрязняющие компоненты. Социология рассматривает систему «группа людей». Физиология рассматривает «функцию органа». В каждом случае при определении границ системы доминирует цель исследования. В этом ключе важно не забывать, что некоторые цели исследователя могут быть неосознанными.

Любая система представляет собой результат исторического хода событий. С системных позиций развитие есть, во-первых, дифференциация системы (усложнение организации: рост числа элементов и связей) и, во-вторых, усиление ее интеграции (структурирование: усиление взаимозависимости частей системы, ведущее к усилению эмерджентных качеств).

**Системный анализ** – научная дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях анализа большого количества информации различной природы.

В системном анализе могут быть выделены:

- 1) методология;
- 2) аппаратная реализация;
- 3) опыт применения в различных областях знаний и практики.

**Методология** – базовое начало системного анализа, включающее определение используемых понятий, принципы системного подхода, а также подготовку и общую характеристику основных проблем организации системных исследований.

**Аппаратная реализация** – стандартные приемы моделирования принятия решений в сложной системе и общие способы работы с этими моделями.

**Опыт применения в различных областях** – очень обширное поле деятельности – научно технические разработки практически во всех областях. Ссылки на системный анализ обычное дело и в биологии, экологии, психологии, социологии и т.д.

**Модель** – объект-заменитель, который в определенных условиях может заменять объект-оригинал, воспроизводя интересные нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества удобства (наглядность, обозримость, легкость оперирования, доступность испытаний и пр.).

В математическом моделировании (теория моделей) **модель** – это результат отображения одной абстрактной математической структуры на другую, также абстрактную, либо результат интерпретации первой модели в терминах и образах второй [4].

Модель строится в виде связанных множеств (в простейшем случае – цепочек) отдельных процедур.

Системный анализ исследует как организацию таких множеств, так и вид отдельных процедур, которые максимально приспособлива-

ются для принятия согласующих и управленческих решений в сложной системе.

Модель принятия решения чаще всего изображается в виде схемы с ячейками и логическими переходами.

Ячейки содержат конкретные действия – процедуры, которые могут иметь весьма разнообразный характер.

Говоря об отдельных процедурах, укажем, что основной из их многочисленных классификаций является деление на формализуемые и неформализуемые процедуры (операции). В отличие от большинства научных дисциплин, стремящихся к формализации, системный анализ допускает не полную систематизацию.

Цель *модели* (эмерджентная функция) состоит в том, чтобы в основных чертах функционировать подобно своему реальному прототипу. Если модель справляется с этой задачей хотя бы некоторое время, то она входит в систему знаний как ценное обобщение, иначе – отбраковывается. В состав модели входят логические конструкции, соотнесенные с природным объектом, например, уравнения, вычисляющие те или иные переменные на базе некоторых параметров. Модель имеет несколько уровней иерархии, начиная от среды моделирования (имитационная система) и заканчивая конкретными значениями рассчитанных переменных. Критерием качества модели служит ее адекватность реальности (практика).

**Моделирование** – т.е. построение, использование и совершенствование моделей.

Цель *моделирования* – это воплощение характеристик реального объекта в количественные характеристики идеального объекта, перенос особенных черт строения и функционирования с прообраза на дубликат, модель. Результатом моделирования должно стать понимание законов или способа функционирования реальной системы. На практике это позволяет решить проблемы (изменив режим функционирования объекта), в науке – ответить на поставленные вопросы и сформулировать новые задачи исследования. Составные компоненты процесса моделирования – это этапы построения модели, начиная с блок-схемы и заканчивая проверкой работы модели. Критерием моделирования выступает успешное решение проблем с помощью моделей, полноценное объяснение или предсказание изучаемого явления.

### **1.2.2. Основные понятия системного анализа**

**Элемент** – некоторый объект (материальный, энергетический, экологический, информационный), обладающий рядом важных для нас свойств, но внутренне строение (содержание) которого безотносительно к цели рассмотрения [3].

Пусть элемент –  $M$ , тогда вся их совокупность –  $\{M\}$ . Принадлежность элемента  $M$  к совокупности:  $M \in \{M\}$ .

**Связь** – обмен между элементами (веществом, энергией, информацией). Единичный акт связи – воздействие. Обозначая все воздействия элемента  $M_1$  на элемент  $M_2$  через  $x_{12}$ , а элемента  $M_2$  на элемент  $M_1$  через  $x_{21}$ , можно изобразить связь графически:

$$M_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x_{12}} \\ \xleftarrow{x_{21}} \end{array} M_2. \quad (1.1)$$

**Система** – совокупность элементов, обладающих следующими признаками:

а) связями, которые позволяют посредством переходов по ним от элемента к элементу соединить два любых элемента совокупности, – *связность системы*;

б) свойством (назначением, функцией), отличным от свойств отдельных элементов совокупности, – *функция системы*.

Применяя так называемое «кортежное» (последовательность в виде перечисления) определение системы, запишем:

$$\Sigma: \{\{M\}, \{x\}, F\}, \quad (1.2)$$

где  $\Sigma$ : – система;  $\{M\}$  – совокупность элементов в ней;  $\{x\}$  – совокупность связей;  $F$  – функция, новое свойство системы.

Существуют формы записи, включающие более 10 членов кортежной последовательности, соответствующие различным свойствам системы.

Практически любой объект можно рассматривать как систему, хотя сам он является элементом более сложной системы.

*Пример:* дерево – экосистема, состоящая из множества элементов. В то же время дерево – элемент еще более сложной лесной экосистемы.

**Большая система** – система, включающая значительное число однотипных элементов и однотипных связей.

**Сложная система** – система, состоящая из элементов разных типов и обладающая разнородными связями между ними.

Часто сложной системой считают только ту, которая является и большой.

Разнородность элементов можно подчеркнуть записью:

$$\{M\}: \{\{M^I\}, \{M^{II}\}, \dots \{M^R\}\}. \quad (1.3)$$

Допустимая некортежная запись:  $\bigcup_{r=1}^R \{M^r\}.$

### 1.2.3. Структура и иерархия

**Структурой системы** – называется ее расчленение на группы элементов с указанием связей между ними, неизменное на все время рассмотрения и дающее представление о системе в целом.

Указанное расчленение может иметь материальную (вещественную), функциональную, алгоритмическую и другие основы.

Группы элементов в структуре обычно выделяются по принципу простых или относительно более слабых связей между элементами разных групп.

Структуру системы удобно изображать в виде графической схемы, состоящей из ячеек (групп), и соединяющих их линий (связей) – **структурная схема** или **граф**.

**Граф** состоит из обозначений элементов произвольной природы, называемых *вершинами*, и обозначений связей между ними, называемых *ребрами*.

Символьная запись: структуры  $\{\hat{M}\}$  – совокупность групп элементов; связей между этими группами –  $\{\hat{x}\}$ , тогда структуру системы можно записать:

$$\Sigma\Sigma:\{\{\hat{M}\}, \{\hat{x}\}\}. \quad (1.4)$$

Структуру (1.4) можно получить из (1.2) объединением элементов в группы.

**Примеры структур:** куст ягод, календарь (временная структура), деление книги на главы, предприятия на цеха, отделы.

Одной из характеристик структуры являются ее типы связей (рис. 1.1).

**Декомпозиция** – деление системы на части, удобное для каких-либо операций с этой системой.

**Пример:** математическое описание отдельно для данной части системы.

Часто суть декомпозиции – упрощение системы.

**Иерархия** – структура с наличием подчиненности, т.е. неравномерных связей между элементами, когда воздействия в одном из направлений оказывают гораздо большее влияние на элемент, чем в другом. Типичная иерархическая связь представлена на рис. 1.2.

Виды иерархических структур:

- кольцевые ( $1^{\text{й}}$  доминирует над  $2^{\text{м}}$ ,  $2^{\text{й}}$  над  $3^{\text{им}}$ , .....  $n^{\text{ий}}$  опять над  $1^{\text{ым}}$ );

- меняющие направления (древовидная, веерная).

Любая иерархия в принципе сужает возможности и особенно гибкость системы. Элементы нижнего уровня связываются доминиро-

ванием сверху, они способны влиять на это доминирование (управление) лишь частично и, как правило, с задержкой.

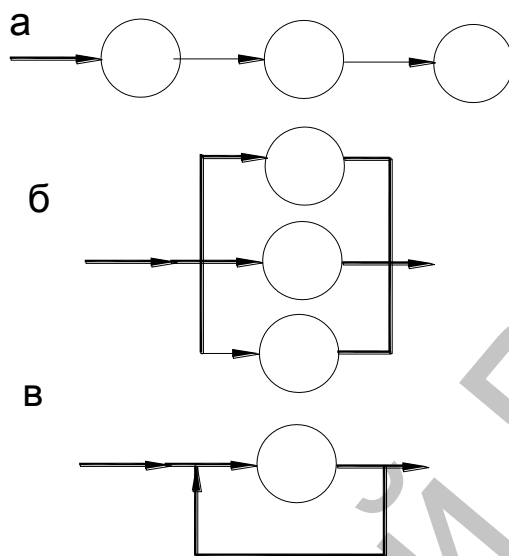


Рис. 1.1. Типы связей структуры:  
 а – последовательная; б – параллельная; в – обратная связь (результат функционирования объекта влияет на поступающее на него воздействие).



Рис. 1.2. Структура с наличием подчиненности.

Та или иная степень иерархии наблюдается в подавляющем большинстве экосистем. В технике иерархия вынужденная мера, которая упрощает рассмотрение сложных технических систем.

#### 1.2.4. Модульное строение системы и информация

Введем понятие «связь» – воздействие одного элемента (группы элементов) на другой элемент (группу). Понятие связи можно распространить и на взаимодействие системы с внешней средой.

Далее выделим в системе:

- а) *входы* – воздействие со стороны других элементов;
- б) *выходы* – воздействия, которые элементы оказывают на другие. Язык входов и выходов переносится на произвольную совокупность элементов, включая и всю систему в целом.

**Модуль** – группа элементов системы, описываемая только своими входами и выходами и обладающая определенной цельностью (рис. 1.3).

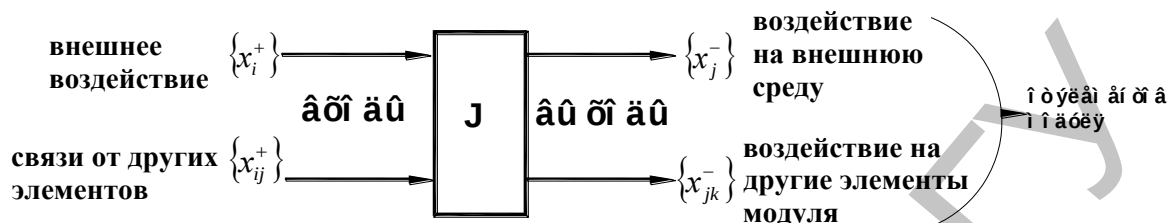


Рис. 1.3. Схема модуля.

Система может представляться набором модулей и сама рассматриваться как модуль. Модульное построение системы, как правило, определяет ее декомпозицию.

Модуль можно записать в виде преобразования:

$$(\{x_i^+\}, \{x_{ij}^+\}, J) \rightarrow (\{x_j^-\}, \{x_{jk}^-\}). \quad (1.5)$$

Заметим также, что понятие модуля близко к концепции «черного ящика» в кибернетике – объекта, в котором известна только зависимость выходов от входов.

Однако, в отличие от «черного ящика» при исследовании сплошных систем мы обычно в состоянии проанализировать, что происходит внутри модуля – но это мы делаем на определенной стадии рассмотрения.

*Синонимы модуля:* блок, узел, механическая (техническая) подпрограмма, программный модуль, логический блок (программирование).

Анализ информации показывает, что существует три основных вида связей (воздействий): материальных, энергетических, информационных. Для сложных искусственных систем (экосистем) главные связи – информационные.

### 1.2.5. Процессы в системе

*Состояния системы* – фиксированные значения характеристик системы, важных для целей рассмотрения.

*Процесс* – набор состояний системы, соответствующий упорядоченному непрерывному или дискретному изменению некоторого параметра, определяющего характеристики (свойства) системы.

Для символьной записи процесса введем многомерную (по числу интересующих нас характеристик) величину  $y$ , описывающую их

конкретные значения. Все множество этих возможных величин обозначим через  $Y$ :  $y \in Y$ .

Введем параметр процесса  $t$  – множество его значений  $T$  и опишем  $y$  как функцию этого параметра:  $y=y(t)$ . Тогда процесс  $S_{tot}$  есть некоторое правило перехода от ситуации со значением параметра  $t_0$  к ситуации со значением  $t > t_0$  через все его промежуточные непрерывные или дискретные значения:

$$S_{tot}(y(t_0))=y(t), \quad (1.6)$$

где  $y \in Y$ ;  $t \in T$ .

Этому же процессу соответствует отображение множеств:

$$T \times Y \rightarrow Y. \quad (1.7)$$

Можно сделать вывод, что типичен учет процессов в системе, как способ получения зависимостей выходов от входов в модулях разных иерархических уровней. При этом не важно, способствует ли данный процесс выполнению системой ее функций или препятствует этому.

### **1.2.6. Целенаправленные системы и управление**

Целенаправленными системами называют системы, перед которыми поставлены сформированные цели (это почти всегда искусственные системы).

Постановка цели перед системой (глобальной цели) влечет необходимость:

- а) формулировки локальных целей, стоящих перед элементами системы и группами элементов;
- б) целенаправленного вмешательства в функционирование (строение, создание) системы, т.е. управления.

**Управление** – универсальный термин. Предполагается, что:

- в математических моделях мы можем выбирать числа, функции, алгоритмы, графовые структуры;
- в технических системах – силы, геометрические размеры, сигналы, команды от ЭВМ;
- в экосистемах – физические величины, биопараметры.

Итак, если мы исходим из цели, то может быть ситуация при которой не существует управления, обеспечивающего ее выполнение, тогда расширяются пределы управления.

Символьная запись введенных понятий: общий вид процесса  $S_{tot}^u$  с управлением  $u$  из некоторой возможной совокупности управлений  $U$  есть:

$$S_{tot}^u(y(t_0)) = y(t, u)^1, \quad (1.8)$$

где  $y \in Y; t \in T, u \in U$ .

Этому управляющему процессу будет соответствовать отображение множеств:

$$U \times T \times Y \rightarrow Y. \quad (1.9)$$

В (1.8) отражена лишь управляемость, вариативность процесса, но не его цель. Для записи процесса, приводящего к выполнению цели, введем специальное обозначение  $f$  для тех выходных воздействий, по которым можно влиять выбором управлений  $u$ . Таким образом, величины  $f$ , обычно называемые критериями, есть часть выходов  $x_j^+$  и  $x_{jk}^-$  рассматриваемого модуля  $J$ :

$$(\{x_j^+\}, \{x_{ij}^-\}, J) \rightarrow (\{x_j^-\}, \{x_{jk}^-\}). \quad (1.10)$$

Обозначим теперь желаемый вид выходных воздействий через  $f_G$ , где  $G$  – символ поставленной цели. Критерии  $f$  считаем зависящими от характеристик  $y$ :  $f = f(y)$ . Пусть существует момент  $t_G$  (или задан) и существует состояние характеристик  $y_G$ , позволяющее достичь цели  $f_G$ . Пусть состояние  $y_G$  может быть достигнуто управляемым процессом  $S_{tot}^u$ , тогда управление  $u_G$ , позволяющее выполнить цель  $f_G$ , определяется как часть триады  $(t_G, y_G, u_G)$ , удовлетворяющей соотношениям:

$$S_{tot}^u(y(t_0)) = y(t, u), f(y) = f_G, \quad (1.11)$$

где  $y \in Y; t \in T, u \in U$ .

### **Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение системы. Какие системы относятся к сложным?
2. Что такое системный анализ? Системный подход?
3. Назовите основные понятия системного анализа.
4. Нарисуйте схему модуля. Сделайте соответствующие пояснения.
5. Что понимают под «управлением системой»?

---

<sup>1</sup>Сравнить с уравнением (1.6).

## 2. ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### **Вопросы:**

- 2.1. Стадии разработки моделей.
- 2.2. Общие и конкретные модели.
- 2.3. Модель и ее свойства.
- 2.4. Имитационное моделирование.
- 2.5. Моделирование сложных систем.

Выше было дано одно из наиболее общих определений модели (см. гл. 1). Однако, в большинстве случаев и ситуаций мы рассматриваем не саму какую-нибудь систему, а формальное описание тех ее особенностей, которые существенны для целей исследования. Такое формальное описание принято называть *моделью* [3].

Например, рассматривая промышленную зону города при определении ее экологической нагрузки на регион, мы не рассматриваем детально производственный цикл каждой структурной единицы предприятий, входящих в промышленную зону, а лишь учитываем количество, интенсивность и другие качественные характеристики вредных выбросов и сбросов в окружающую среду. Однако, при необходимости могут производиться исследование и самого цикла производства и проведение полных непосредственных измерений, характеризующих экологичность того или иного процесса. В больших объемах это громоздко (помогают готовые справочники).

Рассмотрение вместо самой системы (явления, процесса, объекта) ее модели практически всегда несет идею упрощения. Мы огрубляем представления о реальном мире, т.к. оперирование категорией модели экономичней, чем действительностью. Но на практике это не просто – по причине сложности учета всех параметров. Есть удачные модели: конечноэлементная (математическая физика), генетического кода (молекулярная биология), но есть и проблемные модели, хотя в технике уровень моделирования считается удовлетворительным.

### **2.1. Стадии разработки моделей**

Можно выделить три стадии разработки моделей:

- 1) построение модели;
- 2) пробная работа с ней;
- 3) корректировка и изменение по результатам пробной модели.

Основной стадией является первая стадия – наиболее сложная и ответственная, содержащая в себе длительный путь проб и ошибок в

поиске основной идеи. После выполнения третьей стадии модель считается готовой к использованию. Построение принципиально новой модели носит характер открытия.

Основными видами моделей являются:

- вербальные (словесные, описательные);
- натурные (макетирование, физическое моделирование, масштабированные модели, модели части свойств);
- знаковые.

Важнейший класс знаковых моделей – *математические модели*.

**Математическая модель** – это описание протекания процессов (в том числе функционирования, движения), описание состояния, изменения системы на языке алгоритмических действий с математическими формулами и логических переходов.

*Примеры других знаковых моделей:* химические и ядерные формулы, графики, схемы, в том числе графовое изображение связей, информационных потоков в системе, чертежи, топокарты (два последних относят и к макетам, т.е. натурным моделям).

Понятия действий с формулами и логических операций полезно дополнить, к ним относят:

- процедуру запоминания элемента;
- процедуру его вызова и постановки в нужное место;
- операцию «следует за» в упорядоченной совокупности;
- операцию сравнения и идентификации совпадения элементов.

Традиционно математическая модель допускает работу с таблицами, графиками, номограммами, выбор из совокупности процедур и элементов. Логические переходы могут совершаться в схеме из вербально описываемых элементов (операций), что позволяет считать математической моделью даже жестко фиксированную последовательность действий человека.

В заключение можно отметить, что дать полное и строгое описание математической модели, по-видимому, невозможно.

## 2.2. Общие и конкретные модели

Все типы моделей необходимо перед их применением к конкретной системе наполнить информацией, соответствующей используемым символам, макетам, общим понятиям.

Для математической модели это:

- численные (вместо буквенных) значения физических величин, коэффициентов, параметров;
- конкретные виды функций и операторов;
- определенные последовательности действий и графовые структуры (там, где они не были фиксированы однозначно, и др.).

Наполненную информацией модель принято называть *конкретной*.

Модель без наполнения информацией до уровня соответствия единичной, реальной системе – называется *общей (теоретической, абстрактной, системной)*.

Итак, если хотя бы часть параметров не фиксирована – модель общая.

Практически всегда создаются и разрабатываются общие модели, описывающие классы по крайней мере близких однотипных систем.

Наибольший интерес представляют общие модели с достаточно высоким уровнем абстракции. Такие модели могут самостоятельно изучаться, активизироваться, дополняться доказанными свойствами и утверждениями – ***абстрактные математические модели***. Исследование этих моделей широко распространено.

Типичными моделями с точки зрения практики можно считать:

- модели в виде набора формул;
- системы линейных и нелинейных уравнений;
- дифференциальные уравнения;
- дискретные переходы;
- статистические описания;
- аппроксимирующие представления;
- описание ситуаций (в том числе экологических).

Абстрактное моделирование часто относят к области теории сложных систем. Превращение абстрактной модели в конкретную модель, достигается наполнением первой информацией, однако это сложный процесс, особенно при использовании неоднородной и объемной информации. Исследования понятий удобного хранения, выдачи и подготовки информации к использованию образуют отдельную, ориентированную на ЭВМ область знания, называемую организацией *банков (баз) данных (знаний)*.

**Данные** – числовой и словесный (фактографический) материал, который сам по себе не носит смысловой нагрузки.

**Знания** – смысловой материал типа программных средств, методик, указаний, описания моделей.

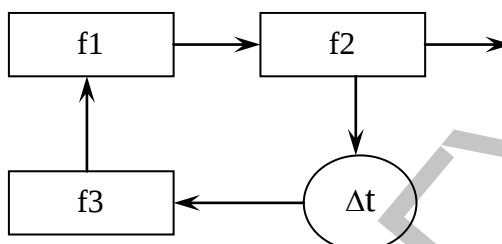
**База** – непосредственное хранение данных или знаний.

**Банк** – хранение вместе с указанием (обеспечением) способов и форм вызова информации, а также с совокупностью обслуживающих операций, включая первичную обработку информации.

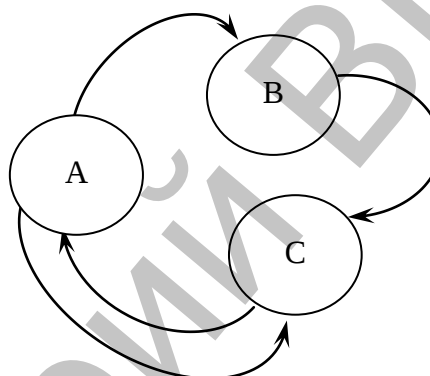
Основываясь на описаниях видов моделей, можно предложить еще одну классификацию с точки зрения предопределения структуры будущей блок-схемы заранее выбранным видом модели. С этой позиции отчетливо различаются модели *аналитические* (непрерывные),

автоматные (сканирование), стохастические и имитационные (дискретные, портретные) (рис. 2.1).

a. Аналитическая модель



b. Автоматная модель



c. Регрессионная модель



d. Имитационная модель

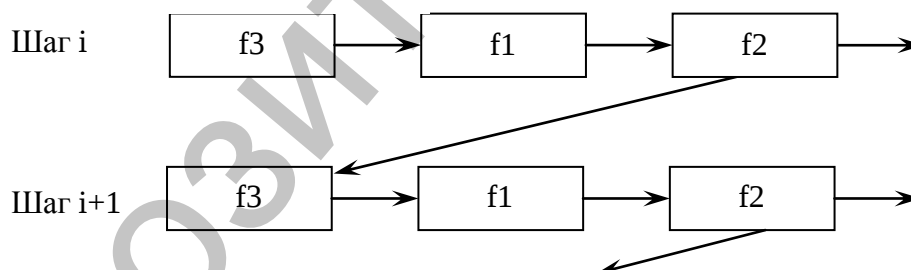


Рис. 2.1. Блок-схемы основных видов моделей.

**Аналитические модели** (системы дифференциальных уравнений) служат для выражения законов. Параметрам аналитических моделей стремятся придать биологический смысл. Они включают время в качестве одной из переменных, что позволяет в принципе находить общее решение, т.е. оценивать состояние системы (значение ее переменных) в любой конкретный момент времени, без реконструкции ее полной динамики. Для этого требуется предварительно решить систему уравнений (найти корни – параметры).

**Автоматные модели** (дискретная смена состояния) отличаются, во-первых, дискретным ходом времени, во-вторых, дискретными из-

менениями значений переменных. Жизнь автомата представляет собой последовательность тактов (временных шагов), за один такт происходит одно изменение состояния автомата. Весь возможный диапазон изменений переменных определен заранее и разбит на конечное число возможных значений. Никаких расчетов значений переменных не проводится, переход в новое состояние определяется по матрице перехода в зависимости от текущего состояния модели и от характера внешнего воздействия. Содержание матрицы перехода выступает в роли неизменных параметров модели. Блок-схема автоматной модели (рис. 2.1, б) предстает в виде графа, вершины которого соответствуют возможным состояниям модели, а ребра – направлению переходов, заданных матрицей смежности вершин. Разработанная теория автоматов позволяет создавать различные аналитические модели, например, поведения. В то же время дискретная структура автоматных моделей может быть использована для составления имитационных моделей.

**Стохастические модели** используются для описания отдельных компонентов системы и их частных взаимозависимостей, отношений, зависимостей, связей, корреляций, синхронности динамики. В отличие от аналитических моделей регрессионные уравнения выступают в роли частных эмпирических описаний, параметры которых редко имеют биологический смысл, хотя наиболее обоснованы со статистической точки зрения. В отличие от имитационных моделей регрессия не предназначена для описания структуры и динамики многокомпонентных нелинейных систем, но может эффективно описывать отдельные функции (линейные и криволинейные уравнения).

**Имитационные модели** (программы на языке ЭВМ) сначала получили широкое распространение как средство для поиска численных решений дифференциальных уравнений, а затем как способ создания портретного образа исследуемой систем. Цель имитации состоит в том, чтобы изучить взаимодействие между частями системы и ее возможную реакцию на внешние возмущения: по совокупности элементарных актов, протекающих в определенных условиях, выяснить в целом картину, к которой должны привести эти элементарные акты.

## 2.3. Модель и ее свойства

### 2.3.1. Формальная запись модели

Введем обозначения:

- набор входных воздействий (входов) в системе –  $x^+$  и всю их допустимую совокупность  $X^+$ ,  $x^+ \in X^+$ ;
- набор выходных воздействий (выходов) в системе –  $x^-$  и всю их возможную совокупность  $X^-$ ,  $x^- \in X^-$ ;

- набор параметров, характеризующих свойства системы, постоянные во все время рассмотрения, и влияющих на выходные воздействия системы –  $a$ , всю их допустимую совокупность –  $A$ , где  $a \in A$ ;
- набор параметров процесса, характеризующих свойства системы, изменяющиеся во время ее рассмотрения (параметры состояния –  $y$ ), и всю их допустимую совокупность –  $T$ ,  $t \in T$  (параметры процесса);
- правило  $S$  (функция, оператор) определения параметров состояния системы по входам  $x^+$ , постоянным параметрам  $a$  и параметру процесса  $t$ .

Заметим, что мы всегда будем различать величины и правило их определения. Здесь запись  $y = S(x^+, a, t)$  означает нахождение параметров по этому правилу, в то время как о величине  $y$  можно говорить и вне правила ее определения.

- правило  $V$  (функция, оператор) определения выходных характеристик системы по входам  $x^+$ , постоянным параметрам  $a$ , параметру процесса  $t$  и параметру состояния  $y$ , т.е.  $x^- = V(x^+, a, t, y)$ ;
- правило  $\bar{V}$  (функция, оператор) определения выходных характеристик системы по входам  $x^+$ , постоянным параметрам  $a$ , параметру процесса  $t$ . Указанное правило  $\bar{V}$  может быть получено постановкой правила  $S$  в правило  $V$ , что дает исключение из него параметров состояния:  $x^- = \bar{V}(x^+, a, t, y)$ .

На основании введения вышеуказанных воздействий, параметров и правил модель может быть записана как кортеж:

$$\Sigma: \{x^+, x^-, a, t, y, S, V, \bar{V}\}, \quad (2.1)$$

где  $x^+ \in X^+$ ,  $x^- \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in T$ ,  $y \in Y$ .

*Пример:* рассмотрим в качестве модели систему дифференциальных уравнений:  $\frac{dy}{dt} + Ay = f(t)$ , решаемую для различных начальных условий и различных правых частей.

В этом случае имеем:

- входы: начальные условия вектор правых частей  $f(t)$ , значение  $t_1$ , до которого необходимо интегрировать систему;
- выход: значение  $y(t_1) \overset{\Delta}{=} y_1$ ;
- неизменные параметры системы: матрица  $A$ ;
- параметр состояния: вектор  $y$ ;
- параметр процесса:  $t$ ;
- правило  $S$ : решение дифференциального уравнения в зависимости от начальных условий, констант, правых частей и аргумента –  $y = y(t_0, y_0, A, f(t), t)$ ;

- правило  $V$ : подстановка в решение дифференциального уравнения значения  $t_1$ :  $y_1 = y|_{t=t_1}$ ;
- правило  $\bar{V}$ : зависимость  $y_1 = y(t_0, y_0, A, f(t), t_1)$ .

### 2.3.1.1. Модель с управлением

Для этого сделаем расширение формальной записи модели (2.1) – включим в нее управление. Рассматриваем управляемый процесс (правило перехода)  $S^u$  (как в разд. 1.2.6).

Пусть это правило  $S^u$  позволяет выбором управления  $u$  из некоторой фиксированной совокупности  $U$  достигать значения параметра состояния  $y_G$ , которое, в свою очередь обеспечивает получение управляемых выходных воздействий  $f$  в виде  $f_G$ , соответствующих выполнению цели  $G$  (как в разд. 1.2.6). Кorteжная запись управляемой модели имеет вид:

$$\Sigma: \{x^+, x^-, f_G, a, u, t, y, S^u, V, \bar{V}^u\}, \quad (2.2)$$

где  $x^+ \in X^+$ ,  $x^- \in X$ ,  $a \in A$ ,  $u \in U$ ,  $t \in T$ ,  $y \in Y$ .

### 2.3.2. Свойства модели (анализ формулы 2.1)

1. Линейность и нелинейность. Оно обычно расшифровывается как линейная (нелинейная) зависимость от входов операторов  $S$  (линейность или нелинейность параметров состояния) или  $\bar{V}$  (линейность или нелинейность модели в целом). Линейность может являться как естественным, хорошо соответствующим природе, так и искусственным (вводимым для целей упрощения) свойством модели.

2. Непрерывность или дискретность. Оно выражается в структуре множеств (совокупностей), которым принадлежат параметры состояния ( $y$ ), параметр процесса ( $t$ ) и выходы системы.

Таким образом, дискретность множеств  $U$ ,  $T$ ,  $X$  – ведет к *дискретной модели*, а непрерывность их – к модели с непрерывными свойствами.

Здесь необходимо отметить, что дискретность входов (импульсы внешних воздействий) в общем случае не ведет к дискретной модели в целом (естественная дискретность, искусственная дискретность).

3. Конечность или бесконечность – характеристика дискретной системы – числа состояний системы (2.2) и числа значений выходных характеристик.

4. Детерминированность или стохастичность. Если в модели среди величин  $x^+$ ,  $a$ ,  $y$ ,  $x^-$  имеются случайные, т.е. определенные лишь некоторыми вероятностными характеристиками, то модель называется стохастической (вероятностной, случайной). В этом случае и все результаты, полученные при рассмотрении модели, имеют стохастический характер. С точки зрения практики граница между стохастической и детерминированной моделью расплывчата.

5. Стационарность и нестационарность (правила или процесса): пусть в рассматриваемом правиле присутствует параметр процесса, которым для удобства понимания будем считать время. Возьмем все внешние условия применения данного правила одинаковыми, но в первом случае мы применяем правило в момент  $t_0$ , а во втором – в момент  $t_0 + \theta$ .

*Вопрос*: будет ли результат применения правила одинаковым?

*Ответ*: **да** – следовательно правило (процесс) стационарны, **нет** – нестационарны.

Если все правила в модели стационарны, то стационарной называется и сама модель.

Чаще всего стационарность выражается в неизменности во времени некоторых физических величин:

- стационарный поток жидкости с постоянной скоростью;
- стационарная механическая система, в которой силы зависят только от координат и не зависят от времени.

Для отражения стационарности в формальной записи в правило  $S$  введем зависимость начальных условий процесса  $t_0, y_0$  и зависимость входов от параметров  $t$ :

$$y = S(x^+(t), a, t, t_0, y_0), \quad (2.3)$$

тогда для стационарного процесса имеет место равенство:

$$S(x^+(t+\theta), a, t+\theta, t_0+\theta, y_0) = S(x^+(t), a, t, t_0, y_0). \quad (2.4)$$

Аналогично определяется стационарность правил  $V$  и  $\bar{V}$ .

6. Вид составляющих кортежа (см. формулу (2.1)). Простейший случай – когда входы, выходы и параметры  $a$  в системе – это числа, а правило  $\bar{V}$  – математическая функция.

Широко распространена ситуация, когда входы и выходы есть функции параметра процесса, правила  $S, V, \bar{V}$  тогда являются либо функциями, либо операторами и функционалами.

Функциями от параметров состояния могут быть и те параметры системы, которые мы ранее называли постоянными, – эта ситуация удобна для исследования модели на ЭВМ.

## 2.4. Имитационное моделирование

Для примера рассмотрим модель, которая является дифференциальным уравнением. Решим его двумя способами. В первом случае получим аналитическое решение, запрограммируем найденный набор формул и рассчитаем на ЭВМ ряд интересующих нас вариантов.

Во втором случае воспользуемся одним из численных методов решения и для этих же вариантов проследим изменение системы от начальной точки до конечной (заданной).

Если запись аналитического решения сложна, включая операции вычисления интеграла, то трудоемкость обоих способов будет вполне сравнима.

Какая разница между этими двумя способами?

Первый способ: решение в конечной точке как функция начала и постоянных коэффициентов дифференциального уравнения.

Второй способ: для нахождения решения повторяется путь, который система проходит от начальной точки до конечной точки. В ЭВМ осуществляется воспроизведение, имитация хода процесса, позволяющая в любой момент знать и при необходимости фиксировать его текущие характеристики, такие, как интегральная кривая, произведение (в этом и есть суть имитационного моделирования на ЭВМ – при распространении на классы систем с большим набором данных).

**Вывод:** моделирование процессов с многократным отслеживанием хода их протекания каждый раз для различных условий называется имитационным моделированием.

Цель этого вида моделирования – получить представление о возможных границах или типах поведения системы, влияниях на нее управлений, случайных воздействий, изменения в структуре и других факторов.

Важной особенностью имитационного моделирования является удобное включение человека, его знаний, опыта интуиции в процедуру исследования модели. *Человек изменяет сценарий имитации.*

Имитационное моделирование является одной из форм диалога человека с ПЭВМ. Происходит удачное сочетание математического моделирования и имитационного.

## 2.5. Моделирование сложных систем

Рассматриваемые ранее модели характеризуют всю систему целиком. Единая модель для всей сложной системы – макромодель – годна лишь для приблизительных оценок (груба). Попытка уточнить – приводит к росту сложности. Поэтому при моделировании сложных систем вводят *декомпозицию и деление на модули*. Итак, основной спецификой моделирования сложной системы является учет связей между отдельными моделями (говорят также согласование моделей).

Как это достигается: строится схема взаимосвязанных моделей типа графовой структуры, в которых выходы одних моделей (модулей) являются входами других. При этом каждый отдельный модуль представляет собой модель в смысле определенной формулы (2.1) или (2.2). Для них фиксируется совокупность требований на входы. Работу с совокупностью моделей можно представить как «прохождение» задачи через эту совокупность, результатом которой является определение выходов сложной системы в целом.



Рис.2.2. Схема прогнозирования экологического состояния региона.

Можно указать на две важные части описанной процедуры. Первая – построение или выбор моделей для декомпозированных частей системы (математическое описание). Вторая – согласование моделей (системный подход).

Для примера рассмотрим общую схему прогнозирования экологического состояния региона, которую представим как совокупность моделей для исследования развития экологического состояния региона (рис. 2.2).

Наиболее сложным для моделирования является блок «модель изменения природных условий». Все основные компоненты блока – атмосфера, почва, растительность, водный бассейн, погода – связаны друг с другом зависимостями, которые на практике выявить не просто.

Если же не учитывать часть этих связей, то есть риск упустить из виду возможные варианты резкого изменения экологического состояния. Практическое использование моделей сложных систем чаще всего носит характер имитации.

### **2.5.1. Возможности компьютерного моделирования сложных систем**

Можно выделить следующие возможности, реализуемые при компьютерном моделировании:

- осуществляются различные согласования по времени (модулей);
- проверяются соответствие и достоверность данных;
- управляются потоки информации;
- организуются банки данных и т.д.

Таким образом при компьютерном моделировании выполняются все основные операции с моделями сложных систем.

Совокупность нужных моделей банка данных и разнообразных обслуживающих программных средств принято называть **модельно-вычислительным комплексом**.

Сам набор моделей, полностью готовых для использования, называют **библиотекой моделей** (речь идет о математической модели в виде набора формул, систем уравнений, алгоритма, а также набор текстов, способов и др. в других видах моделей).

#### **Контрольные вопросы:**

1. Что называют моделью? Какие типы моделей Вы знаете?
2. Перечислите свойства модели.
3. Что такое кортежная запись?
4. Как осуществляется моделирование сложных систем?
5. Что такое имитационное моделирование?

### 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ОСНОВНЫХ ЭТАПОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

#### **Вопросы:**

- 3.1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики.
- 3.2. Статистическая обработка данных экологического мониторинга природной среды.

#### **3.1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики**

*Теория вероятностей* (ТВ) – одна из самых общих моделей мироздания, обобщающая представление о феномене случайности.

Одно из основных понятий ТВ является понятие «случайное событие».

*Случайное событие* – всякий факт, который в результате эксперимента может произойти **или** не произойти.

Модель ТВ ориентирована на описание поведения сложных систем, элементы которых или неразличимы, или, по крайней мере, их свойства остаются неизменными во времени и пространстве [5].

Сравнивая реальное поведение какого-либо объекта с его «идеальным» представлением, получаем некоторую оценку, которая называется **статистикой** [6].

На основе статистики проверяются конкурирующие гипотезы (можно ли считать, что реальность соответствует «идеалу» или она отлична от него?). В анализе данных в большинстве случаев решается именно эта задача.

##### **3.1.1. Основные понятия моделей статистики:**

– **множество** – с одной стороны – это множество элементов (особей), с другой стороны – это множество свойств или переменных, которыми характеризуются эти элементы.

– **пространство** – в широком смысле это среда, в которой существует множества, например, в математике пространство множеств элементов.

– **метризация** – рассматривая множество как пространство, учитывают только те свойства, которые устанавливаются принятыми во внимание или введенными по определению уточнениями.

Эти отношения между элементами или классами элементов обуславливают геометрию пространства.

Чаще всего в качестве отношения проводится анализ расстояний или дистанций между точками (классами), найденных на множестве рассматриваемых свойств. Введение отношения расстояния и есть метризация.

### **3.1.2. Свойства множеств и действия с ними**

#### **3.1.2.1. Равенство множеств**

Множество  $A$  равно множеству  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  принадлежит множеству  $B$ .

Пример 1:  $A$  (ель, береза, сосна) и  $B$  (сосна, береза, ель) – множества равны, но только в том случае, если в качестве элемента не рассматривается их место в строчке записи.

**Свойства равенства:**

– *рефлексивности*:  $A = A$ ;

– *симметричности*: если  $A = B$ , то  $B = A$ ;

– *транзитивности*: если  $A = B$  и  $B = C \Rightarrow A = C$ .

Все это представляется очевидным, однако если с течением времени число элементов во множестве изменяется, то свойство рефлексивности исчезает (см. пример 1: вырубили березу). В рамках данной логической конструкции это уже будут разные множества. Поэтому, применяя модели к реальному объекту с изменяющимся числом элементов, получаем искаженное отображение реальности.

#### **3.1.2.2. Объединение множеств**

Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B$  ( $A+B$ ), образованное всеми элементами, которые принадлежат хотя бы одному из множеств.

Пример 2: [ель, береза, сосна] и (+) [ель, береза, осина] = [ель, береза, сосна, осина].

(формы записи:  $C = \sum_{i=1}^n A_i$  или  $C = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ).

#### **3.1.2.3. Пересечение множеств (произведение или совмещение)**

Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B$  ( $A \cdot B$ ), образованное элементами, которые принадлежат каждому из множеств.

В примере 2 это [ель, береза] =  $C = A \cdot B$  (формы записи:  $C = \prod_{i=1}^n A_i$  или  $C = \bigcap_{i=1}^n A_i$ ). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом  $\emptyset$ .

#### 3.1.2.4. Часть множества

Произвольное множество  $A$ , каждый элемент которого принадлежит множеству  $B$ , называется частью множества  $B$ .  $A \subseteq B$ .

##### **Свойства объединения:**

– пустое множество  $A = \emptyset$  по определению является подмножеством  $B$ ;

–  $A = B$  – является частью множества  $B$ .

Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то говорят, что множество  $A$  строго содержится в множестве  $B$  и записывается  $A \subset B$ .

#### 3.1.2.5. Дополнение

Дополнением части  $A$  множества  $B$  называется часть  $(B - A)$  множества  $B$ . В примере 2 это осина (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Объединение множеств  $A$  и  $B$  ( $A \cup B$ ).

Объединение (логическая сумма) множеств  $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$  – объединение без пересечения.

#### 3.1.2.6. Свойства объединения (суммы) и пересечения (произведения) множеств:

а) коммутативности:  $A \cup B = B \cup A$ ,  $(A + B = B + A)$  ;  $A \cap B = B \cap A$ ,  $(A \cdot B = B \cdot A)$ ;

б) ассоциативности:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  или  $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ ;

в) дистрибутивности:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  или  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ ;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  или  $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ ;

г) объединение трех множеств есть:

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (A \cup C) \cup (B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

или  $A + B + C = (A + B) + (A + C) + (B + C) - (A \cdot B \cdot C)$ ;

д) противоположное множество: множество  $-A$  противоположно и равно множеству  $A$ , т.е.  $A + (-A) = 0$  ( $A \cup A = 0$ ),  $\Rightarrow A = -A$ .

### 3.1.3. **Частота события. Непосредственный подсчет вероятностей**

*Событие* определяется тем, происходит или не происходит некоторое явление. Таким образом, событие есть то же, что в системном анализе было определено как состояние системы (*условие состояния системы*).

**Алгебра событий** – та же, что и алгебра теории множеств. Применяются те же обозначения: событие  $A$ , событие  $B$ . Операции пересечения и объединения обозначаются также:

- $A \subset B$  –  $A$  влечет за собой появление  $B$  ( $A$  часть множества  $B$ );
- $A=B$  – события  $A$  и  $B$  эквивалентны;
- $A \cap B = A \cdot B$  – пересечение событий возможно, только когда произошли оба события;
- $AB=0$  – события не могут произойти совместно;
- $A \cup B$  – если события совместны, а если нет, то записывать надо  $A+B$ ;
- $\bar{A}$  – событие противоположное  $A$ .

В научных исследованиях **события** разделяются на «условия» и «исходы».

**Условия эксперимента** – это известные события или события, которые тем или иным способом осуществляются экспериментатором.

**Исходы эксперимента** – это события, которые могут произойти, когда осуществляются соответствующие условия.

Все комбинации исходов по известным условиям, образуемые с помощью операций «не», «или», «и», – также являются исходами.

Эколог вынужден чаще использовать результаты эксперимента, осуществленного или осуществляемого самой природой. В таком варианте событиями («условиями») становится то, что в системе определено как входы, а «исходами» – как выходы, а вся система становится ничем иным, как **испытанием**.

Пример 3: установить связь состава древесного яруса с механическим составом почв: «условия» – древесные породы; «исходы» – механический состав почв (глины, суглинки, супеси, пески). Все возможные «исходы» могут быть записаны *символами* теории множеств.

В эксперименте допускается, что каждое испытание может осуществляться сколь угодно много раз. В экологии это в большинстве случаев невозможно, но допущение множества независимых испытаний над одной и той же системой сохраняется – необходимое условие «научности» (воспроизводимости результатов).

### 3.1.3.1. Частота случайного события

Это отношение числа испытаний, в которых появилось данное событие, к общему числу испытаний. Частоту события  $A$  обозначают:

$$P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{m}{n}, \quad (3.1)$$

где  $m$  – число испытаний, в которых наступило событие  $A$ ;  $n$  – общее число испытаний.

Вероятность случайного события  $A$  есть неотрицательное число, заключенное между 0 и 1:  $0 < P(A) < 1$ , где 1 – вероятность достоверности события, 0 – вероятность невозможности события.  $P(E)$  – множество всех исходов.  $P(\emptyset) = 0$ .

Вероятность суммы (объединения) двух несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятности этих событий, т.е.:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

Аксиома независимости: два события называются независимыми, если их совместная вероятность равна произведению их вероятностей:  $P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ , а для  $n$ -независимых событий:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{k=1}^n P(A_i).$$

Условная вероятность  $P(A/B)$  – вероятность того, что произойдет событие  $A$ , если произошло событие  $B$ , т.е:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \quad (3.2)$$

Пример 4: Какова вероятность выпадения в следующем бросании монеты «герба», если перед этим выпала «решка», конечно 0,5, но если монета имеет смещенный центр тяжести, то вероятность  $P \neq 0,5$ .

Если события  $A$  и  $B$  независимы, тогда:

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A). \quad (3.3)$$

Формула полной вероятности: пусть  $A$  – некоторое событие;  $B_1, B_2, \dots, B_n$  – попарно несовместные достоверные события (полная группа гипотез), такие, что  $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_j$ , тогда справедлива **формула**

**полной вероятности:**

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A/B_j). \quad (3.4)$$

Обобщением формулы полной вероятности является **формула Бейеса**, часто используемая при распознавании образов:

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A/B_k)}, \quad (3.5)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  – полная группа гипотез.

Если события независимы, то числитель в формуле (3.5) равен  $P(B_j) \cdot P(A/B_j)$ , а знаменатель равен  $P(A)$ .

Если существует зависимость между событиями, то формула Байеса позволяет рассчитать условную вероятность любого из несовместных событий  $B_j$  по их априорным вероятностям  $P(B_k)$  и  $P(A/B_k)$ .

Пример 5: простейшая модель случайного процесса биномиального распределения:

Дано: коробка с желтыми и синими сливами.

Вероятность события «желтая слива – 0» =  $p$ .

Вероятность события «синяя слива – 1» =  $1-p=q$ .

Будем вынимать по 3 сливы. Каждое изъятие слив будет означать элементарное событие. После оценки вынутой комбинации слив их возвращают назад и вновь перемешивают. Эта схема организации модели называется *схемой Бернулли*.

В конкретной схеме существует 8 элементарных событий ( $e$ ), но если нас интересует порядок появления слив в элементарном событии, то  $P(\text{желтая слива} - 0 \text{ раз}) = q^3$ ;  $P(\text{желтая слива} - 1 \text{ раз}) = 3pq^2$ ;  $P(\text{желтая слива} - 2 \text{ раза}) = 3p^2q$ ;  $P(\text{желтая слива} - 3 \text{ раза}) = p^3$ .

Очевидно, что существует правило, по которому можно рассчитать число комбинаций, в которых на любом месте может быть встречено  $k$ -слив одного из двух сортов из общего числа  $N$ -слив, образующих элементарные события (формула Бернулли – биномиальное распределение):

$$P_n(k) = C_N^k p^k q^{(N-k)} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k q^{(N-k)}, \quad (3.6)$$

где  $q=1-p$ ;  $P_n(k)$  – вероятность появления события  $A$  равно  $k$ -раз при  $n$ -независимых испытаниях,  $p$  – вероятность появления события  $A$  (пример – желтая слива):

1) наступит  $n$  раз  $P_n(N) = p^N = 0,5^3 = 0,125 = 1/8$  (если желтых и синих слив поровну:  $p=q=0,5$ );

2) не наступит ни разу (0)  $P_n(0) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{0! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 0,5^0 \cdot 0,5^3 = 1 \cdot 0,125 = 1/8$ .

$P_n(0) = (1-p)^N$ ;

3) наступит хотя бы один раз:  $P_n(k=1) = 1 - (1-p)^N$ .

$P(k=1) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 2 \cdot 1} 0,5^1 \cdot (1-0,5)^{3-1} = 3 \cdot 0,125 = 3/8$ ;

4) наступит не более  $k$ -раз:  $P_n = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$ .

Так как биномиальные коэффициенты можно рассчитать для числа  $n$  опытов (вынимаемых слив) и любого значения параметра  $p$  – доли (вероятности слив желтого цвета в коробке – желаемого события), то  $p(k)$  – функция распределения числа слив желтого цвета при

сколь угодно большом числе испытаний, или в иной терминологии (игровой) – вероятность успеха.

Биноминальное распределение может быть записано в дифференциальной форме  $F(k)=p(k)$  или в кумулятивной  $F(k)=\sum_{\kappa} p(\kappa)$ . Для

рассматриваемого примера можно поставить вопрос, сколько желтых слив  $\kappa$  выпадет среди  $n$  опытов (всех доставаемых слив). Эту величину будем называть математическим ожиданием (например – *успеха*):  $M(\kappa)=n \cdot p$ .

Термин «*математическое ожидание*» имеет глубокий смысл, и его нужно точно понимать. В реальной выборке, даже если сливы идеально одинаковы и хорошо перемешаны, число «успехов» совершенно необязательно будет равно  $n \cdot p$ . Оно может весьма существенно отличаться от этой величины. Это ожидаемое число успехов, но может быть как больше, так и меньше. Значение  $n \cdot p$  рассчитывается на основе знания параметра  $p$  и числа  $n$  опытов (всех доставаемых слив).

Для моделей случайного процесса необходимо напомнить базовые функции комбинаторики.

### 3.1.4. Основные функции комбинаторики

1. Число различных перестановок из  $\kappa$  – различных объектов:

$\kappa! = \kappa(\kappa-1)(\kappa-2)\dots$  – все элементарные события рассматриваются принадлежащими только себе и их пересечение пусто.

2. Число различных (сочетаний) последовательностей из  $N$  объектов, содержащих  $\kappa \leq N$  неразличимых объектов типа 1 и  $(N-\kappa)$  неразличимых объектов типа 2 (число сочетаний из  $N$  элементов по  $\kappa$ ):

$$C_N^K = \binom{N}{\kappa} = \frac{N!}{(N-\kappa)!\kappa!}, \quad (3.7)$$

например, объекты  $(N)$  – число слив в одном элементарном событии,  $\kappa$  – число желтых слив,  $C_N^K$  – число сочетаний из  $N$  по  $\kappa$ .

3. Число различных неупорядоченных сочетаний из  $N$  объектов различного типа по  $n$  в каждом:

– объект каждого типа может встретиться не более 1 раза в любом сочетании (сочетании без повторений):

$$C_N^K = \binom{N}{n} = \frac{\kappa!}{(N-\kappa)!}; \quad (3.8)$$

– число различных размещений взятых из  $N$ -элементов по  $\kappa$ :

$$A_N^K = \frac{\kappa!}{(N - \kappa)!}. \quad (3.9)$$

4. Число различных выборок (размещений, упорядоченных рядов) объема  $n$  из совокупности  $N$  различного типа объектов:

– объект каждого типа может встречаться  $0, 1, 2, 3, \dots, n$  раз в каждой выборке (выборке с возвращением, размещения с повторением).

### 3.1.5. Распределения случайных событий

Распределения случайных событий обычно подразделяются на *дискретные* и *непрерывные*. Основными параметрами распределений являются: математическое ожидание, медиана, мода, коэффициент вариации.

#### 3.1.5.1. Математическое ожидание (центр распределения):

$M_x = \sum_x xp(x)$  – дискретное распределение;

$M_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$  – непрерывное распределение;

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  – форма расчета по выборке – центр тяжести мно-

жества измерений – характеризует положение величины  $x$ .

#### 3.1.5.2. Медиана

$X_{1/2}$   $F(x)=0,5$ ;  $X(1/2) = \sum_{i=1}^{N/2} n(x_i) = \frac{N}{2}$  – форма расчета по выборке –

числовое значение ( $X_i$ ), делящее распределение пополам.

#### 3.1.5.3. Мода

$f(x)=\max$  – непрерывное распределение;

$f(x_{i-1}) < f(x) > f(x_{i+1})$  – дискретное распределение.

Форма расчета по выборке:

– мода непрерывного распределения, это точка максимума плотности распределения вероятности  $f(x)$ ;

– мода дискретного распределения, это такое значение  $P(\kappa)$ , что предшествующее и следующее за ним значения имеют вероятности меньше, чем  $P(\kappa)$ .

Распределение может иметь две и более мод, в этом случае распределение называется **бимодальным** или **полимодальным**.

Мода – наиболее типичное состояние. Обычно бимодальные распределения свидетельствуют о неоднородности выборки.

#### 3.1.5.4. Коэффициент вариации

Коэффициент вариации есть отношение среднеквадратичного отклонения к среднему значению:

$$v = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \quad (3.10)$$

### 3.1.5.5. Одномерные дискретные распределения

#### 1. Биноминальное распределение:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad (3.11)$$

где  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $0 \leq p \leq 1$  (см. п. 3.1.3.);  $P(x)$  есть вероятность появления события точно  $x$ -раз в  $n$ -независимых испытаниях по схеме Бернулли при условии, что вероятность события в каждом испытании равна  $p$ .

#### 2. Геометрическое распределение

$P(x)$  – есть вероятность появления события типа 1 в первый раз после точно  $x$  – испытаний по схеме Бернулли, при его вероятности  $p$ :

$$P(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad (3.12)$$

где  $x = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $0 \leq p \leq 1$ .

Тогда:

– математическое ожидание  $M_x = (1-p)/p$ ;

– дисперсия  $D_x = \sigma_x^2 = (1-p)/p^2$ ;

– плотность распределения  $f(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$  – есть вероятность того, что первый успех появится самое большее после  $x$  испытаний.

3. Распределение Пуассона (распределение редких событий). Распределение Пуассона аппроксимирует гипергеометрическое и биномиальное распределения, когда  $pN \rightarrow \lambda$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ . Это приближение обычно применяется при  $p < 0,1$ :

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad (3.13)$$

где  $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $\lambda > 0$ .

Тогда  $M_x = D_x = \lambda$ .

### 3.1.5.6. Одномерные непрерывные распределения

#### 1. Нормальное распределение – базовое для всей статистики.

Моделью такого распределения может быть в частности функция:

$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ , где  $X_i$  – независимые переменные, принимающие значения от 0 до  $n$  при примерно равных значениях коэффициентов  $a_i$ . Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2}, \quad (3.14)$$

где  $m_x$  – математическое ожидание;  $\sigma_x$  – среднеквадратичное отклонение.

Если положить, что  $U=(x-m_x)/\sigma$ , т.е. рассматривать вместо распределения реальных значений  $x$ , значения, представленные в форме отклонения от среднего нормированного на среднеквадратичное, то получаем распределение стандартизованной нормативной величины:

$$f(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}U^2}. \quad (3.15)$$

2. Логнормальное распределение описывается формулой:

$$\log Y=a_1\log X_1+a_2\log X_2+.....a_n\log X_n. \quad (3.16)$$

Тогда математическое ожидание

$$M_x = m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i \Rightarrow \exp M_x = (X_1 + X_2 \dots X_n)^{\frac{1}{n}} -$$

есть среднегеометрическое.

$$\text{Дисперсия } D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log X_i - m_x)^2.$$

В результате реальные отклонения от среднегеометрического в потенцированных значениях будут равны:  $\Delta=e^{t\sigma}$ .

### 3.2. Статистическая обработка данных экологического мониторинга природной среды

Статистическая обработка результатов имеет две основные задачи:

– представить результаты нескольких измерений в компактной форме;

– оценить надежность полученных результатов, т.е. степень их соответствия истинному значению определяемой величины.

Для решения этих задач необходимо предварительно оценить значимость и воспроизводимость полученных результатов.

#### 3.2.1. Значимость результатов

Значимость результатов оценивается, если в серии параллельных определений один из результатов представляется сомнительным, т.е. довольно значительно отличается от всех других результатов. Чтобы решить, оставлять этот результат для вычисления среднего или отбросить как промах, оценивается его значимость с помощью Q-критерия, который также называют критерием значимости:

$$Q=\frac{|x_1-x_2|}{R}, \quad (3.17)$$

где  $x_1$  – сомнительный результат;  $x_2$  – результат, который ближе всего к  $x_1$  по значению;  $R$  – размах варьирования – разность между предель-

ными значениями определяемой величины, т.е. ее максимальным и минимальным значениями.

Вычисленное значение  $Q$ -критерия сравнивают с табличным значением, которое определяется по табличным данным (в зависимости от  $n$  – число опытов и  $P$  – доверительная вероятность). В табл. 3.1 приведено значение  $Q$  для значения доверительной вероятности  $P=0,95$ . Сомнительный результат следует отбросить, если  $Q > Q_{\text{табл.}}$ , если же  $Q < Q_{\text{табл.}}$ , его оставляют для дальнейших расчетов. Если при проверке значимости результатов принимаем  $P=0,95$ , то это означает, что результат будет значим не менее чем в 95 случаях из 100.

Таблица 3.1

| Значение $Q_{\text{табл}}$ при $P=0,95$ |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n$                                     | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| $Q$                                     | 0,94 | 0,77 | 0,64 | 0,56 | 0,51 | 0,48 | 0,44 | 0,42 |

Используя только значимые результаты, находят среднее значение по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (3.18)$$

где  $x_i$  – каждый значимый результат;  $n$  – количество значимых результатов.

### 3.2.2. Воспроизводимость результатов

Зная среднее значение, можно оценить воспроизводимость результатов, т.е. степень близости отдельных результатов к среднему значению.

Количественной характеристикой является стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение или разброс распределения):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (3.19)$$

где  $x_i$  – каждое измеренное значение;  $\bar{x}$  – среднее значение;  $n$  – число измерений.

Среднеквадратичное отклонение ( $\sigma_x$ ) равно 0, если каждое единичное измерение равно среднему значению, т.е. при абсолютной воспроизводимости. Таким образом, чем больше величина стандартного отклонения, тем хуже воспроизводимость результатов.

Квадрат стандартного отклонения называют **дисперсией** – он также может рассматриваться как характеристика воспроизводимости:

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (3.20)$$

**Дисперсия** характеризует рассеяние величины  $x$  (мощность явления – объем многомерного параллелепипеда со сторонами  $(x_i - \bar{x})$ ).

Соотношение дисперсий двух рядов называется **критерием Фишера** ( $F$ -критерием) и позволяет определить, принадлежат ли эти ряды к одной генеральной совокупности:

$$F = \frac{D_{x2}}{D_{x1}}, \text{ причем } D_{x2} > D_{x1}. \quad (3.21)$$

Вычисленный  $F$ -критерий сравнивают с табличным значением (он зависит от  $n$  и  $P$ ). В табл. 3.2 приведены значения  $F$ -критерия для доверительной вероятности  $P=0,95$ .

Таблица 3.2

**Значения  $F$ -критерия для доверительной вероятности  $P=0,95$**

| $n_1 \backslash n_2$ | 3   | 4   | 5   | 6    | 7    | 8     |
|----------------------|-----|-----|-----|------|------|-------|
| 3                    | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 19,5 | 19,3 | 19,35 |
| 4                    | 9,5 | 9,3 | 9,1 | 9,0  | 8,9  | 8,85  |
| 5                    | 7,0 | 6,7 | 6,4 | 6,3  | 6,2  | 6,0   |
| 6                    | 5,8 | 5,5 | 5,2 | 5,1  | 5,0  | 4,9   |
| 7                    | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,4  | 4,3  | 4,2   |
| 8                    | 4,7 | 4,4 | 4,1 | 4,0  | 3,9  | 3,8   |

Если вычисленный  $F$ -критерий меньше табличного значения, то можно считать, что оба ряда характеризуют одну и ту же генеральную совокупность.

### 3.2.3. Оценка надежности результата

Пользуясь найденным значением среднеквадратичного отклонения ( $\sigma_x$ ), можно оценить надежность единичного и среднего результата, решив тем самым одну из главных задач статистической обработки.

Под оценкой надежности результатов понимают нахождение доверительных границ.

**Доверительные границы** – это пределы области вокруг экспериментально найденного единичного или среднего результата, внутри которой следует ожидать с заданной степенью доверительной вероятности нахождения истинного значения единичного или среднего результата.

Вероятность нахождения истинного значения в доверительном интервале задается через коэффициент нормированных отклонений –  $t_\beta$ :

$$t_\beta = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma_x}, \quad (3.22)$$

где  $\varepsilon$  – ширина интервала.

$t_\beta$  может быть определен по табличным данным в зависимости от доверительной вероятности ( $P$ ) и числа степеней свободы ( $n-1$ ). В табл. 3.3 приведены значения коэффициента нормированных отклонений ( $t_\beta$ ) при различной ширине интервала.

**Доверительный интервал** – это интервал, который с заданной доверительной вероятностью (надежностью)  $P$  покрывает оцениваемый параметр  $x$ .

Таблица 3.3

**Зависимость коэффициента нормированных отклонений ( $t_\beta$ ) от числа степеней свободы ( $n-1$ ) и доверительной вероятности  $P$**

| $n-1$ | Значения $t_\beta$ |            |              |
|-------|--------------------|------------|--------------|
|       | $P = 95\%$         | $P = 99\%$ | $P = 99,5\%$ |
| 1     | 12,71              | 63,70      | 63,70        |
| 2     | 4,30               | 9,92       | 31,60        |
| 3     | 3,18               | 5,84       | 12,94        |
| 4     | 2,77               | 4,60       | 8,61         |
| 5     | 2,57               | 4,03       | 6,86         |
| 6     | 2,45               | 4,71       | 5,96         |
| 7     | 2,36               | 3,50       | 5,40         |
| 8     | 2,31               | 3,36       | 5,04         |
| 9     | 2,26               | 3,25       | 4,78         |

В случае малой выборки, доверительные границы находят из уравнений:

– единичное измерение:

$$\varepsilon = x \pm t_\beta \cdot \sigma_x; \quad (3.23)$$

– среднее из нескольких измерений (нескольких результатов):

$$\varepsilon = \bar{x} \pm \frac{t_\beta \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (3.24)$$

где  $t_\beta$  – коэффициент нормированных отклонений;  $\sigma_x$  – стандартное отклонение;  $n$  – число измерений.

Зная доверительные границы, легко можно найти погрешность измерений в % по формуле:

$$\Delta = \frac{t_{\beta} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n} \cdot \bar{x}} \cdot 100\%. \quad (3.25)$$

### **3.2.4. Параметрические критерии проверки гипотез**

Из закона больших чисел следует, что с увеличением числа экспериментов уменьшается средняя квадратическая ошибка:

$$m = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (3.26)$$

где  $\sigma_x$  – среднеквадратичное отклонение;  $n$  – число значимых результатов опыта.

Чем меньше ошибка, тем лучше оценка математического ожидания генеральной совокупности по выборке, следовательно, с помощью среднеквадратичной ошибки можно образовать критическую область проверки гипотезы. Это осуществляется с помощью критерия Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{x} - M_x}{m}, \quad (3.27)$$

где  $\bar{x}$  – выборочное среднее;  $M_x$  – математическое ожидание;  $m$  – среднеквадратичная ошибка.

В общем случае, если критерий Стьюдента ( $t$ ) возрастает, то вероятность ( $P$ ) принадлежности выборочного среднего ( $\bar{x}$ ) к генеральной совокупности падает. По умолчанию, когда о генеральной совокупности ничего не известно, ее  $M_x$  принимается равным 0, тогда  $t$ -критерий образует критическое множество относительно генеральной совокупности с  $M_x=0$ . При  $t=0$  критическая область определяет, что с вероятностью 1 выборочное среднее соответствует математическому ожиданию генеральной совокупности.

### **3.2.5. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов**

Для нахождения оценок параметров функциональной зависимости между переменными, значения которых определяются из опыта применяется метод наименьших квадратов, предложенный Лежандром–Гауссом.

Рассмотрим метод на примере. Даны две величины:  $x$  и  $y$ . Для них имеем таблицу экспериментов (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Таблица экспериментов

|     |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ..... | $x_n$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ..... | $y_n$ |

Эти две величины могут быть связаны зависимостью, определяемой различными формулами:

а) линейной  $y=ax+b$  ( $y=kx$ );

б) квадратичной  $y=ax^2+bx+c$ ;

в) кубической  $y=ax^3+bx^2+cx+d$  и т.д.

Найти: коэффициенты  $a$  (или  $k$ ),  $b, c, d$  и т.д.

Решение:

а) Простейший случай  $k=y_1/x_1$  – для  $y=kx$ , но одного опыта мало, для нескольких опытов:

$$k = \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \dots + \frac{y_n}{x_n}}{n}, \quad (3.28)$$

где  $k$  – среднеарифметическое.

б) Если экспериментов больше двух, то для зависимости  $y = ax + b$  нужно применять уже способ:

первая строка табл. 3.4 приводит к набору из  $n$ -чисел:

$z_i = ax_i + b$  ( $i=1, 2 \dots n$ ), зависящему от  $a$  и  $b$ .

В идеале необходимо выбрать так  $a$  и  $b$ , чтобы при всех  $i$ :

$z_i = y_i$  ( $i=1, 2 \dots n$ ).

Реально же зависимости:  $ax_1+b=y_1$ ;  $ax_2+b=y_2$ ;  $ax_3+b=y_3$  отличаются коэффициентами, следовательно, не удастся для всех  $i$  выполнить условие:  $z_i - y_i = 0$  ( $i=1, 2 \dots n$ ).

В основе способа наименьших квадратов лежит следующий принцип.

Искомыми значениями  $a$  и  $b$  являются те, при которых сумма квадратов разностей  $\sigma = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2$  оказывается наименьшей, т.к.  $\sigma = f(a, b)$ , следовательно,  $a$  и  $b$  находят из системы уравнений (которые называются нормальными):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial a} = 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial b} = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Важно отметить, что какой бы формулой заранее заданного вида, но с неизвестными коэффициентами  $a, b, c$  ни были связаны  $x$  и  $y$ , с использованием табл. 3.4 можно составить уравнения.

Таким образом, для линейной зависимости  $y=ax+b$   $\sigma = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$  получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \end{cases} . \quad (3.30)$$

(3.30) можно записать в виде:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} . \quad (3.31)$$

Далее из первого уравнения в системе (3.31) выразим  $a$  и подставим его во второе уравнение системы (3.31), после чего найдем  $b$ . Найденное  $b$  подставим в первое уравнение и найдем  $a$ .

Если имеем квадратичное уравнение  $y=ax^2+bx+c$ , то для него сумма запишется в виде:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 . \quad (3.32)$$

С учетом (3.32) получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial c} = 0 \end{cases} \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

(3.33) можно записать в виде:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n c = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (3.34)$$

**Контрольные вопросы:**

1. Перечислите основные понятия статистических моделей.
2. Перечислите свойства множеств.
3. Что понимают под вероятностью случайных событий?
4. Дайте определение основных параметров распределения случайных событий.
5. Как оценить доверительный интервал математического ожидания  $M_x$ ?

## 4. ПОПУЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

### **Вопросы:**

- 4.1. Модель Мальтуса для популяции.
- 4.2. Логистическая модель популяции.
- 4.3. Модель Лотки–Вольтерра.
- 4.4. Устойчивость популяционных моделей.

Объекты биологии и экологии и их формы развития наиболее трудно поддаются математической формализации в силу многообразия внутренней структуры. Их можно отнести к разряду сложных систем, функционирование которых основывается на законах физики, химии и биологии. Такие объекты существенно подвержены воздействию случайных процессов, возникающих в силу сложного биохимического состава и многокомпонентности объектов. Все эти факторы затрудняют построение математических моделей, адекватно описывающих биологические структуры. Наибольшее применение в биологии нашла теория динамических уравнений, позволяющая описывать динамику во времени отдельных элементов, биологических систем в целом и их взаимодействие [7].

### **4.1. Модель Мальтуса для популяции**

Точечная модель. Одним из объектов исследования в биологии являются популяции живых организмов. Для математического моделирования таких объектов используются *точечные модели*. Под точечной моделью понимается следующее. Вся популяция рассматривается как единое целое и геометрически представляется как точка. Точке приписываются некоторые физические параметры, которые характеризуют популяцию. В простейшем случае рассмотрим один параметр  $N$  – число особей в популяции. Точку, изображающую популяцию, поместим на оси  $ON$ , которую будем называть *пространством численности популяции*. Координата точки означает число особей в популяции (рис. 4.1).

Естественно, что число  $N$  зависит от времени  $t$ , так как число особей в популяции изменяется с течением времени по тем или иным причинам. Физические размерности:  $[N] = \text{ос (особь)}$ ,  $[t] = \text{мес. (месяц)}$ .

Заметим, что для многих популяций естественнее выбрать  $[t] = \text{дн. (день)}$  или  $\text{мин (минута)}$ . Очевидно, что в такой модели не учитывают индивидуальные свойства особей и их пространственное распределение.

В реальности функция  $N(t)$  принимает целочисленные значения, но для построения дифференциальной модели при моделировании используется *принцип сглаживания*. В результате чего функция  $N(t)$  считается непрерывно дифференцируемой по временному параметру  $t$ .

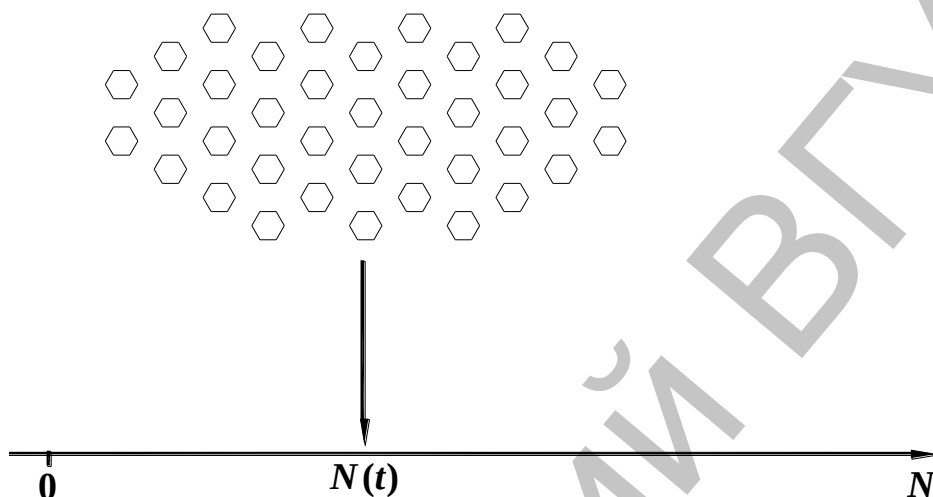


Рис. 4.1. Точечная модель.

#### 4.1.1. Дифференциальная модель

Дифференциальную модель популяции, описывающую динамику численности популяции во времени, представим в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, называемого *динамическим уравнением*. Для составления уравнения, с одной стороны, вычислим производную  $\frac{\partial N}{\partial t}$ , далее, с другой стороны, эту производную вычислим другим способом, представив ее в виде функции  $F(N(t), t)$ ,  $[F] = \frac{ос}{мес}$ . При построении функции  $F(N, t)$  используются различные допущения, определяющие точность модели. Очевидна неоднозначность построения функции  $F(N, t)$ . Таким образом, получим уравнение:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F(N, t). \quad (4.1)$$

Если в начальный момент времени  $t = 0$  известно число особей в популяции, тогда имеем начальное условие:

$$N|_{t=0} = N_0. \quad (4.2)$$

Добавляя условие (4.2) к уравнению (4.1), получим задачу Коши (4.1), (4.2). Решая задачу аналитически или численно, исследуем динамику популяции во времени.

При практическом построении функции  $F$  в общем случае ее можно представить в виде:

$$F = R - U, \quad (4.3)$$

где  $R \geq 0, U \geq 0, [R] = \frac{\text{ос}}{\text{мес}}, [U] = \frac{\text{ос}}{\text{мес}}, R$  – скорость рождения (*функция рождения*),  $U$  – скорость уничтожения (*функция уничтожения*).

Если  $U = 0, R > 0$ , то  $\frac{dN}{dt} = R > 0$ , тогда число особей растет.

Если  $R = 0, U > 0$ , то  $\frac{dN}{dt} = -U < 0$ , тогда число особей уменьшается.

Фактически представление (4.3) моделирует взаимодействие двух противоположных процессов.

Сделаем предположение, что функция  $R$  и  $U$  прямо пропорционально зависят от числа  $N$ , то есть:

$$R = \alpha(t)N(t), \quad U = \beta(t)N(t),$$

где  $\alpha$  – коэффициент рождаемости,  $\beta$  – коэффициент уничтожения. ( $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ),  $[\alpha] = \frac{1}{\text{мес}}, [\beta] = \frac{1}{\text{мес}}$ .

Интерпретируя коэффициенты, положим  $\alpha = \frac{p}{100}, \beta = \frac{q}{100}$ , где  $q \frac{\%}{\text{мес}}$  – процент особей, которые погибают за месяц по тем или иным причинам;  $p \frac{\%}{\text{мес}}$  – процент особей по отношению к численности всей популяции, которые рождаются за месяц. Таким образом, получено уравнение:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha(t) - \beta(t))N(t) \equiv k(t)N(t), \quad \text{где } k = \alpha - \beta. \quad (4.4)$$

Модель популяции, описываемая уравнением вида (4.4), называется *моделью Мальтуса*. Модель Мальтуса линейная, так как уравнение (4.4) линейное.

Проведем анализ уравнения (4.4), решив задачу Коши (4.4), (4.2): при  $\alpha, \beta = \text{const}$ , при  $k = 0, (\alpha = \beta)$ , имеем  $N(t) = N_0$ , то есть число особей в популяции не изменяется. Такое решение называется *стационарным*. При  $\alpha \neq \beta$   $N(t) = N_0 e^{kt}$ .

#### 4.1.2. Исследование автономных моделей

Уравнение (4.1) называется *автономным*, если функция  $F$  явно не зависит от времени  $t$ , то есть имеем:

$$\frac{dN}{dt} = F(N). \quad (4.5)$$

Приравняем правую часть нулю:  $F(N) = 0$ . Решая полученное алгебраическое уравнение, найдем корни  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , которые называются *стационарными точками* или *точками покоя* (*точками равновесия*) уравнения (4.5). Очевидно, что  $N(t) \equiv N_p - \text{const}$ ,  $p = 1, 2, \dots, k$  являются *стационарными решениями* уравнения (4.5). Наличие стационарного решения важно для модели, так как указывает на возможность стабильного развития популяции.

Изучим поведение решений в окрестности стационарной точки  $N_p$ . Для этого выберем начальное условие (4.2) близким к  $N_p$ , то есть положим  $N_0 = N_p + v_0$ , где  $v_0$  — достаточно малая величина. Решение задачи (4.5), (4.2) будем искать в виде:

$$N(t) = N_p + v(t), \quad (4.6)$$

где  $v(t)$  — малая величина.

Подставляя (4.6) в (4.5) и раскладывая правую часть в ряд Тейлора, получим  $\frac{dv}{dt} = F(N_p + v) = F(N_p) + F'(N_p)v + \frac{1}{2}F''(N_p)v^2 \dots$ , где  $F(N_p) = 0$ .

Пренебрегая величинами второго порядка малости  $v^2$ , получим *линеаризованное уравнение*  $\frac{dv}{dt} = kv$ ,  $k = F'(N_p)$  с начальным условием  $v|_{t=0} = v_0$ . Следует,  $v(t) = v_0 e^{kt}$ .

Подставляя в (4.6), получим приближенное решение уравнения (4.5):  $N(t) = N_p + v_0 e^{kt}$ .

$N(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  если  $v_0 > 0$ ,

при  $k > 0 \Rightarrow N(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \infty$  если  $v_0 < 0$ ,

при  $k < 0 \Rightarrow N(t) \rightarrow N_p$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, если производная  $F'(N_p) < 0$ , то стационарная точка  $N_p$  уравнения (4.5) называется *устойчивой*, а если  $F'(N_p) > 0$ , то точка  $N_p$  — *неустойчивая*. В случае  $F'(N_p) = 0$  требуются дополнительные исследования уравнения (4.5).

Наличие устойчивой стационарной точки означает, что если популяция находится в стационарном состоянии, то при наличии внешних воздействий, выводящих систему из стационарного состояния, с течением времени популяция стремится к первоначальному положению, то есть к стационарному состоянию.

## 4.2. Логистическая модель популяции

### 4.2.1. Дифференциальное логистическое уравнение

Очевидно, что модель Мальтуса может использоваться только на коротких промежутках времени. Для длительных временных интервалов на основании модели Мальтуса следует, что численность популяции должна экспоненциально возрастать. Такое в реальности не происходит в силу ограниченности пищевых ресурсов внешней среды. Учитывая это, представим коэффициент уничтожения в виде линейной зависимости от численности популяции  $N: \beta = \gamma N(t)$ ,  $\gamma > 0$ , где  $\gamma$  – коэффициент внутривидовой конкуренции.

Такое уточнение закономерно, так как при увеличении числа особей  $N$  в популяции растет борьба между особями за продукты питания, что приводит к увеличению коэффициента уничтожения  $\beta$ . В результате получим уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \gamma N)N. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется *логистическим уравнением*, или *уравнением Ферхюльста–Пирла*.

Вычислим стационарные точки уравнения (4.7), приравняв правую часть нулю. Решая алгебраическое уравнение  $(\alpha - \gamma N)N = 0$ , найдем две стационарные точки  $N_1 = 0$ ,  $N_p = \frac{\alpha}{\gamma}$ .

Исследуем эти точки на устойчивость, вычислив производную:

$$F'(N) = \alpha - 2\gamma N,$$

$$F'(N_1) = F'(N_0) = \alpha > 0 \Rightarrow \text{точка } N_1 \text{ неустойчивая,}$$

$$F'(N_p) = -\alpha < 0 \Rightarrow \text{точка } N_p \text{ устойчивая.}$$

Для полного исследования логистической модели решим задачу

Коши:  $\frac{dN}{dt} = \alpha(1 - \frac{N}{N_p})N$ ,  $N|_{t=0} = N_0$ .

Решение определяется логистической кривой:

$$N(t) = \frac{N_p N_0 e^{\alpha t}}{N_p - N_0(1 - e^{\alpha t})}.$$

Исследование решения показывает, что какой бы ни была начальная численность популяции, с течением времени число особей стремится к равновесному числу особей в популяции  $N_p$ . Число  $N_p$  называется также *емкостью среды*.

### 4.2.2. Популяция типа Олли

Исследование реальных популяций показывает, что практически для всех популяций коэффициент уничтожения  $\beta = \beta(N)$  – монотонно возрастающая функция аргумента  $N$ , причем  $\beta(0) = m > 0$ , где величина  $m$  определяет естественную смертность особей популяции. С коэффициентами рождаемости  $\alpha$  дело обстоит сложнее. Для большинства популяций  $\alpha = \text{const}$ , определяется физиологическими особенностями особей и не зависит от численности популяции  $N$ . Но для популяций с малыми плотностями распределения в пространстве коэффициент  $\alpha$  определяется вероятностью встречи брачных партнеров. Поэтому чем выше численность  $N$ , тем больше коэффициент  $\alpha$ , то есть  $\alpha = \alpha(N)$  монотонно возрастающая функция,  $\alpha_0 \leq \alpha(N) \leq \alpha_{\max}$  при  $0 \leq N < \infty$ ,  $\alpha(0) = \alpha_0$ .

Популяции, описываемые уравнением  $\frac{dN}{dt} = \alpha(N)N - \beta(N)N$ , с перечисленными свойствами коэффициентов, называются *популяциями типа Олли*.

Возможна ситуация, когда в популяцию, описываемую уравнением (4.1), поступают особи извне. Определим положительную функцию  $f(t)$ , которая означает число особей, которые поступают в популяцию за единицу времени в момент времени  $t$ . В этом случае уравнение (4.1) преобразуется к виду:

$$\frac{dN}{dt} = F(N, t) + f(t). \quad (4.8)$$

Если  $f(t) < 0$ , то функция  $f(t)$  моделирует отток особей из популяции.

### 4.2.3. Дискретное логистическое уравнение

Рассмотрим конечно-разностное уравнение:

$$\bar{x}_{n+1} = \alpha \bar{x}_n - \gamma \bar{x}_n^2, \quad \alpha > 0, \gamma > 0, \quad (4.9)$$

где  $t = n$  – дискретное время,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\bar{x}_n$  – численность популяции в момент времени  $t = n$ ,  $\alpha$  – коэффициент рождаемости,  $\gamma$  – коэффициент внутривидовой конкуренции.

Уравнение (4.9) называется *дискретным логистическим уравнением*, или *уравнением роста популяции*.

Обезразмерим уравнение (4.9), произведя замену переменной

$\bar{x}_n = \frac{\alpha}{\gamma} x_n$ , тогда:

$$x_{n+1} = \alpha(1 - x_n)x_n, \quad x_n \geq 0, \quad (4.10)$$

где  $x_0$  – заданное начальное значение.

Найдем стационарные решения уравнения (4.10), положим,  $x_{n+1} = x_n = y$ , тогда  $y = \alpha(1-y)y$ . Решая это уравнение относительно  $y$ , найдем две стационарные точки  $y_1 = 0, y_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ . Далее рассмотрим общее уравнение:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (4.11)$$

для которого  $y_0$  – стационарная точка, то есть  $y_0 = f(y_0)$ .

Исследуем поведение решений уравнения (4.11) в окрестности стационарной точки, то есть решений, которые удовлетворяют начальному условию:

$$x_0 = y_0 + \varepsilon, \quad (4.12)$$

где  $\varepsilon$  – достаточно малое число.

Решение задачи (4.11), (4.12) будем искать в виде  $x_n = y_0 + v_n$ , где  $v_n$  – малая величина. Подставим в уравнение (4.11), разложив правую часть в ряд Тейлора, тогда:

$$y_0 + v_{n+1} = f(y_0 + v_n) = f(y_0) + f'(y_0)v_n + \frac{1}{2}f''(y_0)v_n^2 + \dots$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости  $v_n^2$ , получим задачу:  $v_{n+1} = qv_n$ ,  $v_0 = \varepsilon$ , где  $q = f'(y_0)$ . Определим  $v_n = q^n \varepsilon$ .

Таким образом, получено приближенное решение задач (4.11), (4.12):  $x_n = y_0 + q^n \varepsilon$ .

Сделаем вывод об устойчивости стационарной точки  $y_0$ :

если  $|f'(y_0)| > 1$ , то точка неустойчивая;

если  $|f'(y_0)| < 1$ , то точка устойчивая;

если  $|f'(y_0)| = 1$ , то требуются дополнительные исследования.

Для исследования стационарных точек  $y_1, y_2$  уравнения (4.10) вычислим производную  $f'(y) = \alpha(1-2y)$ .

Для точки  $y_1 = 0$  производная  $f'(y_1) = \alpha$ . При  $0 < \alpha < 1$  точка  $y_1$  устойчивая. При  $1 < \alpha < \infty$  точка  $y_1$  неустойчивая. Для точки  $y_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$  производная  $f'(y_2) = 2-\alpha$ . При  $1 < \alpha < 3$  точка  $y_2$  устойчивая. При  $0 < \alpha < 1$  и  $\alpha > 3$  точка  $y_2$  неустойчивая.

Заметим, что для популяции имеет смысл случай, когда  $y_2 > 0$ .

### 4.3. Модель Лотки–Вольтерра

#### 4.3.1. Математическая модель «хищник–жертва»

Основную роль в существовании популяций живых организмов играет наличие пищи. Одна из простейших возможностей моделирования систем «организм–пища» («потребитель–ресурс») – построение точечных моделей. Для примера рассмотрим следующую биологическую систему. Имеются две популяции живых организмов: популяция хищников и популяция жертв, выступающих в роли пищи для хищников. В результате имеем двухкомпонентную популяцию (рис. 4.2).

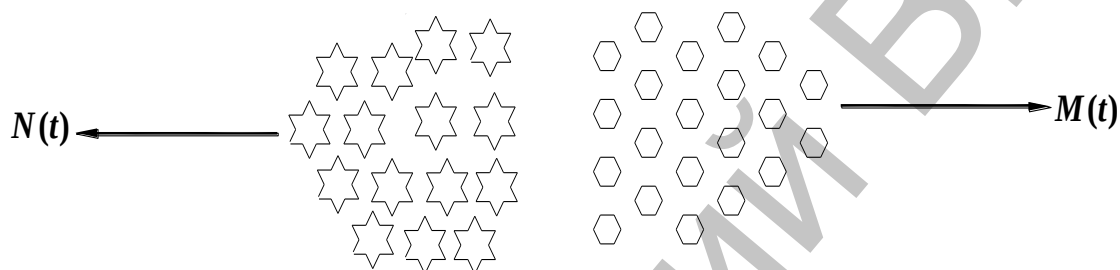


Рис. 4.2. Модель двухкомпонентной популяции.

$N$  – число особей в популяции жертв;

$M$  – число особей в популяции хищников.

Двухвидовую популяцию геометрически изобразим в виде точки  $\xi$  на плоскости  $ONM$ . Проекция точки  $\xi$  на ось  $ON$  означает численность жертв, а проекция на ось  $OM$  означает численность хищников в популяции (рис. 4.3).

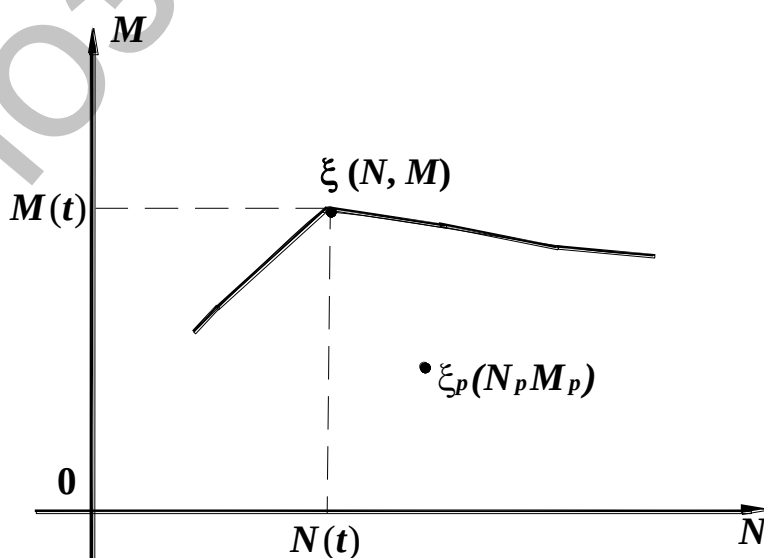


Рис. 4.3. Геометрическое изображение двухкомпонентной популяции.

Естественно, при взаимодействии популяций число особей изменяется, то есть  $N$  и  $M$  зависят от времени  $t$ , а точка  $\xi$  с течением времени  $t$  движется по некоторой траектории.

Считая функции  $N(t)$  и  $M(t)$  непрерывно дифференцируемыми, вычислим производные  $\frac{dN}{dt}$  и  $\frac{dM}{dt}$ . Для построения дифференциальной модели вычислим эти же производные другим способом, то есть представим в виде:

$$\frac{dN}{dt} = G_1(N, M, t), \quad \frac{dM}{dt} = G_2(N, M, t). \quad (4.13)$$

Если известно число особей в популяциях в начальный момент времени  $t = 0$ , тогда имеем начальные условия:

$$N|_{t=0} = N_0, \quad M|_{t=0} = M_0. \quad (4.14)$$

В результате получим задачу Коши (4.13), (4.14) для вычисления неизвестных функций  $N(t)$  и  $M(t)$ .

Первые части динамической системы (4.13) определяют *синергетическое* поведение сообщества двух популяций, то есть описывают взаимодействие и упорядоченность двух популяций в двухвидовом сообществе. Учитывая те или иные факторы, функции  $G_1$  и  $G_2$  могут быть построены различными способами.

Дадим пример построения модели и его качественного обоснования. Согласно модели Мальтуса (4.4) для каждой популяции имеем представление:

$$G_1 = (\alpha_1 - \beta_1)N, \quad G_2 = (\alpha_2 - \beta_2)M, \quad (4.15)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициенты рождаемости,  $\beta_i$  – коэффициенты уничтожения для каждой популяции.

Очевидно, что коэффициент уничтожения  $\beta_1$  в популяции жертв тем выше, чем больше численность хищников, то есть можно предположить прямую пропорциональную зависимость

$$\beta_1 = \delta_1 M, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_1 - \text{const}.$$

С другой стороны, коэффициент рождаемости в популяции хищников тем выше, чем больше пищи имеет популяция хищников. Можно предположить прямую пропорцию  $\alpha_2 = \delta_2 N$ ,  $\delta_2 > 0$ ,  $\delta_2 - \text{const}$ .

Представляя выражения для  $\beta_1, \alpha_2$  в (4.15) и далее в (4.13), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \delta_1 M)N \\ \frac{dM}{dt} = (\delta_2 N - \beta_2)M. \end{cases} \quad (4.16)$$

Система уравнений (4.16) называется уравнениями *Лотки–Вольтерра*, или моделью «хищник–жертва».

Приравняем правые части уравнений (4.16) к нулю:  $(\alpha_1 - \delta_1 M)N = 0$ ,  $(\delta_2 N - \beta_2)M = 0$ . Разрешая систему алгебраических уравнений, найдем две равновесные точки:

$$\xi_1 = (N_1, M_1) = (0, 0), \quad \xi_p = (N_p, M_p), \quad (4.17)$$

где  $N_p = \frac{\beta_2}{\delta_2}$ ,  $M_p = \frac{\alpha_1}{\delta_1}$  равновесные численности популяций.

Это означает, что если численности популяций жертв и хищников в начальный момент времени  $t = 0$  равны значениям  $N_p$  и  $M_p$ , то численность не меняется с течением времени, то есть  $N(t) = N_p$ ,  $M(t) = M_p$  – решение системы (4.16).

Рассмотрим случай, когда начальные условия (4.14) отличны от значений  $N_p$  и  $M_p$ , где  $(N_0 \neq N_p \text{ или } M_0 \neq M_p)$ . Задача Коши (4.16), (4.14) решается аналитически, и траектория решения задается линией уровня функции:

$$\frac{\exp(\delta_1 M + \delta_2 N)}{M^{\alpha_1} N^{\beta_1}} = C, \quad (4.18)$$

$$\text{где } C = \frac{\exp(\delta_1 M_0 + \delta_2 N_0)}{M_0^{\alpha_1} N_0^{\beta_1}} = \text{const}.$$

Анализ линий уровня функции (4.18) показывает, что траектории представляют собой замкнутые линии, описанные вокруг точки покоя  $\xi_p$ . Имеем *периодические колебания численностей*  $N(t), M(t)$  (рис. 4.4).

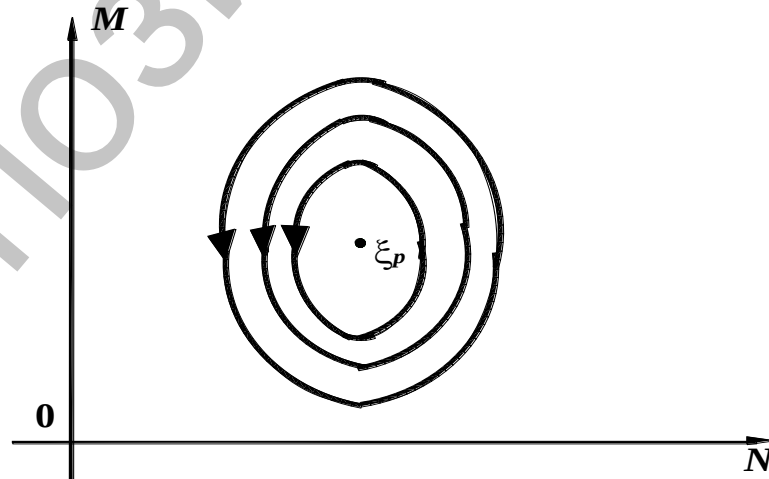


Рис. 4.4. Периодические колебания численностей  $N(t), M(t)$ .

## 4.4. Устойчивость популяционных моделей

### 4.4.1. Исследование стационарных точек

Рассмотрим автономную двумерную динамическую систему, аналогичную системе (4.13),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G_2(x, y) \end{cases}, \quad (4.19)$$

где функции  $G_i$  явно не зависят от времени  $t$ .

Требуется исследовать решения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  системы (4.19), которые можно интерпретировать как возможные варианты развития популяции во времени. Важными для популяции являются *стационарные решения*, то есть решения, не зависящие от времени  $t$ . Для нахождения стационарных решений решим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} G_1(x, y) = 0 \\ G_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Каждое решение системы  $x = x_p$ ,  $y = y_p$  называется стационарным решением системы уравнений (4.19). Исследуем решения системы в окрестности точки покоя  $\xi_p$ . Будем искать решения уравнений (4.19) в виде:

$$\begin{cases} x(t) = x_p + u(t) \\ y(t) = y_p + v(t) \end{cases}, \quad (4.20)$$

где  $u(t)$ ,  $v(t)$  – достаточно малые величины.

Подставим (4.20) в (4.19), тогда:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = G_1(x_p + u, y_p + v) \\ \frac{dv}{dt} = G_2(x_p + u, y_p + v). \end{cases} \quad (4.21)$$

Разложим правые части в ряды Тейлора:

$$G_i(x_p + u, y_p + v) = G_i(x_p, y_p) + \frac{\partial G_i(x_p, y_p)}{\partial x} u + \frac{\partial G_i(x_p, y_p)}{\partial y} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_i(x_p, y_p)}{\partial x^2} u^2 + \dots$$

и пренебрегаем величинами второго порядка малости, тогда система (4.21) преобразуется в *линеаризованную систему* в окрестности стационарной точки  $\xi_p$ :

$$\frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v, \quad (4.22)$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v, \quad (4.23)$$

где  $a_{i1} = \frac{\partial G_i(x_p, y_p)}{\partial x}$ ,  $a_{i2} = \frac{\partial G_i(x_p, y_p)}{\partial y}$ .

Далее найдем собственные числа матрицы, решая характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Корни уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \quad (4.24)$$

Найдем общее решение системы (4.22), (4.23), сведя ее к уравнению второго порядка. Продифференцируем уравнение (4.22) по  $t$  и подставим в него формулу (4.23), тогда:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a_{11} \frac{du}{dt} + a_{12}(a_{21}u + a_{22}v). \quad (4.25)$$

Из уравнения (4.22) найдем  $v$ , полагая,  $a_{12} \neq 0$ :

$$v = \frac{1}{a_{12}} \left( \frac{du}{dt} - a_{11}u \right). \quad (4.26)$$

После подстановки в (4.25) получим уравнение второго порядка для определения функции  $u$ :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{du}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})u = 0. \quad (4.27)$$

Используя корни (4.24) характеристического уравнения, запишем общее решение уравнения (4.27)  $u = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ , ограничившись случаем  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Из формулы (4.26) найдем:

$$v = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t}, \quad C_1' = \frac{1}{a_{12}}(\lambda_1 - a_{11})C_1, \quad C_2' = \frac{1}{a_{12}}(\lambda_2 - a_{11})C_2.$$

Учитывая (4.20), определим траектории системы (4.19) в исчезающей малой окрестности точки покоя  $\xi_p$ :

$$\begin{cases} x(t) = x_p + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = y_p + C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

где  $C_1, C_2$  – достаточно малые постоянные.

Как видно, поведение решений системы в окрестности точки покоя существенно зависит от корней  $\lambda_1, \lambda_2$ . Возможны основные варианты:

1. «Седло»:  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .
2. «Узел»:  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  или  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ .
3. «Фокус»:  $\lambda_1 = \lambda + i\mu, \lambda_2 = \lambda - i\mu, \lambda \neq 0, i = \sqrt{-1}$ .
4. «Центр»:  $\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$ .

Сделаем выводы об устойчивости. Если  $\lambda_i < 0, i=1,2$ , то точка покоя асимптотически устойчива. Если  $\lambda_j = \pm i\mu, j=1,2$ , то точка устойчива. В остальных случаях точка неустойчива.

Асимптотическая устойчивость означает, что если численность популяций двухвидового сообщества близка к значениям  $x_p, y_p$ , то с течением времени эти численности приближаются к стационарным значениям. Устойчивость означает, что если численность популяций близка к значениям  $x_p, y_p$ , то эти численности с течением времени остаются в окрестности стационарной точки. Отсюда можно заключить, что устойчивые стационарные точки важны для популяций, так как описывают стабильные состояния сообщества популяций, слабо подверженные внешним воздействиям.

Для примера рассмотрим уравнение (4.16). Вычислим коэффициенты линеаризованной системы в стационарной точке  $\xi_p(N_p, M_p)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial G_1(\xi_p)}{\partial N} = 0, & a_{12} &= \frac{\partial G_1(\xi_p)}{\partial M} = -\delta_1 N_p, \\ a_{21} &= \frac{\partial G_2(\xi_p)}{\partial N} = \delta_2 M_p, & a_{22} &= \frac{\partial G_2(\xi_p)}{\partial M} = 0. \end{aligned}$$

Определим корни (4.24):  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\delta_1 \delta_2 N_p M_p}$ .

Таким образом, точка покоя  $\xi_p$  является «центром», то есть устойчива.

#### 4.4.2. Обобщения моделей

Модель Лотки–Вольтерра (4.16) является простейшей моделью для двухвидовой популяции. Заметим, что модель (4.16) не учитывает наличия продуктов потребления для популяции жертв. Для косвенного учета введем в первое уравнение (4.16) логический член. Очевидно, что при ограниченности питания для жертв чем больше число особей  $N$ , тем больше коэффициент уничтожения  $\beta_1$  из (4.15) в силу конку-

ренции из-за продуктов питания. В результате система (4.16) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \delta_1 M - \gamma_1 N)N \\ \frac{dM}{dt} = (\delta_2 N - \beta_2)M, \end{cases}$$

где  $\gamma_1$  – коэффициент внутривидовой конкуренции жертв.

Обобщим модель на случай популяции, состоящей из  $n$  видов организмов. Рассмотрим динамическую систему:

$$\frac{du_i}{dt} = (a_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_j) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.28)$$

где  $u_i$  – численность организмов  $i$ -го вида,  $\gamma_{ij}$  – матрица взаимодействия видов.

Системы (4.28) называются *вольтерровскими*.

А.Н. Колмогоров предложил следующее обобщение системы Лотки–Вольтерра:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = K_1(N)N - L(N)M \\ \frac{dM}{dt} = K_2(N)M, \end{cases}$$

где на функции  $K_1(N)$ ,  $L(N)$  наложены некоторые ограничения, приводящие к существованию трех точек покоя.

## 5. БАЛАНСОВЫЕ, ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ И АГРОЭКОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### **Вопросы:**

- 5.1. Модель баланса вещества и энергии.
- 5.2. Биологический метод борьбы с нежелательным видом.
- 5.3. Модель эпидемии.
- 5.4. Модели динамики возрастных групп.
- 5.5. Вероятностные модели.
- 5.6. Приложения в экологии.
- 5.7. Моделирование в медицине.
- 5.8. Модель агробиоценоза.

### **5.1. Модель баланса вещества и энергии**

Рассмотрим пример модели, основанный на дифференциальных уравнениях с учетом баланса вещества и энергии. Известно, что в природе даже при самых благоприятных условиях рост дерева не превышает некоторого предела. Возникает вопрос, почему все деревья, независимо от породы, растут сначала быстро, а затем рост замедляется, пока, наконец, совсем не прекращается?

Интуитивно ясно, что с ростом кроны, с одной стороны, увеличивается приток энергии благодаря фотосинтезу, а с другой – увеличиваются трудности, связанные, например, с транспортировкой питательных веществ по всему объему дерева и, следовательно, увеличивается расход энергии на подобные нужды. В конце концов притока энергии уже не хватает для покрытия расходов и дерево перестает расти.

На основе этих интуитивных соображений можно сформулировать гипотезы и построить модель, а затем исследовать полученное равенство [8, 9].

Рассмотрим модель, предложенную И.А. Полетаевым. Эта модель основана на следующих упрощающих предположениях:

1. Взрослое растение в процессе роста сохраняет геометрическое подобие. Это значит, что у взрослого растения с ростом не меняются отношения геометрических размеров, например, отношение высоты к диаметру ( $h/d = \text{const}$ ).
2. Свободную энергию (или активное вещество) растение получает только путем фотосинтеза.
3. Свободная энергия расходуется на фотосинтез, на построение живой ткани (рост) и на подъем раствора из почвы.
4. В среднем за большие отрезки времени растение получает постоянное количество света на единицу поверхности кроны (без учета

суточных и сезонных колебаний) и может поглощать необходимые вещества из неограниченного запаса в почве.

Теперь можно составить уравнение баланса.

Пусть  $x$  – высота дерева; тогда из предположения 1 площадь поверхности листьев будет пропорциональна  $x^2$ , а объем растения (например, объем ствола) будет пропорционален величине  $x^3$ . Понятно, что  $x$  изменяется со временем:  $x = x(t)$ . Постараемся выразить все величины, входящие в уравнение баланса через  $x$ . Сначала найдем выражение для поступающей свободной энергии  $E$ . Эта энергия образуется благодаря фотосинтезу. Энергии тем больше, чем больше поверхность зеленой части растения. Таким образом, можно считать, что  $E$  пропорциональна  $x^2$ .

$$E = \alpha x^2, \quad (5.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности (он зависит от размеров и формы листьев и от интенсивности фотосинтеза, которые считаем постоянными для конкретной породы).

Других источников энергии в силу предположения 2 нет, и можно проследить за расходом энергии. Часть энергии прежде всего тратится на осуществление самого процесса фотосинтеза. Этот расход также пропорционален  $x^2$ , и его можно представить в виде  $\beta x^2$ , где  $\beta$  – коэффициент пропорциональности, меньший  $\alpha$ .

Далее энергия расходуется на транспортировку питательного раствора во все части растения. Этот расход будет тем больше, чем больше путей транспортировки, то есть чем больше объем растения. Кроме того, этот расход связан с преодолением силы тяжести и, следовательно, будет тем больше, чем на большую высоту приходится поднимать питательные вещества. Таким образом, этот расход пропорционален как объему  $x^3$ , так и высоте  $x$ , и можно считать, что он пропорционален их произведению, то есть  $\gamma x^3 x$ .

Наконец, энергия расходуется на увеличение массы растения, то есть на рост. Этот расход пропорционален скорости роста, то есть производной по времени от массы ( $m = \rho x^3$ , где  $\rho$  – средняя плотность растения,  $x^3$  – объем). Таким образом, последний расход может быть выражен как

$$\delta = \frac{d}{dt}(\rho x^3),$$

где  $\delta$  – коэффициент пропорциональности.

В силу закона сохранения энергии (с учетом высказанных предположений) расход энергии должен быть равен ее притоку, и получаем уравнение баланса:

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \frac{d}{dt}(\rho x^3) \quad \text{или} \quad \alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \rho 3x^2 \frac{dx}{dt}. \quad (5.2)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение относительно  $x(t)$ .

Разделив уравнение (5.2) на выражение  $3\delta\rho x^2$ , которое не может быть равным нулю, и обозначив

$$a = \frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} > 0; \quad b = \frac{\gamma}{3\delta\rho} > 0,$$

получим

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad x(0) \approx 0. \quad (5.3)$$

Так как дерево растет, производная  $dx/dt$  положительна.

Это значит, что  $a - bx^2 > 0$  и следовательно  $x^2 < a/b$ . Поэтому, интегрируя выражение (5.3), получаем

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = 2\sqrt{ab}(t - t_0),$$

откуда

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}.$$

Эта формула дает кривую роста дерева от времени (рис. 5.1).

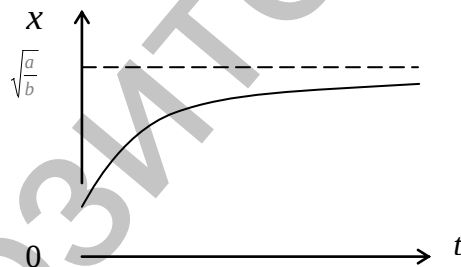


Рис. 5.1. Зависимость роста дерева от времени (t).

Если известны  $a$  и  $b$  (они зависят от породы дерева), то по этой формуле можно определить средний рост дерева данной породы в зависимости от возраста. Проверка модели в реальных экспериментальных ситуациях подтвердила ее адекватность. Следовательно, гипотезы, лежащие в ее основе, не противоречат реальности.

**Задача.**

Максимальная высота деревьев в лесу 50 м. 40-летние деревья срубают и используют как сырье для изготовления целлюлозы. Их средняя высота 15 м. Определить коэффициенты  $a$  и  $b$  (настроить модель).

Схема решения.

При увеличении возраста ( $t$ ) высота  $x(t)$  приближается к  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  (см. решение уравнения).

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}} = 50 \\ \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}40}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}40}} = 15 \end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений можно найти значения коэффициентов  $a$  и  $b$ .

## 5.2. Биологический метод борьбы с нежелательным видом

Речь идет о теоретическом обосновании метода Кюрасао. Сущность этого метода заключается в том, что в популяцию, которую хотят подавить (например, в популяцию сельскохозяйственных вредителей), регулярно вводят стерильных транс-самцов. Таких самцов с большим числом транслокаций можно получить, например, подвергнув облучению нормальных самцов. Не оставляя нормального потомства, то есть не участвуя в процессе естественного воспроизводства, эти самцы, будучи вполне жизнеспособными, наряду с нормальными участвуют во внутривидовой борьбе, в том числе за самок, снижая тем самым скорость естественного увеличения популяции.

Рассмотрим модель, предложенную А.Д. Базыкиным.

Пусть  $x(t)$  – плотность нормальных самцов на поле.

$n^*$  – постоянная скорость, с которой стерильные самцы вводятся в популяцию (то есть число стерильных особей, вводимых в единицу времени на единицу площади поля);

$y(t)$  – плотность стерильных самцов.

Необходимо определить скорость  $n^*$  для постепенного снижения до нуля численности нормальных самцов, то есть достаточную, чтобы  $x(t) \rightarrow 0$ .

Можно составить уравнения изменения численности нормальных и стерильных самцов,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - \delta x^2 - \delta xy, \\ \frac{dy}{dt} = n^* - \delta y^2 - \delta xy \end{cases},$$

где  $r = b - d$  – это постоянная скорость естественного увеличения нормальных самцов;  $\delta x^2$  – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между нормальными самцами;  $\delta y^2$  – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между стерильными самцами;

$\delta x$  – снижение скорости роста численности из-за конкуренции между нормальными и стерильными самцами;

Решение этой системы уравнений показало, что  $x(t) \rightarrow 0$ , если  $n^* \geq r^2/\delta$ .

*Задача.* Сколько стерильных самцов необходимо вводить в популяцию нормальных насекомых за единицу времени на единицу площади, чтобы  $x(t) \rightarrow 0$ , если  $r = 1$  1/час, а  $\delta = 0,01$  1/час?

Для решения достаточно подставить эти значения в предыдущую формулу.

### 5.3. Модель эпидемии

За многие тысячелетия существования человечества огромное число людей погибло от различных эпидемий. Для того чтобы иметь возможность бороться с эпидемиями, то есть своевременно применять те или иные медицинские мероприятия (карантины, вакцинации и т.д.), необходимо уметь сравнивать эффективность этих мероприятий. Сравнить же их можно лишь в том случае, если есть возможность предсказать, как при том или ином мероприятии будет меняться ход эпидемии, прежде всего число больных. Отсюда возникает необходимость в построении моделей, которые могли бы служить целям прогноза.

Сначала рассмотрим модель «естественного» хода эпидемии (без медицинского вмешательства). Понятно, что модель эпидемии может включать в себя влияние факторов самых различных уровней. Так, можно было бы учесть законы, управляющие деятельностью бактериальных клеток, степень восприимчивости к инфекции отдельных людей, вероятности встречи носителей инфекции с еще здоровыми людьми и многие другие факторы. Так как нашей целью является лишь создание иллюстративной модели, то мы абстрагируемся от многих факторов.

Пусть имеется  $N$  здоровых людей и в момент времени  $t = 0$  в эту группу попадает один заболевший человек (источник инфекции). Предположим, что никакого удаления заболевших из группы не происходит (нет ни выздоровления, ни гибели, ни изоляции). Будем считать также, что человек становится источником инфекции сразу же после того, как он сам заразится.

Обозначим число заболевших в момент времени  $t$  через  $x(t)$ , а число здоровых – через  $y(t)$  (очевидно, что  $x(t) + y(t) = N + 1$  в любой момент времени).

При  $t = 0$  выполняется условие  $x(0) = 1$ .

Рассмотрим интервал времени  $t + dt$ , где  $dt$  – малый промежуток времени. Необходимо определить, сколько новых больных появится за этот промежуток времени. Можно предположить, что их число бу-

дет пропорционально величине  $dt$ , а также числу встреч здоровых и заболевших людей, то есть произведению величин  $x \cdot y$ :

$dx = \alpha \cdot x \cdot y \cdot dt$ , где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент передачи инфекции).

$$y = N + 1 - x \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x [N + 1 - x].$$

Решение этого уравнения:

$$x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}.$$

Прогноз – форма зависимости числа больных в группе от времени представлен на рис. 5.2.

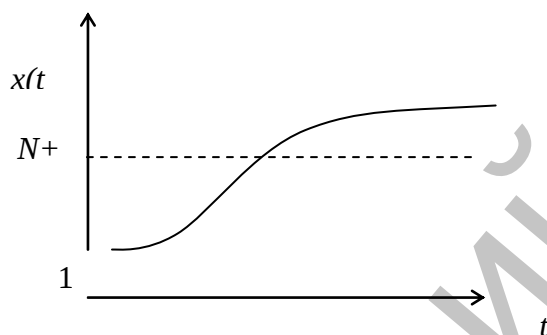


Рис. 5.2. Зависимость числа больных от времени.

**Задача.** Оценить количество больных через 6 суток и сколько людей заболеет за 6-й день, если  $\alpha = 0,001$ , а  $N + 1 = 1101$  чел.?

Для получения ответов следует использовать решение уравнения.

Можно усложнить модель, предположив, например, что в момент времени  $t$  болен не 1 человек, а несколько ( $b$ ). Кроме того, предположим, что через небольшой промежуток времени больной выздоравливает и получает иммунитет. Тогда  $z(t)$  – это число переболевших и выздоровевших к моменту  $t$ .

$$x + y + z = N + b,$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha xy - \gamma x \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha xy \end{cases},$$

где  $\gamma x$  – число выздоровевших.

Тогда прогноз числа заболевших будет иметь форму, представленную на рис. 5.3.

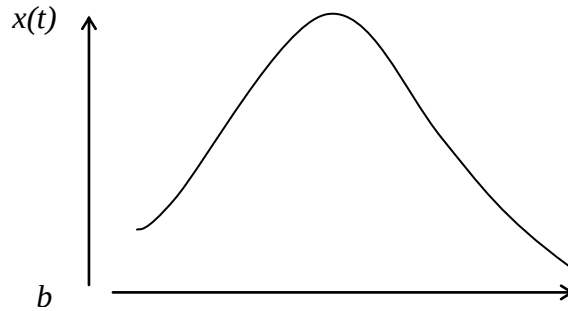


Рис. 5.3. Прогноз числа заболевших.

Конкретный вид кривой зависит от  $N$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $\gamma$ .

В модели можно учесть смертность от болезни, передачу болезни через переносчика (грызунов) и т.д.

#### 5.4. Модели динамики возрастных групп

Рассмотрим ситуацию, когда вес каждой особи популяции меняется в течение жизни и необходимо сделать прогноз не численности, а биомассы всей популяции или ее «молодой» части через определенное время ( $t$ ).

Пусть  $\tau$  – возраст особи;

$N(t, \tau)$  – численность всех особей популяции, имеющих в момент времени  $t$  возраст  $\tau$ ;

$P(\tau)$  – средний вес особи возраста  $\tau$ .

Тогда биомасса всех особей возраста  $\tau$  равна  $N(t, \tau) P(\tau)$ .

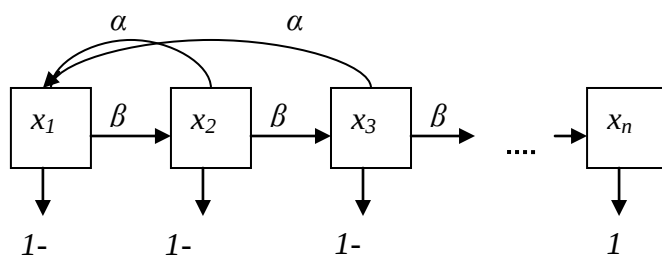
Обозначим через  $M(t, \varphi)$  интересующую нас биомассу всех особей популяции, имеющих в момент времени  $t$  возраст не более  $\varphi$ .

$$\text{Тогда } M(t, \varphi) = \int_0^{\varphi} N(t, \tau) P(\tau) d\tau.$$

Зависимость  $P$  от  $\tau$  иногда известна, например, из научной литературы. Гораздо труднее определить  $N(t, \tau)$ . Она зависит от многих факторов, как внешних (температура, влажность, питание и т.д.), так и от видовых особенностей (плодовитость, жизнеспособность и т.д.).

Иногда для моделирования численности  $N(t, \tau)$  удобно отказаться от непрерывного времени и перейти от дифференциальных уравнений к дискретным моделям, прогнозирующим процесс по «шагам», то есть в дискретные моменты. Рассмотрим дискретную «шаговую» модель динамики возрастной структуры популяции в зависимости от времени. Эта модель широко используется в научных исследованиях по экологии, сельскому хозяйству, демографии и т.д.

Популяцию условно разбивают на  $n$  возрастных групп. В начальный момент времени  $t_0$  известна численность особей каждой ( $i$ -ой) возрастной группы, которая обозначается  $x_i(t_0)$ ,  $i = 1 \dots n$ .



Из всех возрастных групп выделяют те, которые производят потомство. Пусть их номера будут  $k, k+1, k+2, \dots, k+p$ . Предположим, что следующий момент времени  $t_1$  выбран так, что за промежуток от  $t_0$  до  $t_1$  (1 «шаг») особи  $i$ -ой группы переходят в группу  $i+1$ , от групп  $k, k+1, k+2, \dots, k+p$  появляется потомство, и часть особей каждой группы погибает. Например, первая группа – особи от 0 до 1 года, вторая – от 1 до 2-х лет и т.д. «Шаг» прогноза также 1 год. Пусть  $\alpha_i$  – коэффициент рождаемости в  $i$ -ой группе;  $\beta_i$  – коэффициент выживаемости в  $i$ -ой группе (смертность будет определяться, как  $1 - \beta_i$ ).  $0 < \beta_i < 1$  для всех групп, кроме последней ( $n$ -ой), где  $\beta_n = 0$  (все погибают).

Тогда численность особей первой возрастной группы в момент времени  $t_1$  – это численность особей, родившихся в промежуток от  $t_0$  до  $t_1$ . Она равна сумме потомств от всех возрастных групп, производящих потомство. Понятно, что численность потомства от отдельной группы будет тем больше, чем больше родителей, то есть чем больше  $x_i(t_0)$ . Точнее, потомство от  $i$ -ой группы за один временной «шаг» будет равно  $\alpha_i \cdot x_i(t_0)$ , а все потомство, появившееся в промежуток от  $t_0$  до  $t_1$  будет равно:

$$x_1(t_1) = \sum_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0).$$

Теперь определим численность второй возрастной группы в момент времени  $t_1$ . За время от  $t_0$  до  $t_1$  особи, находящиеся в момент  $t_0$  в первой возрастной группе, перейдут во вторую. При этом часть из них может погибнуть. Поэтому численность второй возрастной группы в момент времени  $t_1$ :

$$x_2(t_1) = \beta_1 \cdot x_1(t_0).$$

Аналогично рассчитываются и численность каждой ( $i$ -ой) группы через 1 «шаг».

$$x_i(t_1) = \beta_{i-1} \cdot x_{i-1}(t_0), \text{ где } 0 < \beta_{i-1} < 1.$$

Построив прогноз на 1 «шаг» вперед, принимают новые численности за исходные и повторяют процедуру, получая прогнозы  $x_i(t_2)$  – на 2 «шага» и т.д. вперед. Эти модели можно использовать не только для прогноза на несколько шагов вперед, но и для подбора схемы «сбора» биомассы, обеспечивающей, например, максимальную прибыль за определенный промежуток времени (за несколько «шагов»).

*Задача.* На птицеферме всех птиц можно отнести к четырем возрастным группам с «шагом» в 1 год. Начальная численность первой возрастной группы – 300 особей, второй – 100 особей, третьей и четвертой – по 50 особей. Коэффициент естественной выживаемости для первой и второй возрастной группы – 0,9, для третьей – 0,8. Давать потомство могут только особи второй и третьей возрастных групп. Коэффициент рождаемости для второй возрастной группы, т.е. среднее число потомков от одной особи за год, равно 3, а для третьей – 2.

Рассмотрим два варианта ежегодной продажи:

1. Продаем всю четвертую возрастную группу. Цена 1 кг особей этой возрастной группы 30 руб, а средний вес 4 кг.

2. Продаем всю четвертую возрастную группу, а также 30% из второй возрастной группы и 40% из третьей возрастной группы. Средний вес особи второй возрастной группы 2 кг при цене 40 руб за 1 кг. Цена 1 кг особей третьей возрастной группы 35 руб, а средний вес 3 кг.

Определить прибыль от первого и второго варианта продажи и построить прогноз численности всех возрастных групп на 1 шаг вперед (через год).

*Решение.*

Рассмотрим ситуацию, когда продажу осуществляем в начале года, до того как особи второй и третьей возрастной группы дадут потомство.

Тогда прибыль от 1-го варианта продажи составит:

$$\Pi = 50 \text{ шт.} \times 30 \text{ руб.} \times 4 \text{ кг} = 6000 \text{ руб.}$$

Построим прогноз численности на 1 «шаг» вперед.

С учетом рождаемости численность особей первой возрастной группы через 1 год составит:  $x_1(t_1) = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = 400$  шт.

Далее определяем численности второй, третьей и четвертой возрастных групп через год.

$$x_2(t_1) = 300 \times 0,9 = 270 \text{ шт.}$$

$$x_3(t_1) = 100 \times 0,9 = 90 \text{ шт.}$$

$$x_4(t_1) = 50 \times 0,8 = 40 \text{ шт.}$$

Теперь определим прибыль от второго варианта продажи.

Число особей, продаваемых из второй возрастной группы, составляет:  $x_2(t_0) = 100 \times 0,3 = 30$  шт. Значит во второй возрастной группе остается  $100 - 30 = 70$  особей.

Аналогично с третьей возрастной группой.

Продаем:  $x_3(t_0) = 50 \times 0,4 = 20$  шт. Остается  $50 - 20 = 30$  особей.

Из четвертой возрастной группы продаем всех особей, то есть  $x_4(t_0) = 50$  шт.

Теперь можно определить прибыль от второго варианта продажи. Она составит:

$$\Pi = 50 \text{ шт.} \times 30 \text{ руб.} \times 4 \text{ кг} + 30 \text{ шт.} \times 2 \text{ кг} \times 40 \text{ руб.} + 20 \text{ шт.} \times 35 \text{ руб.} \times 3 \text{ кг} = 6000 + 2400 + 2100 = 10500 \text{ руб.}$$

Определим численность всех возрастных групп на 1 «шаг» вперед.

$$x_1(t_1) = 70 \text{ шт.} \times 3 + 30 \text{ шт.} \times 2 = 270 \text{ шт.}$$

$$x_2(t_1) = 300 \text{ шт.} \times 0,9 = 270 \text{ шт.}$$

$$x_3(t_1) = 70 \text{ шт.} \times 0,9 = 63 \text{ шт.}$$

$$x_4(t_1) = 30 \text{ шт.} \times 0,8 = 24 \text{ шт.}$$

Хотя прибыль во втором варианте больше, но численности всех групп изменились по сравнению с первым вариантом. Это приведет к снижению прибыли в следующие годы, что можно прогнозировать с помощью той же модели.

Подобные модели используют также в демографии для прогноза ожидаемой численности разных возрастных групп людей на несколько «шагов» (на 5, 10, 15 и т.д. лет) вперед.

## 5.5. Вероятностные модели

Все рассмотренные выше модели были детерминистическими, то есть в них не учитывались случайности и их влияние на изучаемые процессы, например, на численность популяции.

Существуют несколько причин, по которым детерминистические модели не всегда служат достаточно точным отражением реальности в биологии и в других областях знаний. Во-первых, они предполагают большую численность популяции. Настолько большую, что можно опираться на закон больших чисел, который включает в себя несколько фундаментальных теорем.

Одно из следствий этого закона используется в генетике: при достаточно большом объеме выборки из большой популяции  $F_2$ , полученной из  $F_1$  ( $AA \times aa \rightarrow F_1$ ), соотношение особей с доминантным и рецессивным проявлениями признака близко к 3:1. Это удачная детерминистическая модель – закон Менделя, который, кроме прочих предположений, требует большой объем выборки в  $F_2$ . В реальных экспериментах, всегда ограниченных по объему, уже по этой причине наблюдается отклонение от модели 3:1.

Теория вероятностей и основанная на ней математическая статистика представляют не только упрощенные детерминистические, но и так называемые стохастические варианты моделей и методов. Они, в частности, позволяют ответить на вопрос: можно ли считать отклоне-

ние от детерминистической модели 3:1, обнаруженное в ограниченной выборке, чисто случайным, естественным или, все-таки, отклонение вызвано другими генетическими причинами (отбор, миграция и т.п.). Ответ всегда дается в вероятностной форме. Например, с помощью известного критерия  $\chi^2$  можно получить вывод: с вероятностью ( $P$ ) менее 0,05 (5%) обнаруженное отклонение от 3:1 вызвано случайной ошибкой выборочности. Значит отклонение в действительности вызвано какими-то особыми, неслучайными факторами.

Вторая причина, по которой необходимо применять стохастические модели, особенно в сельском хозяйстве, – это влияние на моделируемые процессы (системы), например, растения, неконтролируемые случайные колебания условий выращивания. Часто влияние этих колебаний даже перекрывает влияние на урожай самих генотипов сравниваемых сортов. Для генетиков, селекционеров, сортоиспытателей крайне важно грамотно применять стохастические модели и методы.

Рассмотрим пример. Оценим вероятность случайной мутации гена, который определяет группу крови. Пусть таких генов три ( $B, C, E$ ). Вероятности спонтанных мутаций отдельных нуклеотидов:  $A \leftrightarrow T$ ;  $C \leftrightarrow G$  и т.д. одинаковы и равны  $\approx 10^{-1}$ . Аллель  $B$  отличается от  $C$  всего по десяти нуклеотидам, а «промежуточные» мутации нежизнеспособны. Если мутации возникают независимо, то вероятность мутации от  $B$  к  $C$   $P(B \rightarrow C) \approx 10^{-10}$ . Для реализации такой ничтожно малой вероятности нужны огромные популяции и очень длинная череда поколений. Значит, если новый вид содержит все три аллеля ( $B, C, E$ ), то они были получены от вида-предка, а не образовались в результате новых мутаций.

### Сумма и произведение независимых событий

Напомним, что в теории вероятности значок «+» означает «или», а «·» означает «и». Если события  $A$  и  $B$  несовместные, то  $P(A+B)=P(A)+P(B)$ . Если  $A$  и  $B$  независимы, то  $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

Пользуясь только этими формулами можно доказать справедливость закона Менделя (1:2:1) в детерминистической форме.

Рассмотрим гибрид  $F_1$  ржи ( $Rr$ ). Этот гибрид образует мужские и женские гаметы:

|         |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| Гаметы  | ♀ $R$ | ♀ $r$ | ♂ $R$ | ♂ $r$ |
| Событие | $A$   | $B$   | $C$   | $D$   |

То есть вероятности (доли) образования этих гамет равны  $P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=1/2$ .

В процессе перекрестного опыления с образованием семян  $F_2$  происходит случайное объединение гамет. Возможны 4 варианта:

| Вариант объединения (события) | Вероятность объединения гамет | Генотип F <sub>2</sub> |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------|
| <i>A</i> и <i>C</i>           | $P(AC)=1/2 \cdot 1/2=1/4$     | <i>RR</i>              |
| <i>A</i> и <i>D</i>           | $P(AD)=1/2 \cdot 1/2=1/4$     | <i>Rr</i>              |
| <i>B</i> и <i>C</i>           | $P(BC)=1/2 \cdot 1/2=1/4$     | <i>rR</i>              |
| <i>B</i> и <i>D</i>           | $P(BD)=1/2 \cdot 1/2=1/4$     | <i>rr</i>              |

Эти вероятности случайного объединения гамет проще оценить с использованием решетки Пеннета.

| ♀ \ ♂          | <i>R</i> (1/2)  | <i>r</i> (1/2)  |
|----------------|-----------------|-----------------|
| <i>R</i> (1/2) | <i>RR</i> (1/4) | <i>Rr</i> (1/4) |
| <i>r</i> (1/2) | <i>rR</i> (1/4) | <i>rr</i> (1/4) |

Поскольку генотип *Rr* то же, что и *rR*, то сумма вероятностей появления этих генотипов в F<sub>2</sub>:  $P(AD)+P(BD)=1/4+1/4=1/2$ .

Теперь можно определить соотношение генотипов в F<sub>2</sub>.

| Генотип F <sub>2</sub>  | <i>RR</i> | <i>Rr</i> | <i>rr</i> |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|
| Вероятность образования | 1/4       | 1/2       | 1/4       |
| Соотношение             | 1         | 2         | 1         |

В процессе доказательства было использовано тождество вероятностей событий образования гамет: *R*, *r*, генотипов *RR*, *Rr*, *rr* и соответствующих им долей генов или генотипов. Это справедливо, так как по теореме Бернулли (одна из теорем закона больших чисел) при увеличении числа испытаний (объема выборки растений популяции, случайно взятых гамет и зигот – зерен F<sub>2</sub>) доли зерен с генотипами *RR*, *Rr*, *rr* в F<sub>2</sub> приближаются к вероятностям их образования, а значит, их соотношение к 1:2:1. Таким образом, при увеличении выборки (объема) популяции F<sub>2</sub> получаем закон Менделя для соотношения долей. То есть при увеличении выборки стохастическая (вероятностная) модель превращается в детерминистическую модель для долей.

Воспользуемся некоторыми формулами теории вероятности, рассмотренными в гл.3, которые при решении задач из генетики и селекции могут привести к весьма полезным для практики приложениям теории вероятности.

Если случайные события  $A_1 \dots A_n$  происходят независимо друг от друга, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i),$$

где  $\prod$  – знак произведения.

Поэтому если проводится  $n$  одинаковых испытаний и в каждом вероятность события  $B$  равна  $p$ , то вероятность того, что событие  $B$  ни разу не произошло равна  $(1 - p)(1 - p) \dots (1 - p) = q^n$ , где  $q = 1 - p$ . Вероятность противоположного события («хотя бы один раз событие  $B$  произошло») равно:  $1 - q^n$  (см. п. 3.1.3).

Рассмотрим пример. Оценить вероятность того, что среди 8 особей потомства  $F_2$  от скрещивания белой ( $cc$ ) и серой ( $CC$ ) мыши будет хотя бы одна белая ( $C$  – доминантный аллель).

Сначала оценим вероятность того, что в  $F_2$  не будет ни одной белой мыши. Так как доля серых мышей в  $F_2$  составляет  $\frac{3}{4}$  ( $CC + Cc$ ), то искомая вероятность будет  $(\frac{3}{4})^8 \approx 0,1$ . Теперь можно определить вероятность того, что будет хотя бы одна белая:  $1 - 0,1 = 0,9$ . Эта вероятностная модель имеет и детерминистическую формулировку: среди большого числа семей  $F_2$  с 8 потомками в 90% семей будет хотя бы одна белая мышь (в 10% таких семей – ни одной белой).

**Задача 1.** Частота спонтанной мутации – альбинизма – у растений  $10^{-5}$ . Сколько зерен надо высадить, чтобы с вероятностью 0,95 среди них было хотя бы одно альбиносное растение?

*Схема решения.*

$(1 - p)^n$  – вероятность того, что нет ни одного мутанта среди  $n$  растений;  $1 - (1 - p)^n = 0,95$  – хотя бы одно мутантное растение есть.

Из последнего равенства при  $p = 10^{-5}$  можно найти  $n$ . В данном случае оно приблизительно равно 300000.

**Задача 2.** Вероятность рождения мальчика и девочки равны  $p = q = 1/2$ . Сколько нужно планировать детей в семье, чтобы вероятность иметь хотя бы одного мальчика была более 0,9?

*Схема решения.*

$P = (1/2)^n$  – из  $n$  детей все девочки;  $1 - (1/2)^n > 0,9$  – хотя бы один мальчик. Отсюда  $(1/2)^n < 0,1$ .

Это неравенство справедливо уже при  $n = 4$ .

В качестве примера применения этих вероятностных моделей в семеноводстве можно предложить подход к оценке объема выборки семян.

Пусть сорт – это смесь из  $N$  чистых линий (биотипов), содержащихся в сорте с разными долями  $p_i$ ,

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Как определить объем минимальной случайной выборки семян ( $n$ ), чтобы в ней с вероятностью  $P \geq 0,95$  было хотя бы по одному зерну каждого биотипа.

Итак,  $n$  – объем выборки, т.е. число выбранных семян (испытаний);  $N$  – число биотипов;

$(1 - p_i)^n$  – вероятность того, что из  $n$  испытаний случайно не выберем ни одного семени  $i$ -го биотипа;

$1 - (1 - p_i)^n$  – вероятность того, что из  $n$  испытаний возьмем хотя бы одно семя  $i$ -го биотипа;

$$P(A) = \prod_{i=1}^N [1 - (1 - p_i)^n] -$$

вероятность того, что из  $n$  испытаний случайно возьмем хотя бы одно семя от каждого биотипа. Далее подбираем  $n$  – объем выборки семян. Не вдаваясь в подробности, отметим, что эта формула верна, если  $n$  значительно (в 5 и более раз) превышает  $N$ .

### Задача 3.

Из потомства  $F_2$  от скрещивания белой ( $cc$ ) и серой ( $CC$ ) мышей взяли одну серую и скрестили с белой ( $C$  – доминантный аллель). Какова вероятность того, что из трех мышей – потомков такого скрещивания – все три серые?

Для решения этой задачи воспользуемся формулой полной вероятности. Если в опыте событие  $A$  может наступить только совместно с одним из  $n$  несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , составляющих полную группу событий (то есть  $P[B_1 + B_2 + \dots + B_n] = 1$ ). Тогда так называемая безусловная или полная вероятность реализации события  $A$  определяется по формуле (3.4).

### Схема решения.

Результаты исходных скрещиваний до  $F_2$  включительно удобно представить в следующем виде:

|       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| P:    | $cc$ | x    | $C$  |
|       |      |      | $C$  |
|       |      | ↓    |      |
| $F_1$ | $Cc$ | x    | $Cc$ |
|       |      | ↓    |      |
| $F_2$ | $CC$ | $Cc$ | $cc$ |
|       | 1/4  | 1/2  | 1/4  |

Серая мышь, взятая из  $F_2$  для скрещивания с белой, не могла иметь генотип  $cc$ , а только  $CC$  (событие  $B_1$ ) или  $Cc$  (событие  $B_2$ ). Поэтому  $B_1$  и  $B_2$  – события, составляющие полную группу. Значит, вероятность суммы этих событий равна 1. «Внутри» этой суммы вероятность  $Cc$  в два раза больше, чем  $CC$ . Следовательно, вероятность того, что взятая из  $F_2$  серая мышь имела генотип  $CC$  равна  $P(B_1) = 1/3$ , а генотип  $Cc$   $P(B_2) = 2/3$ .

Если для скрещивания с белой мышью случайно взяли серую мышь с генотипом  $CC$ , то после скрещивания  $CC \times cc$  в потомстве будут все серые мыши, значит для события  $B_1$  условная вероятность  $P_{B_1}(A)$  появления всех трех серых мышей в потомстве равна  $1^3$ . Если же для скрещивания случайно взяли серую мышь с генотипом  $Cc$  (событие  $B_2$ ), то после скрещивания  $Cc \times cc$  в потомстве будет  $\frac{1}{2}$  серых ( $Cc$ ) и  $\frac{1}{2}$  белых ( $cc$ ) мышей, и условная вероятность  $P_{B_2}(A)$  того, что все три потомка будут серыми, равна  $(\frac{1}{2})^3$ .

Теперь можно оценить искомую полную вероятность  $P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{12} = 0,42$ .

Пример. Определим соотношение долей генотипов в  $F_3$  после самоопыления популяции  $F_2$  пшеницы, полученной из  $F_1$  ( $AA \times aa$ ).

По формуле полной вероятности событие  $A$  «зерно, случайно взятое из  $F_3$ , несет генотип  $AA$ » имеет вероятность:  $P(AA) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0,375$ .

Действительно, событие  $A$  может произойти совместно с одним из 3-х событий:

- 1)  $B_1$  – это зерно вызрело на растении  $F_2$ , имеющем генотип  $AA$ ;
- 2)  $B_2$  – это зерно вызрело на растении  $F_2$ , имеющем генотип  $Aa$ ;
- 3)  $B_3$  – это зерно вызрело на растении  $F_2$ , имеющем генотип  $aa$ .

$P(B_1) = \frac{1}{4}$  – вероятность того, что это случайно взятое зерно вызрело на растении  $AA$  из  $F_2$ ;

$P_{B_1}(A) = 1$  – вероятность того, что это случайно взятое зерно, образовавшееся в результате самоопыления на растении  $AA$ , имеет генотип  $AA$ ;

$P(B_2) = \frac{1}{2}$  – вероятность того, что зерно созрело на растении  $F_2$  с генотипом  $Aa$ ;

$P_{B_2}(A) = \frac{1}{4}$  – вероятность того, что это зерно с растения  $Aa$  имеет генотип  $AA$ ;

$P(B_3) = \frac{1}{4}$  – вероятность того, что зерно взято с растения  $F_2$ , несущего генотип  $aa$ ;

$P_{B_3}(A) = 0$  – вероятность того, что случайно взятое зерно с такого растения имеет генотип  $AA$ .

$B_1, B_2, B_3$  – полная группа событий.

Аналогично, вероятности случайно взять из  $F_3$  зерно  $Aa$  и  $aa$ :

$$P(Aa) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0,25.$$

$$P(aa) = 0,375.$$

При большом объеме случайной выборки зерен из  $F_3$  три оцененные вероятности близки к долям трех генотипов. Таким образом, в  $F_3$  будет следующее соотношение долей генотипов:

|       |      |        |
|-------|------|--------|
| $AA$  | $Aa$ | $aa$   |
| 0,375 | 0,25 | 0,375. |

## 5.6. Приложения в экологии

В экологии ряд Пуассона используют, в частности, для того, чтобы выяснить, действительно ли организмы на обследуемом участке распределены случайно. Для этого участок разбивают на много одинаковых квадратов и подсчитывают число особей данного вида растений или животных в каждом квадрате. Если участок слишком велик, то выбирают наугад несколько квадратов и в каждом из них подсчитывают число особей. В любом случае числа квадратов, на которых обнаружено 0, 1, 2, ...  $k$  особей, сравнивают (используя критерий  $\chi^2$ ) с ожидаемыми при пуассоновском распределении, то есть в предположении, что организмы распределены совершенно случайно.

Критерием  $\chi^2$  можно пользоваться, если соблюдаются определенные условия: достаточно большой объем выборочной совокупности (например, общее число пересчитанных животных  $n > 50$ ); в каждой рассчитанной группе должно быть не менее пяти наблюдений (например, число квадратов с  $n$  животными должно быть не менее пяти); для вычисления  $\chi^2$  используют только численности, а не проценты или величины, полученные при измерениях или взвешиваниях и т.д. Если наблюдаемые и ожидаемые значения совпадают довольно хорошо ( $\chi^2_p < \chi^2_t$ ), то можно сделать вывод, что распределение организмов по участку близко к случайному. В противном случае ( $\chi^2_p > \chi^2_t$ ) есть две возможности:

1. Особи избегают друг друга или же препятствуют пребыванию поблизости от себя других особей. В таких ситуациях если, например, среднее число особей на квадрат равно трем, то квадратов с тремя особями будет слишком много по сравнению с ожидаемым числом. Квадратов же, в которых нет ни одной особи или, наоборот, много особей, будет слишком мало, так как они вынуждены разместиться более равномерно по участку.

2. Особи «скучиваются», например, потому, что они привлекают друг друга, или потому, что в некоторых местах рассматриваемого участка условия более благоприятны для их существования, чем на других. В этом случае будет слишком много как пустых квадратов, так и квадратов с большим количеством особей.

*Задача.* На некотором достаточно однородном участке было расставлено 543 разных по конструкции ловушки для мелких млекопитающих. По прошествии некоторого времени в ловушках было обнаружено:

|                          |     |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--------------------------|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| Число животных в ловушке | 0   | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Число ловушек            | 468 | 41 | 16 | 11 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 |

Спрашивается – одинаковы ли по эффективности ловушки разных конструкций?

*Схема решения.*

Общее число животных:

$$n = 0 \cdot 468 + 1 \cdot 41 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 141,$$

$$m = n \cdot p = 141 \cdot 1/543 = 0,26.$$

Теперь, используя ряд Пуассона, можно определить ожидаемые доли ловушек с 0, 1, 2 и т.д. животными в предположении, что все ловушки равно эффективны. После чего находим ожидаемое число ловушек с определенным количеством животных.

Поскольку число ловушек с 4, 5, 7, 8 животными меньше пяти, то их можно объединить в один класс.

Ожидаемая доля ловушек, в которых нет ни одного животного, равна  $e^{-m} = e^{-0,26} = 0,77$ . Ожидаемое число ловушек, в которых нет ни одного животного,  $-0,77 \cdot 543 \approx 418,1$ .

Аналогично определяют ожидаемые доли и число ловушек с 1, 2, 3-мя животными. Ожидаемую долю ловушек с числом животных от 4 до 8 можно определить по формуле  $1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) = 1 - 0,77 - 0,20 - 0,026 - 0,002 = 0,002$ .

| Число животных в ловушке | 0     | 1     | 2     | 3     | от 4 до 8 | $\Sigma$ |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-----------|----------|
| Ожидаемая доля ловушек   | 0,77  | 0,20  | 0,026 | 0,002 | 0,002     | 1        |
| Ожидаемое число ловушек  | 418,1 | 108,6 | 14,1  | 1,1   | 1,1       | 543      |

$$\chi^2_p \approx \frac{(468 - 418,1)^2}{418,1} + \frac{(41 - 108,6)^2}{108,6} + \dots \approx 169,05.$$

Число степеней свободы  $df = 5 - 1 = 4$ .

Для  $P = 0,05$   $\chi^2_{\tau} = 9,49$ .

$\chi^2_p > \chi^2_{\tau}$ . Следовательно, не все конструкции ловушек равноэффективны.

Итак, случайным (пуассоновским) является распределение объектов (клеток на предметном стекле; сорняков в поле и т.д.), аналогичное тому, которое получается в результате следующего модельного процесса:

1. Рассматриваемую площадь делят на большое число равновеликих квадратов.

2. Объекты помещают один за другим на случайно, независимо выбираемые квадраты. То есть, вероятность выбора данного квадрата совершенно одинакова и не зависит от того, содержит ли уже этот квадрат ноль, один или несколько объектов.

## 5.7. Моделирование в медицине

Многие болезни, к счастью, достаточно редки или становятся таковыми после принятия профилактических и лечебных мер. Однако даже при самых благоприятных условиях в больших популяциях все же встречается некоторое число больных редкими заболеваниями. Распределение Пуассона дает вероятности таких событий в нормальной ситуации. Если в наблюдаемой популяции, например, в конкретном городе, больные встречаются чаще, чем это прогнозируется рядом Пуассона для всей страны, то это говорит о нарушении условий в данном городе, о необходимости выяснения причин, принятия мер и т.д.

Например, при введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 10000 вакцинированных детей заболеет 1?

Число «испытаний»  $n = 10000$ . Вероятность заболеть  $p = 0,0001$ . Поэтому  $m = np = 1$ , и по формуле Пуассона имеем  $P(1) = e^{-1} = 0,368$ .

Аналогично, вероятность, что заболеют 2 ребенка  $P(2) = \frac{1}{2!} e^{-1} \approx 0,184$ , а вероятности заболевания 3, 4 и 5 детей соответственно равны  $P(3) = \frac{1}{3!} m^3 e^{-m} \approx 0,061$ ;  $P(4) = \frac{1}{4!} m^4 e^{-m} \approx 0,015$ ;  $P(5) = \frac{1}{5!} m^5 e^{-m} \approx 0,003$ .

Вероятность того, что хотя бы один ребенок заболеет, равна  $1 - P(0) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$ .

Если принять, что 10000 новорожденных – это годовая норма, скажем, крупного районного роддома, то примерно в 73% [ $P(0) + P(1)$ ] таких домов полиомиелитом заболеет не более одного ребенка в год; в 18% – два ребенка в год; в 6% – три и в 1,5% – четыре ребенка в год. Если же в каком-то роддоме заболело более 5 детей – то это чрезвычайное происшествие. Вероятность такого события равна 0,001.

Аналогичные расчеты можно провести по детской смертности, врожденным аномалиям и признакам. Например, в среднем по стране 1 из 600 детей рождается с болезнью Дауна. Следовательно, в каждом микрорайоне, где проживает 3000 детей, в среднем будет  $m = np = 3000 \times 1/600 = 5$  детей, страдающих такой болезнью. При этом вероятность рождения 10 детей с синдромом Дауна в микрорайоне равна:

$$P(10) = \frac{m^{10}}{10!} e^{-m} = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5} \approx 0,018.$$

Таким образом, подобных микрорайонов должно быть приблизительно 2 из 100.

## 5.8. Модель агробиоценоза

Агробиоценоз включает совокупность взаимовлияющих процессов биотического и абиотического характера. Для сельскохозяйственной науки наиболее важная часть агробиоценоза – это посев сельскохозяйственной культуры. При выборе методов моделирования агробиоценоза и степени сложности модели определяющая роль должна отводиться цели моделирования. Например, такой целью может быть выбор оптимальной стратегии проведения сельскохозяйственных мероприятий: орошения, полива, внесения удобрений, выбор наилучших сроков посева или посадки растений и пр. – с целью получения максимальных урожаев.

Сложность агробиоценоза не позволяет подойти к описанию его функционирования как к процессу, описываемому единым уравнением. Поэтому целесообразно представлять всю систему происходящих в агробиоценозе процессов в виде блочной иерархической структуры. Обычно проводится деление модели на биотический и абиотический блоки. Далее, среди биотических процессов выделяют блок роста и развития посева сельскохозяйственной культуры, блок функционирования почвенной микрофлоры, блок функционирования почвенной фауны, блок развития энтомофауны, блок развития болезней сельскохозяйственных культур, блок взаимодействия сельскохозяйственной культуры с сорняками и др.

Абиотические блоки включают в себя модели, описывающие ряд геофизических процессов, характеристики которых важны для функционирования биотических процессов: формирование теплового, водного режимов почвы и приземных слоев воздуха, концентрации и передвижения биогенных и токсических солей, различных остатков распада пестицидов, ростовых веществ и метаболитов в почве, концентрация  $\text{CO}_2$  в посевах.

Блочная структура моделей дает большие преимущества для моделирования, позволяя изучать, изменять и детализировать одни блоки, не меняя других. Как правило, число параметров, которые входят внутрь блоков, существенно больше числа параметров, которыми блоки соединяются друг с другом. Это один из принципов построения имитационной модели.

Модели продукционного процесса сельскохозяйственных растений как части агробиоценоза обычно имеют балансовый характер, то есть для каждого вещества производится расчет всех «притоков» и «оттоков» (рис. 5.4). Например, при расчете водного режима (водный блок) учитываются выпадение осадков (или дождевание), перехват этих осадков надземными органами растений, возможное образование слоя влаги на поверхности почвы, перемещение влаги в почве из одного слоя в другой, обмен с грунтовыми водами, поглощение воды

корнями и пр. Таким же образом в модели замыкаются циклы круговорота по углероду, азоту и другим элементам.

Наиболее разработаны в настоящее время блоки, описывающие не собственно биологические, а скорее геофизические процессы: влаго- и теплообмен в почве, влаго- и теплоперенос в системе почва–растение–приземный воздух. Это связано в первую очередь с большей изученностью этих процессов и возможностью их описывать при помощи аппарата дифференциальных уравнений, разработанного для подобных задач в гидро- и аэродинамике. При этом посев формально рассматривается как неоднородная по вертикали пленка, покрывающая поверхность поля.

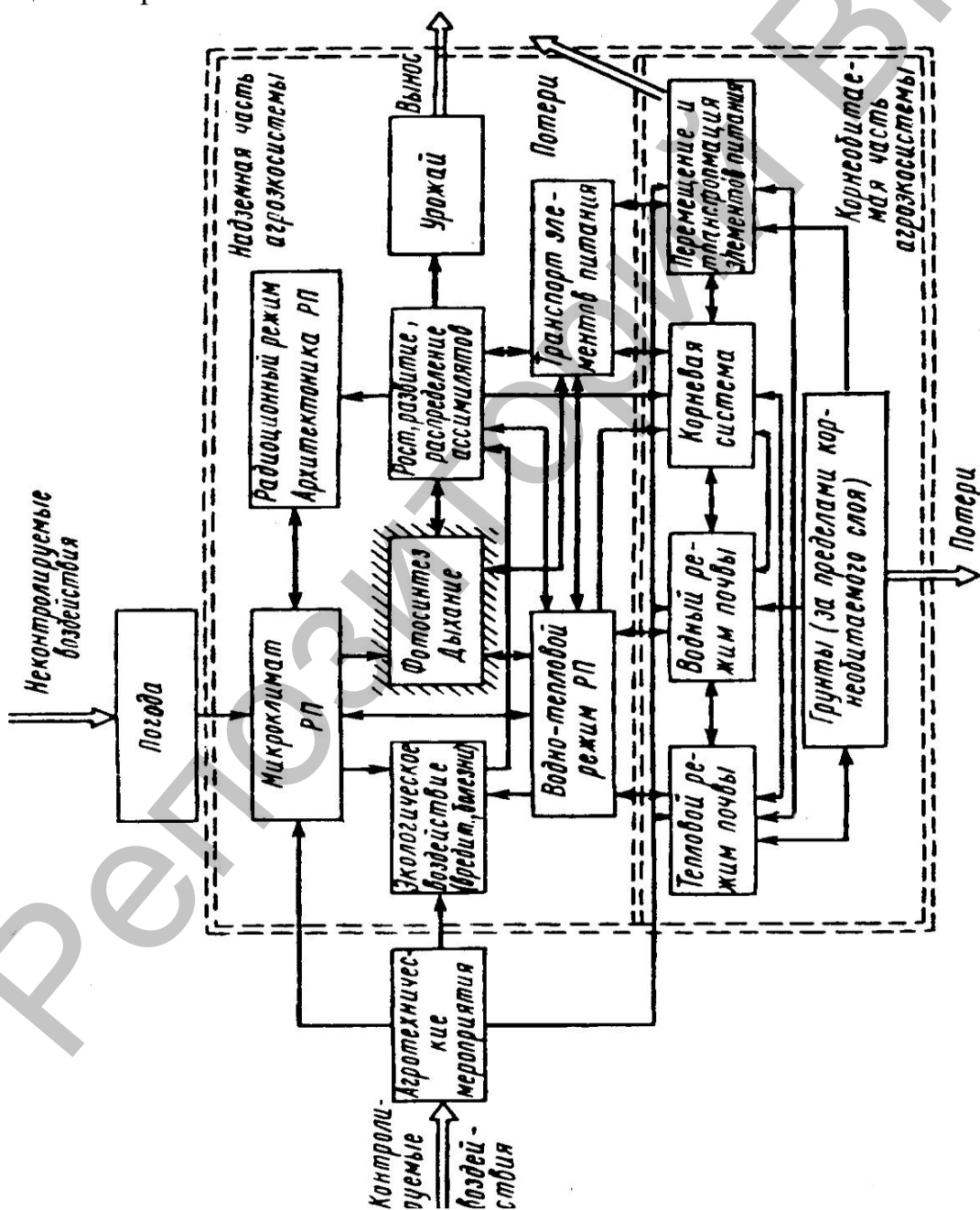


Рис. 5.4. Блок-схема модели продуктивности агроэкосистемы.

**Контрольные вопросы:**

1. Приведите уравнение (модель) для описания прогрессии размножения, когда нет никаких ограничений на  $N$ . Как изменится эта модель, если ввести ограничение – предельную численность популяции  $K_{\max}$ ?
2. Поясните понятие популяционных волн и их классификацию. От чего зависит форма волн численности?
3. Из каких частей состоит уравнение – модель для описания изменений численности популяций хищника и жертвы в их ограниченном ареале совместного обитания?
4. Какие предположения используются для построения модели роста дерева?
5. Какова генетическая основа биологического метода борьбы с нежелательным видом? Составьте модель для описания изменений численностей нормальных и стерильных самцов.
6. Приведите модель естественного хода эпидемии при  $x(0)=1$ . Как изменится эта модель, если в момент времени  $t$  болен не один человек, а несколько и через небольшой промежуток времени больные выздоравливают и получают иммунитет?
7. В чем сложность построения модели для определения биомассы определенных возрастных групп?
8. Сформулируйте демографическую задачу, которая может быть решена с использованием дискретной «шаговой» модели динамики возрастной структуры популяции в зависимости от времени.

## 6. МОДЕЛИ МОНИТОРИНГА ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

### **Вопросы:**

- 6.1. *Описательная модель распространения загрязняющей примеси в грунтовых водах.*
- 6.2. *Динамические уравнения перемещения воды с примесью в пористой среде.*
- 6.3. *Моделирование очистных сооружений.*
- 6.4. *Уравнения гидродинамики и газодинамики.*
- 6.5. *Уравнения акустики.*

Во второй половине XX и в XXI веке техногенная деятельность человека привела к резкому изменению среды обитания за счет внедрения в нее чужеродных ингредиентов: вредных химических примесей и загрязняющих веществ, нехарактерных звуковых шумов, повышенных уровней электромагнитных и радиационных излучений, тепловых потоков, бактериальных вспышек и других. Поэтому одной из основных задач экологии является изучение средствами математического моделирования влияния этих факторов на природу и человека. Моделирование в экологии сводится к разработке информационных моделей всеобщего мониторинга внешней среды, требующего мощного компьютерного обеспечения [7].

### **6.1. Описательная модель распространения загрязняющей примеси в грунтовых водах**

Распространение примесей в горизонтах подземных вод в настоящее время требует детального изучения. Это связано с распространением радиоактивных и высокотоксичных химических загрязнений в водной среде и с возрастанием антропогенной и техногенной нагрузки, ухудшающей качество воды. Реализация математических моделей, описывающих распространение примесей в подземных водах, требует высокой производительности вычислительных машин и большого числа массовых расчетов для конкретных географических сооружений. Это диктует, в свою очередь, использование вычислительных систем при компьютерном моделировании экологических прогнозов.

#### **6.1.1. Основные положения, параметры и функции модели**

Опишем одну из математических моделей течения воды с примесью в пласте грунта. Пусть нижнее полупространство  $z < 0$  считается твердым, куда жидкость и примесь не проникают. Слой  $0 < z < H$  в

верхнем полупространстве заполнен пористой средой. Пористая среда в простейшем случае представляет собой твердые частицы, в которые вода не проникает. Жидкость заполняет пространство между твердыми частицами, называемое порами (рис. 6.1).

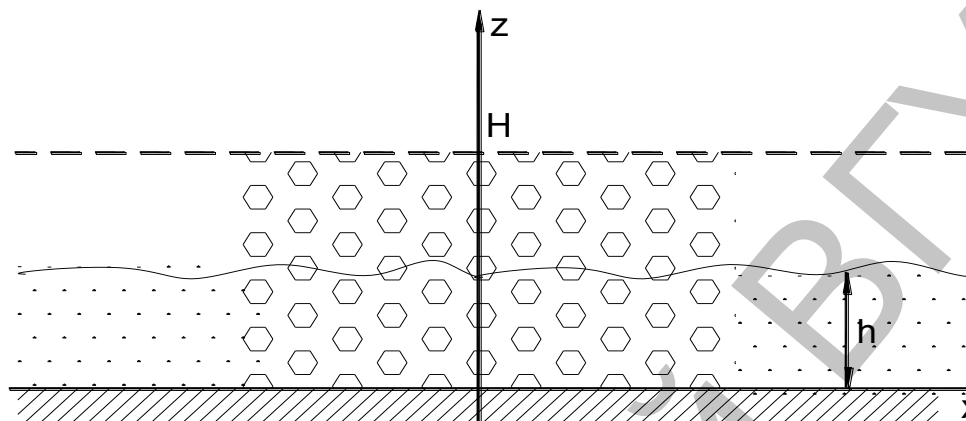


Рис. 6.1. Течение воды с примесью в пласте грунта.

Для характеристики количества пор введем *пористость*  $p = p(x, y, z, t)$  в окрестности произвольной точки  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ . Для этого вокруг точки  $(x, y, z)$  выделим элементарный объем  $\Delta V(x, y, z)$ . Обозначим объем пространства между твердыми частицами в момент времени  $t$  через  $\Delta V_{nop}(x, y, z, t)$ ,  $\Delta V_{nop} < \Delta V$ .

Пористость определим как предел:

$$p(x, y, z, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{nop}(x, y, z, t)}{\Delta V(x, y, z)}. \quad (6.1)$$

Пористость может изменяться с течением времени  $t$ , т.к. вода при движении может уносить твердые частицы из объема  $\Delta V$ . В дальнейшем будем рассматривать случай, когда пористость не изменяется вдоль оси  $Oz$ , то есть  $p = p(x, y, z) \equiv p(M, t)$   $M = (x, y)$ . Это означает, что среда неоднородна вдоль плоскости  $Oxy$ .

Из соотношения (6.1) следует приближенная формула:

$$\Delta V_{nop} = p \Delta V. \quad (6.2)$$

Формула (6.2) определяет объем пор в элементарном объеме  $\Delta V$ . Над плоскостью  $Oxy$  расположен слой воды, которая заполняет поры среды. Пусть  $\rho$  – плотность воды,  $\rho = \text{const}$ ,  $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Слой воды будем характеризовать толщиной в каждой точке плоскости  $M = (x, y)$ . Обозначим:  $h(M, t)$  – расстояние от плоскости  $Oxy$  до верхнего уровня

воды в момент времени  $t$ . Таким образом,  $z = h(x, y, t)$  – уравнение верхней поверхности  $\Gamma$  слоя воды.

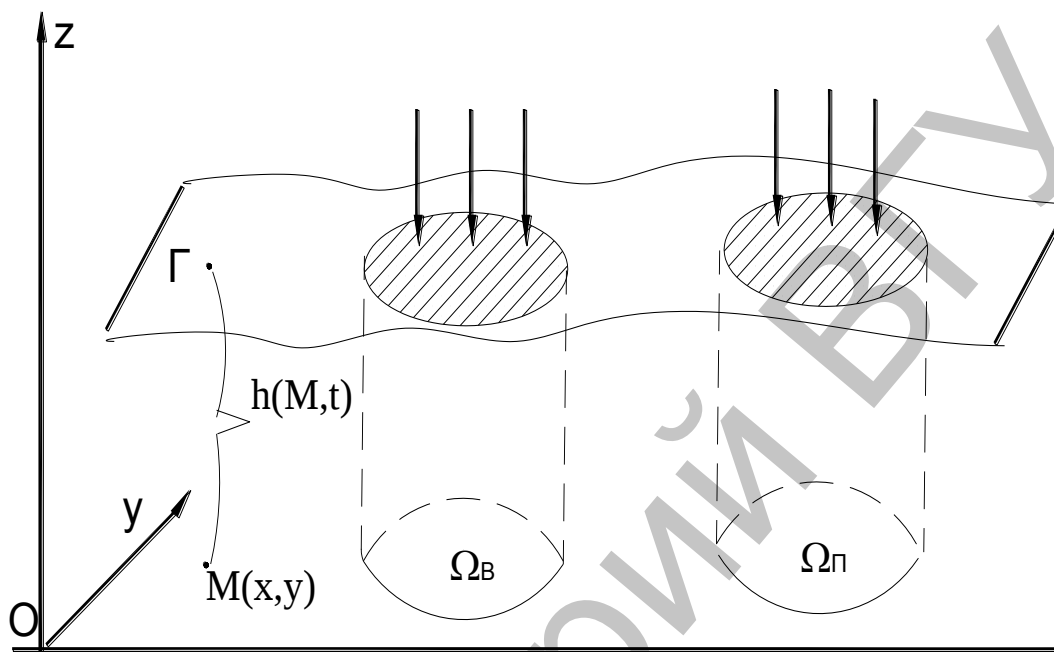


Рис. 6.2. Модель верхней поверхности слоя воды.

Введем скорость течения воды  $\vec{v}(M, t)$  в точке  $M$  и предположим, что вода перемещается только в горизонтальном направлении:  $\vec{v} = \vec{v}(M, t) = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ . Будем считать также, что скорость  $\vec{v}$  не зависит от координаты  $z$ . Так как вектор градиента  $\text{grad } h(M, t)$  с отрицательным знаком указывает направление наибольшего наклона поверхности воды  $\Gamma$  в точке  $M$ , то это направление будем считать направлением течения воды, тогда получим:

$$\vec{v} = -K \text{grad } h, \quad (6.3)$$

где  $K$  – коэффициент фильтрации воды через пористую среду,  $[K] = \frac{M}{c}$ .

Зависимость коэффициента  $K$  от свойств среды определяется законом Дарси. В простейшем случае  $K = \frac{\alpha d^2}{\nu} g$ , где  $d$ , м – средний диаметр песчинок,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости воды ( $\nu_{\text{воды}} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{M^2}{c}$ ),  $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$  – ускорение свободного падения,  $\alpha = 6,17 \cdot 10^{-4}$  – безразмерный параметр.

В воде содержится примесь вредных веществ, которая представляет собой отдельные молекулы или микроскопические частицы.

Пусть  $c=c(x,y,t)$  – концентрация примеси, то есть число молекул (частиц) примеси, содержащихся в единице объема воды в окрестности точки  $(x,y)$  в момент времени  $t$ ;  $[c]=\frac{ч}{м^3}$ ,  $ч$  – частица.

### 6.1.2. Моделирование источников воды и примеси

В слой воды с примесью может поступать дополнительная вода и дополнительная примесь из внешней воздушной среды. Плоскую область  $\Omega_B$  на плоскости  $Oxy$ , на которую поступает дополнительная вода, будем называть *источником воды*, а плоскую область  $\Omega_\Pi$ , на которую поступает дополнительная примесь, будем называть *источником примеси* (рис. 6.2).

Для описания источников введем функции:  $f_B=f_B(M,t)$  – плотность источников воды, то есть количество воды, поступающее на единичную площадь в окрестности точки  $M$  в момент времени  $t$  за единицу времени;  $[f_B]=\frac{кг}{м^2с}$ ;  $f_B(M,t) \neq 0$ , если  $M \in \Omega_B$  и  $t_1 \leq t \leq t_2$ , где  $t_1$  – момент включения источника;  $t_2$  – момент отключения;  $f_\Pi=f_\Pi(M,t)$  – плотность источников примеси, то есть число частиц примеси, поступающих на единичную площадь в окрестности точки  $M$  в момент времени  $t$  за единицу времени;  $[f_\Pi]=\frac{ч}{м^2с}$ ;  $f_\Pi(M,t) \neq 0$ , если  $M \in \Omega_B$  и  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Заметим, что в случае отрицательности функций  $f_\Pi, f_B$  они моделируют отток воды и примеси из грунта.

### 6.1.3. Закон диффузии примеси

Кроме перемещения примеси вместе с водой возможно перемещение на основании диффузионных процессов в воде, для количественного описания которых через точку  $\xi \in R^3$  проведем элементарную площадку  $\Delta S_\xi$ , произвольно ориентированную в пространстве. Пусть  $\vec{n}_\xi$  – единичная нормаль к площадке  $\Delta S_\xi$ .

Тогда число частиц примеси, которые поступают через площадку  $\Delta S_\xi$ , может быть определено по закону Нернста:

$$\Delta Q^\Pi(\xi,t) = -a \frac{\partial c(\xi,t)}{\partial n_\xi} \Delta S_\xi = -(\vec{C}, \vec{n}_\xi) \Delta S_\xi, \quad (6.4)$$

где  $\Delta Q^\Pi$  – число частиц примеси, которые поступают через площадку  $\Delta S_\xi$  в направлении нормали  $\vec{n}_\xi$  за единицу времени при отсутствии грунта;  $a$  – коэффициент диффузии,  $[a]=\frac{м^2}{с}$ ;  $\vec{C} = a \cdot \text{grad } c$  – векторный диффузионный поток примеси.

## 6.2. Динамические уравнения перемещения воды с примесью в пористой среде

Выведем, исходя из законов сохранения, уравнения с частными производными параболического типа, описывающие передвижение воды в слое грунта и перемещение вредной примеси с учетом диффузионных процессов.

### 6.2.1. Уравнение движения воды в грунте

Для вывода уравнения рассмотрим вертикальный столб воды в области  $D$ , ограниченной нижним плоским основанием  $\Omega$ , боковой поверхностью  $\Gamma_\delta$  и верхней поверхностью воды  $\Gamma$ . Пусть  $\gamma = \partial\Omega$  – контур, ограничивающий основание  $\Omega$  (рис. 6.3).

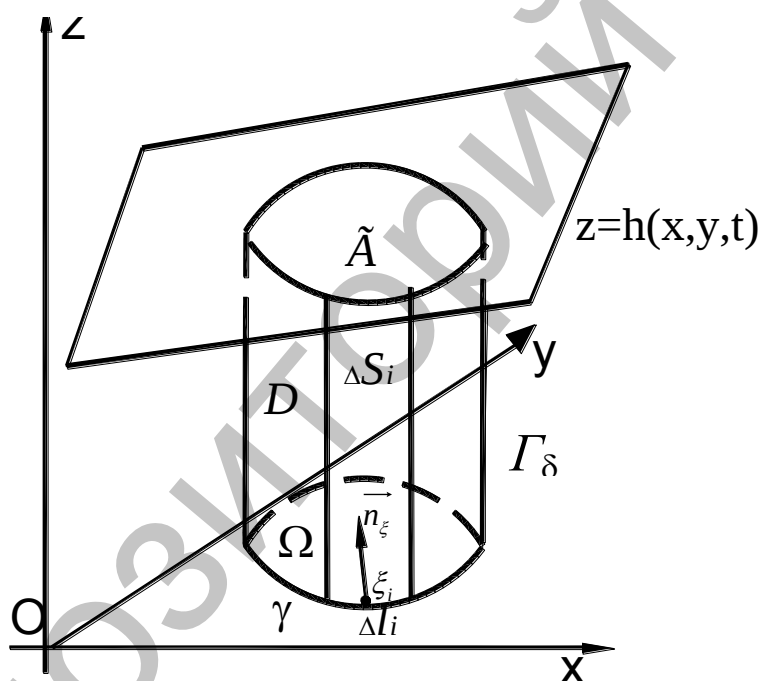


Рис. 6.3. Вертикальный столб воды в области  $D$ .

Воспользуемся уравнением баланса воды в области за промежуток времени  $t_1, t_2$ :

$$\Delta Q_{t_1 t_2}^B = W_1^B + W_2^B, \quad (6.5)$$

где  $\Delta Q_{t_1 t_2}^B$  – изменение количества воды в области  $D$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ ;  $W_1^B$  – количество воды, поступающее в область  $D$  через боковую поверхность  $\Gamma_\delta$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ ;  $W_2^B$  – количество воды, выпадающее в виде дождя на поверхность  $\Gamma_\delta$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ .

Вычислим  $\Delta Q_{t_1 t_2}^B$ . Для этого плоскую область  $\Omega$  разобьем на элементарные площадки  $\Delta\Omega_i$  и рассмотрим вертикальную цилиндрическую область  $\Delta V_i$ , ограниченную снизу и сверху основанием  $\Delta\Omega_i$  и поверхностью  $\Gamma$ . Очевидно, что объем  $\Delta V_i = h(M, t) \Delta\Omega_i$ . Используя (6.2), вычислим объем пор в области  $\Delta V_i$ :  $\Delta V_{nopi} = p(M_1, t) h(M_1, t) \Delta\Omega_i$ . Умножая на плотность  $\rho$ , вычислим массу воды, содержащуюся в порах объема  $\Delta V_i$ :

$$\Delta M_i = \rho p(M_1, t) h(M_1, t) \Delta\Omega_i.$$

Суммируя по всем площадкам  $\Delta\Omega_i$  и переходя к пределу при  $\Delta\Omega_i \rightarrow 0$ , получим интеграл:

$$\sum_i \Delta M_i = \sum_i \rho p_i h_i \Delta\Omega_i \xrightarrow{\Delta\Omega_i \rightarrow 0} \iint_{\Omega} \rho p h dS = Q(t),$$

где  $Q(t)$  – масса воды в области  $D$  в момент времени  $t$ .

Отсюда:

$$\Delta Q_{t_1 t_2}^B = Q(t_2) - Q(t_1) = \iint_{\Omega} \rho p h \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dS = \iint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho p h) dt dS. \quad (6.6)$$

Вычислим  $W_1^B$ . Для этого разобьем контур  $\gamma$  на элементарные длины  $\Delta l_i$  и далее разобьем боковую поверхность  $\Gamma_{\delta}$  на вертикальные полосы с площадью  $\Delta S_i = h(\xi_i, t) \Delta l_i$ , где  $\xi_i$  – точка на дуге  $\Delta l_i$ .

Спроектируем скорость воды  $\vec{v}(\xi_i, t)$  в точке  $\xi_i$  на внутреннюю единичную нормаль  $\vec{n}_{\xi}$ , тогда  $(\vec{v}(\xi_i, t), \vec{n}_{\xi}) \Delta S_i$  – объем, который поступает в область  $D$  через полосу  $\Delta S_i$  за единицу времени.

$$\Delta M_i = \rho p(\xi_i, t) h(\xi_i, t) (\vec{v}(\xi_i, t), \vec{n}_{\xi}) \Delta l_i. \quad (6.7)$$

Суммируя массы (6.7) и переходя к пределу при  $\Delta l_i \rightarrow 0$ , получим контурный интеграл:

$$\sum_i \Delta M_i \xrightarrow{\Delta l_i \rightarrow 0} \int_{\gamma} \rho p h (\vec{v}, \vec{n}) dl = M(t).$$

С помощью формулы Остроградского–Гаусса можно преобразовать контурный интеграл в интеграл по площади  $\Omega$ , тогда  $M(t) = - \iint_{\Omega} \text{div}(\rho p h \vec{v}) dS$  – масса воды, которая поступает в область  $D$  через поверхность  $\Gamma_{\delta}$  за единицу времени в момент времени  $t$ .

Интегрируя по времени с учетом (6.3), получим:

$$W_1^B = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\rho ph K \operatorname{grad} h) dS dt. \quad (6.8)$$

Для вычисления  $W_2^B$  площадь  $\Omega$  разобьем на элементарные площадки  $\Delta\Omega_i$ . С учетом смысла функции  $f_B$  масса воды, выпадающая на площадку  $\Delta\Omega_i$  за единицу времени, определяется формулой  $\Delta M_i = f_B(M_i, t) \Delta\Omega_i$ . Суммируя по всем площадкам и переходя к пределу при  $\Delta\Omega_i \rightarrow 0$ , получим интеграл:

$$\sum_i \Delta M_i = \sum_i f_B(M_i, t) \Delta\Omega_i \xrightarrow{\Delta\Omega_i \rightarrow 0} \iint_{\Omega} f(M, t) dS_M.$$

Далее, интегрируя по времени на интервале  $(t_1, t_2)$ , вычислим:

$$W_2^B = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} f_B dS dt. \quad (6.9)$$

Полученные выражения (6.6), (6.8), (6.9) подставим в уравнение баланса (6.5). Опустим интегралы в силу произвольности области  $\Omega$  и временного интервала, получим уравнение перемещения воды в грунте:

$$\frac{\partial(\rho ph)}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho ph K \operatorname{grad} h) = f_B. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) фактически является дифференциальной формой закона сохранения количества воды.

### 6.2.2. Уравнение перемещения примеси в грунтовых водах

Для получения дифференциального уравнения воспользуемся уравнением баланса примеси в области  $D$  за промежуток времени  $t_1, t_2$ :

$$\Delta Q_{t_1 t_2}^{\Pi} = W_1^{\Pi} + W_2^{\Pi} + W_3^{\Pi}, \quad (6.11)$$

где  $\Delta Q_{t_1 t_2}^{\Pi}$  – изменение количества примеси в области  $D$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ ;  $W_1^{\Pi}$  – количество примеси, которое поступает в область  $D$  через поверхность  $\Gamma_{\delta}$  в промежуток времени  $t_1, t_2$  за счет движения воды;  $W_2^{\Pi}$  – количество примеси, выпадающее в виде осадков на поверхность  $\Gamma$  за время от  $t_1$  до  $t_2$ ;  $W_3^{\Pi}$  – количество примеси, поступающее в область  $D$  через боковую поверхность  $\Gamma_{\delta}$  за время от  $t_1$  до  $t_2$  за счет диффузии.

Для вычисления величин  $\Delta Q_{t_1 t_2}^{\Pi}$ ,  $W_1^{\Pi}$ ,  $W_2^{\Pi}$  достаточно в формулах (6.6), (6.8), (6.9) плотность воды  $\rho$  заменить на концентрацию примеси  $c$ , тогда:

$$\Delta Q_{t_1 t_2}^{\Pi} = \iint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (cph) dt dS; W_1^{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} \operatorname{div}(cphK \operatorname{grad} h) dS dt; W_2^{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} f_{\Pi} dS dt. \quad (6.12)$$

Вычислим  $W_3^{\Pi}$ . Для этого боковую поверхность  $S_{\delta}$  разобьем на вертикальные полосы  $\Delta S_i$  (рис. 6.3), тогда на основании закона диффузии (6.4) при отсутствии грунта через площадку  $\Delta S_i$  за единицу времени поступает примесь в количестве:

$$\Delta Q_i^{\Pi} = -(\vec{C}(\xi_i t) \vec{n}_{\xi}) \Delta S_i = -(\vec{C}(\xi_i t) \vec{n}_{\xi}) h(\xi_i t) \Delta l_i.$$

При наличии грунта, умножая на пористость, получим:

$$\Delta Q_i = -p(\xi_i t) h(\xi_i t) (\vec{C}(\xi_i t) \vec{n}_{\xi}) \Delta l_i. \quad (6.13)$$

Суммируя по всем площадкам  $\Delta S_i$  и переходя к пределу при  $\Delta l_i \rightarrow 0$ , получим количество примеси, поступающее в грунте через поверхность  $S_{\delta}$  за единицу времени:

$$\sum_i \Delta Q_i \xrightarrow{\Delta l_i \rightarrow 0} - \int_{\gamma} ph(a \operatorname{grad} c, \vec{n}) dl = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(pha \operatorname{grad} c) dS.$$

Интегрируя по времени, определим искомую величину:

$$W_3^{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} \operatorname{div}(pha \operatorname{grad} c) dS dt. \quad (6.14)$$

Далее, подставляя выражение (6.12), (6.14) в уравнение баланса (6.11) и опуская интегралы в силу произвольности области интегрирования  $\Omega$  и временного интервала интегрирования, получим уравнение перемещения примеси в грунте:

$$\frac{\partial(cph)}{\partial t} - \operatorname{div}(cphK \operatorname{grad} h + pha \operatorname{grad} c) = f_{\Pi}. \quad (6.15)$$

Таким образом, получена система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа (6.10), (6.15) для определения уровня грунтовых вод  $h(x, y, t)$  и концентрации вредных примесей  $c(x, y, t)$ .

### 6.3. Моделирование очистных сооружений

Под очистным сооружением будем принимать прямоугольный объем  $D_1 = \Omega_1 \times (0 < z < H)$  с нижним прямоугольным плоским основанием  $\Omega_1$ , заполненный загрязненным вредной примесью грунтом (рис. 6.4). Грунт промывается чистой водой, которая поступает на плоскую область  $\Omega_B \subset \Omega_1$ . С другой стороны из плоской области  $\Omega_{П}^{нас} \subset \Omega_1$  откачивается вода с примесью и поступает в очистное устройство для очистки. Область  $D_2 = \Omega_2 \times (0 < z < H)$  – защитный барьер.

Окружающая очистное сооружение область  $\Omega_3 = \frac{R^2}{\Omega_1 \cup \Omega_2}$  заполнена природной пористой средой. Обозначим граничную линию  $\gamma_1$  между областями  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и линию  $\gamma_2$  между областями  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ .

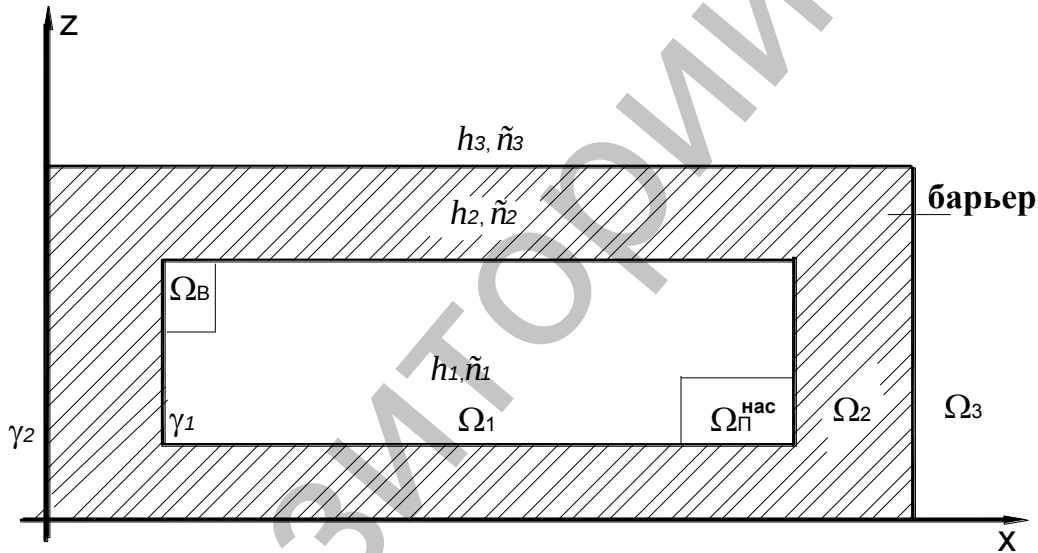


Рис. 6.4. Модель очистного сооружения.

Часть воды с примесью просачивается из области  $D_1$  через барьер  $D_2$  во внешнюю область  $D_3$ . Введем функции:  $h_j(M, t)$ ,  $c_j(M, t)$ ,  $p_j(M, t)$ ,  $K_j(M, t)$ ,  $a_j(M, t)$ ,  $M \in \Omega_j$ , характеризующие уровень воды, концентрацию примеси и свойства грунта в соответствующих областях  $D_j$  ( $j=1,2,3$ ). Для расчета количества примеси, поступившей во внешнюю среду, сформируем начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (6.10), (6.15) в областях  $V_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho p_j h_j)}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho p_j h_j K_j \operatorname{grad} h_j) &= f_B^{(j)}, \text{ в } V_j = \Omega_j \times (0 < t < \infty), \\ \frac{\partial(c_j p_j h_j)}{\partial t} - \operatorname{div}(c_j p_j h_j K_j \operatorname{grad} h_j + p_j h_j a_j \operatorname{grad} c_j) &= f_{П}^{(j)}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где  $f_B^{(j)}$ ,  $f_H^{(j)} \equiv 0$ ,  $j = 2, 3$ ,  $f_B^{(1)}(M, t) = f(t)\chi(M, \Omega_B)$ ;

$$f_H^{(1)}(M, t) = -\frac{f(t)}{\rho} \chi(M, \Omega_H^{vac}) c_1(M, t); \quad f(t) \neq 0, \text{ если } t_1^0 \leq t \leq t_2^0; \quad \chi(M, \Omega) -$$

характеристическая функция области  $\Omega$ .

К уравнениям (6.16) добавим начальные условия:

$$h_j|_{t=0} = \varphi_j, \quad c_j|_{t=0} = \psi_j \quad (6.17)$$

Граничные условия, означающие совпадение уровней воды и концентраций примеси на границах  $\gamma_j$ , запишем в виде:

$$h_1|_{\gamma_1} = h_2|_{\gamma_1}, \quad h_2|_{\gamma_2} = h_3|_{\gamma_2}, \quad c_1|_{\gamma_1} = c_2|_{\gamma_1}, \quad c_2|_{\gamma_2} = c_3|_{\gamma_2}. \quad (6.18)$$

Приравнявая потоки воды (6.7) по обе стороны от границ  $\gamma_1$  и учитывая (6.18), получим граничные условия:

$$p_1 K_1 \frac{\partial h_1}{\partial n} \Big|_{\gamma_1} = p_2 K_2 \frac{\partial h_2}{\partial n} \Big|_{\gamma_1}, \quad p_2 K_2 \frac{\partial h_2}{\partial n} \Big|_{\gamma_2} = p_3 K_3 \frac{\partial h_3}{\partial n} \Big|_{\gamma_2}. \quad (6.19)$$

Приравняем также потоки примеси (6.13) на границах  $\gamma_j$ , создаваемые диффузией, получим еще одну группу граничных условий:

$$p_1 a_1 \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\gamma_1} = p_2 a_2 \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{\gamma_1}, \quad p_2 a_2 \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{\gamma_2} = p_3 a_3 \frac{\partial c_3}{\partial n} \Big|_{\gamma_2}. \quad (6.20)$$

Таким образом, математическая модель очистного сооружения представлена в виде начально-краевой задачи (6.16)–(6.20) для дифференциальных уравнений движения воды и примеси в грунте. Очевидно, что для практического моделирования процессов очистки в реальных средах необходимо использование численных методов и компьютерного моделирования.

#### 6.4. Уравнения гидродинамики и газодинамики

Кроме проблем исследования почв с точки зрения экологии важным является изучение водной и воздушной сред обитания. При этом возможен подход изучения сред, основанный на использовании уравнений с частными производными, описывающих динамику водных и воздушных масс, которые выступают в роли переносчиков вредных примесей от источников загрязнения. Выведем классические уравнения гидродинамики, которые при необходимости могут быть дополнены уравнением диффузии примеси в движущейся среде.

#### 6.4.1. Уравнение Эйлера движения идеальной жидкости

Рассмотрим евклидово пространство  $R^3$  с системой координат  $Oxyz$ , заполненное идеальной жидкостью, представляющей собой континуальную среду, в которой отсутствует трение между частями среды. Для построения математической модели введем функции, характеризующие движение жидкой материальной среды:

$$\vec{v}(x, y, z, t) \equiv \vec{v}(M, t) = v_1(M, t)\vec{e}_x + v_2(M, t)\vec{e}_y + v_3(M, t)\vec{e}_z,$$

где  $\vec{v}(x, y, z, t)$  – поле скоростей жидкости,  $[\vec{v}] = \frac{M}{c}$ ;  $\rho(M, t)$  – плотность жидкости в окрестности точки  $M$  в момент времени  $t$ ,  $[\rho] = \frac{M}{m^3}$ ;  $p(M, t)$  – давление жидкости в окрестности точки  $M$  в момент времени  $t$ ,  $[p] = \frac{H}{m^2}$ ;  $F(M, t)$  – плотность массовых сил, т.е. сила произвольной природы, действующая на единицу массы жидкости в окрестности точки  $M$  в момент времени  $t$ ,  $[F] = \frac{H}{M}$ .

Для вывода дифференциального уравнения, связывающего указанные функции, выделим произвольную область  $D \in R^3$  с граничной поверхностью  $\Gamma$ . Воспользуемся законом Ньютона применительно к массе жидкости, заключенной в области  $D$ :

$$\vec{I}(t) = \vec{f}_1(t) + \vec{f}_2(t) \quad (6.21)$$

где  $\vec{I}$  – сила инерции, действующая на жидкость в области  $D$ ;  $\vec{f}_1$  – суммарная сила давления, действующая на жидкость в области  $D$  со стороны внешней среды;  $\vec{f}_2$  – суммарная массовая сила, действующая на жидкость в области  $D$ .

Вычислим  $\vec{I}$ . Для этого область  $D$  разобьем на элементарные объемы  $\Delta V_i$ . Пусть точка  $M_i$  принадлежит объему  $\Delta V_i$ . На жидкость в элементарном объеме действует сила инерции:

$$\vec{I}_i = \vec{a}_i \Delta m_i, \quad (6.22)$$

где  $\vec{a}_i$  – ускорение жидкости в объеме  $\Delta V_i$ ;  $\Delta m_i = \rho(M_i, t)\Delta V_i$  – масса жидкости в объеме  $\Delta V_i$ .

Вычислим ускорение  $\vec{a}_i$ . Пусть частица жидкости в точке  $M = (x, y, z)$  движется по траектории, заданной параметрически  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , тогда:

$$\vec{a}(M, t) = \frac{d\vec{v}(M, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_1, \nabla) \vec{v},$$

где  $(\vec{v}_1, \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$  – дифференциальный оператор первого порядка.

$$\text{Таким образом, } \vec{a}_i = \frac{\partial \vec{v}(M_i, t)}{\partial t} + (\vec{v}(M_i, t), \nabla) \vec{v}(M_i, t).$$

Суммируя элементарные силы инерции (6.22) в объеме  $D$  и переходя к пределу при  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , получим объемный интеграл:

$$\sum_i \vec{I}_i = \sum_i \rho(M_i, t) \vec{a}(M_i, t) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \iiint_D \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_1, \nabla) \vec{v} \right) dV = \vec{I}(t) \quad (6.23)$$

Вычислим  $\vec{f}_2$ . Для этого определим массовую силу, действующую на жидкость в элементарном объеме  $\Delta V_i$ :

$$\vec{F}_i = \vec{F}(M_i, t) \Delta m_i = \rho(M_i, t) \vec{F}(M_i, t) \Delta V_i. \quad (6.24)$$

Суммируя массовые силы (6.24) по объему  $D$  и переходя к пределу при  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , получим объемный интеграл:

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \rho(M_i, t) \vec{F}(M_i, t) \Delta V_i \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \iiint_D \rho \vec{F} dV = \vec{f}_2(t). \quad (6.25)$$

Вычислим  $\vec{f}_1$ . Для этого поверхность  $\Gamma$  разобьем на элементарные площадки  $\Delta S_i$ , используя функцию давления  $p(M, t)$ . Жидкость оказывает давление на площадку  $\Delta S_i$  с силой, по абсолютной величине равной  $Q_1 = p(\xi_i, t) \Delta S_i$ . Сила давления направлена вдоль внутренней нормали  $\vec{n}_i$ , проведенной к площадке  $\Delta S_i$ , поэтому:

$$Q_1 = p(\xi_i, t) \Delta S_i. \quad (6.26)$$

Суммируя все силы (6.26) по объему  $\Gamma$  и переходя к пределу при  $\Delta S_i \rightarrow 0$ , получим поверхностный интеграл:

$$\sum_i \vec{Q}_i = \sum_i \rho(\xi_i, t) \vec{n} \Delta S_i \xrightarrow{\Delta S_i \rightarrow 0} \iint_i p(\xi, t) \vec{n} dS = \vec{f}_1(t).$$

Поверхностный интеграл преобразуем к объемному, используя формулу Остроградского–Гаусса:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(t) &= \iint_{\Gamma} (p \vec{e}_x, \vec{n}) dS \vec{e}_x + \iint_{\Gamma} (p \vec{e}_y, \vec{n}) dS \vec{e}_y + \iint_{\Gamma} (p \vec{e}_z, \vec{n}) dS \vec{e}_z = \\ &= - \iiint_D \frac{\partial p}{\partial x} dV \vec{e}_x - \iiint_D \frac{\partial p}{\partial y} dV \vec{e}_y - \iiint_D \frac{\partial p}{\partial z} dV \vec{e}_z = - \iiint_D \text{grad } p dV. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Выражения (6.23), (6.25), (6.27) подставим в равенство (6.21) и опустим интегралы в силу произвольности области интегрирования  $D$ . В результате получим *уравнение Эйлера*:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \vec{F}. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) при необходимости может быть усложнено.

#### 6.4.2. Уравнение неразрывности

На основании закона сохранения массы для заряда выводится уравнение для плотности массы жидкости, называемое *уравнением неразрывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.29)$$

#### 6.4.3. Уравнение состояния

Из законов термодинамики устанавливается функциональная связь между давлением и плотностью (*уравнение состояния*):

$$p = f(\rho), \quad (6.30)$$

в которой конкретный вид функции  $f(\cdot)$  определяется молекулярной структурой жидкости.

Уравнения (6.28)–(6.30) в совокупности называются *уравнениями гидродинамики*, или *уравнениями газодинамики* при описании движения газообразных сред.

### 6.5. Уравнения акустики

Рассмотрим пространство  $R^3$  с декартовой системой координат  $Oxyz$ , заполненное идеальным газом. Для построения математической модели, описывающей распространение акустических волн в воздушной среде, воспользуемся уравнениями газодинамики (6.28)–(6.30). Будем предполагать, что газовая среда в невозмущенном состоянии имеет постоянное давление  $p_0$  и постоянную плотность  $\rho_0$ .

При акустическом возмущении плотность среды претерпевает незначительное отклонение от постоянного значения  $\rho_0$ , то есть:

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma), \quad (6.31)$$

где  $\sigma$  — малая величина.

Для воздуха уравнение состояния (6.30) имеет вид:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (6.32)$$

где  $\gamma=7/5$ .

Раскладывая в ряд по степеням  $\sigma$  и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим приближенную формулу:

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma)^\gamma \approx \rho_0(1 + \gamma\sigma). \quad (6.33)$$

После подстановки формулы (6.31) в уравнение неразрывности (6.29), получим уравнение:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div} \vec{v} = 0, \quad (6.34)$$

так как будем считать, что скорость  $\vec{v}$  мала и величина  $\sigma \vec{v}$  является величиной второго порядка малости ( $\sigma \vec{v} \approx 0$ ).

Преобразуем уравнение Эйлера (6.28), пренебрегая величинами второго порядка малости:  $(\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} \approx 0$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (1 + \sigma)^{-1} = \frac{1}{\rho_0} (1 - \sigma + \sigma^2 - \dots) \approx \frac{1}{\rho_0} (1 - \sigma). \quad (6.35)$$

Подставляя формулы (6.33), (6.35) в (6.28) в случае отсутствия массовых сил, получим уравнение:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + a^2 \text{grad} \sigma = 0, \quad a = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}}. \quad (6.36)$$

Таким образом, получены уравнения акустики (6.34) и (6.36):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div} \vec{v} = 0, \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + a^2 \text{grad} \sigma = 0. \quad (6.36)$$

Легко видеть, что уравнения акустики (6.34) и (6.36) сводятся к скалярному волновому уравнению. Действительно, продифференцируем равенство (6.34) по времени  $t$  и исключим скорость  $\vec{v}$  с помощью уравнения (6.36). Получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma = 0, \quad (6.37)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $a$  – скорость звука в среде,

$$[a] = \frac{M}{c}.$$

Давление в точке  $M$  в момент времени  $t$  определяется формулой (6.33):

$$p(M, t) = p_0 + w(M, t),$$

где  $w(M, t) = p_0 \gamma \sigma(M, t)$  – добавочное давление.

Умножая (6.37) на постоянную  $p_0 \gamma$ , получим волновое уравнение для добавочного давления:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \Delta w = 0. \quad (6.38)$$

Уравнение (6.38) описывает распространение акустических волн в газовой и жидкой средах.

С точки зрения практики, наиболее важными являются волны, имеющие гармоническую зависимость от времени вида:

$$w(x, y, z, t) = u(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (6.39)$$

где  $u$  – комплексная амплитуда давления;  $\omega$  – круговая частота;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота звука,  $[f] = \frac{1}{c}$ .

Подставляя (6.39) в уравнение (6.38), получим уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (6.40)$$

где  $k = \frac{\omega}{a}$  – волновое число.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Захаров В.В. Введение в математическую экологию. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 224 с.
2. Катков В.Л. Математическое моделирование ветрового переноса загрязнений: консп. лекций / В.Л. Катков. – Минск: БГУ, 2003. – 88 с.
3. Губанов В.А. [и др.]. Введение в системный анализ: учеб. пособие / под ред. Л.А. Петросяна. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 232 с.
4. Джефферс Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии. – М.: Мир, 1981. – 256 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 366 с.
6. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
7. Ерофеев В.Т. Основы математического моделирования: курс лекций / В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская. – Минск: БГУ, 2002. – 195 с.
8. Смиряев А.В., Исачкин А.В., Харрасова Л.К. Моделирование: от биологии до экономики: учеб. пособие. – М.: Изд-во МСХА, 2002. – 122 с.
9. Франс Дж., Торнли Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.