УДК 512.622

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ ТРЕХЧЛЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Трехчленные алгебраические уравнения произвольной степени вида $x^n + px^m + q = 0$ *с действительными коэффициентами p и q возникают во многих приложениях. Для них актуальны задача определения числа действительных корней и их локализация по коэффициентам p и q.*

Цель статьи – установить необходимые и достаточные условия для определения у трехчленного алгебраического уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами числа действительных решений, а также выявить области их локализации.

Материал и методы. *Материалом исследования являются трехчленные алгебраические уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами, а также методы определения количества действительных корней у таких уравнений. Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики Maple 2019.*

Результаты и их обсуждение. *Предложен более простой и понятный метод получения некоторых функций от коэффициентов трехчленного алгебраического уравнения. Эти функции определяют количество и расположение действительных корней. Используя разложения данных функций в ряд Тейлора, можно также получить приближенные формулы для нахождения действительных решений через коэффициенты уравнения.*

Заключение. *Подробно рассмотрены все типы трехчленных уравнений с действительными коэффициентами. Для каждого из них получен относительно простой вид функций, зависящих явно от коэффициентов уравнения и определяющих число действительных решений.*

Для всех типов исследуемых уравнений сформулировано условие существования двукратного действительного корня, а также приведены точные аналитические формулы для вычисления значения этого корня.

Ключевые слова: *алгебраические уравнения, трехчленные уравнения, локализация корней, приближенное решение, действительный корень, кратный корень.*

ON THE DISTRIBUTION OF THE ROOTS OF TRINOMIAL ALGEBRAIC EQUATIONS OF AN ARBITRARY DEGREE

Yu.V. Trubnikov, M.M. Chernyavsky
Educational Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

Trinomial algebraic equations of an arbitrary degree of the form $x^n + px^m + q = 0$ *with real coefficients p and q arise in many applications. The problem of determining the number of real roots and their localization by the coefficients p and q is relevant for them.*

The purpose of the article is to establish the necessary and sufficient conditions for determining in a trinomial algebraic equation an arbitrary degree with real coefficients of the number of real solutions, as well as to identify areas of their localization.

Material and methods. *The research material is three-term algebraic equations of an arbitrary degree with real coefficients, as well as methods for determining the number of real roots of such equations. Methods of mathematical analysis and the system of computer mathematics Maple 2019 were used in the research.*

Findings and their discussion. *The article proposes a simpler and more understandable method of obtaining some functions of the coefficients of a trinomial algebraic equation. These functions determine the number and location of real roots. Using the expansion of these functions in a Taylor series, one can also obtain approximate formulas for finding real solutions through the coefficients of the equation.*

Conclusion. *The article describes in detail all types of trinomial equations with real coefficients. For each type of equation, a relatively simple form of functions is obtained that depends explicitly on the coefficients of the equation and determines the number of real solutions.*

For all types of equations under study, the condition for the existence of a double real root is formulated. The exact analytical formulas for calculating the value of this root are also given.

Key words: *algebraic equations, trinomial equations, root localization, approximate solution, real root, multiple root.*

Трехчленные алгебраические уравнения вида

$$x^n + px^m + q = 0$$

с произвольными действительными коэффициентами p и q возникают во многих приложениях, например, при анализе устойчивости движения самолета; в задаче о равновесии тонкостенной панели, обтекаемой потоком газа; при определении равновесной температуры летательного аппарата [1]. Поэтому актуальны задача определения числа действительных корней трехчленного уравнения и их локализация по коэффициентам p и q. Отдельным важным вопросом является также выражение действительных корней алгебраических уравнений в символьном виде через коэффициенты, о чем свидетельствуют многие публикации последних лет, например, [2] и [3].

Стоит отметить, что подробное изучение трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени проводится в восьмой главе монографии В.П. Кутищева [4]. В данной работе количество и расположение корней рассматриваемого уравнения определяется поведением некоторых функций, зависящих только от m и n.

В настоящей статье предлагается более простой метод построения таких функций, который в ряде случаев дает возможность представления корней ранее упоминаемого трехчленного уравнения в аналитическом виде.

Цель – установить необходимые и достаточные условия для определения у трехчленного алгебраического уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами числа действительных решений, а также выявить области их локализации.

Материал и методы. Материалом исследования являются трехчленные алгебраические уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами, а также методы определения количества действительных корней у таких уравнений.

Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Для более понятного и простого восприятия основных результатов работы сначала будут рассмотрены некоторые частные случаи трехчленных алгебраических уравнений, а именно 2 конкретных типа алгебраических уравнений пятой степени.

I. Основная идея работы на примере некоторых уравнений пятой степени. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$x^5 + px + q = 0 \quad \left(p \neq 0, \quad q \neq 0\right) \tag{1}$$

с действительными коэффициентами p и q. Напомним, что уравнение (1) называют уравнением пятой степени в форме Бринга (иногда также его называют нормальной формой Бринга–Жерара) [5, с. 189]. Подстановка $x = kq / p \ \ (k \neq 0)$ приводит уравнение (1) к виду

$$k^5 \frac{q^5}{p^5} + kq + q = 0\,, \tag{2}$$

что позволяет выразить функцию $k = k\left(p, q\right)$ через коэффициенты уравнения (1):

$$\frac{k^5}{k+1} = -\frac{p^5}{q^4}\,. \tag{3}$$

Таким образом, количество действительных корней уравнения (1) и их локализация зависят от поведения функции

$$f\left(k\right) = \frac{k^5}{k+1}\,. \tag{4}$$

Ниже приведем график функции (4): рис. 1.

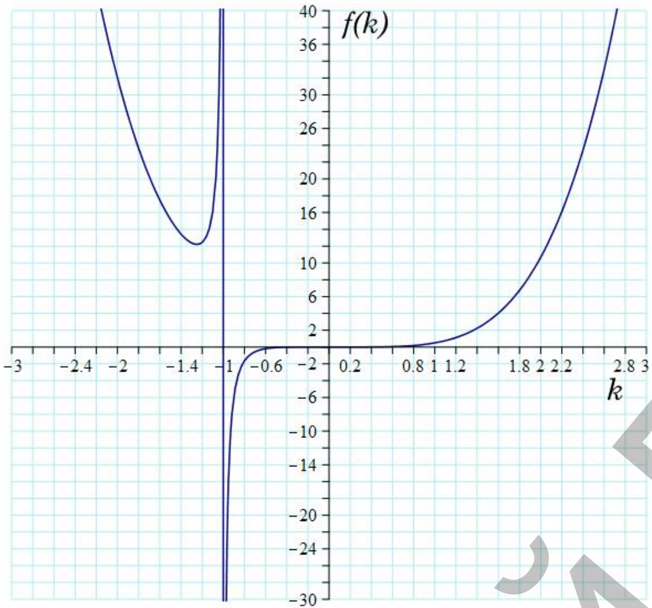

Рис. 1. **График функции** $f\left(k\right) = \dfrac{k^5}{k+1}$

Так как производная этой функции имеет вид

$$f'\left(k\right) = \frac{k^4\left(4k+5\right)}{\left(k+1\right)^2},$$

то ее локальный минимум достигается при $k_* = -\dfrac{5}{4}$ и равен $\dfrac{3125}{256}$, а прямая $k=-1$ является вертикальной асимптотой. Такое поведение функции (4) позволяет установить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $p \neq 0$, $q \neq 0$. *Необходимым и достаточным условием существования трех различных действительных корней уравнения* (1) *является неравенство*

$$-\frac{p^5}{q^4} > \frac{3125}{256};$$

необходимым и достаточным условием существования действительного корня кратности 2 *и другого простого действительного корня является равенство*

$$-\frac{p^5}{q^4} = \frac{3125}{256};$$

необходимым и достаточным условием существования одного простого действительного корня является неравенство

$$-\frac{p^5}{q^4} < \frac{3125}{256}.$$

Число $3125/256 = 5^5/4^4 \approx 12,20703$.

Далее мы можем разложить функцию $k\left(t\right)$, где

$$\frac{k^5(t)}{k\left(t\right)+1} = t,$$

в ряд Тейлора, при этом берем в качестве начальной точки точку в окрестности значения $-p^5/q^4$. Например, при $t = 1/2$ получаем $k\left(1/2\right) = 1$. Приведем выражение отрезка ряда при таких начальных значениях

$$\frac{7}{9}+\frac{4}{9}t+\frac{248}{729}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23696}{59049}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Рассмотрим пример использования его для приближенного вычисления корня уравнения

$$x^5-2{,}1x+3=0.$$

Для данного уравнения $t=-p^5/q^4=0{,}5042100000$. Подставляя это значение в выражение для отрезка ряда, получаем $k=1{,}001877171$ и, учитывая подстановку $x=kq/p$, находим значение корня

$$x=-1{,}4312531019.$$

Подстановка этого значения в уравнение $x^5-2{,}1x+3=0$ приводит к невязке $-0{,}000325295$.

Другой удобной начальной точкой является точка $t=32/3$. При этом $k(32/3)=2$ и аналогичные вычисления приводят к равенству

$$k(t)\approx\frac{20}{13}+\frac{9}{208}t-\frac{27}{17576}\left(t-\frac{32}{3}\right)^2+\frac{257013}{3041632256}\left(t-\frac{32}{3}\right)^3.$$

Например, для уравнения

$$x^5-2x+1{,}3=0$$

значение $t=-p^5/q^4=11{,}20408949$; $k(t)=2{,}022823$ и, следовательно, $x=-1{,}314834950$.

Значение невязки при таком значении x составляет $-1{,}158\times10^{-6}$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$x^5+px^2+q=0. \qquad (5)$$

Для этого уравнения можно выделить два подслучая:

1) p, q – одного знака;
2) p, q – разных знаков.

Если p и q одного знака, то применяется подстановка $x=k(q/p)^{1/2}$ $(k\neq0)$, которая приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{5/2}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^5}{k^2+1}\right)'=\frac{k^4\left(3k^2+5\right)}{\left(k^2+1\right)^2},$$

то функция $f(k)=\dfrac{k^5}{k^2+1}$ является строго монотонной и, следовательно, при любом значении параметра $-q(p/q)^{5/2}$ уравнение (5) имеет единственный действительный корень.

Для ознакомления приведем график рассматриваемой функции (рис. 2).

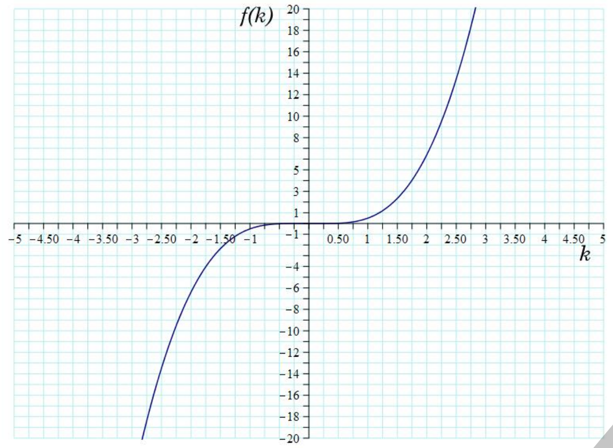

Рис. 2. **График функции** $\boldsymbol{f(k)=\frac{k^5}{k^2+1}}$

Если p и q имеют разные знаки, то подстановка $x=k(-q/p)^{1/2}$ $(k\neq 0)$ приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2-1}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^5}{k^2-1}\right)'=\frac{k^4(3k^2-5)}{(k-1)^2(k+1)^2},$$

то точками, в которых достигаются локальные экстремумы функции $\frac{k^5}{k^2-1}$, являются точки

$$k_1=\sqrt{\frac{5}{3}},\quad k_2=-\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

При этом

$$\frac{k_1^5}{k_1^2-1}=\frac{25\sqrt{15}}{18}\quad \frac{k_2^5}{k_2^2-1}=-\frac{25\sqrt{15}}{18}.$$

На рис. 3 изображен график функции $f(k)=\frac{k^5}{k^2-1}$.

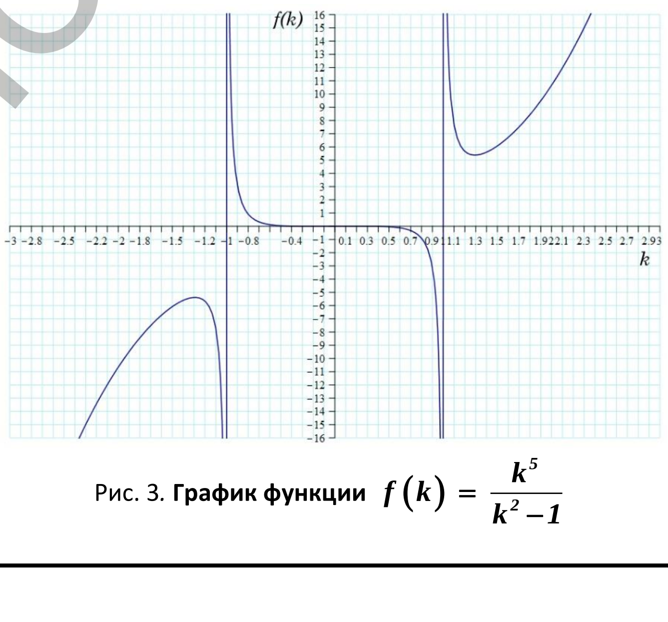

Рис. 3. **График функции** $\boldsymbol{f(k)=\frac{k^5}{k^2-1}}$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *При выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} > \frac{25\sqrt{15}}{18}$$

уравнение (5) *имеет три действительных решения. Аналогично, если выполнено неравенство*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < -\frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (5) *имеет три действительных решения.*

При выполнении одного из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = \frac{25\sqrt{15}}{18}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$$

уравнение (5) *имеет кратный действительный корень кратности два и один простой действительный корень.*

Наконец, если выполнено неравенство

$$-\frac{25\sqrt{15}}{18} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < \frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (5) *имеет ровно один действительный корень.*

Например, для уравнения

$$x^5 + 5x^2 - 3\cdot 2^{2/3} = 0$$

выполняется условие $q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} = -\frac{25\sqrt{15}}{18}$. Непосредственно убеждаемся, что его действительными корнями являются числа

$$\frac{1}{3}\left(5^{2/3} - 2^{2/3}\cdot 5^{1/3} + 2\cdot 2^{1/3}\right), \quad -2^{1/3}, \quad -2^{1/3}.$$

Далее переходим к общему случаю трехчленного (триномиального) алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Имеет место следующая классификация [4, с. 148]. В зависимости от четности степеней неизвестного трехчленные алгебраические уравнения подразделяются на 4 типа: нечетно-нечетные, нечетно-четные, четно-нечетные и четно-четные уравнения соответственно.

II. Нечетно-нечетные уравнения. Пусть в уравнении

$$x^n + px^m + q = 0 \quad \left(n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0\right) \tag{6}$$

m, n – нечетные числа. Такие уравнения называются *нечетно-нечетными уравнениями*.

Тогда после подстановки $x = k\left(q/p\right)^{1/m}$ $\left(k \neq 0\right)$ получаем равенство

$$\frac{k^n}{k^m + 1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

Функция

$$f\left(k\right) = \frac{k^n}{k^m + 1},$$

которую иногда называют *определяющей*, возрастает при $k > -1$ и имеет локальный минимум при

$$k_* = \left(\frac{n}{m - n}\right)^{1/m}.$$

При этом

$$f(k_*)=\frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что схематично все графики функций $f(k)=\frac{k^n}{k^m+1}$ при произвольных нечетных m и n будут выглядеть похожими друг на друга. Например, график функции $f(k)=\frac{k^3}{k+1}$ имеет вид (рис. 4)

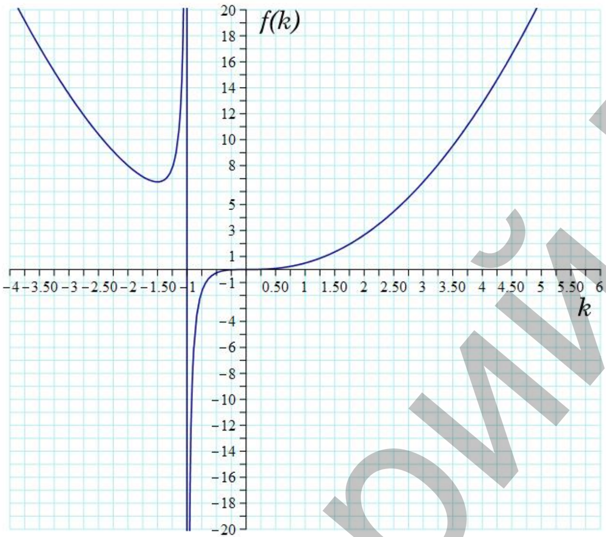

Рис. 4. **График функции** $\boldsymbol{f(k)=\frac{k^3}{k+1}}$

Следовательно, доказана

Теорема 3. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *Необходимым и достаточным условием существования трех действительных различных корней уравнения* (6) *является неравенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}>\frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}.$$

При этом, если p *и* q *отрицательны, то один из этих корней положителен, а два – отрицательны. При выполнении равенства*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m}$$

существует один кратный корень x_* *кратности два, равный*

$$x_*=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}},$$

и один простой корень.

Необходимым и достаточным условием существования единственного действительного корня является неравенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{(n-m)n^{n/m}}{(n-m)^{n/m}m},$$

при этом локализация данного корня определяется выражением $x=k(q/p)^{1/m}$ $(k>-1, k\neq 0)$.

Например, действительными корнями уравнения

$$x^{13} - 3x^7 - 1 = 0$$

являются числа

$$1,2172; \quad -0,87473; \quad -1,1789.$$

III. Нечетно-четные уравнения. В данной части статьи рассмотрим нечетно-четные уравнения (n – нечетное, m – четное). Если p и q имеют одинаковый знак, то подстановка

$$x = k\left(\frac{q}{p}\right)^{1/m} \quad (k \neq 0)$$

приводит к равенству

$$\frac{k^n}{k^m + 1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

Из этого равенства вытекает следующая

Теорема 4. *Нечетно-четные уравнения в случае, когда p и q одного знака имеют единственный действительный корень. Этот корень отрицателен при положительных значениях коэффициентов p, q и положителен при отрицательных p, q.*

В качестве примера, иллюстрирующего рассматриваемую ситуацию, приведем график функции $f(k) = \dfrac{k^7}{k^4 + 1}$ (рис. 5).

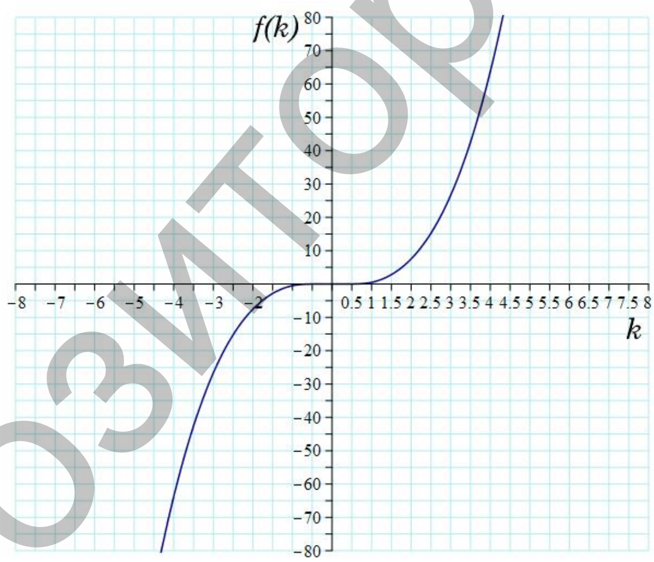

Рис. 5. **График функции** $\boldsymbol{f(k) = \dfrac{k^7}{k^4 + 1}}$

Если p, q имеют разные знаки, то после подстановки

$$x = k\left(-\frac{q}{p}\right)^{1/m} \quad (k \neq 0)$$

получаем равенство

$$\frac{k^n}{k^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^n}{k^m-1}\right)'=\frac{k^{n-1}\left[(n-m)k^m-n\right]}{\left(k^m-1\right)^2},$$

то в нечетно-четном случае точкой локального минимума является значение

$$k_*=\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{1}{m}},$$

а точкой локального максимума значение

$$k_{**}=-\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При этом в точке локального минимума выполняется равенство

$$\frac{k_*^n}{k_*^m-1}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},$$

а в точке локального максимума

$$\frac{k_{**}^n}{k_{**}^m-1}=-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Проиллюстрируем рассматриваемую ситуацию на примере функции $f(k)=\dfrac{k^7}{k^4-1}$ (рис. 6).

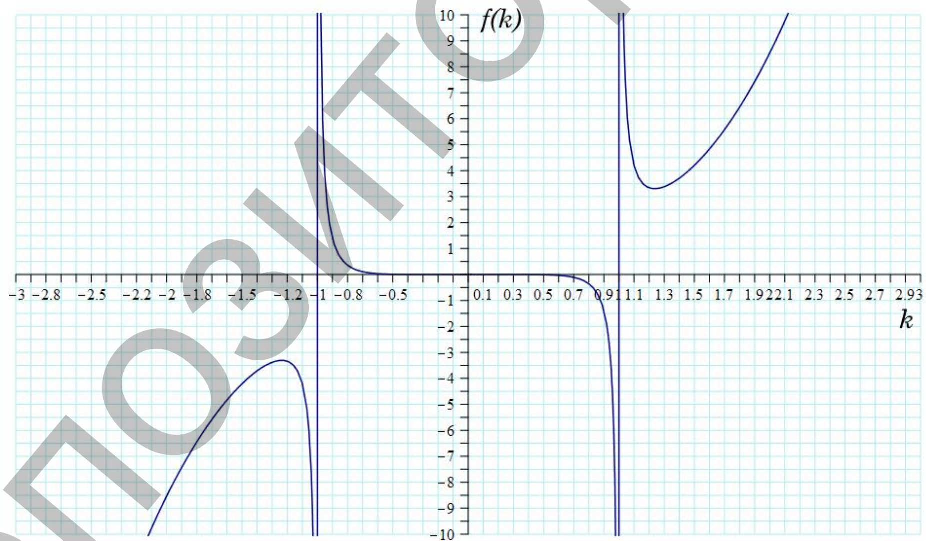

Рис. 6. **График функции** $\boldsymbol{f(k)=\dfrac{k^7}{k^4-1}}$

Таким образом, установлена

Теорема 5. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *Если* p, q *разных знаков, то при выполнении одного из неравенств*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},\quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}<-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},$$

уравнение (6) *имеет три различных действительных решения.*

Если имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},\quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}=-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},$$

то уравнение (6) *имеет двукратный действительный корень*

$$x=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

и простой действительный корень.

При выполнении двойного неравенства

$$-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}$$

уравнение (6) *имеет единственный действительный корень.*

IV. Четно-нечетные уравнения (n – четное, m – нечетное). В этом случае подстановка

$$x=k\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{m}}\quad (k\neq 0)$$

приводит к равенству

$$\frac{k^n}{k^m+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Так как

$$\left(\frac{k^n}{k^m+1}\right)'=\frac{k^{n-1}\left[(n-m)k^m+n\right]}{\left(k^m+1\right)^2},$$

то локальный минимум этой определяющей функции достигается при $k=0$, а локальный максимум при

$$k_*=\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}<0.$$

В точке k_* имеет место равенство

$$\frac{k_*^n}{k_*^m+1}=\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{n}{m}}<0.$$

Эти факты означают, что справедлива

Теорема 6. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *При выполнении одного из неравенств*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}>0,\quad -q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}<\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{n}{m}}$$

уравнение (6) *имеет два действительных решения.*

Если выполнено равенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}=\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{n}{m}} \text{ (рис.7).}$$

то уравнение (6) *имеет кратный корень*

$$x=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Для определенной наглядности ниже приведен график функции $f\left(k\right)=\dfrac{k^4}{k^3+1}$ (рис. 7).

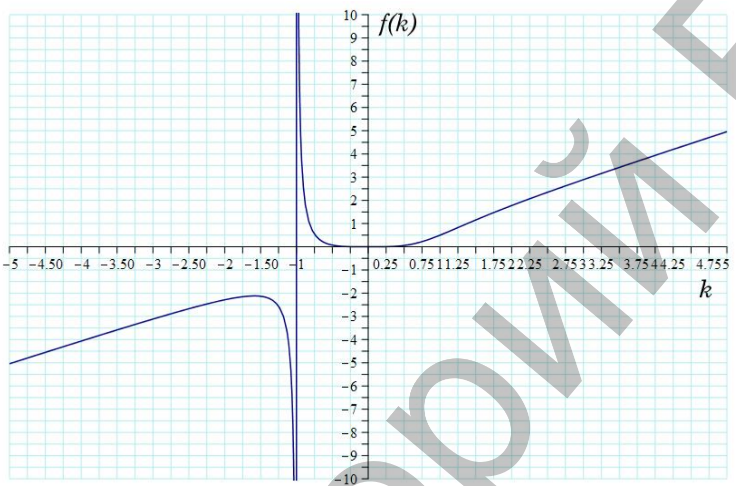

Рис. 7. **График функции** $\boldsymbol{f\left(k\right)=\dfrac{k^4}{k^3+1}}$

V. Четно-четные уравнения (n**,** m **– четные).** Очевидно, что при положительных p, q уравнение (6) действительных корней не имеет. При отрицательных p, q неравенство

$$\frac{k^n}{k^m+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}>0$$

влечет существование двух действительных решений.

Более сложная ситуация возникает, когда p, q имеют разные знаки. В этом случае подстановка

$$x=k\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \left(k\neq 0\right)$$

приводит к равенству

$$\frac{k^n}{k^m-1}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}$$

и локальный минимум определяющей функции $\dfrac{k^n}{k^m-1}$ достигается в точках

$$k_{*1}=\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{1}{m}}>1, \quad k_{*2}=-\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{1}{m}}<-1.$$

Его значение

$$f\left(k_*\right)=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Например, при $n=4$, $m=2$, $k_*=\sqrt{2}$, $f\left(k_*\right)=4$.

Приведем график функции $f\left(k\right)=\dfrac{k^4}{k^2-1}$ (рис. 8).

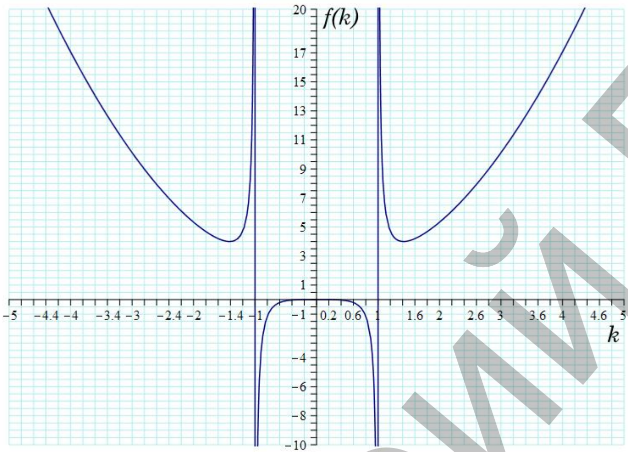

Рис. 8. **График функции** $\boldsymbol{f\left(k\right)=\dfrac{k^4}{k^2-1}}$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Пусть* $p\neq 0$, $q\neq 0$. *Если* p *и* q *имеют разные знаки, то при выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}$$

уравнение (6) *имеет четыре действительных решения, два из которых отрицательны, а два – положительны.*

Если имеет место равенство (заметим, что p *в этом случае должно быть отрицательным)*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}=\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}},$$

то уравнение (6) *имеет два кратных корня, кратность каждого из которых равна двум:*

$$x_1=\left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}},\quad x_2=-\left(-\frac{pm}{n}\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

При условии

$$0<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n}{m}}$$

уравнение (6) *действительных корней не имеет, наконец, если*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{m}}<0,$$

уравнение (6) *имеет два действительных корня.*

Заключение. Таким образом, нами приведен ряд теорем, в которых установлены необходимые и достаточные условия для определения у трехчленного алгебраического уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами числа действительных решений, а также областей их локализации. Подробно рассмотрены все возможные типы трехчленных уравнений с действительными коэффициентами, и для каждого из них получен относительно простой вид функций, зависящих от коэффициентов уравнения и определяющих число действительных решений.

Используемые в настоящей статье замены переменных оказались практически целесообразными и позволили для каждого из типов трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами получить точное условие существования двукратного действительного корня, а также явные аналитические формулы для его вычисления через коэффициенты уравнения, чего, например, не сделано [4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кравченко, В.Ф. Аналитический метод решения трехчленных алгебраических уравнений с помощью элементарных функций K_{ml} / В.Ф. Кравченко // Ученые записки ЦАГИ. – 1988. – Т. 19, № 4. – С. 135–144.
2. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.
3. Kelley, Z. Estimating the number of roots of trinomials over finite fields / Z. Kelley, S.W. Owen // Journal of Symbolic Computation. – 2017. – Vol. 79. – P. 108–118.
4. Кутищев, Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени / Г.П. Кутищев. – М.: Издательство ЛКИ, 2019. – 232 с.
5. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.

R E F E R E N C E S

1. Kravchenko V.F. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal], 1988, 19(4), pp. 135–144.
2. Astapov I.S., Astapov N.S. *Programmnaya inzheneriya* [Software Engineering], 2017, 8(9), pp. 422–432.
3. Kelley Z., Owen S.W. *Journal of Symbolic Computation*, 2017, 79, pp. 108–118.
4. Kutishchev G.P. *Resheniye algebraicheskikh uravnenii proizvolnoi stepeni* [Solving Algebraic Equations of Arbitrary Degree], Moscow, Izdatelstvo LKI, 2019, 232 p.
5. Prasolov V.V. *Mnogochleny* [Polynomials], Moscow, MTsNMO, 2014, 336 p.

Поступила в редакцию 21.01.2020

Адрес для корреспонденции: e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.