Заключение. Таким образом, обобщенная структура оптико-локационного координатора для БПЛА позволяет решать задачи однократного (поиска, обнаружения, распознавания) и последовательного межкадрового автоматического сопровождения неподвижных и движущихся одиночных и групповых наземных объектов на фоне поверхности земли в лабораторных условиях.

1. Цуприк С.В., Солонар, А.С., Гуцев, Р.А. Аппаратно-программный имитатор воздушной обстановки для оптико-локационной системы с подвижной оптической системой.
2. Солонар А.С., Гуцев, Р.А., Цуприк, С.В., Бабарека, А.С. Особенности реализации имитатора воздушной обстановки с помощью графических интерфейсов OpenGL и Unity3D.
3. Солонар А.С., Цуприк, С.В.. Модель входного воздействия для оптико-локационной системы зенитного ракетного комплекса с подвижной оптической системой.

МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ Л.В. КАНТОРОВИЧА ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чернявский М.М.
магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Трубников Ю.В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Существующие в настоящее время численные алгоритмы решения матричных нелинейных уравнений, как правило, применимы к ограниченным классам уравнений, являются времязатратными и неудобными в программировании. Поэтому разработка новых более удобных методов решения матричных нелинейных уравнений и их модификаций является актуальной. В связи с этим, в настоящей работе была поставлена цель – адаптировать метод мажорантных уравнений решения операторных уравнений в банаховом пространстве на случай матричных нелинейных уравнений.

Материал и методы. Материалом исследования являются нелинейные матричные уравнения и метод мажорантных уравнений Л.В. Канторовича решения операторных уравнений в банаховом пространстве. Методы исследования: аналитические и численные с использованием пакета компьютерной математики *Maple* 2015.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим скалярное уравнение (1):

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – выпуклая функция действительного аргумента, то есть имеющая на области определения возрастающую производную.

Часто на практике бывает удобно решать уравнение (1) методом простой итерации [1, с. 70], то есть путем приведения данного уравнения к виду (2):

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Таким образом, получаем последовательные приближения (3):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{3}$$

Несложно убедиться в том, что если графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = \varphi(x)$ пересекаются в двух точках с абсциссами, например, x_* и x_{**} $(x_* < x_{**})$, то есть, если уравнение (2) имеет два различных решения, то последовательность приближений (3) сходится к решению x_*.

Рассмотрим матричное нелинейное уравнение вида (4) с заданными комплексными матрицами A_k и B_k размера $[m \times m]$.

$$X = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k B_k \tag{4}$$

Обозначим

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k B_k. \tag{5}$$

Суть метода мажорантных уравнений для решения уравнения (5) заключается в следующем. Для начала необходимо оценить норму $\|F(X)\|$:

$$\|F(X)\| \le \sum_{k=0}^{n} \|A_k\| \cdot \|B_k\| \cdot \|X\|^k = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k, \tag{6}$$

где $p_k = \|A_k\| \cdot \|B_k\|$, $t = \|X\|$.

После оценки (6) необходимо наряду с уравнением (5) рассмотреть скалярное мажорантное уравнение (7):

$$t = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k \, . \qquad (7)$$

Условия применимости метода мажорантных уравнений для решения матричного уравнения (4) сформулированы в теореме 1.

Теорема 1. Если уравнение (7) имеет два положительных корня, например, t_* и t_{**}, то матричное уравнение (4) на множестве M имеет единственное решение, и оно может быть получено по схеме (8):

$$X_{n+1} = F\left(X_n\right). \qquad (8)$$

Для оператора F множество M является некоторым замкнутым шаром в пространстве всех комплексных матриц размера $[m \times m]$, снабженных некоторой нормой.

Доказательство теоремы 1 основано на доказательстве того, что оператор F на множестве M удовлетворяет принципу сжимающих отображений [2, с. 9].

Рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть в кубическом матричном уравнении $AX^3 + BX + C = X$ $A = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,15 \\ -0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,07 & -0,03 \\ 0 & 0,08 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$.

В качестве нормы матрицы возьмем октаэдрическую норму $\|A\| = \max\limits_{1 \le k \le m} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ik}|$. Тогда $\|A\| = 0,3;$ $\|B\| = 0,1;$ $\|C\| = 0,5$, а соответствующее мажорантное уравнение (7) примет вид:

$$t = 0,3t^3 + 0,1t + 0,5.$$

Данное уравнение имеет 3 действительных корня $t_1 \approx 0,645$; $t_2 \approx 1,317$; $t_3 \approx -1,962$, среди которых t_1 и t_2 являются положительными. Поэтому мы можем найти решение исходного матричного уравнения по схеме $X_{n+1} = AX_n^3 + BX_n + C$.

При начальном приближении $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ после одиннадцати итераций получаем решение с точностью до 10^{-10}:

$$X_* \approx \begin{pmatrix} 0,4565713 & 0,1092264 \\ -0,3494278 & 0,1007691 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим преимущества и недостатки рассматриваемого метода решения матричных нелинейных уравнений вида (4). *Основными преимуществами метода являются:*

1) простота реализации и программирования (не обязательно использовать пакет компьютерной математики);
2) возможность решения уравнений с матрицами большой размерности;
3) отсутствие ограничений на выбор начального приближения.

Перечислим *основные недостатки* исследуемого метода:

1) метод мажорантных уравнений не применим для всех произвольных матричных полиномиальных уравнений, поскольку мажорантное уравнение, составленное для матричного уравнения вида (4) не при любых матрицах A_k и B_k имеет два действительных положительных решения, что является обязательным условием для возможности использования данного метода;
2) возможность нахождения только одного решения матричного нелинейного уравнения;
3) сложность в оценке скорости сходимости.

Заключение. В ходе выполнения работы осуществлена адаптация метода мажорантных уравнений решения операторных уравнений в банаховом пространстве на случай матричных нелинейных уравнений и на конкретных числовых примерах подтверждена его эффективность.

1. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 684 с.
2. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 455 с.