УДК 512.542

МНОЖЕСТВА ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

Т.Б. Караулова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей работе описаны методы построения множеств Фиттинга конечной π-разрешимой группы, определяемых заданными свойствами ее холловых π-подгрупп. В частности, доказана справедливость аналога гипотезы Шеметкова о локальности формации всех групп, холловы π-подгруппы которых являются $C_\pi\mathfrak{F}$ -группами, для π-локального множества Фиттинга π-разрешимой группы.

Цель исследования – разработка новых методов построения множеств Фиттинга π-разрешимой группы посредством заданных свойств холловых π-подгрупп.

Материал и методы. *Использованы классические методы теории групп и теории классов групп.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что для множества простых чисел π ($\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$) и для любого множества Фиттинга π-разрешимой группы G множество всех подгрупп конечной π-разрешимой группы G, холловы π-подгруппы которых содержатся в их $\mathcal{F}$ -радикалах, является π-насыщенным множеством Фиттинга. Определено множество всех подгрупп конечной π-разрешимой группы G, холловы π-подгруппы которых принадлежат множеству Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G, и доказана его π-локальность в случае, когда $\mathcal{F}$ – π-локальное множество Фиттинга G.*

Заключение. *В настоящей работе построены новые семейства множеств Фиттинга π-разрешимой группы G, определяемых заданными свойствами холловых π-подгрупп.*

Ключевые слова: *множество Фиттинга группы G, холловы π-подгруппы, $\mathcal{F}$ -радикал.*

FITTING SETS WITH GIVEN PROPERTIES OF HALL SUBGROUPS

T.B. Karaulova
Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

In this paper, we described methods for constructing Fitting sets of a finite π-soluble group, defined by the given properties of its Hall π-subgroups. In particular, the analogue of the Shemetkov problem on the locality of the formation of all groups whose Hall π-subgroups are $C_\pi\mathfrak{F}$ -groups for a π-local Fitting set of a π-soluble group is proved.

The purpose of the research is to develop new methods for constructing Fitting sets of a π-soluble group via properties of Hall π-subgroups.

Material and methods. *In this paper classical methods of group theory and class theory of groups are used.*

Findings and their discussion. *In the paper it is proved, that the set of all subgroups of a finite π-soluble group G, whose Hall π-subgroups are contained in their $\mathcal{F}$ -radicals is a π-saturated Fitting set for a set of primes π ($\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$) and for any Fitting set of a π-soluble group. The set of all subgroups of a finite π-soluble group G, whose Hall π-subgroups belong to Fitting set $\mathcal{F}$ of a group G is defined and its π-locality is proved in the case when $\mathcal{F}$ is a π-local Fitting set.*

Conclusion. *In this paper, we construct the new families of Fitting sets of π-soluble group defined via properties of Hall π-subgroups.*

Key words: *Fitting set of a group G, Hall π-subgroups, $\mathcal{F}$ -radical.*

В данном исследовании рассматриваются только конечные группы. В обозначениях и терминологии мы следуем [1].

Основной результат настоящей работы – доказательство аналога проблемы Шеметкова в теории множеств Фиттинга π-разрешимых групп. Кроме того, описаны методы построения множеств Фиттинга π-разрешимой группы, определяемых вложением холловых π-подгрупп в их радикалы.

Материал и методы. Использованы классические методы теории групп и теории классов групп.

Множества Фиттинга, определяемые вложением холловых подгрупп в радикалы. В данном разделе построено новое семейство множеств Фиттинга π-разрешимых групп, определяемых вложением холловых подгрупп в радикалы групп.

Определение 1. *Пусть* π *– некоторое множество простых чисел и* $\mathscr{F}$ *– непустое множество Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *. Обозначим через* $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ *множество всех подгрупп группы* G *, которое определяется следующим образом:* $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) = \{H \le G : H_\pi \le H_{\mathscr{F}}\}$.

Напомним, что *произведением* $\mathscr{F} \circ \mathfrak{H}$ *множества Фиттинга* $\mathscr{F}$ *группы* G *и класса Фиттинга* $\mathfrak{H}$ [2, с. 218] называется множество всех таких подгрупп H группы G, что $H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{H}$, то есть $\mathscr{F} \circ \mathfrak{H} = \{H \le G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{H}\}$. Пусть $\varnothing \ne \pi \subseteq \mathbb{P}$. Множество Фиттинга группы G является *π-насыщенным*, если $\mathscr{F} \circ \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathscr{F}$.

Теорема 1. *Пусть* $\varnothing \ne \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *множество* $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ *является множеством Фиттинга группы* G *;*
2) *множество Фиттинга* $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ *группы* G *π-насыщено.*

Доказательство. Пусть G – π-разрешимая группа. Предположим, что $H \le G$ такая, что $H \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$. Тогда $H_\pi \le H_{\mathscr{F}}$. Пусть $K \trianglelefteq H$. Докажем, что $K \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$. По определению множества $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ $\mathscr{F}$-радикал группы H содержит некоторую холлову π-подгруппу H_π из H, то есть $H_\pi \le H_{\mathscr{F}}$. Ввиду леммы [1, предложение VIII. 2.4. (d)] имеем $K_{\mathscr{F}} = H_{\mathscr{F}} \cap K$. По [1, лемма I. 3.2. (c)] $K_\pi = H_\pi \cap K$. Следовательно, $H_\pi \cap K \le H_{\mathscr{F}} \cap K$ и поэтому $K_\pi \le K_{\mathscr{F}}$. Значит, $K \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$.

Пусть M и N – нормальные подгруппы группы в произведении $MN = H$, причем M, $N \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$. Докажем, что $H \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$.

Так как M, $N \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$, то $M_\pi \le M_{\mathscr{F}}$ и $N_\pi \le N_{\mathscr{F}}$. По [1, предложение VIII. 2.4. (d)] имеем $M_{\mathscr{F}} = H_{\mathscr{F}} \cap M$ и $N_{\mathscr{F}} = H_{\mathscr{F}} \cap N$. По [1, лемма I. 3.2. (c)] $M_\pi = H_\pi \cap M$ и $N_\pi = H_\pi \cap N$. Следовательно, $H_\pi \cap M \le H_{\mathscr{F}} \cap M$ и $H_\pi \cap N \le H_{\mathscr{F}} \cap N$, и поэтому $(H_\pi \cap M)(H_\pi \cap N) \le (H_{\mathscr{F}} \cap M)(H_{\mathscr{F}} \cap N)$. По [1, лемма A. 1.2. (a)] и [1, лемма I. 3.2. (d)] $(H_\pi \cap M)(H_\pi \cap N) = H_\pi \cap MN = H_\pi \cap H = H_\pi \le$ $\le (H_{\mathscr{F}} \cap M)(H_{\mathscr{F}} \cap N) \le H_{\mathscr{F}} \cap MN = H_{\mathscr{F}}$. Итак, $H_\pi \le H_{\mathscr{F}}$. Следовательно, $H \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$.

Покажем, что множество $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ замкнуто относительно сопряжений.

Пусть $S \le G$ и $S \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$. Отсюда следует, что $S_\pi \le S_{\mathscr{F}}$. Докажем, что $S^x \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ для каждого $x \in G$. То есть покажем, что $(S^x)_\pi \le (S^x)_{\mathscr{F}}$. Так как $S_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G, то $(S_{\mathscr{F}})^x \in \mathscr{F}$ и $(S_{\mathscr{F}})^x \trianglelefteq S^x$. По определению $\mathscr{F}$-радикала $(S_{\mathscr{F}})^x \le (S^x)_{\mathscr{F}}$. Следовательно, $S_\pi \le S_{\mathscr{F}} = (S_{\mathscr{F}})^x \le (S^x)_{\mathscr{F}}$.

Остается доказать, что $(S^x)_\pi \le S_\pi$ для каждого $x \in G$. По теореме Чунихина каждая π-подгруппа группы S содержится в некоторой ее холловой π-подгруппе и любые две холловы π-подгруппы S сопряжены в группе S. Следовательно, $(S^x)_\pi \le (S_1)_\pi$ и $(S_1)_\pi = (S_\pi)^y = S_\pi$ для некоторого $y \in G$.

Таким образом, $(S^x)_\pi \le S_\pi \le S_{\mathscr{F}} = (S_{\mathscr{F}})^x = (S^x)_{\mathscr{F}}$. Значит, $S^x \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$ для каждого $x \in G$.

Докажем утверждение (2), то есть покажем, что $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$. По [2, свойство 3.2 (1)] $\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'}$.

Докажем обратное включение. Пусть $H \le G$ и $H \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда по определению произведения $H/H_{\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Следовательно, $H^{\mathfrak{E}_{\pi'}} \subseteq H_{\mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})}$ и $H^{\mathfrak{E}_{\pi'}} \in \mathscr{R}_\pi(\mathscr{F})$.

Таким образом, $H_\pi = \left(H^{\mathfrak{E}_{\pi'}}\right)_\pi \le \left(H^{\mathfrak{E}_{\pi'}}\right)_{\mathscr{F}} = H^{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cap H_{\mathscr{F}} \le H_{\mathscr{F}}$. Это доказывает обратное включение. Теорема доказана.

Проблема Шеметкова для множества Фиттинга. Отображение $f : \mathbb{P} \to$ {*множества Фиттинга группы* G } называют *функцией Хартли* или коротко *H-функцией* G .

Пусть $\mathfrak{N}_p$ – класс всех *p*-групп и $LFS_\pi(f) = \bigcap_{p\in\pi} f(p) \circ (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G называется π-*локальным*, если $\mathscr{F} = LFS_\pi(f)$ для некоторой *H*-функции *f* группы G.

Определение 2. *Пусть* π *– некоторое множество простых чисел и* $\mathscr{F}$ *– непустое множество Фиттинга* π-*разрешимой группы* G. *Обозначим через* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ *множество всех подгрупп* G, *которое определяется следующим образом:* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) = \{S \trianglelefteq G : S_\pi \in \mathscr{F}\}$.

Пусть π = *Supp*(*f*) = $\{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \varnothing\}$.

Лемма 1. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π-*разрешимой группы* G. *Тогда множество* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ *является множеством Фиттинга группы* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – π-разрешимая группа. Предположим, $S \trianglelefteq G$ такая, что $S \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$. Тогда $S_\pi \in \mathscr{F}$. Пусть $K \trianglelefteq S$.

По [1, лемма I. 3.2. (c)], если $K \trianglelefteq S$ и S_π – холлова π-подгруппа группы S, то $S_\pi \cap K = K_\pi \trianglelefteq S_\pi$ и $K_\pi \in \mathscr{F}$. Следовательно, $K \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Пусть M и N – нормальные подгруппы группы $H = MN$, причем M, $N \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$. Докажем, что $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Так как M, $N \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$, то $M_\pi \in \mathscr{F}$ и $N_\pi \in \mathscr{F}$. По [1, лемма I. 3.2. (c)] $M_\pi = H_\pi \cap M$ и $N_\pi = H_\pi \cap N$. Кроме того, $M_\pi \trianglelefteq H$ и $N_\pi \trianglelefteq H$.

Следовательно, по [1, лемма I. 3.2. (d)] $(H_\pi \cap M)(H_\pi \cap N) = H_\pi \cap MN = H_\pi \cap H = H_\pi \in \mathscr{F}$. Значит, $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Покажем, что множество $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ замкнуто относительно сопряжений.

Пусть $S \trianglelefteq G$ и $S \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$. Отсюда следует, что $S_\pi \in \mathscr{F}$. Докажем, что $S^x \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ для каждого $x \in G$. Легко видеть, что $S_\pi = (S^x)_\pi$. Следовательно, $(S^x)_\pi \in \mathscr{F}$ и $S^x \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Лемма 2. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ *и* $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π-*разрешимой группы* G. *Если* $H \leq G$ *и* H_π *– холлова* π-*подгруппа группы* H, *то* $H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \cap H_\pi = (H_\pi)_\mathscr{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$ – $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$-радикал группы H. Следовательно, $H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \trianglelefteq H$.

Так как H – π-разрешимая группа, то по теореме Чунихина в ней существуют холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены. Пусть H_π – холлова π-подгруппа группы H, то $H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in Hall_\pi(H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})})$ и $H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \trianglelefteq H_\pi$. Значит, $H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \subseteq (H_\pi)_\mathscr{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть $F/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} = F_\pi(H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})})$ – наибольшая нормальная π-нильпотентная подгруппа группы $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$. Следовательно, $F/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{N}_\pi$ и $F \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{N}_\pi$. Ввиду того, что $H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \trianglelefteq H$ и H_π – холлова π-подгруппа группы H, то по [1, лемма I. 3.2. (b)] $H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$ – холлова π-подгруппа группы $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$. Следовательно, по теореме Чунихина

$$F/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in Hall_\pi(H_\pi/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}).$$

Очевидно, что $(H_\pi)_\mathscr{F} \in Hall_\pi((H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})})$. Поэтому $(H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

С другой стороны, $F \cap (H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \trianglelefteq\trianglelefteq H$ и $F/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{N}_\pi$. Поэтому $F \cap (H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$. Таким образом, $[F, (H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}] \leq F \cap (H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$. Следовательно, по лемме [3, теорема 1.8.19, с. 43] $(H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq C_G(F/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}) \leq F$.

Имеем, что $(H_\pi)_\mathscr{F} \leq H_\pi \cap F \cap (H_\pi)_\mathscr{F} H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$.

Лемма 3. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *. Если* $\mathscr{F} \circ \mathfrak{N}_p = \mathscr{F}$ для всех $p \in \pi$, то $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{N}_p = \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Доказательство. Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{N}_p$.

Подгруппа H группы G π-разрешима. Следовательно, по теореме Чунихина в ней существуют и сопряжены холловы π-подгруппы. Пусть H_π – холлова π-подгруппа группы H. Тогда по [2, свойство 3.3] $H_\pi/(H_\pi)_{\mathscr{F}} = H_\pi/H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}$. По свойству изоморфизма

$$H_\pi / H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \simeq H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} / H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})}.$$

Следовательно, $H_\pi/(H_\pi)_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{N}_p$. Это означает, что $H_\pi \in \mathscr{F} \circ \mathfrak{N}_p = \mathscr{F}$. Таким образом, $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Ввиду [2, свойство 3.2 (1)] $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{N}_p = \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathscr{F}$ *и* $\mathscr{H}$ *– множества Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ *, то* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{K}_\pi(\mathscr{H})$;

(2) $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F} \cap \mathscr{H}) = \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \cap \mathscr{K}_\pi(\mathscr{H})$.

Доказательство. Следует непосредственно из определения 2.

Лемма 5. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *и* $\mathfrak{H}$ *– класс Фиттинга. Тогда* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F} \circ \mathfrak{H}) = \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $H \leq G$ такая, что $H_\pi \trianglelefteq H$ и $H_\pi \in \mathscr{F}$. Если $H_\pi \in \mathscr{F} \circ \mathfrak{H}$, то $H_\pi/(H_\pi)_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{H}$. По лемме 2 $H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \cap H_\pi = (H_\pi)_{\mathscr{F}}$, по свойству изоморфизма $H_\pi/(H_\pi)_{\mathscr{F}} \simeq H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} / H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{H}$ и поэтому $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \simeq \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$ и $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F} \circ \mathfrak{H}) \subseteq \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$.

С другой стороны, пусть $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$, тогда $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \simeq \mathscr{K}_\pi(\mathfrak{H})$. По лемме 2 $H_\pi/(H_\pi)_{\mathscr{F}} \simeq H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} / H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{H}$. Поэтому $H_\pi \in \mathscr{F} \circ \mathfrak{H}$ и $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F} \circ \mathfrak{H})$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $\mathscr{F}$ *– множество Фиттинга группы* G *. Тогда справедливо следующее утверждение:*

$$\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'} = \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}).$$

Доказательство. По [2, свойство 3.2 (1)] справедливо включение $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'}$.

Докажем обратное включение. Пусть $H \leq G$ и $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) \circ \mathfrak{E}_{\pi'}$. Тогда $H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Следовательно, по свойству изоморфизма $H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} / H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \simeq H_\pi / H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{E}_\pi$. В свою очередь, $H_\pi H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} / H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \leq H/H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$. Таким образом, $H_\pi / H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} \in \mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{E}_\pi = \{1\}$ и $H_\pi = H_\pi \cap H_{\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})} = H_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$. Значит, $H_\pi \in \mathscr{F}$ и $H \in \mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathscr{F}$ *–* π*-локальное множество Фиттинга* π*-разрешимой группы* G *. Тогда множество* $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ *является* π*-локальным множеством Фиттинга* G .

Доказательство. По лемме 1 множество $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ является множеством Фиттинга группы G. Покажем, что $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F})$ π-локально, то есть $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) = LFS_\pi(f)$ для некоторой *H*-функции *f*.

Пусть $\pi = \mathbb{P}$. Тогда $\mathscr{K}_\pi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$ – π-локальное множество Фиттинга группы G и теорема верна.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subset \mathbb{P}$. По [4, лемма 12] каждое π-локальное множество Фиттинга группы G определяется полной приведенной *H*-функцией. Следовательно, существует такая *H*-функция *F*, что $F(p) \circ \mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathscr{F}$ для любого $p \in \pi$.

Зададим *H*-функцию *f* следующим образом:

$$f(p)=\begin{cases}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right), \text{ если } p\in\pi,\\ \mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right), \text{ если } p\in\pi'.\end{cases}$$

Тогда $LFS_\pi(f)=\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)\cap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)$. По лемме [2, свойство 3.3] $\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)=\bigcap_{p\in\pi}\left(\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{N}_p\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}$. Поскольку функция F – полная *H*-функция, по лемме 3 $\bigcap_{p\in\pi}\left(\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{N}_p\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}=\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}LFS_\pi(f)&=\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)\cap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)=\\ &=\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\right)\cap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)=\\ &=\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\right)\cap\left(\bigcap_{p\in\pi'}\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\left(\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\right)\right)=\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\right)\cap\left(\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\mathfrak{E}_\pi\right).\end{aligned}$$

Докажем, что $\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)$.

Так как $F(p)\subseteq\mathscr{F}$, то по лемме 4 $\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\subseteq\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)$ и $\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\subseteq\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, по лемме 6

$$\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\subseteq\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}\subseteq\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\left(\bigcap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}\right)=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\mathfrak{E}_{\pi'}=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right).$$

Так как $\mathscr{F}$ – π-локальное множество Фиттинга группы G и F – полная *H*-функция, то $\mathscr{F}=\bigcap_{p\in\pi}F(p)\circ\mathfrak{E}_{p'}$. Тогда по лемме 4 $\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\subseteq\mathscr{K}_\pi\left(\bigcap_{p\in\pi}F(p)\circ\mathfrak{E}_{p'}\right)$ и

$\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\subseteq\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\circ\mathfrak{E}_{p'}\right)=\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathscr{K}_\pi\left(\mathfrak{E}_{p'}\right)=\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}$.

Следовательно, $\bigcap_{p\in\pi}\mathscr{K}_\pi\left(F(p)\right)\circ\mathfrak{E}_{p'}=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)$.

Таким образом, $LFS_\pi(f)=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\cap\left(\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)\circ\mathfrak{E}_\pi\right)=\mathscr{K}_\pi\left(\mathscr{F}\right)$.

Заключение. В настоящей работе конструируются новые семейства множеств Фиттинга конечной π-разрешимой группы, определяемые заданными свойствами холловых подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
2. Yang, N. On $\mathscr{F}$- injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
3. Guo, W. The theory of Classes of groups / W. Guo. – Springer, Dordrecht, 2000. – 258 p.
4. Караулова, Т.Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Т.Б. Караулова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 29–38.

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
2. Yang, N. On $\mathscr{F}$- injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
3. Guo, W. The theory of Classes of groups / W. Guo. – Springer, Dordrecht, 2000. – 258 p.
4. Karaulova T.B. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matamatika. Informatika.* [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Information Science], 2018, 3, pp. 29–38.

Поступила в редакцию 15.10.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru – Караулова Т.Б.