УДК 512.542

О РЕШЕТКЕ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

А.Р. Филимонова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$. Функции $f : \sigma \to$ {классы Фиттинга}, называемой σ функцией Хартли (более кратко, H_σ-функцией), сопоставляют класс групп $LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1$ или $G \neq 1$ и $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой функции f, то $\mathfrak{F}$ называют σ-локальным и f σ-локальное задание $\mathfrak{F}$.

Цель работы – изучение решеток n-кратно σ-локальных классов Фиттинга.

Материал и методы. *Использованы методы исследования теории конечных групп, а также теории классов Фиттинга конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что решетка всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга является полной, алгебраической и индуктивной.*

Заключение. *Получены новые широкие серии алгебраических и индуктивных решеток кратно σ-локальных классов Фиттинга.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, σ-локальный класс Фиттинга, n-кратно σ-локальный класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга, полная решетка, индуктивная решетка, алгебраичная решетка.*

ABOUT THE σ-LOCAL FITTING CLASS LATTICE

A.R. Filimonova
Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

The $\mathfrak{F}$ group class is called a Fitting class if it is closed concerning normal subgroups and normal subgroup products. Functions $f : \sigma \to$ {Fitting class} function, which is called Hartley σ function (or shorter, H_σ-function), compose the group class of $LR_\sigma(f) = (G \mid G$ or 1 or $G \neq 1$ и $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i)$ for all $\sigma_i \in \sigma(G))$. If $\mathfrak{F}$ Fitting class is such that $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ for some function f, then $\mathfrak{F}$ is called σ-local and f σ-local $\mathfrak{F}$ task.

The purpose of the paper is the study of n-multiple σ-local Fitting class lattices.

Material and methods. *Methods of the study of the finite group theory are used as well as methods of the Fitting class finite group theory.*

Findings and their discussion. *The theorem is proven that the lattice of n-multiple σ-local Fitting classes is complete, algebraic and inductive.*

Conclusion. *New wide series of algebraic and inductive lattices of multiple σ-local Fitting classes have been obtained.*

Key words: *Fitting class, σ-local Fitting class, n-multiple σ-local Fitting class, Fitting class lattice, complete lattice, induction lattice, algebraic lattice.*

Все рассматриваемые группы конечны. Будем использовать терминологию из [1–4]. Через $\mathbb{P}$ обозначают множество всех простых чисел, $\pi = \{p_1,\dots,p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\setminus\pi$; $\pi(n)$ – множество всех различных простых делителей натурального числа n; символом σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, $\Pi \subseteq \sigma$. В дальнейшем $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Если $\Pi \subseteq \sigma$, то, следуя [2], $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначает класс всех Π-групп. В частности, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, а $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех ${\sigma_i}'$-групп.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \tag{1}$$

называемая σ-функцией Хартли (более кратко, H_σ-функцией). Согласно [5] сопоставим функции f класс групп

$$LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)),$$

где $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G)$ – наименьшая σ_i-замкнутая нормальная подгруппа группы G. Имеем $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$, где символ $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, что $G/N \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$.

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f вида (1), то класс $\mathfrak{F}$ называется σ-локальным и f σ-локальное задание $\mathfrak{F}$. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то H_σ-функция f – *внутренняя*. H_σ-функция f называется H_σ-функцией Локетта, если $f(\sigma_i)$ является классом Локетта для любого $i \in I$ (см. [5]).

Следуя [6], всякий класс Фиттинга считается 0-кратно σ-локальным. При $n > 0$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно σ-локальным, если он обладает такой H_σ-функцией Локетта f, каждое непустое значение $f(\sigma_i)$ которой является $(n – 1)$-кратно σ-локальным классом Фиттинга.

Напомним, что совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [4], если пересечение любой совокупности классов из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Пусть Θ – полная решетка классов Фиттинга. H_σ-функция f называется Θ-*значной*, если все ее значения принадлежат решетке Θ. Через Θ^σ обозначают совокупность всех таких классов Фиттинга, которые обладают σ-локальной Θ-значной H_σ-функцией. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ^σ обозначается через $\vee_{\Theta^\sigma}(\mathfrak{F}_i \,|\, i \in I)$ (см. [7]). Решетка Θ^σ называется *индуктивной* (см. [7]), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i = LR_\sigma(f_i) \mid i \in I\}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i \in \Theta^\sigma$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ Θ-значных H_σ-функций f_i, где f_i – некоторая внутренняя H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^\sigma}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LR_\sigma(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)),$$

при этом символ $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначает такую H_σ-функцию f, что $f(\sigma_i)$ является верхней гранью для $\{f_i(\sigma_i) \mid i \in I\}$ в Θ, если $\bigcup_{i\in I} f_i(\sigma_i) \neq \varnothing$, и $f(\sigma_i) = \varnothing$ в противном случае.

Полная решетка Θ называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов. Элемент c полной решетки Θ называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq \Theta$ из неравенства $c \le \sup_\Theta X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \le \sup_\Theta X_0$.

В 1986 году А.Н. Скибой [8] установлена модулярность решетки всех локальных формаций. Этот результат получил развитие в различных направлениях. В частности, в [2] было доказано, что решетка всех n-кратно σ-локальных формаций является модулярной и алгебраической. В [5] Н.Т. Воробьевым, Вэньбинем Го и Ли Чжаном были введены σ-локальные классы Фиттинга. В связи с этим возникает вопрос изучения решетки всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга. В настоящей работе установлены алгебраичность и индуктивность этой решетки.

Цель – изучение решеток n-кратно σ-локальных классов Фиттинга.

Материал и методы. Использованы методы исследования теории конечных групп, а также теории классов Фиттинга конечных групп.

Результаты и их обсуждение. Основным результатом является

Теорема. *Совокупность всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга* $\mathcal{L}_\sigma^n$ *является полной, алгебраической и индуктивной решеткой классов Фиттинга, в которой для произвольного множества n-кратно σ-локальных классов Фиттинга* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\wedge_\sigma^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i \text{ – точная нижняя грань и}$$

$$\vee_\sigma^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\sigma^n \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) \text{ – точная верхняя грань.}$$

Через l_σ^n обозначают полную решетку всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. Символом $l_\sigma^n\mathrm{Fit}\mathfrak{X}$ обозначают наименьший n-кратно σ-локальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathrm{Fit}(\mathfrak{X})$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех n-кратно σ-локальных H_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1 $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ – n-кратно σ-локальная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, называемая *минимальной* [5].

Приведем следующие леммы, которые определяют структуру доказательства индуктивности и алгебраичности решетки всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, *где* $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = LR_\sigma(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда, так как $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, $G \in \mathfrak{F}_i$ и, значит,

$$G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f_i(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Поэтому $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in \bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_i) = f(\sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$, и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем теперь обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) = \bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Отсюда следует, что $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f_i(\sigma_i)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_i$, $i \in I$ и, значит, $G \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Через символ Supp(f) обозначают носитель σ-локальной H_σ-функции f и $\mathrm{Supp}(f) = \{\sigma_i \in \sigma \mid f(\sigma_i) \neq \varnothing\}$. Следующая лемма дает способ построения минимальной σ-локальной H_σ-функции класса Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$.

Лемма 2 [5, предложение 4.1 а)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ определяет единственная минимальная H_σ-функция f такая, что* $f(\sigma_i) = \mathrm{Fit}(G \mid G \cong X^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}, X \in \mathfrak{F})$ *для всех* $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$.

Лемма 3. *Пусть h_i – минимальная l_σ^{n-1}-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee_\sigma^{n-1}(h_i \mid i \in I)$ – минимальная l_σ^{n-1}-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee_\sigma^{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть

$$\Pi = \left(\bigcup_{i\in i} \mathfrak{F}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \sigma(\mathfrak{F}_i) = \sigma(\mathfrak{F}) = \mathrm{Supp}(h),$$

$f = \vee_\sigma^{n-1}(f_i \mid i \in I)$ и h – минимальная l_σ^{n-1}-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Докажем, что $h = f$.

Пусть $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus \Pi$. Тогда для любого $i \in I$ имеет место $h(\sigma_i) = \varnothing$ и $f_i(\sigma_i) = \varnothing$. Значит, $f(\sigma_i) = \varnothing$. Пусть $\sigma_i \in \Pi$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(\sigma_i) \neq \varnothing$. По лемме 2

$$h(\sigma_i) = l_\sigma^{n-1}\mathrm{Fit}(G \mid G \cong X^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}, X \in \bigcup_{i\in i} \mathfrak{F}_i) =$$
$$= l_\sigma^{n-1}\mathrm{Fit}\,(\bigcup_{i\in i} l_\sigma^{n-1}\,\mathrm{Fit}(G \mid G \cong X^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}, X \in \mathfrak{F}_i)) =$$
$$= l_\sigma^{n-1}\,\mathrm{Fit}\,(\bigcup_{i\in i} h_i(\sigma_i)) = (\vee_\sigma^{n-1}(h_i \mid i \in I))(\sigma_i) = f(\sigma_i).$$

Итак, $h = f$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\varnothing = \Pi \subseteq \sigma$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Pi$. *Пусть, кроме того,* $f(\sigma') = (1)$ *и*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{F}, \text{ если } \sigma_i \in \Pi, \\ \varnothing, \text{ если } \sigma_i \notin \Pi. \end{cases}$$

Тогда F $= LR_\sigma(f)$.

Доказательство. Покажем включение $\mathfrak{F} \subseteq LR_\sigma(f)$. Пусть $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Pi$. Тогда G – П-группа. Так как $\Pi \subseteq \sigma$, то $G \in LR_\sigma(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq LR_\sigma(f)$.

Покажем теперь включение $LR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $LR_\sigma(f) \nsubseteq \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка из $LR_\sigma(f) \setminus \mathfrak{F}$ с комонолитом $R = G_\mathfrak{F}$. Тогда $\sigma(G/R) \nsubseteq \Pi$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(G/R) \setminus \Pi$. Тогда $O^{\sigma_i,\sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) = \varnothing$. Противоречие. Значит, $LR_\sigma(f) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$. Лемма доказана.

Лемма 5 [5, теорема 1.1. a)]. *Каждый σ-локальный класс Фиттинга может быть определен с помощью единственной внутренней H_σ-функции F такой, что* $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ *и значения $F(\sigma_i)$ – классы Локетта для всех $\sigma_i \in \sigma(F)$.*

Лемма 6 [9, глава X, предложение 2.1 a)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Локетта и G – конечная группа. Тогда для любых конечных групп H и G имеет место* $(G \text{ wr } H)_\mathfrak{F} = K$, *где K – база регулярного сплетения $G_\mathfrak{F}$ wr H.*

Лемма 7 [9, глава A, лемма 18.2 d)]. *Пусть $W = X$ wr G. Если $Y \trianglelefteq X$, то $W/[Y] \cong (X/Y)$ wr G.*

Лемма 8 [9, глава X, теорема 1.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ – классы Фиттинга. Тогда*

a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{U}$ *и*

b) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{G}^*$.

Лемма 9 [5, следствие 5.1]. *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F) = LR_\sigma(f)$ *и* $\mathfrak{H} = LR_\sigma(H) = LR_\sigma(h)$, *где F и H – единственные внутренние H_σ-функции Локетта в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, а f и h – единственные минимальные H_σ-функции в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$;

b) $f \leq h$;

c) $F \leq H$.

Для произвольного класса групп $\mathfrak{X}$ операции S_n и R определяются следующим образом:

$S_n\mathfrak{X} = (G \mid G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X})$;

$R\mathfrak{X}$ – класс всех таких групп G, что в G имеется система субнормальных подгрупп $K_1, K_2, \dots, K_t$ со свойствами $G = \langle K_1, K_2, \dots, K_t\rangle$ и $K_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Лемма 10 [10, лемма 2]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда* $\mathrm{Fit}\mathfrak{X}$ *состоит из групп, получаемых в результате применения конечного числа операций S_n и R к группам из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство теоремы. Отметим, что совокупность всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга $\mathcal{L}_\sigma^n$ является частично упорядоченным множеством относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольное непустое множество n-кратно σ-локальных классов Фиттинга и f_i – σ-локальная l_σ^{n-1}-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Тогда по лемме 1 $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где f – такая σ-локальная H_σ-функция, что

$$f(\sigma_i) = \bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \Pi$$

и, тем самым, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ σ-локален. Таким образом,

$$\mathfrak{F} = \wedge_\sigma^1(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \wedge_\sigma(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$$

и, как отмечено выше,

$$\vee_\sigma^1(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \vee_\sigma(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\sigma \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

Итак, совокупность всех σ-локальных классов Фиттинга l_σ является решеткой.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Снова, применяя лемму 1, получаем $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где σ-локальная H_σ-функция f такова, что

$$f(\sigma_i) = \bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_i), \text{ для всех } \sigma_i \in \Pi.$$

По индукции $f(\sigma_i) \in l_\sigma^{n-1}$, т.е. H_σ-функция f l_σ^{n-1}-значна. Следовательно, согласно определению, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является n-кратно σ-локальным.

Таким образом, совокупность всех n-кратно σ-локальных классов Фиттинга $\mathcal{L}_\sigma^n$ является решеткой классов Фиттинга, а для произвольного множества n-кратно σ-локальных классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$

$$\wedge_\sigma^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

является точной нижней гранью, и

$$\vee_\sigma^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_\sigma^n \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$$

– точная верхняя грань.

Покажем теперь, что $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\sigma^n$ – полная решетка. Для этого достаточно доказать, что класс всех П-групп $\mathfrak{G}_\Pi$ является наибольшим элементом в $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\sigma^n$. Докажем сначала, что класс Фиттинга $\mathfrak{G}_\Pi$ n-кратно σ-локален для всех целых неотрицательных n. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Согласно лемме 4 $\mathfrak{G}_\Pi = LR_\sigma(g)$, где σ-локальная H_σ-функция g такова, что

$$g(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{G}_\Pi, & \text{если } \sigma_i \in \Pi, \\ \varnothing, & \text{если } \sigma_i \notin \Pi. \end{cases}$$

Поэтому класс Фиттинга $\mathfrak{G}_\Pi$ σ-локален. Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно лемме 4 $\mathfrak{G}_\Pi = LR_\sigma(g)$, где σ-локальная H_σ-функция g такова, что

$$g(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{G}_\Pi, & \text{если } \sigma_i \in \Pi, \\ \varnothing, & \text{если } \sigma_i \notin \Pi. \end{cases}$$

По индукции класс Фиттинга $\mathfrak{G}_\Pi = g(\sigma_i)$ $(n - 1)$-кратно σ-локален. Следовательно, H_σ-функция g l_σ^{n-1}-значна. Таким образом, класс Фиттинга $\mathfrak{G}_\Pi$ n-кратно σ-локален.

Итак, $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\sigma^n$ – полная решетка классов Фиттинга, в которой наибольший элемент – класс всех П-групп.

Покажем теперь, что такая решетка является алгебраической. Любой класс Фиттинга является решеточным объединением всех своих однопорожденных l_σ^n-подклассов Фиттинга. Индукцией по n покажем, что каждый однопорожденный l_σ^n-класс Фиттинга является компактным элементом в $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\sigma^n$. Пусть

$$\mathfrak{F} = l_\sigma^n \mathrm{Fit} G \subseteq \mathfrak{M} = l_\sigma^n \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ – n-кратно σ-локальный класс Фиттинга. Пусть $n = 0$. Тогда $G \in \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$. По лемме 10 $G \in \mathrm{K}_1 \ldots \mathrm{K}_m\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$, где $\mathrm{K}_i \in \{\mathrm{S}_n, \mathrm{R}\}$, $i = 1, \ldots, m$. Индукцией по m покажем, что существует конечное множество $J \subset I$ такое, что $G \in \mathrm{K}_1 \ldots \mathrm{K}_m\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$.

Пусть $m = 1$. Если $G \in \mathrm{S}_n\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$, то найдется группа $T \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ такая, что $G \trianglelefteq T$. Так как $T \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то существует хотя бы один класс Фиттинга $\mathfrak{F}_j$, $j \in I$ такой, что $T \in \mathfrak{F}_j$, и, значит, $G \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{F}_j)$. Если $G \in \mathrm{R}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$, то $G = T_1 \ldots T_t$, где t – конечное число, $T_r \trianglelefteq G$, $T_r \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $r = 1, \ldots, t$. Следовательно, найдутся классы Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$ такие, что $T_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, T_t \in \mathfrak{F}_t$. Значит, $T_r \in \mathfrak{F}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_t$ и $G \in \mathrm{R}(\mathfrak{F}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_t)$.

Пусть утверждение верно для $m > 1$. Докажем справедливость утверждения для $m + 1$. Тогда

$$G \in \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2 \ldots \mathrm{K}_{m+1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = \mathrm{K}_1(\mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{H} = \mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)$. Если $G \in \mathrm{S}_n(\mathfrak{H})$, то $G \lhd T \in \mathfrak{H}$. Тогда по индукции существуют 1, ..., $p \in I$ такие, что

$$T \in \mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p).$$

Следовательно,

$$G \in \mathrm{S}_n\mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p).$$

Если $G \in \mathrm{R}(\mathfrak{H})$, то $G = T_1 \dots T_t$, где t – конечное число, $T_r \lhd G$, $T_r \in \mathfrak{H}$, $r = 1, \dots, t$. По индукции существуют $r_1, \dots, r_k \in I$ такие, что $T_r \in \mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k})$. Объединяя найденные классы Фиттинга для каждого T_r, образуем класс

$$\mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p),$$

причем очевидно, что

$$\mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k}) \subseteq \mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$$

для всех групп T_r. Таким образом, $T_r \in \mathrm{K}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$, $r = 1, \dots, t$ и $G \in \mathrm{RK}_2 \dots \mathrm{K}_{m+1} (\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Утверждение индукции по m доказано.

Поскольку $G \in \mathrm{K}_1 \dots \mathrm{K}_m\left(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\right) \in \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\right)$, J – конечное число из I, то справедливо включение $\mathrm{Fit}G \subseteq \mathrm{Fit}\left(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\right)$, и, значит, $\mathfrak{F}$ – компактный элемент.

Пусть $n > 0$ и однопорожденные l_σ^{n-1}-классы Фиттинга являются компактными элементами в $\mathcal{L}_\sigma^n$. Пусть f_i – минимальная l_σ^{n-1}-значная H_σ-функция класса $\mathfrak{F}_i$, f – минимальная l_σ^{n-1}-значная H_σ -функция класса $\mathfrak{F}$, m — минимальная l_σ^{n-1} -значная H_σ-функция класса $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 2

$$f(\sigma_i) = l_\sigma^{n-1}\mathrm{Fit}(G \mid G \cong X^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}, X \in \bigcup_{i\in i}\mathfrak{F}_i)$$

для всех $\sigma_i \in \Pi = \mathrm{Supp}(f)$ и $f(\sigma_i) \neq \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus \Pi$. Ввиду леммы 9 $f \leq m$. Согласно лемме 3 $m = \vee_\sigma^{n-1}(f_i \mid i \in I)$. Значит, для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$ найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что

$$G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f_{i_1}(\sigma_i) \vee_\sigma^{n-1} \dots \vee_\sigma^{n-1} f_{i_t}(\sigma_i).$$

Поскольку $|\sigma(G)| < \infty$, из последнего следует существование индексов $j_1, \dots, j_k \in I$, что

$$G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\sigma^{n-1} \dots \vee_\sigma^{n-1} \mathfrak{F}_{j_k}.$$

Поэтому

$$\mathrm{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee_\sigma^{n-1} \dots \vee_\sigma^{n-1} \mathfrak{F}_{j_k}.$$

Итак, решетка $\mathcal{L}_\sigma^n$ алгебраична и ее компактными элементами являются однопорожденные l_σ^n-классы Фиттинга. Теорема доказана.

Заключение. Получены новые широкие серии алгебраических и индуктивных решеток кратно σ-локальных классов Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
2. Chi, Z. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
3. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Guo, Wenbin. On σ-local Fitting Classes / Wenbin Guo, Zhenfeng Wu, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
6. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 6. – С. 1296–1302.
7. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
8. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомел. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. М.И. Салука. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135–149.
9. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math.; vol. 4).
10. Камозина, О.В. Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2006. – Т. 18, вып. 2. – С. 139–145.

REFERENCES

1. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], M.: Nauka, 1978, 272 p.
2. Chi, Z. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
3. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Matem. trudy* [Mathematical Works], 1999, 2(2), pp. 114–147.
4. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
5. Guo, Wenbin. On σ-local Fitting Classes / Wenbin Guo, Zhenfeng Wu, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
6. Vorobyev N.T. *Sibirski matem. zhurn.* [Siberian Methematical Journal], 1996, 6(37), pp. 1296–1302.
7. Vorobyev N.N. *Algebra klassov konechnykh grupp* [Algebra of Finite Group Classes], Vitebsk: VGU im. P.M. Masherova, 2012, 322 p.
8. Skiba A.N. *Arifmeticheskoye i podgruppovoye stroyeniye konechnykh grupp: trudy Gomelskogo seminara* [Arythmetic and Subgroup Composition of Finite Groups: Proceedings of Gomel Seminar], Minsk: Nauka i tekhnika, 1986, pp. 135–149.
9. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math.; vol. 4).
10. Kamozina O.V. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics], 2006, 18(2), pp. 139–145.

Поступила в редакцию 17.10.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: anyafilim@gmail.com – Филимонова А.Р.