МАТЭМАТЫКА

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫЙ КОРАДИКАЛ ЯВЛЯЕТСЯ ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

Н.М. Адарченко
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Представленная статья посвящена изучению новых классов конечных групп с условием σ -перестановочности для подгрупп.

Цель работы – нахождение достаточных условий, при которых нильпотентный корадикал конечной группы является холловой нильпотентной подгруппой.

Материал и методы. *Объект исследования – конечные σ -разрешимые группы. При этом используются методы абстрактной теории групп и методы теории σ -свойств конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *Найдены новые приложения теории τ_σ -перестановочных подгрупп. В частности, обобщены некоторые известные результаты о перестановочных подгруппах конечных групп. Результаты данной работы могут найти приложения в исследованиях конечных групп с условием транзитивности для перестановочности подгрупп.*

Заключение. *Создан новый метод изучения нильпотентного корадикала конечных групп. С помощью этого метода доказан критерий холловости нильпотентного корадикала конечной группы. Полученные результаты обобщают некоторые известные результаты и, в частности, теорему Хупперта о сверхразрешимости конечных групп с циклическими силовскими подгруппами.*

Ключевые слова: *конечная группа, силовская подгруппа, τ_σ -перестановочная подгруппа, σ -разрешимая группа, σ -нильпотентная группа, максимальная подгруппа.*

ON FINITE GROUPS IN WHICH THE NILPOTENT RESIDUAL IS A HALL SUBGROUP

N.M. Adarchenko
Educational Establishment "Francisk Skorina Gomel State University"

The presented article is devoted to the study of new classes of finite groups with the condition of σ -permutability for subgroups.

The purpose of the work is to find the sufficient conditions under which the nilpotent residual of a finite group is a Hall nilpotent subgroup.

Material and methods. *The object of study is the finite σ -soluble groups. In the study, methods of the abstract group theory and methods of the theory of σ -properties are used.*

Findings and their discussion. *New applications of the theory of τ_σ -permutable subgroups have been found. In particular, some known results on permutable subgroups of finite groups are generalized. The results of this work can find applications in studies of finite groups with transitivity condition for permutable subgroups.*

Conclusion. *A new method for studying the nilpotent residual of a finite group is developed. Using this method, a new criterion for the nilpotent residual of the finite group to be a Hall subgroup is proved. The results obtained in the papwer generalize some known results and, in particular, the well-known theorem of Huppert on the supersolubility of finite groups with cyclic Sylow subgroups.*

Key words: *finite group, Sylow subgroup, τ_σ-permutable subgroup, σ-soluble group, σ-nilpotent group, maximal subgroup.*

Представленная работа посвящена изучению новых классов конечных групп с условием σ-перестановочности для подгрупп.

1. Введение. Определения, основной результат и его следствия. На протяжении статьи все группы конечны, и G всегда обозначает конечную группу. В дальнейшем σ является некоторым разбиением множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, то есть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Символ $\sigma(n)$ обозначает [1; 2] набор $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Группа G называется [3] *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; *σ-нильпотентной*, если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, \ldots, G_n$; *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор G является σ-примарным.

Множество **Н** подгрупп в G является *полным холловским σ-множеством* в G [1; 2], если каждый член $\neq 1$ в **Н** является холловой σ_i-подгруппой в G для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ и **Н** содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу группы G для каждого $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Пусть $\tau_H(A) = \{\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(A) \mid \sigma(A) \cap \sigma(H^G) \neq \varnothing$ для холловой σ_i-подгруппы Н є **Н**}.

Тогда мы говорим, следуя Бейдлеману и Скибе [4], что подгруппа A группы G является (i) *τ_σ-перестановочной в G относительно* **Н**, если $AH^x = H^x A$ для всех $x \in G$ и всех Н є **Н** таких, что $\sigma(H) \subseteq \tau_H(A)$; (ii) *$\tau_\sigma$-перестановочной* в G, если A является *τ_σ-перестановочной* в G относительно некоторого полного холлова σ-множества **Н** из G.

Цель работы – нахождение достаточных условий, при которых нильпотентный корадикал конечной группы является холловой нильпотентной подгруппой.

Материал и методы. Объект исследования – конечные σ-разрешимые группы. При этом используются методы абстрактной теории групп и методы теории σ-свойств конечных групп.

Теорема 1.1. *Пусть $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $\pi = \pi(D)$. Предположим, что G обладает полным холловым σ-множеством* **Н**, *все члены которого π-сверхразрешимы. Если максимальные подгруппы каждой нециклической силовской p-подгруппы группы G являются τ_σ-перестановочными в G для всех $p \in \pi$, то D – нильпотентная холлова подгруппа в G, наименьший простой делитель числа $|G|$ делит $|G:D|$ и каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.*

В этой теореме символ $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ обозначает σ-нильпотентный корадикал группы G, то есть пересечение всех нормальных подгрупп N группы G с σ-нильпотентной факторгруппой G/N; $G^{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный корадикал группы G.

Следствие 1.2 (см. теорему 10.3 в [5, VI]). *Если каждая силовская подгруппа группы G является циклической, то G сверхразрешима.*

Следствие 1.3 (Сринивасан [6]). *Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы G S-перестановочна в G, то G сверхразрешима.*

2. Доказательство основного результата. Мы используем $\mathfrak{N}_\sigma$ для обозначения класса всех σ-нильпотентных групп. При доказательстве теоремы 1.1 мы применяем следующие σ-свойства групп.

Лемма 2.1 (см. лемму 2.5 в [3]). *Класс $\mathfrak{N}_\sigma$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E / E \cap \Phi(G)$ – σ-нильпотентной группой, то E также σ-нильпотентная группа.*

Напомним, что G называется D_π-группой, если G обладает холловой π-подгруппой E и каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой сопряженной с E подгруппе; *σ-полной группой силовского типа* [1], если каждая подгруппа E группы G является D_{σ_i}-группой для каждого $\sigma_i \in \sigma(E)$; *σ-полной* [7], если G обладает полным холловым σ-множеством.

Ввиду теорем A и B из [7] справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если G является σ-разрешимой, то G является σ-полной группой силовского типа.*

Лемма 2.3 (см. лемму 3.1 в [3]). *Пусть* H – σ_i*-подгруппа в* σ*-полной группе* G. *Тогда* H *является* σ*-перестановочной в* G *тогда и только тогда, когда* $O^{\sigma_i}(G) \le N_G(H)$.

Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что теорема 1.1 неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D \neq 1$. Пусть **H** = { H₁,…, Hₜ}. Без ограничения общности можно предположить, что H_i является σ_i-группой для всех $i = 1,\ldots,t$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G.

(1) *Гипотеза справедлива для* G/R*, поэтому заключение теоремы справедливо для* G/R.

Сначала заметим, что

$$\mathbf{H}_0 = \{ H_1N / N,\ldots, N_tH/N\}$$

– полное холлово σ-множество в G/N. Более того, каждый член H_iN из H_0 является π-сверхразрешимой группой, поскольку H_i является π-сверхразрешимой группой по условию. С другой стороны, $(G/N)^{N\sigma} = DN/N$. Следовательно, $\pi_0 \subseteq \pi$, где $\pi_0 = \pi((G/N)^{\mathfrak{N}_\sigma})$, поэтому каждый член множества H_0 является π_0-сверхразрешимой группой.

Пусть теперь V/R – максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P/R группы G/R, где $p \in \pi_0$ и P/R не является циклической группой. Тогда для некоторой нециклической силовской p-подгруппы G_p группы G мы имеем $P/R = G_pR/R$ и $V = R(V \cap G_p)$. Следовательно,

$$p = |(P/R):(V/R)| = |G_pR : R(V \cap G_p)| = |G_p||R||R \cap (V \cap G_p)| : |V \cap G_p||R||G_p \cap R| =$$

$$= |G_p| : |V \cap G_p| = |G_p : (V \cap G_p)|,$$

поэтому $V \cap G_p$ – максимальная подгруппа в G_p. Таким образом, $V \cap G_p$ τ_σ-перестановочна в G по условию, поэтому $V/R = R(V \cap G_p)/R$ является τ_σ-перестановочной в G/R по лемме 2.6(1) из [4]. Значит, гипотеза верна для G/R. Следовательно, мы имеем (1) по выбору G.

(2) *Группа* D *разрешима, поэтому* G *является* σ*-разрешимой группой. Таким образом,* G *является* σ*-полной группой силовского типа.*

Предположим, что это неверно. Утверждение (1) подразумевает, что $(G/R)^{N\sigma} = DR/R$ нильпотентен. Следовательно, $R \le D$ и R – неабелева группа. Более того, если G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$, то $N \le D$ и $D \simeq D/(R \cap N) = D/1$ нильпотентны, противоречие. Таким образом, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $C_G(R) = 1$, поскольку, $C_G(R)$ нормальна в G, а R – неабелева группа. Тогда 2 делит $|R|$ по теореме Фейта–Томпсона и силовская 2-подгруппа Q в R не является циклической согласно [5, IV, теорема 2.8]. Следовательно, $|Q| > 2$.

Пусть P – силовская 2-подгруппа в G такая, что $Q = P \cap R$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы V в P имеем, что Q не содержится V по теореме Тейта [5, IV, теорема 4.7], откуда следует, что $P = QV$ и поэтому $V \cap R < P \cap R = Q$. Кроме того, $V \cap R \neq 1$, так как в противном случае мы имеем $V \cap R = P \cap V \cap R = Q \cap V = 1$ и, следовательно, $|Q| = 2$. Так как $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, где $R_1,\ldots, R_n$ – неабелевы простые группы, $Q = (P \cap R_1) \times \cdots \times (P \cap R_n)$ и поэтому для некоторого i мы имеем $V \cap R_i < P \cap R_i$. Также отметим, что $V \cap R_i \neq 1$, так как в противном случае мы получаем, что порядок силовской 2-подгруппы в $P \cap R_i$ делит 2 и поэтому $P \cap R_i$ является 2-нильпотентным согласно [5, IV, теорема 2.8], что влечет 2-нильпотентность группы R.

Предположим, что $2 \in \sigma_k$. Сначала покажем, что R является σ-примарной группой. Предположим, что это неверно. Мы можем предполагать без потери общности, что V τ_σ-перестановочна в G относительно **H**. Тогда для некоторого $j \neq k$ и для $H = H_j$ имеем $H \cap R_i \neq 1$, поскольку R не является σ-примарной. Также отметим, что $\sigma_k \in \sigma(H^G)$, так как в противном случае мы имеем $R \cap H^G = 1$, что означает, что

$1 < H^G \le C_G(R) = 1$. Следовательно, $\sigma_k \in \tau_H(V)$ и поэтому $VH^x = H^xV$ для всех $x \in G$. Заметим, что $L = VH^x \cap R_i$ является субнормальной подгруппой в VH^x, где V – холлова σ_k-подгруппа VH^x и H^x – холлова σ_j-подгруппа VH^x. Следовательно, $L = (L \cap V)(L \cap H^x)$. Значит,

$$L = (L \cap V)(L \cap H^x) = (VH^x \cap R_i \cap V)(VH^x \cap R_i \cap H^x) = (R_i \cap V)(R_i \cap H^x) = \\ = (V \cap R_i)(H \cap R_i)^x = (H \cap R_i)^x(V \cap R_i)$$

для всех $x \in R_i$, где $(H \cap R_i)(V \cap R_i) \ne R_i$, так как $V \cap R_i < P \cap R_i$. Следовательно, группа R_i непроста ввиду [8, теорема 1.1.9], так как $H \cap R_i \ne 1$ и $V \cap R_i \ne 1$. Это противоречие показывает, что R является σ-примарной группой.

Теперь заметим, что $\sigma(V \cap R) = \sigma(V) = \sigma(R) = \{\sigma_k\}$, поскольку R является σ-примарной группой, $2 \in \sigma_k$ и $V \cap R \ne 1$. Следовательно, $V \cap R$ является τ_σ-перестановочной в G по лемме 2.6(2) из [4]. Но $V \cap R \le R \le O_{\sigma_k}(G)$, поэтому $V \cap R$ σ-перестановочна в G по лемме 2.6(3) из [4]. Таким образом, $R \le N_G(V \cap R)$ по лемме 2.3, поскольку $R \le D \le O^{\sigma_i}(G)$. Следовательно, $V \cap R \le O_2(R) = 1$, противоречие. Таким образом, R – абелева группа. Значит, D разрешима по утверждению (1). Следовательно, G является σ-разрешимой группой и поэтому G – σ-полная группа силовского типа по лемме 2.2.

(3) *Подгруппа D нильпотентна.*

Предположим, что это неверно. Заметим, что $RD/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является нильпотентной группой по утверждению (1). Следовательно, $R \le D$, R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и R не содержится Ф(G) по лемме 2.1. Из утверждения (2) получим, что R является p-группой для некоторого простого числа D. Следовательно, $R = C_G(R)$ согласно [9, глава A, теорема 15.2], и G = [R]M для некоторой максимальной подгруппы M в G. Если $|R| = p$, то $G/C_G(R) = G/R$ является циклической группой. Таким образом, G сверхразрешима и поэтому D нильпотентна, что противоречит нашему предположению о группе G. Следовательно, $|R| > p$ и поэтому силовские p-подгруппы в G не являются циклическими.

Для некоторого i имеем $R \le H_i \cap D$. Тогда $H_i = [R](H_i \cap M)$ и H_i является π-сверхразрешимой группой по предположению. Пусть P – силовская p-подгруппа в $H_i \cap M$. Тогда $RP \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Пусть V – такая максимальная в R подгруппа, что V нормальна в H_i.

Мы покажем, что V нормальна в G. Прежде всего заметим, что VP является максимальной подгруппой силовской p-подгруппы RP группы G, поэтому VP τ_σ-перестановочна в G по условию. Тогда $V = V(R \cap P) = R \cap VP$ σ-перестановочна в G по лемме 2.6(2)(3) в [4]. Следовательно, $G = H_iO^{\sigma_i}(G) \le N_G(V)$ по лемме 2.3. Минимальность R подразумевает, что $V = 1$, поэтому $|R| = p$, противоречие. Следовательно, подгруппа D нильпотентна.

(4) *Если E является подгруппой в G, то $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \le D$.*

Прежде отметим, что поскольку $E/E \cap D \simeq ED/D \in \mathfrak{N}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ является наследственным классом по лемме 2.1, то $E/E \cap D \in \mathfrak{N}_\sigma$. Следовательно, $E^{\mathfrak{N}_\sigma} \le E \cap D$.

(5) *D – холлова подгруппа в G.*

Допустим, что это неверно, и пусть P – силовская p-подгруппа в D такая, что $1 < P < G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Мы можем предположить без ограничения общности, что $G_p \le H_1$ и $R \le D$.

(a) *$R = D = P$ – минимальная нормальная подгруппа в G.*

Поскольку, по утверждению (3), D нильпотентна, R является q-группой для некоторого простого числа Q. Более того, $D/R = (G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – холлова подгруппа в G/R согласно утверждению (1). Предположим, что $PR/R \ne 1$. Тогда $PR/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$. Если $q \ne p$, то $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Это противоречит тому факту, что $P < G_p$. Следовательно, $q = p$ и поэтому $R \le P$, таким образом, $P/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$, и мы снова получаем это $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Данное противоречие показывает, что $PR/R = 1$, и это означает, что $R = P$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в D. Поскольку D нильпотентна согласно утверждению (3), p' – дополнение E в группе D является характеристической подгруппой в D и поэтому нормальна в G. Следовательно, $E = 1$, из чего следует, что $R = D = P$.

(б) *Для некоторой максимальной подгруппы M из G мы имеем $C = DM$* (это получаем из утверждения (2) и леммы 2.1, поскольку G не является σ-нильпотентной группой).

(c) *Если G имеет минимальную нормальную подгруппу $L \neq D$, то $G_p = D \times (L \cap G_p)$. Следовательно, $O_{p'}(G) = 1$.*

Действительно, DL/L является холловой подгруппой в G/L согласно утверждениям (1) и (a). Следовательно, $G_pL/L = DL/L$, поэтому $G_p = D \times (L \cap G_p)$. Таким образом, $O_{p'}(G) = 1$, поскольку $D < G_p$ по утверждению (a).

(d) $V = C_G(D) \cap M$ *является нормальной подгруппой в G и $C_G(D) = D \times V \leq H_1$.*

Ввиду пунктов (a) и (b) имеем $C_G(D) = D \times V$, где $V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G. По пункту (a) $V \cap D = 1$ и, следовательно, по лемме 2.1 DV/D является σ-нильпотентной группой. Пусть W – σ_1-дополнение в V. Тогда W характеристична в V и поэтому нормальна в G. Следовательно, мы имеем (d) по пункту (c).

(e) $G_p \neq H_1$.

Предположим, что $G_p = H_1$. Пусть Z – подгруппа порядка p в $Z(G_p) \cap D$. Тогда, поскольку $D \leq O^{\sigma_1}(G) = O^p(G)$, подгруппа Z является нормальной в G по лемме 2.5. Значит, $D = Z < G_p$ и, следовательно, $D < C_G(D)$. Тогда $V = C_G(D) \cap M \neq 1$ является нормальной подгруппой в G и $V \leq H_1 = G_p$ по пункту (d). Пусть L – минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в V. Тогда $G_p = D \times L$ является нормальной элементарной абелевой подгруппой в G согласно пункту (c). Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G по леммам 2.6(3) из [4] и 2.3. Из этого имеем, что каждая подгруппа из G_p нормальна в G. Следовательно, $|D| = |L| = p$. Пусть $D = \langle a \rangle$, $L = \langle b \rangle$ и $N = \langle ab \rangle$. Тогда N не содержится в D, поэтому мы получаем, что $G/C_G(D) = G/C_G(N)$ является p-группой, поскольку G/D является σ-нильпотентной по лемме 2.1. Но тогда из утверждения (d) следует, что G является p-группой. Это противоречие показывает, что мы имеем (e).

Заключительное противоречие для (5). Ввиду теоремы A из [7] G имеет такое σ_1-дополнение E, что $W = EG_p = G_pE$. Пусть $V = W^{\mathfrak{N}_\sigma}$. Ввиду утверждений (2) и (4) и леммы 2.6(5) из [4] условие теоремы справедливо для W. Более того, из утверждения (e) следует, что $W \neq G$. Но тогда заключение теоремы верно для W по выбору группы G, откуда получаем, что V – холлова подгруппа в W. Кроме того, утверждение (4) подразумевает, что $V \leq D$, поэтому для силовской p-подгруппы V_p из V мы имеем $|V_p| \leq |P| < |G_p|$. Следовательно, V является p'-группой и поэтому $V \leq C_G(D) \leq H_1 \cap W$ по пункту (d). Таким образом, $V = 1$ и поэтому $W = EG_p = E \times G_p$ является σ-нильпотентной группой и $E \leq C_G(D) \leq H_1$. Следовательно, $E = 1$ и поэтому $D = 1$, противоречие. Таким образом, D – холлова подгруппа в G.

(6) *Если p – такое простое число, что $(p-1, |G|) = 1$, то p не делит $|D|$. В частности, наименьший простой делитель числа $|G|$ делит $|G:D|$.*

Предположим, что это неверно, и пусть P – силовская p-подгруппа в D. Рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения (3), можно показать, что некоторая максимальная подгруппа E подгруппы P нормальна в G. Следовательно, $C_G(D/E) = G$, так как $(p-1, |G|) = 1$ по гипотезе. Поскольку D – холлова подгруппа в G по утверждению (5), она имеет дополнение M в G. Таким образом, $G/E = (D/E) \times (ME/E)$, где $ME/E \simeq M \simeq G/D$ – σ-нильпотентные группы. Следовательно, G/E – σ-нильпотентная группа. Но тогда $D \leq E$, противоречие. Следовательно, p не делит $|D|$. В частности, наименьший простой делитель числа $|G|$ делит $|G:D|$.

(7) *Каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.*

Предположим, что это неверно. Допустим, что $\Phi(D) \neq 1$ и пусть $R \leq \Phi(D)$. Утверждение (1) подразумевает, что каждый главный фактор в G/R ниже $(G/R)^{\mathfrak{N}_\sigma} = D/R$ является циклическим, поэтому каждый главный фактор в G ниже D циклический по [9, IV, теорема 6.7]. Следовательно, $\Phi(D) = 1$ и поэтому любая силовская подгруппа в D является элементарной. Более того, существует простое $p \in \pi(D)$ такое, что силовская p-подгруппа P из D содержит минимальную нормальную подгруппу N группы G такую, что $|N| > p$. Пусть V – максимальная подгруппа в P такая, что $P = NV$. Тогда $N \cap V \neq 1$, поскольку D – холлова подгруппа в G, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Следовательно, V – τ_σ-перестановка в G, поэтому $N \cap V$ – σ-перестановка в G по лемме 2.6(2)(3) из [4]. Теперь, рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения (3) можно показать, что $N \cap V$ является нормальной подгруппой в G. Минимальность N подразумевает, что $N \cap V = 1$, поэтому $|N| = p$. Это противоречие завершает доказательство (7).

Утверждения (3), (5), (6) и (7) показывают, что заключение теоремы справедливо для G, что противоречит выбору группы G.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
2. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
3. Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. Beidleman, J.C. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups / J.C. Beidleman, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
6. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 3, № 35. – P. 210–214.
7. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Application. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
8. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2010.
9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

REFERENCES

1. Skiba A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495, № 1. – P. 114–129.
2. Skiba A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
3. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
4. Beidleman J.C. and Skiba A.N. On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups // J. Group Theory. – 2017. – Vol. 20, № 5. – P. 955–964.
5. Huppert B. Endliche Gruppen I. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
6. Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 3, № 35. – P. 210–214.
7. Skiba A.N. A generalization of a Hall theorem // J. Algebra and its Application. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
8. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2010.
9. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

Поступила в редакцию 24.01.2020

Адрес для корреспонденции: e-mail: nik. adarchenko@gmail.ru – Адарченко Н.М.