С.А. Шлапаков

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Курс лекций

2010

УДК 517.53(075)
ББК 22.161.55я73
Ш68

Автор: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Шлапаков**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук *Т.Л. Сурин*

Учебное издание подготовлено в соответствии с учебной программой по курсу «Теория функций комплексного переменного».

В нем содержится лекционный курс дисциплины, который сопровождается примерами практического содержания, способствующими лучше усваивать учебный материал.

Предназначено в первую очередь для студентов педагогических специализаций, обучающихся по специальностям «Математика. Информатика», «Физика. Математика» дневной и заочной форм обучения. Оно будет также полезным и студентам других физико-математических специальностей.

УДК 517.53(075)
ББК 22.161.55я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Курс лекций ставит одной из своих целей дать студентам краткое изложение лекционного материала в пределах учебной программы для педагогических специальностей физико-математического профиля. Теория функций комплексного переменного изучается студентами, как правило, на старших курсах и позволяет глубже понять, переосмыслить и тем самым систематизировать знания студентов в области математического анализа, полученные ими на младших курсах.

Учебное издание может также использоваться и для самоподготовки с целью углубления своих знаний по математике. Состоит из 18 лекций, каждая из которых содержит отдельные параграфы, названия которых соответствуют примерному перечню вопросов, выносимых на экзамен. Представленный материал сопровождается демонстрационными примерами, способствующими лучшему пониманию и усвоению учебной дисциплины.

Лекция 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Комплексные числа

Теория функций комплексных переменных − это математический комплексный анализ.

Среди действительных чисел не существует такого, которое являлось бы корнем простейшего алгебраического уравнения $x^2 + 1 = 0$. В математике уже давно возникла потребность расширить поле действительных чисел таким образом, чтобы в этом поле содержались корни всех алгебраических уравнений, то есть, чтобы оно было алгебраически замкнутым. Именно эта цель достигается введением комплексных чисел.

Прежде всего, обозначим один из корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ через $i = \sqrt{-1}$. Этот новый числовой символ, который называется мнимой единицей, определяется, как и всякий другой математический символ, правилами действий над ним. Числа вида ib, где b− действительное число, называются чисто мнимыми. Они являются корнями уравнений $x^2 + b^2 = 0$. Наиболее общими числами, которые можно составить с помощью мнимой единицы, являются числа вида $z = a + ib = (a, b)$, где a и b − действительные числа. Таким образом, можно сказать, что комплексными числами $z = (a, b)$ называются упорядоченные пары (a, b) действительных чисел a и b, действия над которыми проводятся по определенным правилам, которые рассмотрим ниже. Упорядоченность пары (a, b) означает, что $(a, b) \neq (b, a)$ при $a \neq b$. Первая компонента a комплексного числа $z = (a, b)$ называется его действительной частью и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, а вторая компонента b называется мнимой частью комплексного числа $z = (a, b)$ и обозначается $b = \operatorname{Im} z$.

Комплексные числа имеют простой геометрический смысл. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат Oxy. Тогда каждой паре действительных чисел $z = (a, b)$ соответствуют на плоскости точка с абсциссой a и ординатой b, и наоборот, каждой точке плоскости (a, b) соответствует вполне определенное комплексное число $z = (a, b)$. Комплексное число $z = a + ib$, соответствующее точке (a, b), называют аффиксом точки (a, b). Таким образом, комплексные числа $z = (a, b)$ можно отождествить с точками плоскости Oxy, которая при этом получает название комплексной плоскости *C*. Можно также комплексное число $z=(a,b)$ отождествить с радиус-вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой (a,b).

Два комплексных числа считаются равными, если у них действительные и мнимые части совпадают, т.е. одно комплексное равенство $a_1+ib_1=a_2+ib_2$ равносильно двум действительным: $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. При $b=0$ получаются числа вида $(a,0)=a+i0$, которые отождествляются с действительными числами a и изображаются точками действительной оси *Ox*. При $a=0$ получаются чисто мнимые числа вида $(0,b)=0+ib$, которые изображаются точками мнимой оси *Oy*. Равенство $z=(a,b)=0$ равносильно двум действительным равенствам: $a=0$ и $b=0$; точка $z=0$ совпадает с началом координат.

Запись комплексного числа $z=(a,b)$ в виде $z=a+ib$ называется алгебраической формой представления комплексного числа *z*.

Рассмотрим теперь полярную систему координат на плоскости *Oxy*, совместив полюс с началом координат, а полярную ось направим вдоль оси *Ox*. Тогда комплексному числу $z\neq 0$ будут соответствовать полярные координаты r и φ изображающей его точки (рис. 1.1). Они называются соответственно модулем и аргументом комплексного числа, и это записывается сокращенно в виде $r=|z|$, $\varphi = Arg\ z$. Модуль числа $z=0$ естественно принять равным нулю, аргумент числа $z=0$ не определен.

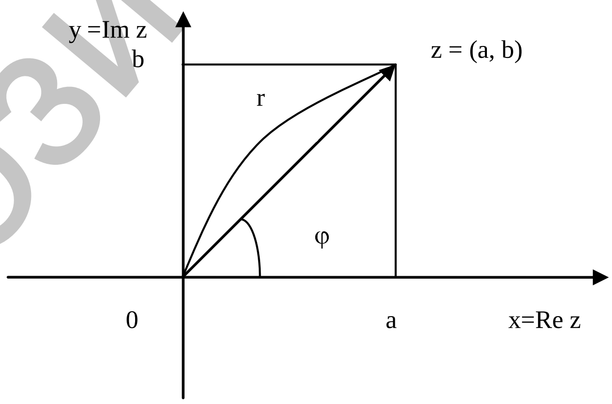

Рис. 1.1.

Из определений модуля и аргумента следует, что для $z=(a,b)=a+ib\neq 0$ справедливы равенства

$$a=r\cos\varphi,\ \ b=r\sin\varphi \qquad (1.1.1)$$

и

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \ \cos\ \varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (1.1.2)$$

Аргумент комплексного числа $Arg\, z$ многозначен и определяется числом z лишь с точностью до значения, кратного числу 2π. Часто можно пользоваться главным значением аргумента $\arg z$, которое обычно определяется как значение $Arg\, z$, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < Arg\, z \le \pi$.

Пользуясь формулами (1.1.1), любое комплексное число $z = a + ib \ne 0$ можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.1.3)$$

Если комплексное число $z = (a, b) = a + ib$ истолковывается как радиус-вектор, то a и b – декартовы координаты этого вектора, модуль $r = |z|$ – длина вектора, а аргумент $\varphi = Arg\, z$ есть угол, образуемый вектором $z \ne 0$ с положительным направлением действительной оси.

Два комплексных числа, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком, называются (взаимно) сопряженными. Если $z = a + ib$, то сопряженное ему число обозначается $\bar{z} = a - ib$. Ясно, что $\bar{\bar{z}} = z$, $|\bar{z}| = |z|$. Каждое же значение $Arg\, \bar{z}$ отличается от любого значения $Arg\, z$, взятого с противоположным знаком, на значение, кратное 2π, что условно записывается в виде равенства $Arg\, \bar{z} = -Arg\, z$, при этом, если $z = a < 0$, то $\arg \bar{z} = \arg z = \pi$. Точки, изображающие сопряженные комплексные числа, расположены симметрично относительно действительной оси.

Еще одну форму представления комплексных чисел получим, приняв в качестве определения показательной функции от чисто мнимого независимого переменного выражение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (1.1.4)$$

где e=2.718281828… – основание системы натуральных логарифмов. Формулу (1.1.4) называют формулой Эйлера. Из нее следует показательная форма комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.1.5)$$

При этом $\bar{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Функция (1.1.4) обладает всеми свойствами показательной функции:

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}, \quad e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n, \; e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \Big/ e^{i\varphi_2}.$$

Пример 1. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 - i\sqrt{3}$, запишите его в тригонометрической форме.

Решение.

Точка z расположена в III четверти, $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $tg\varphi = \sqrt{3}$. Следовательно, $\varphi = Arg\, z = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$;

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

▲

§ 2. Действия над комплексными числами

При установлении правил действия над комплексными числами, прежде всего будем соблюдать правила умножения мнимой единицы на себя:

$$\begin{aligned} &i \cdot i = i^2 = -1, \quad i^2 \cdot i = i^3 = -i, \\ &i^3 \cdot i = i^4 = 1, \quad i^4 \cdot i = i^5 = i, \ldots \end{aligned} \qquad (1.2.1)$$

При выполнении действий над комплексными числами $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ естественно рассматривать их как обычные алгебраические многочлены и учитывать правила (1.2.1). Поэтому получаем

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

В частности, произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату их модуля: $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ или $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, а сумма – их удвоенной действительной части: $(a+ib) + (a-ib) = 2a$ или $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$.

Вычитание, как и для действительных чисел, есть действие, обратное сложению. Оно сводится к сложению с противоположным числом: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ или

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

В частности, разность двух сопряженных чисел есть чисто мнимое число: $z - \bar{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i \cdot \operatorname{Im} z$.

Иначе говоря, при сложении или вычитании комплексных чисел соответственно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части. Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию изображающих эти числа векторов (рис. 1.2).

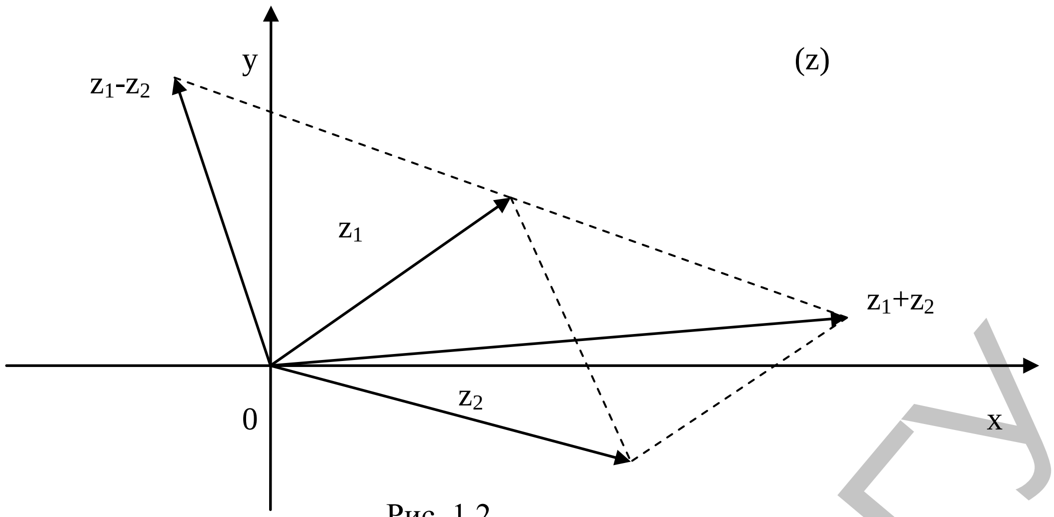

Рис. 1.2.

Но поскольку длина (модуль) суммы двух векторов не больше суммы длин слагаемых, то получаем весьма важное неравенство треугольника

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad (1.2.2)$$

которое равносильно неравенству

$$|z_1 - z_2| \ge \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|. \qquad (1.2.3)$$

Неравенство (1.2.2) допускает обобщение:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|. \qquad (1.2.4)$$

Знак равенства в соотношениях (1.2.2) – (1.2.4) имеет место тогда и только тогда, когда векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ коллинеарны и сонаправлены, т. е. $Arg\, z_1 = Arg\, z_2 = \cdots = Arg\, z_n$.

Деление, как и для действительных чисел, есть действие, обратное умножению. Оно сводится к умножению на обратное число. Число нуль обратного не имеет, поэтому делить можно только на комплексные числа, отличные от нуля.

Пусть даны комплексные числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2 \ne 0$. Понятие сопряженного числа позволяет построить число, обратное к z_2, которое традиционно обозначим z_2^{-1}:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_2 - ib_2}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_2 - ib_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - i\frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Таким образом, операция деления комплексных чисел сводится к умножению числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное к знаменателю, с последующей алгебраической формой записи полученного комплексного числа.

Как видим, выполнение операций умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме сопряжено с относительно громоздкими вычислениями. Гораздо проще эти операции выполняются, если числа записаны в тригонометрической форме (1.1.3).

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда при умножении получаем

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Точно так же при делении получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad z_2 \neq 0.$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|,$$
$$Arg(z_1 z_2 \dots z_n) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 + \dots + Arg\, z_n.$$

При делении двух комплексных чисел модуль частного равен отношению модулей, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z_2| > 0; \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2, \quad z_2 \neq 0.$$

Эти правила наиболее компактно записываются в показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 > 0.$$

Геометрически вектор $z = z_1 z_2$ получается из вектора z_1 поворотом на угол φ_2 и умножением его длины на длину вектора z_2.

В общем случае геометрическое выполнение умножения или деления комплексных чисел довольно сложно. Эти операции значительно упрощаются, когда приходится умножать или делить на комплексное число, модуль которого равен единице, т. е. на число вида $\cos\varphi + i\sin\varphi$, или в показательной форме $e^{i\varphi}$. Если $\varphi > 0$, то вектор $ze^{i\varphi}$ получается из вектора z поворотом на угол φ в положительном направлении (против хода часовой стрелки). Вектор $z/e^{i\varphi} = ze^{-i\varphi}$ получается из вектора z поворотом на угол $-\varphi$. В частности, вектор zi получается из вектора z поворотом его на угол $\pi/2$ в положительном направлении, а вектор *z(-i)* получается из вектора z поворотом последнего на угол $-\pi/2$.

Рассмотрим теперь возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ в натуральную степень *n*. Оно определяется обычным образом как произведение *n* сомножителей, равных *z*. При $z \neq 0$ по определению, полагают $z^0 = 1$ и $z^{-n} = (z^{-1})^n$. Таким образом, для любого целого показателя *m* имеем:

$$z^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = r^m e^{im\varphi}, \ z \neq 0, \tag{1.2.5}$$

т.е.

$$\left|z^m\right| = |z|^m, \quad Arg\, z^m = m\, Arg\, z, \quad z \neq 0.$$

Равенство (1.2.5) носит название формулы Муавра.

Корень $\sqrt[n]{0}$ для любого натурального *n* полагают равным нулю. Корнем $w = \sqrt[n]{z}$ из числа $z \neq 0$ называют всякое комплексное число *w* такое, что $w^n = z$. Обозначая $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho\, e^{i\psi}$ и используя равенство (1.2.5), имеем

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или

$$\rho^n \cos n\psi = r\cos\varphi, \ \rho^n \sin n\psi = r\sin\varphi.$$

Решая полученную систему уравнений относительно неизвестных ρ и ψ, получим

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

т. е. приходим к формуле

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), z \neq 0, \quad . \tag{1.2.6}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Для всякого комплексного числа $z \neq 0$ получается *n* различных между собой значений корня при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Остальные значения *k* ничего нового не дают. Все *n* точек $\sqrt[n]{z}$ образуют вершины правильного *n*-угольника, радиус описанного круга которого равен $\sqrt[n]{|z|}$, а одна из вершин имеет аргумент φ/n; эти данные полностью определяют правильный *n*-угольник, и, следовательно, мы получаем графический способ построения всех *n* значений корня из комплексного числа *z*.

Пример 2. Найти все решения уравнения $z^4+1=0$.

Решение.

Так как $z^4=-1$, то представим число (-1) в тригонометрической форме, а затем извлечем из него корень четвертой степени, применив формулу (1.2.6):

$$-1=|-1|(\cos\pi+i\sin\pi)=\cos\pi+i\sin\pi,$$

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

Таким образом,

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

▲

Замечание . Операция нахождения сопряженного комплексного числа перестановочна с арифметическими действиями

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2};$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\quad z_2\neq 0,\quad (\overline{z^m})=(\bar{z})^m.$$

Отсюда следует, что если $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n$ – многочлен с действительными коэффициентами, то $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$, а значит, если z_0 – корень этого многочлена, то и $\overline{z_0}$ – его корень.

Лекция 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Стереографическая проекция

В предыдущей лекции мы каждое комплексное число $z = x + iy$ представляли как точку *(x, y)* комплексной плоскости С. Если *z* изменяется, подчиняясь тем или иным условиям, то мы имеем дело с комплексным переменным. Всем значениям комплексного переменного $z = x + iy$, где $-\infty < x, y < +\infty$, взаимно однозначно соответствует совокупность всех точек плоскости С, которую называют плоскостью комплексного переменного *z*.

Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между двумя точками плоскости комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ находится по известной из аналитической геометрии формуле

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = | z_1 - z_2 |. \qquad (2.1.1)$$

Иначе еще говорят, что формула (2.1.1) определяет метрику на плоскости С. Пользуясь (2.1.1), можно записать, например, уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке z_0:

$$| z - z_0 | = R, \qquad (2.1.2)$$

а внутренность круга с центром z_0 радиуса R записывается в виде неравенства

$$| z - z_0 | < R. \qquad (2.1.3)$$

Наряду с изображением комплексных чисел точками плоскости часто используют и другое: комплексные числа изображают точками на сфере. Пусть в трехмерном пространстве R^3 сфера *S* единичного радиуса касается плоскости С в точке $z = 0$ и P − диаметрально противоположная ей точка. Каждой точке *z* плоскости С поставим в соответствие точку *M(z)*, которая является точкой пересечения луча *Pz* со сферой. Таким образом, между точками сферы *S* и точками плоскости С можно установить взаимно однозначное соответствие, если дополнить плоскость символической точкой $z = \infty$, которой в соответствие будем ставить полюс − точку *P*. Построенное соответствие называется стереографической проекцией (рис. 2.1).

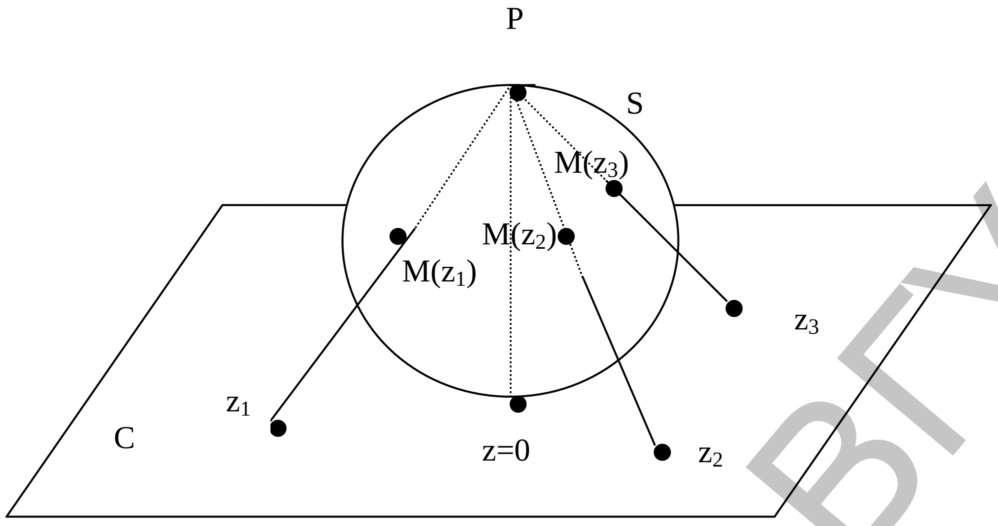

Рис. 2.1.

Определение 2.1.1. Комплексная плоскость C с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой называется расширенной комплексной плоскостью и обозначается $\overline{C}$.

Определение 2.1.2. Сфера, на которой изображены точки комплексной плоскости, включая и бесконечно удаленную точку, называется сферой Римана.

Стереографическая проекция показывает целесообразность введения бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для нее понятия действительная часть, мнимая часть, аргумент не вводятся, а объявляются лишенными смысла.

По определению устанавливается смысл следующих операций:

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

Выражения

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty$$

считаются неопределенными.

С помощью формул, устанавливающих связь координат точек плоскости и сферы, можно доказать, что при стереографической проекции окружность на C переходит в окружность на *S*, а прямая на C переходит в окружность, проходящую через полюс *P*. Из этих соображений мы не будем делать различия между прямыми и окружностями на плоскости. Условимся понимать под окружностью $\overline{C}$. Прямые мы будем включать в семейство окружностей, проходящих через бесконечно удаленную точку. Окружность на C − окружность в собственном смысле.

§ 2. Окрестности точек, области, кривые

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное действительное число.

Определение 2.2.1. ε – окрестностью точки $z_o \in C$ называется внутренность круга радиуса ε с центром в точке z_o, т.е. $|z - z_0| < \varepsilon$ или $\rho(z, z_0) < \varepsilon$.

Уменьшая число ε>0, мы выделяем все более близкие к z_0 точки плоскости *C*.

Определение 2.2.2. Под ε– окрестностью точки $z = \infty$ понимают внешность круга с центром в начале координат радиуса ε, т.е. $|z| > \varepsilon$.

При рассмотрении некоторых вопросов удобно пользоваться понятием проколотой окрестности точки.

Определение 2.2.3. Проколотой ε–окрестностью точки $z_o \in C$ называется внутренность круга радиуса ε с центром в точке z_o с выброшенным центром, т.е. $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Неравенство $\varepsilon < |z| < \infty$ характеризует проколотую окрестность бесконечно удаленной точки.

Определение 2.2.4. Множество $M \subset C$ называется открытым, если наряду с любой точкой $z_0 \in M$ ему также принадлежит и некоторая ее окрестность.

Например, внутренность круга $|z - z_0| < R$ является открытым множеством, т.к. для всякой его точки z_1 окрестность $|z - z_0| < R - |z_1 - z_0|$ принадлежит этому множеству:

$$|z - z_0| = |z - z_0 \pm z_1| \le |z - z_1| + |z_1 - z_0| < R - |z_1 - z_0| + |z_1 - z_0| = R.$$

Определение 2.2.5. Множество $M \subset C$ называется связным, если всякие две его точки можно соединить непрерывной кривой, не выходя за пределы множества.

Определение 2.2.6. Множество $D \subset \overline{C}$ называется областью, если оно является открытым и связным.

Определение 2.2.7. Граничной точкой области *D* называется точка, в любой окрестности которой есть точки как принадлежащие, так и непринадлежащие области *D*.

Определение 2.2.8. Множество всех граничных точек области *D* называется ее границей и обозначается ∂D.

Определение 2.2.9. Область *D*, дополненная граничными точками, т.е. $D \cup \partial D$, называется замыканием области *D* и обозначается $\overline{D}$.

Кривые на комплексной плоскости $\overline{C}$ задаются с помощью непрерывной комплексной функции $z = \gamma(t)$ некоторого действительного параметра $t \in [\alpha, \beta]$ (образ отрезка при некотором непрерывном отображении). Задание комплексной функции $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ равносильно заданию двух действительных функций *x(t)* и *y(t)* от *t*, т. е., по существу, мы имеем дело с параметрическим заданием кривой. Точка $a = \gamma(\alpha)$ является ее началом, а $b = \gamma(\beta)$ − концом.

Определение 2.2.10. Кривая γ называется спрямляемой, если почти всюду на $[\alpha, \beta]$ существует ее производная $\gamma^{'}(t)$, причем она абсолютно интегрируема по Лебегу, т. е. существует интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left|\gamma^{'}(t)\right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left| x(t) + iy(t) \right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2}\, dt,$$

другими словами, спрямляемая кривая − это такая кривая, которая имеет конечную длину.

Определение 2.2.11. Кривая γ называется гладкой, если ее уравнение можно записать в виде $z = \gamma(t)$, причем $\gamma^{'}(t) \in C[\alpha, \beta], \quad \gamma^{'}(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Определение 2.2.12. Кривая γ называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Определение 2.2.13. Кривая γ называется жордановой, если отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to \overline{C}$ взаимно однозначно и непрерывно.

Определение 2.2.14. Область *D* комплексной плоскости называется односвязной, если ее граница ∂D является связным множеством, в противном случае область называется многосвязной. Число связных компонент границы называется порядком связности, если число таких компонент бесконечно, то область называется бесконечно связной.

Замечание 1. В односвязной области любую замкнутую (непрерывную) кривую (или замкнутый контур) можно непрерывно деформировать в точку, не выходя за пределы этой области.

2. Характер связности области *D* может измениться в зависимости от того, рассматривается ли *D* как область конечной комплексной плоскости C или как область расширенной плоскости $\overline{C}$. Например, пусть область $D = \{z \in C : |z| > r, r > 0\}$ − внешность круга радиуса *r*. Если $D \subset C$, то она является многосвязной (двухсвязной) областью, если же $D \subset \overline{C}$, то это односвязная область.

3. Кривая $z = \gamma(t),\ \alpha \le t \le \beta$ является замкнутой и простой, если $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, и она не имеет точек самопересечения, т. е. $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Всякая простая замкнутая непрерывная кривая разбивает расширенную плоскость $\overline{C}$ на две односвязные области D^+ − внутренность кривой и D^- − внешность кривой, $\infty \in D^-$.

§ 3. Последовательности комплексных чисел

Будем рассматривать числовые последовательности $\{z_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$.

<u>Определение 2.3.1.</u> Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число M>0, что $|z_n| \le M$ для всех номеров n, т.е. все члены последовательности расположены в замкнутом круге радиуса M с центром в начале координат.

Определение предела последовательности комплексных чисел дословно повторяет таковое для действительных чисел.

<u>Определение 2.3.2.</u> Число A называется пределом числовой последовательности $\{z_n\}$, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что все члены последовательности z_n с номерами $n > N$ попадают в ε –окрестность точки A. Используя логические символы, это определение можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \quad |z_n - A| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, и это записывают в виде $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, что также эквивалентно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - A| = 0$. Ясно, что каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

<u>Теорема 2.3.1.</u> Для того чтобы существовал предел последовательности комплексных чисел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A = \alpha + i\beta$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела действительных чисел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

<u>Доказательство.</u>

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - A| = 0$, то из неравенств $|x_n - \alpha| \le |z_n - A|$ и $|y_n - \beta| \le |z_n - A|$ следует существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$. Обратное утверждение следует из неравенства

$$|z_n - A| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} \le$$
$$\le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|.$$

▲

Теорема показывает, что для сходящихся последовательностей комплексных чисел справедливы свойства, присущие сходящимся последовательностям действительных чисел.

Теорема 2.3.2. Если последовательности $\{z_n\}\, u\, \{w_n\}$ комплексных чисел таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = B$, то сходятся также и числовые последовательности $\{z_n \pm w_n\}$, $\{z_n w_n\}$ и справедливы равенства:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n = A \pm B,$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(z_n w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n = AB$, а если к тому же $B \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}(z_n / w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \,/ \lim_{n\to\infty} w_n = A/B.$$

Теорема 2.3.3. (критерий Коши). Для того чтобы последовательность $\{z_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall m,\ n > N \Rightarrow \quad |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Из теоремы 2.3.1 следует, что сходящаяся последовательность является ограниченно.й, однако не всякая ограниченная последовательность сходится, в чем нас убеждает пример последовательности $z_n = (-1)^n$. В связи с этим справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.4 (Больцано–Вейерштрасс). Из любой ограниченной последовательности $\{z_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

Из неравенства $|z_n| \leq M$ следуют два неравенства: $|x_n| \leq M$, $|y_n| \leq M$. Для ограниченных последовательностей действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ теорема Больцано-Вейерштрасса верна и, следовательно, из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности, соответственно $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$, и $\{y_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \beta$. А по теореме 2.3.1 $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \alpha + i\beta$.

▲

Замечание. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$, поскольку $\big||z_n| - |A|\big| \leq |z_n - A|$.

Лекция 3

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Однозначные функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного является частным случаем общего понятия функции в математическом анализе.

Определение 3.1.1. Говорят, что на множестве $D \subset \overline{C}$ определена функция *f*, если задан закон, по которому каждой точке $z = x + iy \in D$ поставлено в соответствие комплексное число $w = u + iv$ (конечное или бесконечное), $w = f(z)$. Совокупность точек *w*, соответствующих всевозможным значениям $z \in D$, обозначим D^*, и будем говорить, что $f : D \to D^*$.

Наиболее важным является случай, когда любым различным точкам множества *D* соответствуют различные значения функции, т.е. из того, что $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$. В этом случае отображение $f : D \to D^*$ называют однозначным или однолистным.

Ранее введенные величины $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ являются однозначными функциями комплексного переменного *z*, но значения этих функций являются действительными.

Ясно, что характер поведения функции комплексного переменного нельзя проиллюстрировать графически в декартовой системе координат, как в случае действительных функций действительного переменного. Для выяснения геометрического смысла функции комплексного переменного $w = f(z)$ наряду с плоскостью $z=x+iy$ рассмотрим еще одну плоскость комплексного переменного $w=u+iv$ с действительной частью *u* и мнимой частью *v*. Функция $w = f(z)$ каждой точке $z=x+iy$ с координатами *x* и *y* ставит в соответствие вполне определенную точку $w=u+iv$ с координатами *u* и *v*. Когда точка *z* пробегает область *D* на плоскости *z*, соответствующая ей точка *w* пробегает на плоскости *w* некоторую другую область (или некоторое множество) D^*.

Таким образом, геометрический смысл однозначной функции комплексного переменного $w = f(z)$ состоит в том, что она отображает область *D* на область D^*, т.е. каждой точке $z \in D$ ставит в соответствие точку $w \in D^*$.

Пусть, например, $w = z^2$; в качестве области *D* на плоскости $z = re^{i\varphi}$ рассмотрим четверть единичного круга:

$$D = \{z : 0 < r = |z| < 1,\ 0 < \varphi < \pi/2\}.$$

Чтобы выяснить вид соответствующей области D^*, будем обходить границу области *D*, начиная от точки *z=0*, в положительном направлении и установим, во что переходит эта граница на плоскости $w = \rho e^{i\theta}$.

$w = z^2 \Leftrightarrow \rho e^{i\theta} = r^2 e^{i(2\varphi)} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^2 \\ \theta = 2\varphi \end{cases}$. Отсюда следует, что отрезок действительной оси $0 \le r \le 1$, $\varphi = 0$ плоскости *z* перейдет в отрезок $0 \le \rho \le 1$, $\theta = 0$ действительной оси плоскости *w*; далее, четверть окружности $r = 1, 0 \le \varphi \le \pi / 2$ перейдет в полуокружность $\rho = 1, 0 \le \theta \le \pi$ и, наконец, отрезок мнимой оси $0 \le r \le 1, \varphi = \pi / 2$ перейдет в отрезок $0 \le \rho \le 1, \theta = \pi$ отрицательной действительной полуоси плоскости *w*. Каждая внутренняя точка *z* четверти круга *D* перейдет во внутреннюю точку полученного полукруга D^* на плоскости *w*, при этом весь полукруг будет заполнен образами точек *z* полностью без «дыр».

О смысле функции $w = f(z) = u + iv$ можно подойти и с несколько другой стороны. Задание такой функции в области $D \subset \overline{C}$ равносильно заданию в ней пары действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ независимых переменных *x* и *y*. В примере, рассмотренном выше, эти функции имеют вид $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$.

Введем теперь понятие предела функции в точке. Пусть в содержащей точку $z_0 = x_0 + iy_0$ области $D \subset \overline{C}$ всюду определена функция $w = f(z)$, исключая, быть может, саму точку z_0.

<u>Определение 3.1.2.</u> Число $A = \alpha + i\beta$ называется пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$, что для всех точек δ-окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon. \qquad (3.1.1)$$

Другими словами неравенство (3.1.1) должно выполняться во всех точках проколотой δ-окрестности точки z_0. Символически определение предела функции в точке записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 \ : \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Введенное определение предела формально ничем не отличается от определения предела для функций действительных переменных, и поэтому такие известные теоремы, как теоремы о пределе суммы, произведения, частного и т. д., сохраняют свою силу и для функций комплексного переменного. Остаются и те же обозначения:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = \alpha + i\beta. \qquad (3.1.2)$$

Равенство (3.1.2) эквивалентно двум действительным предельным равенствам

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = \beta, \qquad (3.1.3)$$

в которых фигурируют пределы действительных функций двух независимых переменных x и y. Понятия бесконечно малой и бесконечно большой (по модулю) функции со всеми их свойствами также сохраняют силу для функций комплексного переменного.

Иногда приходится определять предел функции $w = f(z)$ в граничной точке z_1 на кривой Γ, в то время как значения функции $f(z)$ известны только в области $D = D^+$, являющейся внутренней областью (или внешней областью $D = D^-$) замкнутой кривой Γ.

Определение 3.1.3. Число A называется пределом функции $w = f(z)$ в граничной точке z_1, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, z_1) > 0$, что для всех точек δ-окрестности точки z_1, принадлежащих области D, выполняется неравенство (3.1.1).

Здесь мы имеем дело с пределом функции по множеству $D = D^+$, аналогично определяется предел функции $f(z)$ в точке $z_1 \in \Gamma$, если функция задана во внешней области $D = D^-$.

Определение 3.1.4. Функция $w = f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется непрерывной в точке z_0, если выполняется предельное равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad (3.1.4)$$

Давая комплексному переменному z приращение $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$, мы тем самым получаем соответствующее ему приращение функции $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$, и тогда определение непрерывности функции $w = f(z)$ в точке z_0 можно понимать как выполнение предельного равенства

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z_0) = 0.$$

Непрерывность функции комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентна непрерывности двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух независимых действительных переменных x и y в точке (x_0, y_0).

Пример 1. Функция $w = z^2$ определена и непрерывна на всей комплексной плоскости, т.к.

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2,\; v(x, y) = \operatorname{Im} w = 2xy \;—$$

непрерывные функции двух действительных переменных x и y.

▲

Пример 2. Функция $w = \arg z$ (главное значение аргумента z) определена и однозначна для всех $z \neq 0$. Каждая точка отрицательной части действительной оси является для нее точкой разрыва. Действительно, если $z_0 = x_0 < 0$, то

$$\lim_{z \to x_0, y>0} \arg z = \lim_{z \to x_0, y>0} (x + iy) = \lim_{y \to 0, x \to x_0} (arctg\frac{y}{x} + \pi) = \pi,$$

но

$$\lim_{z \to x_0, y<0} \arg z = \lim_{z \to x_0, y<0} (x + iy) = \lim_{y \to 0, x \to x_0} (arctg\frac{y}{x} - \pi) = -\pi.$$

▲

Определение 3.1.5. Функция $w = f(z)$, определенная в области D, называется непрерывной в этой области, если она непрерывна в каждой точке области D.

Если функция $w = f(z)$ определена в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и во всех ее точках (внутренних и граничных) выполняется равенство (3.1.4), то говорят о непрерывности функции в замкнутой области.

§ 2. Многозначные функции комплексного переменного

До сих пор нами рассматривались однозначные функции комплексного переменного. Более того, если не оговаривается противное, то речь идет именно о таких функциях. Однако потребности теории и практики вынуждают рассматривать и многозначные функции комплексного переменного. Примером такой функции является функция $w = Arg\ z$, которая каждому значению $z \neq 0$, ставит в соответствие бесконечно много значений $Arg\ z$, которые отличаются друг от друга на значение, кратное 2π.

Определение 3.2.1. Функция $w = f(z)$, определенная в области D плоскости комплексного переменного, называется многозначной, если каждой точке $z \in D$ соответствует хотя бы одно значение переменного w, а некоторым точкам соответствуют несколько (быть может, и бесконечно много) значений функции.

Очевидно, что многозначную функцию $w = f(z)$ геометрически нельзя истолковать как отображение одной плоской области на другую плоскую область. При дополнительных условиях такие функции можно рассматривать как отображения областей на более сложных геометрических образах – римановых поверхностях.

Более простым методом исследования многозначных функций является выделение отдельных ветвей таких функций. Например, упоминавшаяся ранее многозначная функция $w = Arg\, z$ определена всюду, за исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$. Обычно выделяют одну из ее ветвей − главное значение этой функции $\arg z$ − как значение $Arg\, z$, удовлетворяющее условию $-\pi < Arg\, z \le \pi$. Полученная таким образом однозначная ветвь $\arg z$ также определена для всех z, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, но отрицательная действительная полуось $y = 0, -\infty < x \le 0$ является для нее линией разрыва. Выбросив из области определения функции $\arg z$ все точки отрицательной действительной полуоси, в полученной разрезанной плоскости будем иметь непрерывную однозначную функцию $\arg z$ − непрерывную ветвь функции $w = Arg\, z$.

Другим примером многозначной (двузначной) функции является функция $w = \rho e^{i\theta} = f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}}$, определенная всюду в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$; $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются для функции $f(z) = \sqrt{z}$ точками ветвления, в этих точках значения функции единственны, а в остальных точках $\sqrt{z}$ имеет 2 значения. Линию разреза между точками ветвления для выделения однозначных ветвей можно выбирать как угодно. Пусть, например, линия разреза выбрана по положительной действительной полуоси $y = 0, 0 \le x \le +\infty$. При этом слова «линия разреза» означают, что из плоскости $\overline{C}$ выброшены точки положительной действительной полуоси и функция рассматривается в разрезанной плоскости − односвязной области $D = \overline{C} \setminus \{ y = 0, 0 \le x < +\infty \}$. Одно из значений квадратного корня $f_1(z)$ в D получаем, полагая $0 < \varphi < 2\pi$. Значит

$$f_1(re^{i\varphi}) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

где $\sqrt{z}$ – арифметическое значение корня; этот выбор можно фиксировать указанием, что $f_1(-1) = i$. Ветвь $f_1(z)$ непрерывна и однозначна в D, она отображает эту область на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Граничные значения функции $f_1(z)$ на верхнем берегу разреза обозначаются

$$f_1(x + i0) = \sqrt{x},\ x > 0,$$

а на нижнем

$$f_1(x - i0) = -\sqrt{x},\ x > 0.$$

Вторую непрерывную однозначную ветвь $f_2(z)$ в области D получим, полагая $2\pi < \varphi < 4\pi$, согласно формуле (1.2.6):

$$f_2(z) = f_2(re^{i\varphi}) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad 2\pi < \varphi < 4\pi.$$

Этот выбор фиксируется тем, что $f_2(-1) = -i$. Ветвь $f_2(z)$ также непрерывна и однозначна в D и отображает ее на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$, а граничные значения имеют вид

$$f_2(x + i0) = -\sqrt{x}, \quad f_2(x - i0) = \sqrt{x}, \; x > 0.$$

Кроме однозначности и многозначности весьма важным является наличие у данной однозначной функции $w = f(z)$ однозначной обратной. В действительном анализе существование обратной для функции $f(x)$ обеспечивается монотонностью *f*. В комплексном же анализе это условие неприменимо.

Ясно, что если функция $w = f(z)$ является однолистной в D и отображает эту область на область D^*, то в D^* существует обратная функция $z = g(w)$, т.е. $z = g(f(z))$ для любого $z \in D$ и $w = f(g(w))$ для любого $w \in D^*$; другими словами, однолистная в области *D* функция $w = f(z)$ взаимно однозначно отображает эту область на область D^*. Рассмотренная ранее нами функция $w = f(z) = z^2$ определена всюду в $\overline{C}$, но не является однолистной в любой сколь угодно малой окрестности точки $z = 0$, т. к. $f(z_1) = z_1^2 = w_1$ и $f(-z_1) = (-z_1)^2 = w_1$. Поэтому и возникает необходимость в проведении разрезов для получения однозначных ветвей многозначной обратной функции $z = \sqrt{w}$.

Лекция 4

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Производная и дифференциал. Правила дифференцирования

Определение производной функции комплексного переменного формально ничем не отличается от такового для функций действительных переменных. Пусть однозначная функция $w = f(z) = u + iv$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(z_0;\delta) = \{ z : | z - z_0 | < \delta,\ \delta > 0 \}$ точки z_0. Рассмотрим всевозможные приращения

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y = (x - x_0) + i(y - y_0) \neq 0$$

независимого переменного z, причем $z = z_0 + \Delta z \in U$. Каждому приращению Δz соответствует приращение функции

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v.$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, то он называется производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 и обозначается

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (4.1.1)$$

Понятие дифференцируемости определяется точно также, как и для функций действительного переменного.

Определение 4.1.1. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если она определена в некоторой δ-окрестности этой точки $U = U(z_0;\delta)$ и ее приращение Δw можно представить в виде суммы линейной части относительно Δz и бесконечно малой высшего порядка по сравнению с Δz:

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z) = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z, \quad (4.1.2)$$

где число A не зависит от Δz, $\alpha(\Delta z)$ − бесконечно малая функция при $\Delta z \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$, а $o(\Delta z) = \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z$ − бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δz, т.е. $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$.

Имеет место следующая теорема, отражающая связь между дифференцируемостью функции в точке и наличием в ней производной.

Теорема 4.1.1. Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда она в этой точке имеет производную, причем $A = f'(z_0)$.

Доказательство.

Пусть функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке z_0, т.е. $\Delta w = \Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$, или $\Delta w / \Delta z = A + o(\Delta z) / \Delta z$. Переходя в нем к пределу при $\Delta z \to 0$, получаем, что $A = f'(z_0)$.

Пусть теперь $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w / \Delta z = f'(z_0) = A$, тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\Delta w / \Delta z - f'(z_0) \right) = 0$, т.е. $\Delta w / \Delta z - f'(z_0) = \alpha(\Delta z)$, где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$. Значит $\Delta w = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z = A \cdot \Delta z + o(\Delta z)$.

▲

Определение 4.1.2. Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то выражение $dw = df(z_0) = f'(z_0)dz$ называется дифференциалом функции f в точке z_0, причем $dz = \Delta z$.

Дифференциал является линейной, а если $f'(z_0) \neq 0$, то и главной частью приращения функции.

Замечание. Поскольку определение производной функции комплексного переменного фактически дословно повторяет таковое для функций действительных переменных, то для функций комплексного переменного сохраняются правила дифференцирования, справедливые для действительного анализа, например:

$$\left(f_1(z) \cdot f_2(z) \right)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z),$$

$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)},$$

$$\left(f^{-1}(z) \right)' = \frac{1}{f'(z)}.$$

§ 2. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного

Определения производной и дифференциала формально совпадают с соответствующими определениями действительного анализа. Однако требование дифференцируемости функции комплексного переменного оказывается по существу гораздо более жестким, чем для функций действительных переменных. Это вызвано тем, что точка

$z = z_0 + \Delta z$ может стремиться к точке z_0 по различным путям, а предел отношения приращения функции к приращению аргумента должен при этом оставаться одним и тем же. Даже простые функции комплексного переменного, имеющие непрерывные и непрерывно-дифференцируемые по x и y действительные и мнимые части, оказываются не дифференцируемыми по переменному $z = x + iy$. Как будет показано далее, существование у функции производной первого порядка обеспечивает без всяких других ограничений существование производных любого порядка.

Определение 4.2.1. Действительная функция *h(x,y)* двух действительных переменных называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если полное приращение этой функции в ней может быть представлено в виде:

$$\Delta h = B \cdot \Delta x + C \cdot \Delta y + o(\rho),$$
$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \;\; B = \partial h / \partial x, \quad C = \partial h / \partial y \qquad (4.2.1)$$

Теорема 4.2.1. Пусть функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Для того чтобы она была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы функции *u(x,y)* и *v(x,y)* были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и чтобы в этой точке выполнялись условия Коши − Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4.2.2)$$

Доказательство.

Установим сначала необходимость утверждения теоремы. Пусть $\Delta w = \Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = f'(z_0) \cdot \Delta z + o(\Delta z)$, причем $f'(z_0) = A_1 + iA_2$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $o(\Delta z) = o_1(\Delta z) + io_2(\Delta z)$. В последнем равенстве $o_1(\Delta z)$ и $o_2(\Delta z)$ представляют собой действительные бесконечно малые величины более высокого порядка, чем Δz при $\Delta z \to 0$. Обозначим их просто o_1 и o_2. Тогда будем иметь

$$\Delta u + i\Delta v = (A_1 \cdot \Delta x - A_2 \cdot \Delta y + o_1) + i(A_2 \cdot \Delta x + A_1 \cdot \Delta y + o_2) \qquad (4.2.3)$$

или

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x - A_2 \cdot \Delta y + o_1, \quad \Delta v = A_2 \cdot \Delta x + A_1 \cdot \Delta y + o_2, \qquad (4.2.4)$$

т.е. функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0), но тогда

$A_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $A_2 = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $A_1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $A_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$, и выполняются условия (4.2.2).

Установим теперь достаточность условий теоремы. Пусть теперь функции u и v дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполняются условия (4.2.2). Тогда справедливы равенства (4.2.4), а значит и (4.2.3), т.е.
$\Delta w = \Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = (A_1 + iA_2)\cdot\Delta z + o_1 + io_2 = A\cdot\Delta z + o(\Delta z)$, что означает дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке z_0.

▲

Замечание. 1. На основании теоремы 4.2.1 производную функции комплексного переменного можно вычислять по любой из формул

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (4.2.5)$$

2. Условия Коши−Римана являются необходимыми, но не достаточными для дифференцирования функций комплексного переменного.

3. Условия Коши−Римана были получены для случая, когда действительная и мнимая части функции зависели от декартовых координат точки плоскости. В случае, когда функции u и v зависят от полярных координат, то заменой переменных можно получить условия Коши−Римана в полярных координатах. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и функция $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ задана в полярных координатах. Тогда условия Коши−Римана принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \qquad (4.2.6)$$

так что

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Так как определения производной для функций комплексного и действительного переменного формально совпадают, то правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции остаются в силе. Убедиться в дифференцируемости той или иной однозначной функции комплексного переменного можно либо непосредственно по определению, либо по теореме 4.2.1. Например, функция $w = e^z = e^x\cos y + ie^x\sin y$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$$

и условия Коши − Римана (4.2.2) выполняются при любых $z \in C$. По формуле (4.2.5) находим

$$(e^z)' = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z, \ \forall z \in C.$$

Определение 4.2.2. Однозначная функция $w = f(z)$ комплексного переменного *z*, дифференцируемая не только в самой точке z_0, но и в некоторой окрестности этой точки, называется аналитической в точке z_0.

Замечание. Аналитичность функции в точке является более сильным требованием, чем дифференцируемость в точке. Функция *f*(*z*), аналитическая в точке z_0, обязательно окажется аналитической в каждой точке некоторой окрестности точки z_0.

Определение 4.2.3. Функция $w = f(z)$, аналитическая в каждой точке области *D*, называется регулярной или голоморфной в этой области.

К примеру, ветви $f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ и $f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, где $0 < \varphi < 2\pi$, двузначной функции $w = \sqrt{z}$ регулярны в разрезанной плоскости $D = \overline{C} \setminus \{ y = 0, 0 \le x < +\infty \}$, т.к. для их действительной и мнимой частей $u = \pm\sqrt{r}\cos(\varphi/2)$ и $v = \pm\sqrt{r}\sin(\varphi/2)$ в *D* выполняются условия (4.2.2), причем

$$\left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad z \in D.$$

Аналитические функции являются наиболее важными как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Лекция 5

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПОНЯТИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного

Как отмечалось ранее, линия Γ на плоскости комплексного переменного *z=x+iy* записывается с помощью параметрического уравнения

$$\Gamma:\ z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \qquad (5.1.1)$$

что эквивалентно двум действительным параметрическим уравнениям

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Производная комплексной функции *z=z(t)* действительного параметра t при $t = t_0$, $\alpha < t_0 < \beta$ определяется как предел:

$$\begin{aligned} z'(t_0) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t} + i\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t} = \\ &= x'(t_0) + iy'(t_0) \end{aligned}. \qquad (5.1.2)$$

Из (5.1.2) видно, что если производная $z'(t_0)$ существует и $z'(t_0) \ne 0$, то этот комплексный вектор направлен по касательной к кривой Γ в точке $z_0 = z(t_0) = x(t_0) + iy(t_0)$.

Пусть $w = f(z)$ − регулярная функция в некоторой точке z_0, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \ne 0$. При этом каждая точка *z* окрестности точки z_0 отображается в некоторую точку *w* окрестности точки w_0. Проведем через точку z_0 две пересекающиеся в ней гладкие кривые $\Gamma_1 : z = z(t)$ и $\Gamma_2 : \hat z = \hat z(\hat t)$. Пусть точка z_0 соответствует значениям t_0 и $\hat t_0$ параметров t и $\hat t$, т.е. $z_0 = z(t_0)$ и $z_0 = \hat z(\hat t_0)$. При отображении $w = f(z)$ эти кривые перейдут на плоскости w в некоторые кривые $\Pi_1 : w = w(t) = f(z(t))$ и $\Pi_2 : \hat w = \hat w(\hat t) = f(\hat z(\hat t))$, которые будут проходить через точку w_0. При этом $w_0 = w(t_0) = f(z_0)$ и $w_0 = \hat w(\hat t_0) = f(z_0)$. Векторы производных $z'(t_0)$ и $\hat z'(\hat t_0)$ направлены по касательным к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке z_0, а векторы $w'(t_0)$ и $\hat w'(\hat t_0)$ − по касательным соответственно к кривым Π_1 и Π_2 в точке w_0 (рис. 5.1). Тогда будем иметь

$$w'(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0),$$

$$\hat w'(\hat t_0) = f'(\hat z(\hat t_0))\hat z'(\hat t_0) = f'(z_0)\hat z'(\hat t_0),$$

а также

$$dw(t_0) = w'(t_0) \cdot dt = f'(z_0) z'(t_0) \cdot dt = f'(z_0) \cdot dz(t_0),$$
$$d\hat{w}'(\hat{t}_0) = \hat{w}'(\hat{t}_0) \cdot dt = f'(z_0) \hat{z}'(\hat{t}_0) \cdot dt = f'(z_0) \cdot d\hat{z}(\hat{t}_0).$$

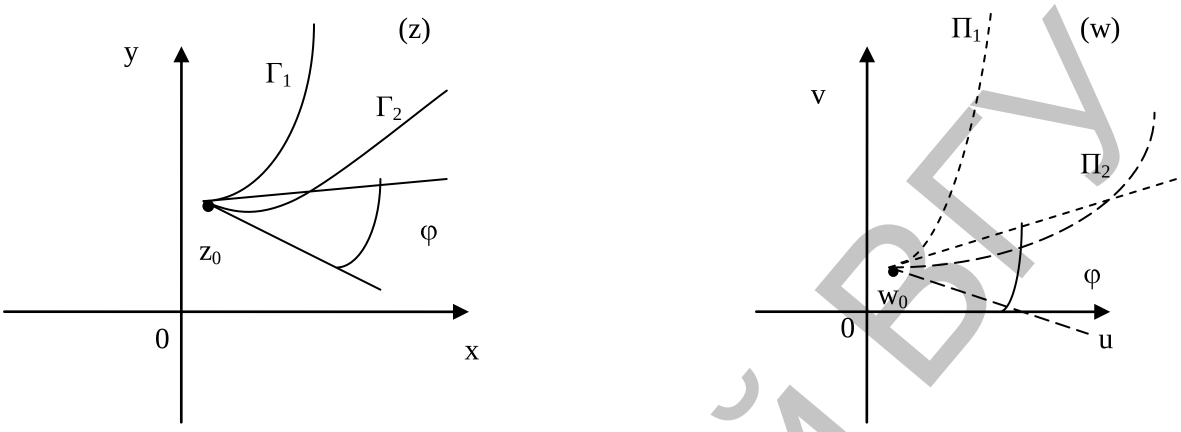

Рис. 5.1.

Теперь мы можем сформулировать теоремы, позволяющие выяснить геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции.

<u>Теорема 5.1.1.</u> При отображении с помощью аналитической функции $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ отношение модуля $|dw|$ дифференциала dw для образа П кривой Г к модулю $|dz|$ дифференциала dz для самой кривой Г постоянно в точке z_0 для всех кривых и равно модулю производной $|f'(z_0)| > 0$.

<u>Доказательство.</u>

Принимая рассуждения, приведенные выше, имеем

$$\frac{|dw(t_0)|}{|dz(t_0)|} = \frac{|f'(z_0) \cdot dz(t_0)|}{|dz(t_0)|} = |f'(z_0)|$$

и

$$\frac{|d\hat{w}(\hat{t}_0)|}{|d\hat{z}(\hat{t}_0)|} = \frac{|f'(z_0) \cdot d\hat{z}(\hat{t}_0)|}{|d\hat{z}(\hat{t}_0)|} = |f'(z_0)|.$$

Поскольку кривые Г и П произвольны, это и доказывает теорему.

▲

<u>Замечание 1.</u> Теорема показывает, что все бесконечно малые элементы кривых, проходящих через точку z_0 при отображении $w = f(z)$, будут подвергаться преобразованию подобия с коэффици-

ентом $k = \left| f'(z_0) \right| > 0$. Модуль производной характеризует искажение кривых при отображении $w = f(z)$. Говорят еще, что отображение с помощью аналитической функции, производная которой отлична от нуля, обладает свойством постоянства искажений.

Теорема 5.1.2. При отображении с помощью аналитической функции $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, угол поворота всех бесконечно малых векторов в точке z_0 равен $Arg\, f'(z_0)$, а углы между кривыми в точке z_0 сохраняются.

Доказательство.

Угол между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке z_0 − это угол (отсчитываемый против хода часовой стрелки) $\alpha = Arg\, d\hat{z}(\hat{t}_0) - Arg\, dz(t_0)$, а угол между кривыми Π_1 и Π_2 в точке w_0 есть

$$\beta = Arg\, d\hat{w}(\hat{t}_0) - Arg\, dw(t_0) = \left(Arg\, f'(z_0) + Arg\, d\hat{z}(\hat{t}_0)\right) -$$
$$- \left(Arg\, f'(z_0) + Arg\, dz(t_0)\right) = Arg\, d\hat{z}(\hat{t}_0) - Arg\, dz(t_0) = \alpha .$$

Для всех векторов имеем

$$Arg\, dw(t_0) = Arg\, f'(z_0) + Arg\, dz(t_0),$$

т.е. все векторы $dz(t_0)$ поворачиваются на один и тот же угол $Arg\, f'(z_0)$.

▲

Замечание 2. Из доказательства видно, что сохраняются не только углы между кривыми и их образами, но и направление отсчета. Таким образом, отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ обладает свойством консерватизма углов между кривыми (любыми двумя, проходящими через точку z_0).

Определение 5.1.1. Взаимно однозначное отображение одной плоской области D на другую плоскую область D^* называется конформным, если оно осуществляется с помощью непрерывной функции $w = f(z)$, и величины углов между кривыми в каждой точке сохраняются.

Если сохраняется и направление отсчета углов, то говорят о конформном отображении первого рода, если же направление отсчета углов меняется на противоположное, то говорят о конформном отображении второго рода.

Определение 5.1.2. Если отображение $w = f(z)$ непрерывно в окрестности точки z_0 и сохраняет величины углов в самой точке z_0, то оно называется конформным в точке z_0.

Таким образом, в теореме 5.1.2 установлено, что аналитическая в точке функция с отличной от нуля производной в ней осуществляет конформное отображение (первого рода) в этой точке. Простейшим примером конформного отображения 2-го рода является отображение с помощью функции $w = f(z) = \overline{z}$. Легко показать, что всякая функция, значения которой сопряжены с аналитической функцией, имеющей отличную от нуля производную, дает пример конформного отображения 2-го рода.

§ 2. Действительная и мнимая части аналитической функции. Гармонические функции

Далее будет показано, что из аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области $D \subset \overline{C}$, т.е. из одного факта существования только первой производной $f'(z)$ в *D* следует, что функция *f(z)* имеет производные любого порядка. Отсюда следует бесконечная дифференцируемость *u(x, y)* и *v(x, y)* – действительной и мнимой частей аналитической функции $f(z)$ в области *D*.

Замечание. Не всякая действительная функция двух действительных переменных, бесконечно-дифференцируемая в области, может служить действительной (или мнимой) частью некоторой аналитической функции.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области $D \subset \overline{C}$. Тогда ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши-Римана, которые в *D* превращаются в тождества:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.2.1}$$

Поскольку функции *u=u(x, y)* и *v=v(x, y)* бесконечно дифференцируемы, то они обладают непрерывными частными производными второго порядка. Дифференцируя первое из тождеств (5.2.1) по *x*, а второе по *y* и замечая, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

получим, складывая почленно два результата:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогичное уравнение получим и для функции *v(x, y)*, если продифференцируем первое из тождеств (5.2.1) по *y*, а второе по *x* и затем вычтем второе равенство из первого:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Является дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка. Оно называется уравнением Лапласа, а функции, обладающие в некоторой области непрерывными частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющие этому уравнению,— гармоническими функциями.

Итак, можно утверждать, что действительная и мнимая части функции комплексного переменного, аналитической в некоторой области, являются функциями, гармоническими в той же области.

Например, функция $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$ является аналитической во всей плоскости. Ее действительная часть $u(x, y) = x^2 - y^2$ и мнимая часть $v(x, y) = 2xy$ являются гармоническими функциями во всей плоскости.

Определение 5.2.1. Две гармонические функции — действительная и мнимая части некоторой аналитической функции — называются сопряженными гармоническими функциями.

Если теперь $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$— произвольные действительные гармонические в некоторой области функции, то функция $F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, вообще говоря, не будет аналитической в области, так как условия Коши–Римана довольно жестко связывают действительную и мнимую части аналитической функции.

Оказывается, что если в области D задана произвольная действительная гармоническая функция $\varphi(x, y)$, то можно найти сопряженную функцию $\psi(x, y)$ такую, что функция $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ будет аналитической в области D.

Теорема 5.2.1. Всякая гармоническая в односвязной области функция может служить действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.

Доказательство.

Пусть $\varphi(x, y)$— гармоническая (и однозначная) функция в данной односвязной области D. Найдем в этой области аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ такую, что $u(x, y) = \varphi(x, y)$. Для отыскания мнимой части $v(x, y)$ используем уравнения Коши–Римана (5.2.1):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y) .$$

Функции $P(x, y) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $Q(x, y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ являются непрерывными в области D и обладают в ней непрерывными частными производными первого порядка (последние выражаются через частные производные второго порядка от $\varphi(x, y)$). При этом выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (5.2.2)$$

согласно которому криволинейный интеграл $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от вида пути, соединяющего в области D точки (x_0, y_0) и (x, y). Поэтому он представляет собой однозначную функцию переменной точки (x, y). Положим $\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, тогда функция $\psi(x, y)$ будет иметь те же частные производные, что и искомая функция v:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q = \frac{\partial v}{\partial y},$$

А это в свою очередь означает, что искомая функция *v(x, y)* может отличаться от $\psi(x, y)$ только на действительную постоянную *C*, т.е.

$$v(x, y) = \psi(x, y) + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C. \quad (5.2.3)$$

Вычисляя *v(x, y)* по формуле (5.2.3), будем иметь две дифференцируемые в области *D* функции $u = \varphi(x, y)$ и $v = \psi(x, y) + C$, связанные уравнениями Коши–Римана. Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) + iC$ поэтому будет аналитической в области *D*.

▲

Замечание. 1. Аналитическая функция определяется по своей действительной части с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Аналогично, по своей мнимой части аналитическая функция определяется с точностью до действительного постоянного слагаемого.

2. Изложенный прием отыскания аналитической функции по ее действительной части применим и для случая многосвязной области. Но в этом случае интеграл $\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ при условии (5.2.2) представляет собой, вообще говоря, многозначную функцию точки *(x, y)*. Поэтому и функция $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) + iC$ может оказаться многозначной, хотя $\varphi(x, y)$, как и прежде, однозначная функция.

Лекция 6

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. Дробно-линейное отображение и его состав

Определение 6.1.1. Дробно-линейной функцией называют функцию вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{6.1.1}$$

где *a, b, c, d* − комплексные постоянные числа.

Будем рассматривать случай, когда $\Delta = ad - bc \neq 0$, ибо в случае $\Delta = 0$ будем иметь $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ или $a = \lambda c$, $b = \lambda d$, что дает $w = \lambda$ (λ − число). Рассмотрим отдельно частые случаи дробно-линейного преобразования.

I. *c=0*, ($a \neq 0$). Так как $\Delta \neq 0$, то и $d \neq 0$. В этом случае имеем линейную функцию

$$w = Az + B, \quad A = a/d,\ B = b/d. \tag{6.1.2}$$

Так как $w' = (Az+B)' = A \neq 0$, то отображение, осуществляемое линейной функцией, является конформным. При этом $z = \infty \to w = \infty$, т.е. бесконечно удаленная точка является неподвижной точкой этого отображения. Отображение (6.1.2) имеет также и конечную неподвижную точку $z_0 = B/(1-A)$, $A \neq 1$, которая находится из соотношения $Az_0 + B = z_0$.

При $A = 1$ отображение (6.1.2) не имеет конечной неподвижной точки и

$$w = z + B. \tag{6.1.3}$$

Кривая плоскости *z* переносится параллельно на вектор *B*.

При $B = 0$ и $|A| = 1$, т.е. $A = e^{i\theta}$, имеем

$$w = e^{i\theta} z, \tag{6.1.4}$$

$|w| = \left| e^{i\theta} z \right| = |z|$, $Arg\, w = Arg\,(e^{i\theta}) + Arg\, z = \theta + Arg\, z$. Это говорит о том, что преобразование (6.1.4) осуществляет поворот вокруг начала координат на угол θ.

При $B = 0$ и действительном *A*>0 (обозначим его через *k*) имеем преобразование

$$w = kz,\ k > 0, \tag{6.1.5}$$

$|w| = |kz| = k|z|$, $Arg\, w = Arg\, k + Arg\, z = Arg\, z$. Это значит, что точки z и w лежат на одном луче, выходящем из начала координат, другими словами, (6.1.5) осуществляет преобразование подобия с коэффициентом подобия, равным k.

Можно показать, что (6.1.2) является суперпозицией (6.1.3), (6.1.4) и (6.1.5). Пусть $A = ke^{i\theta}$, тогда $w = Az + B = ke^{i\theta}z + B$ и $w_1 = e^{i\theta}z$ (поворот), $w_2 = kw_1$ (подобие), $w = w_2 + B$ (параллельный перенос).

II. $a=d=0,\ b=c\neq 0$. В этом случае имеем функцию

$$w = 1/z \qquad (6.1.6)$$

Преобразование (6.1.6) можно представить в виде суперпозиции двух преобразований $w_1 = 1/z$ и $w = \overline{w_1}$. Последнее преобразование нами уже рассматривалось, так что рассмотрим детально $w_1 = 1/z$. Найдем модуль и аргумент w_1:

$$|w_1| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|} \text{ или } |w_1|\cdot|z| = 1,$$

$$Arg\, w_1 = Arg\, 1 - Arg\, \bar{z} = -Arg\, \bar{z} = Arg\, z.$$

Значит, точки z и w_1 лежат на одном луче, выходящем из начала координат, а произведение их расстояний от начала координат постоянно и равно единице. Преобразование, удовлетворяющее этим двум свойствам, называется преобразованием инверсии относительно единичной окружности с центром в начале координат. В случае, когда инверсия происходит относительно окружности радиуса R, то $|w_1|\cdot|z| = R^2$.

Таким образом, преобразование (6.1.6) представляет собой инверсию относительно единичной окружности с центром в начале координат и симметрию относительно действительной оси.

Выполним построение $z \to w$. Для этого рассмотрим 3 случая.

1) $|z| < 1$. Всякая точка z, которая лежит внутри единичного круга, переходит во внешность круга, а при преобразовании симметрии меняет полуплоскость. Внутренность единичного круга переходит во внешность (рис. 6.1, z-плоскость и w-плоскость будем считать совмещенными).

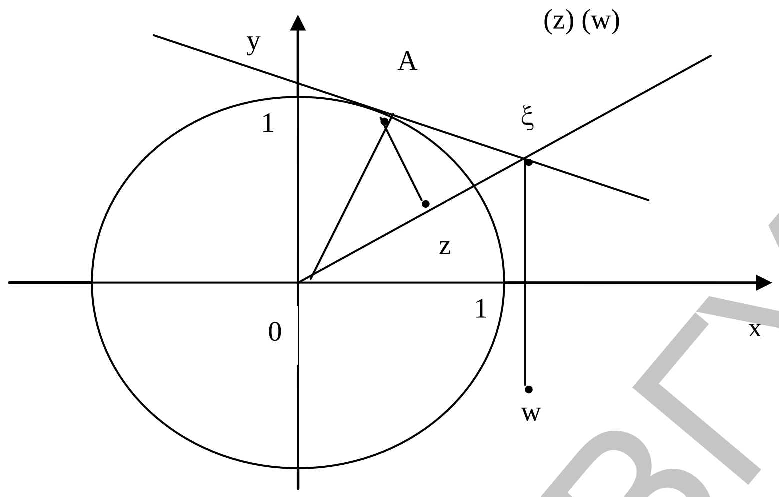

Рис. 6.1.

2) $|z| > 1$. Внешность единичного круга при преобразовании инверсии переходит во внутренность единичного круга, а преобразование симметрии меняет полуплоскости (рис. 6.2).

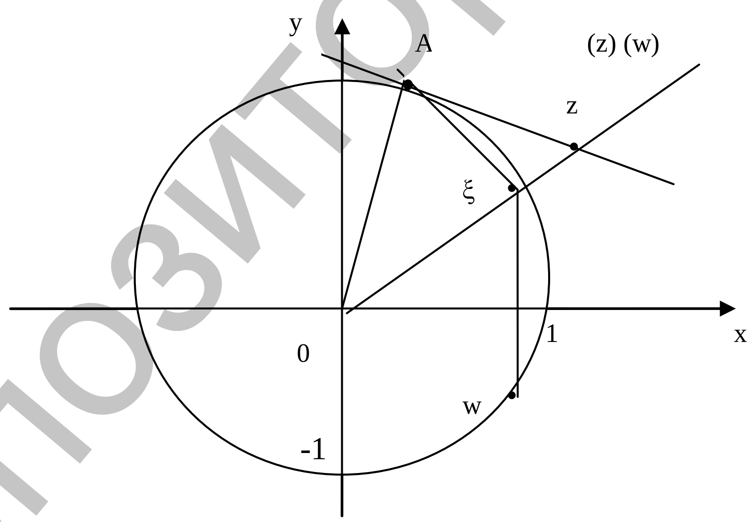

Рис. 6.2.

3) $|z| = 1$. Точки окружности переходят в точки окружности. Неподвижными точками при этом будут точки $z = \pm 1$ (рис. 6.3).

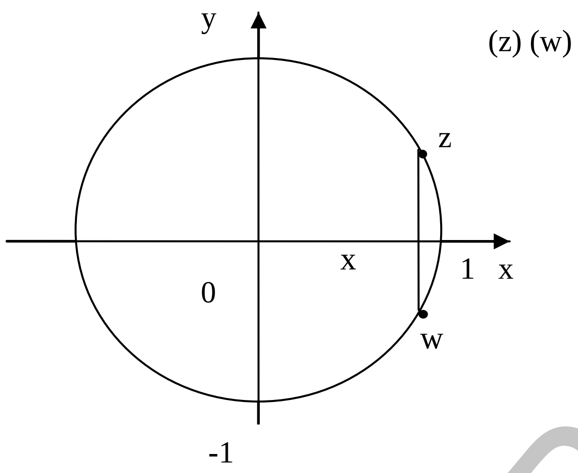

Рис. 6.3.

<u>Замечание.</u> К преобразованию $w = 1/z$ прибегают в случае, когда нужно изменить внешность единичной окружности на внутренность и наоборот.

Рассмотрим вопрос о конформности отображения, осуществляемого с помощью функции $w = 1/z$. Ее производная $w' = -1/z^2$, следовательно, отображение будет конформным всюду кроме, быть может, точек $z=0$ и $z=\infty$. Для выяснения конформности в точке $z=0$ нужно взять 2 кривые, проходящие через эту точку, зафиксировать угол между ними, и подействовать отображением w:

$$z = 0 \quad \to \quad w = \infty.$$

Определим угол на бесконечности так, чтобы отображение было конформным. Для этого будем считать углом между кривыми-образами угол между их прообразами в начале координат. Исследуя аналогичным образом точку $z = \infty$, ($z = \infty \quad \to \quad w = 0$) заключаем, что отображение $w = 1/z$ будет конформным в расширенной плоскости.

III. Рассмотрим теперь дробно-линейную функцию (6.1.1):

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ \Delta = ad - cb \neq 0,\ c \neq 0.$$

Разложим это преобразование на простейшие, выделив сначала целые части:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}.$$

Комплексное число $\frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$ и $\frac{bc-ad}{c^2} \neq \infty$, поэтому его можно записать в виде $\frac{bc-ad}{c^2} = ke^{i\theta}$, и тогда

$w=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}+k\cdot e^{i\theta}\cdot\dfrac{1}{z+{}^{d}\!/_{c}}$. Теперь мы можем определить состав дробно-линейной функции (6.1.1):

$w_1=z+{}^{d}\!/_{c}$ (параллельный перенос на вектор ${}^{d}\!/_{c}$);

$w_2={}^{1}\!/_{w_1}$ (инверсия относительно единичной окружности и симметрия относительно действительной оси);

$w_3=e^{i\theta}w_2$ (поворот вокруг начала координат на угол θ);

$w_4=kw_3$ (подобие с коэффициентом k и центром в начале координат);

$w=w_4+{}^{a}\!/_{c}$ (параллельный перенос на вектор ${}^{a}\!/_{c}$).

§ 2. Свойства дробно-линейного преобразования

Окружности бесконечно большого радиуса, которые рассматриваются в расширенной плоскости комплексного переменного – это прямые.

Теорема 6.2.1. Дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad-cb\neq 0$ и $c\neq 0$, осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение расширенной плоскости переменного z на расширенную плоскость переменного w.

Доказательство.

Ясно, что каждой точке z соответствует единственная точка $w=w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, при этом точка $z=\infty$ переходит в точку $w={}^{a}\!/_{c}$, а точка $z=-{}^{d}\!/_{c}$ переходит в точку $w=\infty$. Тот факт, что каждой точке w соответствует единственная точка z, следует из того, что обратная функция является также дробно-линейной:

$$w(cz+d)=az+b\quad\Rightarrow\quad z=\frac{-dw+b}{cw-a}\ \text{и}\ \Delta^{-1}=ad-bc=\Delta.$$

Так как в состав дробно-линейного отображения входят такие отображения, каждое из которых является конформным в расширенной плоскости комплексного переменного, то и их композиция также будет представлять конформное отображение в расширенной плоскости. ▲

Замечание. Отображения, осуществляемые из множества в самого себя, принято называть преобразованиями. Поэтому словосочетания «дробно-линейное отображение» и «дробно-линейное преобразование» означают одно и то же.

Теорема 6.2.2 (круговое свойство). Всякая дробно-линейная функция отображает окружность, расположенную на плоскости $\overline{C}$, в окружность на $\overline{C}$.

Доказательство.

Как известно, уравнение любой прямой или окружности в прямоугольных декартовых координатах можно представить в виде:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \qquad (6.2.1)$$

где A, B, C, D – действительные числа, причем $A^2+B^2+C^2\neq 0$. В частности, при A=0 получаем прямую линию.
Рассматривая состав дробно-линейного преобразования, нетрудно заметить, что параллельный перенос, поворот и подобие обладают круговым свойством. Покажем, что такое свойство относится и к преобразованию $w=1/z$. Так как $z=x+iy$, $w=u+iv$ и $w=1/z$, то $z=1/w$ или

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}.$$ Тогда

$x^2+y^2=\dfrac{1}{u^2+v^2}$. Подставляя найденные величины в (6.2.1), будем иметь

$$\frac{A}{u^2+v^2}+\frac{Bu}{u^2+v^2}-\frac{Cv}{u^2+v^2}+D=0$$

или

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0.$$

А это окружность в плоскости комплексного переменного w. ▲

Пример. Показать, что образом окружности $x^2+y^2-2x+y-1=0$ при отображении $w=\dfrac{2iz+5}{z-1}$ является окружность.

Решение.

При данном преобразовании точка $z=1$ переходит в точку $w=\infty$. А для того, чтобы окружность перешла в прямую, нужно, чтобы точка $z=1$ принадлежала окружности: $z=x+iy=1 \Leftrightarrow x=1,\ y=0$, $1^2+0^2-2\cdot 1+0-1=-2\neq 0$. Таким образом, точка (1, 0) не принадлежит заданной окружности, и окружность перейдет в окружность. Если бы рассматривалась окружность $x^2+y^2-2x+y+1=0$, то точка (1, 0) ей принадлежит и при заданном отображении она перешла бы в прямую. ▲

Будем рассматривать теперь совокупность всех дробно-линейных преобразований

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0, \tag{6.2.2}$$

которую обозначим через Λ.

Теорема 6.2.3. Совокупность всех дробно-линейных преобразований Λ образует группу, если в качестве групповой операции рассматривать композицию преобразований.

Доказательство.

Достаточно проверить, что композиция $L_2 L_1$ двух дробно-линейных преобразований L_1 и L_2 (сначала выполняется L_1, а затем L_2) снова дробно-линейное преобразование и что отображение L^{-1}, обратное L, есть также дробно-линейное отображение. Действительно, если

$$w_1 = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = L_1(z) \text{ и } w = \frac{a_2 w_1 + b_2}{c_2 w_1 + d_2} = L_2(w_1),$$

то

$$w = L_2 L_1(z) = \frac{a_2 L_1(z) + b_2}{c_2 L_1(z) + d_2} = \frac{a_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)},$$

причем

$$(a_1 a_2 + c_1 b_2)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (a_1 c_2 + c_1 d_2)(b_1 a_2 + d_1 b_2) =$$
$$= (c_1 b_1 - a_1 d_1)(b_2 c_2 - a_2 d_2) = \Delta_1 \Delta_2 = \Delta \neq 0,$$

если

$$\Delta_1 = a_1 d_1 - c_1 b_1 \neq 0 \text{ и } \Delta_2 = a_2 d_2 - c_2 b_2 \neq 0.$$

Итак, композиция двух дробно-линейных преобразований является также дробно-линейным преобразованием. Точно также, если

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

то

$$z = L^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (-d)(-a) - bc \neq 0.$$

Последнее означает, что L^{-1} – дробно-линейное преобразование.

▲

Лекция 7

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Построение дробно-линейного отображения по образам трех точек

В формулу (6.1.1) входят четыре комплексных числа. Поскольку они входят в нее однородно, то для задания дробно-линейного отображения достаточно задать три отношения этих коэффициентов к одному из них. Поэтому следует ожидать, что из бесконечного множества дробно-линейных функций, отображающих расширенную комплексную плоскость на себя, можно однозначно определиться с соответствующим дробно-линейным отображением, выбрав произвольно образы w_1, w_2, w_3 трех каких-либо точек плоскости z_1, z_2, z_3, попарно отличных друг от друга.

Теорема 7.1.1. Заданием соответствия между тремя различными точками $z_1, z_2, z_3 \in \overline{C_z}$ и $w_1, w_2, w_3 \in \overline{C_w}$ дробно-линейная функция определяется однозначно.

Доказательство.

Построим функцию, которая переводит три различные точки плоскости $\overline{C_z}$ в три точки плоскости $\overline{C_w}$. Пусть для отображения

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

выполняются условия

$$L(z_k) = w_k = \frac{az_k+b}{cz_k+d}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (7.1.1)$$

Замечая, что

$$w - w_k = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_k+b}{cz_k+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cz_k+d)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

получаем

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)} \cdot \frac{(cz+d)(cz_2+d)}{(ad-bc)(z-z_2)} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{cz_2+d}{cz_1+d},$$

т.е.

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \qquad (7.1.2)$$

где $w = L(z)$ – искомое дробно-линейное отображение. В силу условия $w_3 = L(z_3)$ находим

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}. \qquad (7.1.3)$$

Исключая параметры c и d почленным делением (7.1.2) на (7.1.3), получаем

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \qquad (7.1.4)$$

Таким образом, отображение $w=L(z)$, удовлетворяющее условиям (7.1.1), неоходимо удовлетворяет уравнению (7.1.4). Но уравнение (7.1.4) определяет неявно искомую дробно-линейную функцию $w=L(z)$. В этом можно убедиться непосредственно, полагая для краткости

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \lambda,$$

и решая уравнение (7.1.4) относительно w. Поэтому может существовать только одно дробно-линейное отображение, которое удовлетворяет условиям (7.1.1). Но $w=L(z)$, определяемое уравнением (7.1.4), действительно отображает точки z_k в наперед заданные точки w_k $(k = 1, 2, 3)$. В самом деле, дробно-линейная функция от z в правой части (7.1.4) при $z = z_1,\ z = z_2,\ z = z_3$ принимает соответственно значения 0, ∞ и 1. А дробно-линейная функция от w в левой части (7.1.4) принимает эти последние значения соответственно при $w = w_1,\ w = w_2,\ w = w_3$ (дробно-линейная функция каждое свое значение принимает лишь в единственной точке расширенной плоскости).

▲

Пример 1. Отобразить действительную ось в единичную окружность.

Решение

Выберем на действительной оси точки $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$. Построим дробно-линейное отображение, которое отображает их в точки единичной окружности $w_1 = 1,\ w_2 = i,\ w_3 = -1$, используя (7.1.4):

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z} : \frac{1+1}{1}$$

или

$$w = \frac{z-i}{iz-1} \qquad ▲$$

Замечание. Среди точек z_k в (7.1.3) может быть и бесконечно удаленная точка. Ту разность, где содержится такая точка, нужно заменить единицей.

Определение 7.1.1. Отношение четырех точек

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

называется двойным или *ангармоническим* отношением.

Равенство (7.1.4) показывает, что ангармоническое отношение является инвариантом дробно-линейного преобразования.

Известно, что различные три точки плоскости определяют окружность, проходящую через них. На основании доказанной теоремы можно утверждать, что всегда существует дробно-линейная функция, отображающая любую окружность $\Gamma_z \in \overline{C}$ в наперед заданную окружность $\Gamma_w \in \overline{C}$. Когда $\Gamma_z \to \Gamma_w$, то из топологических соображений можно утверждать, что при этом D_z^+ отображается в одну из областей D_w^+ или D_w^-.

Теорема 7.1.2 (принцип отображения границы). Если дробно-линейная функция отображает окружность $\Gamma_z \in \overline{C}$ на окружность $\Gamma_w \in \overline{C}$, то

1) если $D_z^+ \to D_w^+$, то $D_z^- \to D_w^-$;

2) если $D_z^+ \to D_w^-$, то $D_z^- \to D_w^+$.

Доказательство.

Чтобы установить, какой из двух случаев реализуется, достаточно проследить за направлением движения на границе. Если при отображении направление движения на границе сохраняется, то реализуется первый случай, если же направление на границе изменяется на противоположное, то реализуется второй случай. При этом область располагается с одной стороны, двигаясь по границе.

▲

§ 2. Сохранение симметрии при дробно-линейном отображении

В элементарной геометрии определяется симметричность пары точек относительно некоторой прямой: точки P и P^* будут симметричными относительно прямой l, если $PP^* \perp l$ и $OP = OP^*$, где O – точка пересечения отрезка PP^* с прямой l (рис. 7.1).

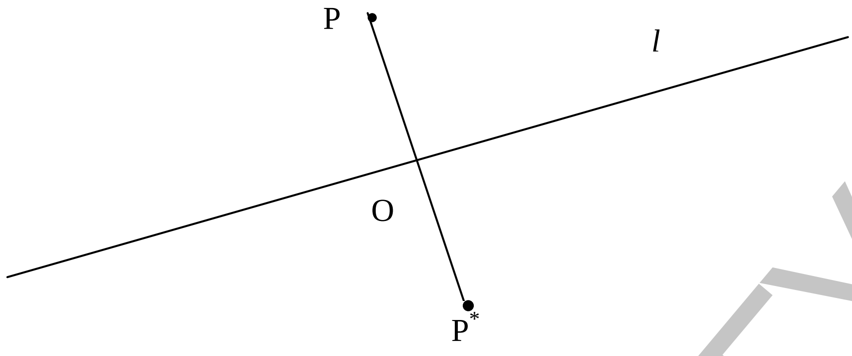

Рис. 7.1.

Естественно дать определение симметрии пары точек относительно окружности.

Определение 7.2.1. Точки P и P^* будут симметричными относительно окружности $Г$, если они получаются одна из другой преобразованием инверсии относительно этой окружности (рис 7.2).

Замечание. Можно убедиться в том, что когда $R \to \infty$ (окружность переходит в прямую), то симметрия относительно окружности будет совпадать с известным определением симметрии относительно прямой.

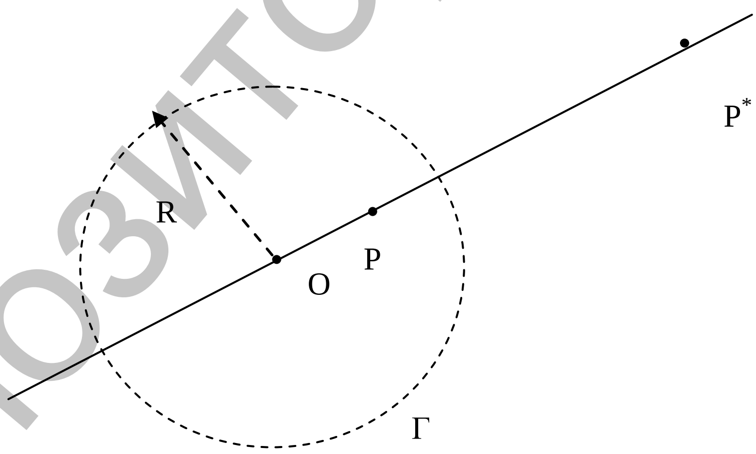

Рис. 7.2.

Лемма. Для того, чтобы точки P и P^* были симметричны относительно окружности $Г$, необходимо и достаточно, чтобы пучок окружностей, проходящих через эти точки, был ортогонален $Г$.

Доказательство.

Ортогональность двух окружностей означает, что касательные являются продолжением радиусов. Пусть точки P и P^* симметричны относительно окружности Γ, значит они лежат на луче, соединяющем их с центром окружности, и выполняется равенство

$$OP \cdot OP^{*} = R^{2}. \qquad (7.2.1)$$

Так как симметричные точки лежат по разные стороны окружности, то пучок окружностей будет пересекать Γ. По соответствующей теореме из элементарной геометрии в равенстве (7.2.1) R =ОА будет отрезком касательной к окружности Γ_1, а, следовательно $\Gamma_1 \perp \Gamma$ (рис. 7.3).

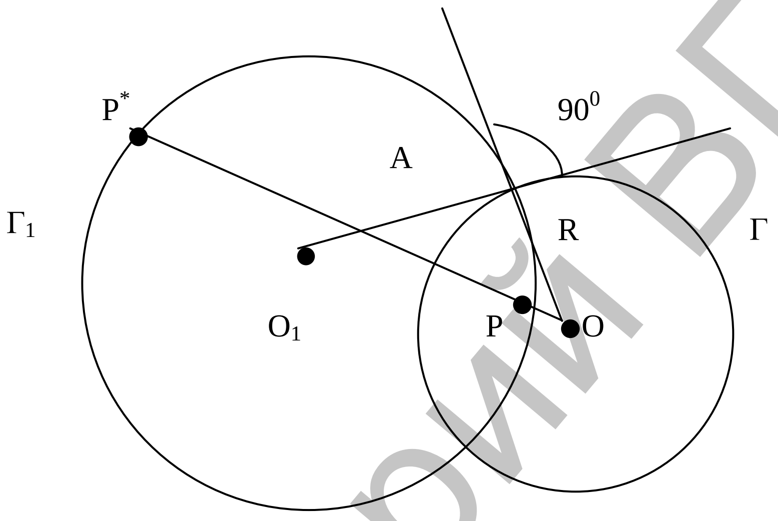

Рис. 7.3.

Обратно, пусть пучок окружностей ортогонален Γ. Докажем, что точки P и P^{*} будут симметричными относительно окружности Γ. Среди окружностей пучка, есть и прямая, проходящая через точки P и P^{*}. Поскольку она ортогональна Γ, то прямая проходит через центр окружности, следовательно точки P и P^{*} лежат на одной прямой. Теперь берем одну окружность Γ_1 из пучка. Точку пересечения ее с окружностью Γ обозначим через A. Так как $\Gamma_1 \perp \Gamma$, то OA будет касательной к окружности Γ_1 и выполняется (7.2.1), поэтому точки P и P^{*} симметричны относительно окружности Γ.

▲

Теорема 7.2.1. Если дробно-линейная функция отображает окружность Γ_z на окружность Γ_w, то точки P и P^{*}, симметричные относительно окружности Γ_z, отображаются в точки Q и Q^{*}, симметричные относительно ее образа Γ_w.

Доказательство.

Берем пучок окружностей, проходящий через точки P и P^{*}. По лемме он ортогонален Γ_z, а по круговому свойству дробно-линейного преобразования пучок окружностей отображается в пучок окружностей, а в силу конформности дробно-линейного преобразования последний будет ортогонален Γ_w. В силу леммы точки Q и Q^* будут симметричными относительно окружности Γ_w.

▲

Пример 2. Отобразить верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг.

Решение.

Берем произвольную точку $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ из верхней полуплоскости. Ей симметричная точка $\overline{\alpha}$ находится в нижней полуплоскости. При дробно-линейном преобразовании пара симметричных точек перейдет в пару симметричных относительно единичной окружности точек. Поэтому решением задачи будет дробно-линейная функция

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}.$$

Изменение θ приводит к повороту круга вокруг начала координат. Отображающая функция единственна с точностью до трех действительных параметров $\alpha_1, \alpha_2, \theta$.

▲

Лекция 8

ЦЕЛАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И РАДИКАЛ

§ 1. Целая степенная функция

Будем изучать отображение, осуществляемое степенной функцией $w = z^n$, где n – целое, $n > 1$. Функция $w = z^n$ является целой, так как ее производная $w' = nz^{n-1}$ существует при любом z. Отображение $w = z^n$ будет конформным для любого $z \neq 0$ ($w'(0) = 0$).

Функция $w = z^n$ отображает расширенную z–плоскость на расширенную w–плоскость. Всякая точка w, отличная от нуля и бесконечности, имеет ровно n прообразов – n значений корня $\sqrt[n]{w}$, которые содержатся в формуле:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right), \qquad (8.1.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Таким образом, отображение $w = z^n$ ($n > 1$) не является взаимно однозначным.

Посмотрим, сохраняются ли углы в точках $z = 0$ и $z = \infty$ (точка $z = 0$ нуждается в проверке, так как $w'(0) = 0$).

Пусть сначала L – кривая, выходящая из точки $z = 0$, касательная к которой в этой точке наклонена к оси OX под углом α. Пусть L^* — образ этой кривой в плоскости w при отображении $w = z^n$. Проведем через точки $z_1 \in L$ $(z_1 \neq 0)$ и $z = 0$ секущую. Одно из значений $Arg\, z_1$ (угол наклона секущей к оси OX) будет при стремлении точки z_1 к нулю вдоль кривой L стремиться к α — углу наклона касательной. При этом соответствующая точка $w_1 = z_1^n$, принадлежащая кривой L^*, будет стремиться к $w = 0$ (образу точки $z = 0$), а одно из значений $Arg\, w_1 = n\, Arg\, z_1$ будет стремиться к $n\alpha$ — углу наклона к оси OU касательной в точке $w = 0$ к кривой L^*.

Пусть теперь из точки $z = 0$ выходят две кривые L_1 и L_2, касательные к которым в точке $z = 0$ образуют соответственно углы α_1 и α_2 с осью OX (рис 8.1).

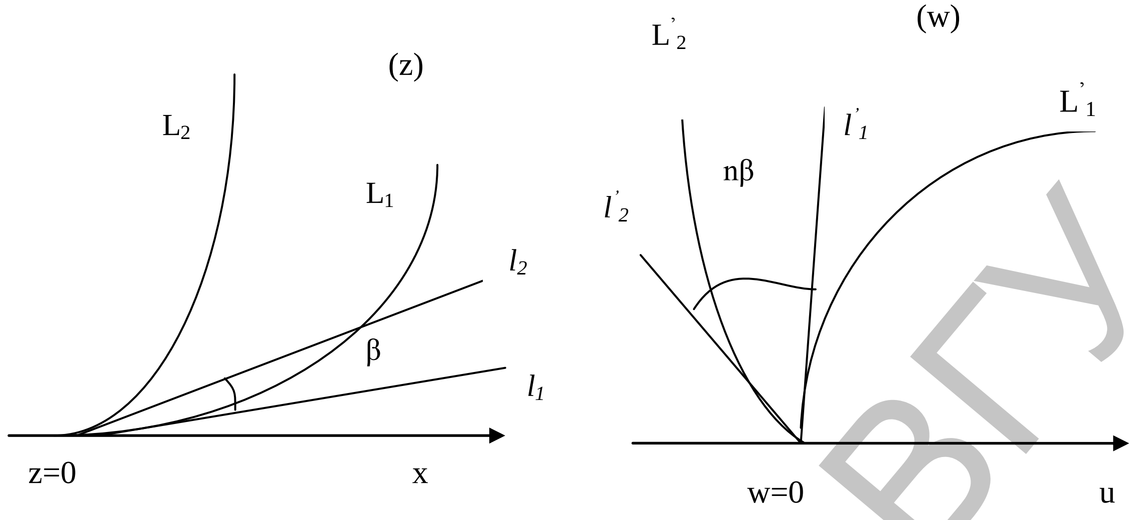

Рис. 8.1.

Тогда угол между кривыми L_1 и L_2 в точке $z=0$ будет равен $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$. Образы этих кривых в *w*-плоскости при отображении $w = z^n$ — кривые L^*_1 и L^*_2 — будут, согласно сказанному, будут иметь в точке $w=0$ касательные, наклоненные к действительной оси под углами $n\alpha_1$ и $n\alpha_2$ соответственно. Поэтому угол в точке $w=0$ между кривыми L^*_1 и L^*_2 будет равен

$$n\alpha_2 - n\alpha_1 = n(\alpha_2 - \alpha_1) = n\beta.$$

Итак, отображение $w = z^n$ в точке $z=0$ ($w'(0)=0$) увеличивает углы в *n* раз (конформность нарушается). Покажем, что и в точке $z=\infty$ углы между любыми двумя кривыми увеличиваются в *n* раз. Пусть угол между кривыми L_1 и L_2 в *z*-плоскости в точке $z=\infty$ равен β. По определению угла в бесконечно удаленной точке, это означает, что кривые l_1 и l_2, которые являются образами L_1 и L_2 при отображении $z_1 = 1/z$, образуют в точке $z_1 = 0$ угол β. С другой стороны, угол между кривыми L^*_1 и L^*_2 (образами L_1 и L_2 при отображении $w = z^n$) в точке $w=\infty$ равен углу между кривыми l'_1 и l'_2 в точке $z_2 = 0$, где l'_1 и l'_2 — образы кривых L^*_1 и L^*_2 при отображении $z_2 = 1/w$. Но $z_2 = 1/z^n = \left(1/z\right)^n = z_1^n$, следовательно, кривые l'_1 и l'_2 служат образами кривых l_1 и l_2 при отображении $z_2 = z_1^n$. Значит угол между l'_1 и l'_2 в точке $z_2 = 0$ равен $n\beta$, а, следовательно, и угол между L^*_1 и L^*_2 в бесконечно удаленной точке равен $n\beta$.

Так как $w = z^n$, то $|w| = |z|^n$, $Arg\, w = n\, Arg\, z$. Отсюда следует, что степенная функция отображает луч $Arg\, z = \varphi_0 + 2\pi k$, выходящий из начала координат под углом φ_0 к оси *OX*, на луч $Arg\, w = n\varphi_0 + 2\pi k$, выходящий из точки $w = 0$ под углом $n\varphi_0$ к оси *OU*. Окружность $|z| = r$ с центром в начале координат и радиуса r отображается с помощью функции $w = z^n$ на окружность $|w| = r^n$, центр которой находится в точке $w = 0$, а радиус равен r^n. Когда точка z один раз опишет окружность $|z| = r$ в положительном направлении, точка $w = z^n$ пробежит n раз окружность $|w| = r^n$ (аргумент w, непрерывно возрастая, увеличится на $2\pi n$). Найдем теперь области однолистности для функции $w = z^n$, т.е. такие области z-плоскости, которые отображаются взаимно однозначно на области w-плоскости. Если w_1 есть образ некоторой точки $z_1 \neq 0$ при отображении $w = z^n$, то остальные n-1 прообразов точки w_1 получаются из точки z_1 поворотом вокруг начала координат на углы $2\pi k/n$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, область D в z-плоскости тогда и только тогда является областью однолистности для функции $w = z^n$, если для каждой точки z области D точки, полученные из z поворотом на угол $2\pi k/n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, уже не принадлежат D. Простейшей такой областью однолистности является внутренность угла D_α с вершиной в начале координат и раствора α, $0 < \alpha \leq 2\pi/n$. Пусть угол D_α ограничен лучами, составляющими углы φ_0 и $\varphi_0 + \alpha$ с осью *OX*. Тогда любая точка $z \in D_\alpha$ записывается в виде:

$$z = |z| e^{i\varphi} \text{ или } z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \alpha.$$

Образом D_α при отображении $w = z^n$ служит внутренность угла $G_{n\alpha}$ раствора $n\alpha$, ограниченного лучами, составляющими с осью *OU* углы $n\varphi_0$ и $n\varphi_0 + n\alpha$. В самом деле, любая точка $w \in G_{n\alpha}$ записывается в виде:

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),\quad n\varphi_0 < \psi < n\varphi_0 + n\alpha.$$

Следовательно, точка $w \in G_{n\alpha}$ является образом точки $z = \sqrt{|w|}\left(\cos{\psi}/{n} + i\sin{\psi}/{n}\right)$, принадлежащей D_α, т.к. $\varphi_0 < \varphi = {\psi}/{n} < \varphi_0 + \alpha$. Также для любой точки $z \in D_\alpha$ имеем: $w = z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ и $w \in G_{n\alpha}$, поскольку $n\varphi_0 < \psi = n\varphi < n\varphi_0 + n\alpha$.

Замечание. 1. Функция $w = z^n$ отображает взаимно однозначно и конформно внутренность любого угла с вершиной в точке $z = 0$ и раствора α $(0 < \alpha \le 2\pi/n)$ на внутренность угла с вершиной в $w = 0$ и раствора $n\alpha$ $(0 < n\alpha \le 2\pi)$. В частности, при $\alpha = 2\pi/n$, D_α : $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi/n$, функция $w = z^n$ отображает D_α на w-плоскость с разрезом вдоль луча $Arg\, w = n\varphi_0 + 2\pi k$ (угол раствора 2π).

2. К степенной функции $w = z^n$ прибегают всякий раз, когда нужно отобразить один угол с прямолинейными сторонами на другой угол с прямолинейными сторонами в *n* раз больше первого.

Пример. Отобразить взаимно однозначно и конформно внутренность угла D: $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$ на верхнюю полуплоскость.

Решение.

1) Поскольку область D — угол раствора $\pi/2$, а полуплоскость – угол раствора π, то, применяя отображение $z_1 = z^2$, переводим D в полуплоскость D_1 : $-\pi/2 < \arg z_1 < \pi/2$.

2) Поворотом D_1 на угол $\pi/2$ в положительном направлении, т.е. положив $w = iz_1$, отобразим D_1 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Таким образом, искомое отображение имеет вид $w = iz^2$.

▲

§ 2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$. Выделение однозначных ветвей

Будем изучать эту функцию, основываясь на результатах изучения предыдущей функции. Поменяем в данной нам функции переменные *z* и *w* ролями. Тогда будем иметь

$w = \sqrt[n]{z}$ или $z = w^n$ (*w* – независимая переменная).

Рассмотрим в *w*-плоскости угол D раствора $2\pi/n$ с вершиной в точке $w = 0$, ограниченный лучами $Arg\, w = \varphi_0 + 2\pi k$ и $Arg\, w = \varphi_0 + 2\pi/n + 2\pi m$ (k и m — целые). Тогда функция $z = w^n$ отобразит D взаимно однозначно и конформно на область G — *z*-плоскость с разрезом вдоль луча $Arg\, z = n\varphi_0 + 2\pi l$ (этот луч – граница области G – является образом обоих лучей, составляющих границу D). Эта функция в каждой точке $z \in G$ совпадает с одним из значений $\sqrt[n]{z}$, которое мы обозначим $(\sqrt[n]{z})_1$, именно:

$$w = (\sqrt[n]{z})_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{(Arg\, z)_1}{n} + i\sin\frac{(Arg\, z)_1}{n}\right), \qquad (8.2.1)$$

где $(Arg\, z)_1$ — значение *Arg z*, которое удовлетворяет неравенствам:

$$n\varphi_0 < (Arg\, z)_1 < n\varphi_0 + 2\pi .$$

Поскольку $(Arg\, z)_1$ — непрерывная функция в области *G*, то и функция $w = (\sqrt[n]{z})_1$, задаваемая (8.2.1), будет непрерывной в *G*. Следовательно, $w = (\sqrt[n]{z})_1$, являясь непрерывной однозначной функцией, обратной к функции $z = w^n$ с отличной от нуля производной, также имеет производную:

$$w' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\left((\sqrt[n]{z})_1\right)^{n-1}}, \ \forall z \in G .$$

Таким образом, функция, определяемая (8.2.1), является аналитической в области *G*.

Определение 8.2.1. Однозначная непрерывная функция $\varphi(z)$, которая в каждой точке *z* некоторого множества совпадает с одним из значений многозначной функции $f(z)$, называется однозначной непрерывной ветвью функции $f(z)$ на данном множестве.

К примеру, для многозначной функции *Arg z* главное значение *arg z* является однозначной непрерывной ветвью в плоскости *z* с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Другие непрерывные однозначные ветви *Arg z* в той же области выражаются формулой:

$$(Arg\, z)_k = \arg z + 2\pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \quad .$$

Определенная выше функция $(Arg\, z)_1$ является непрерывной однозначной ветвью *Arg z* в области *G*. В силу определения (8.2.1) функция $w = (\sqrt[n]{z})_1$ является однозначной (аналитической) ветвью *n*-значной функции $\sqrt[n]{z}$ в области *G* – плоскости с разрезом; она отображает *G* на угол *D*.

Проведем в плоскости *w* из начала координат *n* лучей, составляющих с осью *OU* углы $\varphi_0 + \frac{2(k-1)\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Этими лучами *w*- плоскость разобьется на *n* углов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ одинакового раствора $2\pi/n$ (рис.8.2), где

$$D_k = \left\{ w = |w| e^{i\varphi} : \ \varphi_0 + \frac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \varphi_0 + \frac{2k\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Заметим, что D_k не содержит точку *w=0*. Всякий угол D_k функция $z = w^n$ отображает взаимно однозначно и конформно на одну и ту же область *G* — *z*-плоскость с разрезом вдоль луча $Arg\, z = n\varphi_0 + 2\pi m$. Соответствие между точками D_k и областью *G* определяет однозначную функцию от *z*, обратную к $z = w^n$, которую мы обозначим

$w=(\sqrt[n]{z})_k$. Эта функция отображает *G* на D_k и в каждой точке $z\in G$ совпадает с одним из значений $\sqrt[n]{z}$, которое задается формулой:

$$(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{(Arg\,z)_k}{n}+i\sin\frac{(Arg\,z)_k}{n}\right),$$

где $(Arg\,z)_k$ — непрерывная ветвь $Arg\,z$ в области *G*, удовлетворяющая неравенствам:

$$n\varphi_0+2(k-1)\pi<(Arg\,z)_k<n\varphi_0+2\pi k\,.$$

Как и выше, получаем, что каждая из функций $(\sqrt[n]{z})_k$ является однозначной аналитической ветвью $\sqrt[n]{z}$ и отображает *G* на D_k.. При этом

$$(\sqrt[n]{z})_k'=\frac{1}{n(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}}\,.$$

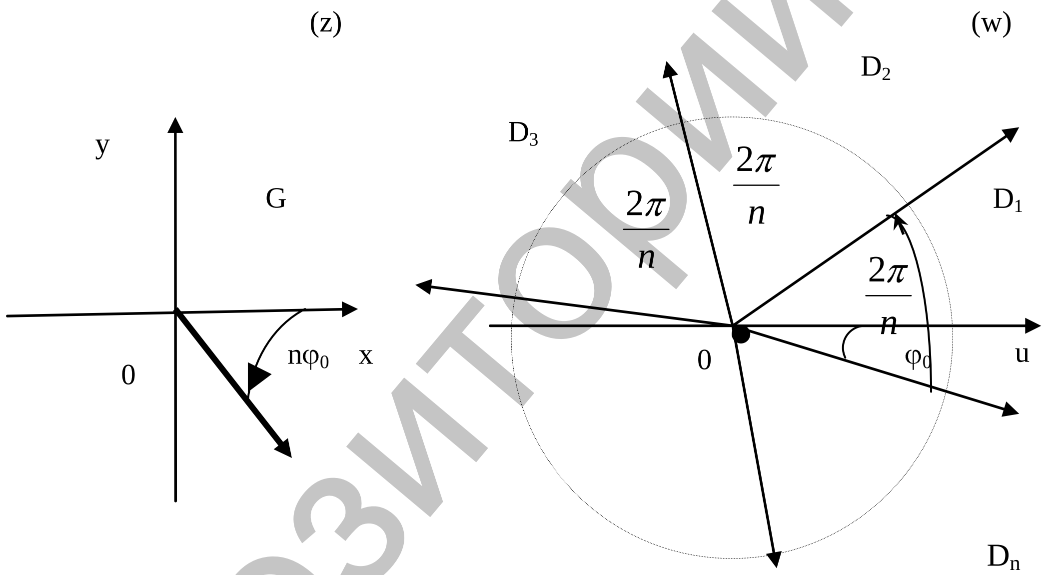

Рис. 8.2.

<u>Замечание</u>. 1. Таким образом, в области *G* можно выделить *n* различных однозначных аналитических ветвей $(\sqrt[n]{z})_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Задание какой-либо из этих ветвей равносильно указанию угла D_k, на который эта ветвь отображает область *G*.

2. В силу того, что области D_k и D_j не имеют общих точек при $k\neq j$, область D_k определяется заданием какой-либо одной точки w_0, ей принадлежащей. Поэтому, чтобы выделить однозначную аналитическую ветвь $\sqrt[n]{z}$ в данной области *G*, достаточно задать в какой-то одной точке $z_0\in G$ значение $\sqrt[n]{z_0}$, скажем w_0.

Пример 1. Выделить однозначные аналитические ветви функции $w=\sqrt{z}$ в области G, которая представляет собой z-плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси.

Решение

В нашем случае $n=2$ и этому случаю соответствует разбиение w-плоскости на две полуплоскости:

$$D_1: \operatorname{Re} w>0 \quad \text{и} \quad D_2: \operatorname{Re} w<0.$$

Ветвь $\sqrt{z}$, отображающая G на D_1, определяется формулой:

$$(\sqrt{z})_1=\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{2}+i\sin\frac{\arg z}{2}\right),$$

в то время как ветвь, отображающая G на D_2, равна:

$$(\sqrt{z})_2=\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi}{2}+i\sin\frac{\arg z+2\pi}{2}\right)=-(\sqrt{z})_1.$$

▲

Пример 2. В области G — плоскость z с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси — выделить ветвь функции $w=\sqrt[3]{z}$, которая в точке $z_0=1$ принимает значение $w_0=1$.

Решение

В этом случае $n=3$ и области D_1, D_2 и D_3, на которые отображают область G различные ветви $\sqrt[3]{z}$, определяются следующим образом:

$$D_k=\left\{w=|w|(\cos\varphi+i\sin\varphi): -\frac{\pi}{3}+\frac{2(k-1)\pi}{3}<\varphi<-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{n}, k=1,2,3\right\}$$

.

Очевидно, $w_0\in D_1$ и соответствующая ветвь $\sqrt[3]{z}$ есть $(\sqrt{z})_1$:

$$(\sqrt{z})_1=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{3}+i\sin\frac{\arg z}{3}\right).$$

Она отображает область G взаимно однозначно и конформно на область D_1 — угол раствора $\frac{2\pi}{3}$, т.е. $-\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{3}$.

▲

Лекция 9

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Показательная функция

Показательная функция комплексного переменного $z = x + i \cdot y$ нами уже затрагивалась. Это функция *exp z=e^x^(cos y+i sin y)*. Она является аналитической во всей комплексной плоскости, т.е. это целая функция, причем $(exp\ z)' = exp\ z$. При действительном $z=x$ функция *exp z* совпадает с показательной функцией действительного переменного: $exp\ x = e^x$. По этой причине *exp z* называют показательной функцией комплексного переменного и обозначают ее через e^z, т.е.

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{9.1.1}$$

Будем изучать свойства этой функции. Прежде всего заметим, что $\left| e^z \right| = e^x$. Отсюда заключаем, что (3.1) является записью комплексного числа $w=e^z$ в тригонометрической форме, а y есть одно из значений аргумента e^z. Итак,

$$\left| e^z \right| = e^x,$$

$$Arg\, e^z = y + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{9.1.2}$$

Основное свойство показательной функции действительного переменного, так называемая теорема сложения, оказывается справедливой и для показательной функции комплексного переменного z.

<u>Теорема 9.1.1.</u> $\forall z_1, z_2 \in C$ справедливо равенство

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{9.1.3}$$

<u>Доказательство.</u>

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда $e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)$ и $e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$. Согласно правилу умножения комплексных чисел (модули перемножаются, а аргументы складываются) имеем:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right) =$$
$$= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right) = e^{z_1+z_2}.$$

▲

<u>Теорема 9.1.2.</u> Показательная функция (9.1.1) является периодической с основным периодом $T = 2\pi \cdot i$.

<u>Доказательство.</u>

В силу периодичности тригонометрических функций имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^{x}\left(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\right) =$$
$$= e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) = e^{z}.$$

Таким образом, показательная функция своим периодом имеет чисто мнимое число $2\pi i$.

Покажем, что это основной период функции. Предположим, что для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ имеет место равенство $e^{z_1} = e^{z_2}$. Тогда $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1 - z_2} = 1 = e^{0}$. С другой стороны

$$e^{z_1 - z_2} = e^{x_1 - x_2}\left(\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right).$$

Поэтому $e^{x_1 - x_2} = 1$, т.е. $x_1 - x_2 = 0$, а $y_1 - y_2 = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Значит, $z_1 - z_2 = 2\pi i \cdot k$, где k — целое число.

▲

<u>Замечание</u>. Полагая в (9.1.1) $x = 0$ и $y = \alpha$ $(\alpha \in R)$, получаем $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Отсюда получается тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа z:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\pi) = |z|e^{i\varphi}. \qquad (9.1.4)$$

Очевидно, $\left|e^{i\varphi}\right| = 1,\quad Arg\, e^{i\varphi} = \varphi + 2\pi k,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Используя (9.1.4), легко записывать уравнения простых кривых в параметрическом виде. Например, луч L_α, выходящий из начала координат под углом α к оси *OX*, запишется в виде

$$L_\alpha : z = \rho e^{i\alpha},\ 0 < \rho < \infty.$$

Запишем теперь параметрическое уравнение окружности $\gamma_r : |z - a| = r$. Обозначим через t значение аргумента комплексного числа *z-a*, удовлетворяющее условию $0 \le t \le 2\pi$. Тогда согласно (9.1.4) $z - a = r \cdot e^{it}$ или $z = a + r \cdot e^{it}$. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, точка $z = a + R \cdot e^{it}$ опишет один раз окружность против часовой стрелки. Таким образом,

$$\gamma_r : z = a + r \cdot e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Ознакомимся теперь с геометрическим поведением e^{z}, т.е. отображением, осуществляемым этой функцией. Так как $\left|e^{z}\right| = e^{x} \ne 0$, то значение *w=0* не принимается ни при каком *z*. Покажем, что любое значение $w \ne 0$ принимается функцией e^{z} при некотором *z*, другими словами, образом *z*-плоскости при отображении $w = e^{z}$ является вся *w*-плоскость с выколотым началом координат. В самом деле, $\forall w \ne 0$ из уравнения $w = e^{z}$, где *z=x+iy* неизвестное, находим: $|w| = e^{x}$ или $x = \ln|w|,\ y = Arg\, w$. Следовательно,

$$z=\ln|w|+iArg\,w=\ln|w|+i(\arg w+2\pi k),$$
$$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots . \qquad (9.1.5)$$

Таким образом, прообразами точки $w\neq 0$ могут быть только точки вида (9.1.5), причем их будет бесконечно много. Действительно,

$$e^{z}=e^{\ln|w|+iArg\,w}=e^{\ln|w|}(\cos Arg\,w+i\sin Arg\,w)=$$
$$=|w|(\cos Arg\,w+i\sin Arg\,w)=w$$

Все точки (9.1.5) располагаются на одной прямой, параллельной мнимой оси, на расстояниях друг от друга, кратных 2π.

Замечание. Таким образом, функция $w=e^{z}$ отображает конечную z-плоскость на область, получающуюся из конечной w-плоскости исключением одной точки $w=0$, причем отображение не взаимно однозначно, поскольку каждая точка $w\neq 0$ имеет бесконечно много прообразов. Так как производная показательной функции всюду отлична от нуля, то это отображение конформно во всех точках плоскости.

Найдем образы прямых, параллельных одной из координатных осей, при отображении $w=e^{z}$.

Точки прямой, параллельной мнимой оси, $z=a+it,\quad -\infty<t<+\infty$, отображаются в точки $w=e^{a+it}=e^{a}\cdot e^{it}$, которые лежат на окружности $|w|=e^{a}$ с центром в начале координат радиуса e^{a}. Когда t – ордината точки z – непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, точка w описывает бесконечное число раз окружность в одном и том же (положительном) направлении (рис. 9.1).

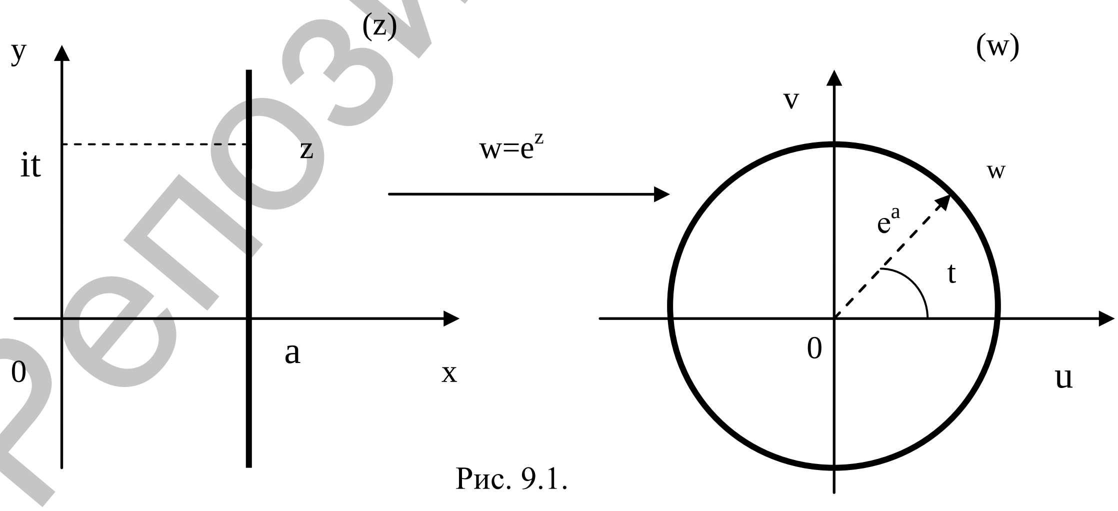

Рис. 9.1.

Точки прямой, параллельной действительной оси, $z=t+ib,\quad -\infty<t<+\infty$, отображаются в точки $w=e^{t+ib}=e^{t}\cdot e^{ib}$, лежащие на прямолинейном луче, выходящем из начала координат под углом наклона *b* к действительной оси. Когда *t* – абсцисса точки *z* – непрерывно изменяется от -∞ до +∞, точка *w* описывает однократно соответствующий луч, так что расстояние *w* от начала координат непрерывно растет от 0 до +∞ (рис. 9.2).

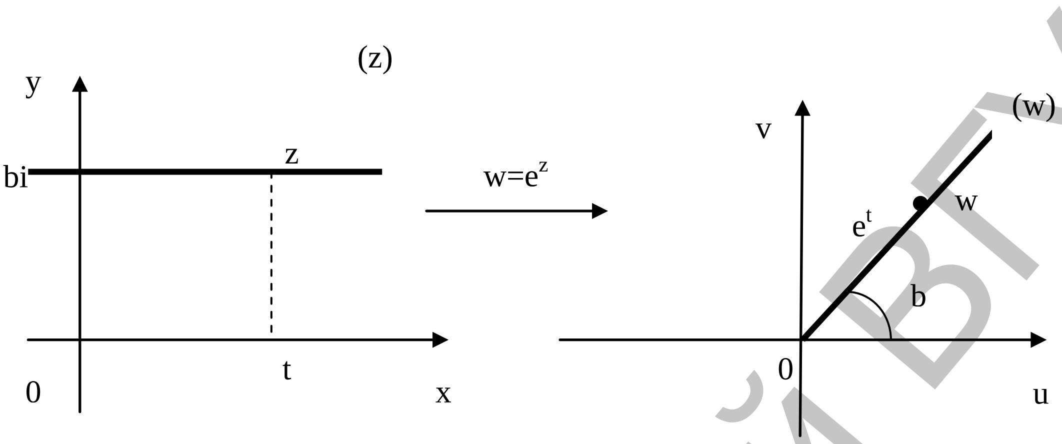

Рис. 9.2.

<u>Замечание.</u> При отображении *z*-плоскости посредством функции $w=e^z$ семейство прямых, параллельных мнимой оси, преобразуется в семейство окружностей с центром в начале координат, а семейство прямых, параллельных действительной оси, ‒ в семейство лучей, выходящих из начала координат.

Найдем теперь области однолистности, т.е. те области *z*-плоскости, которые функция $w=e^z$ отображает взаимно однозначно на соответствующие области *w*-плоскости. Как было замечено ранее, что искомые области ‒ это те и только те, которые не содержат ни одной пары точек, отличающихся на целое кратное $2\pi i$. Простейшей такой областью однолистности является внутренность прямолинейной полосы D_h шириной *h*, $0<h\le 2\pi$, параллельной действительной оси.

В самом деле, для любых $z_1 \ne z_2$, $z_1, z_2 \in D_h$, имеем $|\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| < h \le 2\pi$, т.е. $z_1 - z_2 \ne 2\pi ik \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Пусть эта полоса $D_h : \varphi < y < y + h$. Образом D_h в *w*-плоскости при отображении $w=e^z$ является область G_h ‒ угол раствора *h* с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с действительной осью углы φ и $\varphi+h$. Действительно, всякая точка $w \in G_h$ может быть записана в виде $w=\rho e^{i\alpha}$, где $\varphi < \alpha < \varphi + h, \quad \rho > 0$. Следовательно, w служит образом единственной точки $z \in D_h$, именно $z = \ln \rho + i\alpha$.

<u>Замечание.</u> Показательная функция $w=e^z$ взаимно однозначно и конформно отображает полосу ширины $h\,(0<h\le 2\pi)$, параллельную действительной оси, на угол раствора *h* с вершиной в начале координат. В частности, при $h=2\pi$ функция $w=e^z$ отобразит $D_{2\pi}$ ‒

внутренность полосы шириной 2π $(\varphi < y < \varphi + 2\pi)$ — на всю *w*-плоскость, из которой исключен луч, выходящий из начала координат под углом φ к действитекльной оси (плоскость с разрезом вдоль этого луча).

§ 2. Логарифмическая функция

Ранее отмечалось, что отображение всей *w*-плоскости посредством функции $z = e^w$ на *z*-плоскость не взаимно однозначно. Поэтому обратная функция $w = Ln\, z$ оказывается многозначной (даже бесконечнозначной) функцией в области $z \neq 0$.

Например, множество значений *Ln 1* задается формулой:
$Ln\, 1 = \ln\, 1 + 2\pi i k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Среди них единственное действительное значение (нуль) совпадает со значением логарифмической функции действительного переменного *ln x* при *x=1*. Логарифм действительного переменного *ln x* определяется только для положительных значений *x*, в то время как функция комплексного переменного $w = Ln\, z$ определена и для $z = x < 0$ (отрицательных *x*). Например,
$Ln(-1) = \ln|-1| + iArg(-1) = i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$
т.е. все значения $Ln(-1)$ — чисто мнимые числа. При $z = x > 0$ только одно из бесконечного множества значений $Ln\, x = \ln\, x + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ получаемое при $k = 0$, является действительным числом.

Замечание. 1. Известные правила для логарифма произведения и частного сохраняют свою силу и для многозначного логарифма комплексного числа, а именно для любых комплексных чисел $z_1, z_2 \neq 0$, имеем:

$$Ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + iArg(z_1 z_2) =$$
$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(Arg\, z \; + Arg\, z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2$$

и

$$Ln\frac{z_1}{z_2} = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + iArg\frac{z_1}{z_2} =$$
$$= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i(Arg\, z_1 - Arg\, z_2) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2 .$$

В каждом из этих равенств левая и правая части изображают бесконечные множества комплексных чисел, а равенства следует понимать в смысле совпадения этих множеств. Например, равенство $Ln(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2$ следует понимать так: каждое значение $Ln(z_1 z_2)$ можно представить в виде суммы некоторых значений $Ln\, z_1$

и $Ln\, z_2$ и, обратно, для любых двух значений $Ln\, z_1$ и $Ln\, z_2$ сумма их дает одно из значений $Ln(z_1 z_2)$.

2. $Ln\; z + Ln\, z \neq 2Ln\, z$. Это можно пояснить на следующем примере. Пусть $A = \{0, 1\}$, тогда $2A = \{0, 2\}$, но $A + A = \{0, 1, 2\}$. Следовательно, $A + A \neq 2A$.

3. $Ln\, 1 = Ln\; z - Ln\, z \neq 0$. Здесь речь идет о множестве всех разностей между парами значений логарифма одного и того же числа. Напомним, что это множество состоит из всевозможных целых кратных числа $2\pi i$:

$$Ln\, 1 = 2\pi i \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Выделим теперь однозначную непрерывную ветвь логарифма в области *G*, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом вдоль луча, наклоненного под углом φ_0 к действительной оси. В области *G* выделяется непрерывная ветвь *Arg z*, удовлетворяющая неравенствам:

$$\varphi_0 < (Arg\; z)_0 < \varphi_0 + 2\pi .$$

Тогда функция $\ln|z| + i(Arg\; z)_0$ является непрерывной и однозначной в *G*. Обозначим ее $(Ln\, z)_0$. В каждой точке $z \in G$ функция $w = (Ln\, z)_0$ совпадает с одним из значений $Ln\, z$ и отображает область *G*.взаимно однозначно на внутренность полосы $D_0 = \{w = u + iv \mid \varphi_0 < v < \varphi_0 + 2\pi\}$. Далее, $(Ln\, z)_0$ как непрерывная в области *G* функция, обратная к дифференцируемой ($z = e^w$) с отличной от нуля производной, также будет дифференцируемой всюду в *G*. Другими словами, функция $(Ln\, z)_0$ аналитична в *G* и имеет производную:

$$\frac{d}{dz}(Ln\, z)_0 = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} .$$

Итак, мы выделили однозначную аналитическую ветвь бесконечнозначной аналитической функции $w = Ln\, z$, которая осуществляет отображение области *G* — *z*-плоскости с разрезом вдоль луча на полосу D_0 *w*-плоскости. Остальные однозначные аналитические ветви логарифмической функции, скажем $(Ln\, z)_k$, получаются по формуле:

$$(Ln\, z)_k = (Ln\, z)_0 + 2\pi i \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (9.2.1)$$

При этом функция $(Ln\, z)_k$ взаимно однозначно отображает область *G* на полосу

$$D_k = \{w = u + iv \mid \varphi_0 + 2\pi k < v < \varphi_0 + 2\pi(k+1)\}, \qquad (9.2.2)$$

которая получается из полосы D_0 параллельным сдвигом на $2\pi i \cdot k$. Каждая из ветвей (9.2.1) имеет в области *G* одну и ту же производную:

$$\frac{d}{dz}\left(Ln\ z\right)_k = \frac{1}{z}.$$

Поэтому условились записывать:

$$\frac{d}{dz}\left(Ln\ z\right) = \frac{1}{z},$$

подразумевая под производной многозначной функции $w = Ln\ z$ производную ее любой фиксированной ветви.

Если область G представляет собой комплексную плоскость, разрезанную вдоль отрицательной части действительной оси $(\varphi_0 = -\pi)$, то ветвью функции $w = Ln\ z$, отображающей G на полосу $D_0 = \{w = u + iv \mid -\pi < v < \pi\}$, будет функция, которую мы обозначим ln *z*, т.е.

$$\ln\ z = \ln|z| + i \cdot \arg z. \qquad (9.2.3)$$

Функцию (9.2.3) называют главным значением многозначной функции $Ln\ z$. Функция ln *z* определена при всех $z \neq 0$ и отображает плоскость с выколотым началом координат взаимно однозначно на горизонтальную полосу с присоединенным верхним краем: $-\pi < v \leq \pi$. Однако отображение, осуществляемое с помощью функции $w = \ln z$ не будет непрерывным всюду при $z \neq 0$, т.к. терпит разрыв вдоль отрицательной части действительной оси.

По аналогии с (9.2.1) другие однозначные аналитические ветви $Ln\ z$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси будут выглядеть следующим образом:

$$Ln_k\ z = \ln|z| + i(\arg\ z + 2\pi k) = \ln z + 2\pi i \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (9.2.4)$$

Эти ветви отображают *z*-плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси взаимно однозначно и конформно на полосы (9.2.2) с $\varphi_0 = -\pi$: $D_k = \{w = u + iv \mid (2k-1)\pi < v < (2k+1)\pi\}$.

<u>Замечание.</u> Чтобы выбрать в плоскости с разрезом ветвь логарифма, достаточно указать полосу D_k, на которую эта ветвь отобразит область *G*. Более того, достаточно указать лишь значение $Ln\ z$ в одной точке $z_0 \in G$, поскольку $Ln\ z_0$ может принадлежать лишь одной из полос D_k. Например, ветвь логарифма, принимающая в точке $z_0 = 1$ значение, равное нулю (принадлежащее D_0), есть главная ветвь логарифма.

Зафиксируем в точке z_0 некоторое значение аргумента, к примеру $Arg_k\ z_0 = \arg z_0 + 2\pi k$, что определит значение логарифма в этой точке, равное $\ln|z_0| + i \cdot Arg_k\ z_0 = Ln_k\ z_0$. Начнем теперь двигаться из точки z_0 вдоль окружности $|z| = |z_0|$, например, против часовой стрелки. Аргумент z, непрерывно меняясь, будет давать в каждой точке вполне определенные значения $Arg\ z$, а, следовательно, и $Ln\ z$. При однократном обходе окружности вокруг начала координат мы вернемся в точку z_0 со значением аргумента $Arg_k\ z_0 + 2\pi = Arg_{k+1}\ z_0$, а, значит, и с новым значением логарифма: $Ln_k\ z_0 + 2\pi i = Ln_{k+1}\ z_0$.

Таким образом, ветвь логарифма $Ln_k\ z$ при однократном обходе вокруг начала координат непрерывно переходит в другую ветвь $Ln_{k+1}\ z$. Описывая окружность сколь угодно раз в одном направлении (например, положительном), мы каждый раз будем получать значения в точке z_0 новых ветвей, и, следовательно, не вернемся к значению исходной ветви $Ln_k\ z_0$. По этой причине точка $z = 0$ называется точкой ветвления бесконечного порядка. Но обход вокруг начала координат эквивалентен обходу вокруг бесконечно удаленной точки. Поэтому точка $z = \infty$ также является точкой ветвления функции $w = Ln\ z$.

Лекция 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Тригонометрические функции

Из хорошо известных формул Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

путем почленного сложения и вычитания легко получаются равенства:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad (10.1.1)$$

Равенства (10.1.1) справедливы при любом действительном x. Правые части (10.1.1) определены и при всевозможных комплексных значениях аргумента, причем в этом случае они представляют собой аналитические функции аргумента z:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{è} \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (10.1.2)$$

Функции (10.1.2) являются целыми и при действительных значениях $z = x$ совпадают соответственно с $\cos x$ и $\sin x$. Первую из функций (10.1.2) по определению обозначают $\cos z$, а вторую — $\sin z$ и называют основными тригонометрическими функциями — косинусом и синусом:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (10.1.3)$$

Формулы (10.1.3) называются формулами Эйлера. Умножим обе части второй из формул (10.1.3) на i и затем почленно сложим с первой:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z. \qquad (10.1.4)$$

Равенство (10.1.4) также называется формулой Эйлера.

Из (10.1.3) заключаем, что $\cos z$ — четная, а $\sin z$ — нечетная функции:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z. \qquad (10.1.5)$$

Нетрудно показать, что функции (10.1.3) являются периодическими с основным периодом $T = 2\pi$. Покажем это на примере функции $\cos z$.

<u>Теорема 10.1.1.</u> Функция $f(z) = \cos z$ являются периодической с основным периодом $T = 2\pi$.

<u>Доказательство.</u>

Пусть ω является периодом функции $\cos z$. Тогда $\cos(z + \omega) = \cos z$ и при $z = \pi/2$ имеем $\cos(\omega + \pi/2) = \cos \pi/2 = 0$. Следовательно, $e^{i(\omega+\pi/2)} + e^{-i(\omega+\pi/2)} = 0$ или $e^{2i(\omega+\pi/2)} = -1$, логарифмируя, будем иметь:

$$2i(\omega + \pi/2) = Ln(-1) = \ln|-1| + i \cdot Arg(-1) = i(\pi + 2\pi k).$$

Тогда $2\omega + \pi = \pi + 2\pi k$ или $\omega = \pi k$. Поскольку $\cos(0+\omega) = \cos 0 = 1$, то $\cos \pi k = 1$ и $k = 2m$. Значит $\omega = 2\pi m$, $m \in \mathrm{Z}$. ▲

Аналогично устанавливается, что $T = 2\pi$ является основным периодом и функции $\sin z$.

<u>Теорема 10.1.2.</u> Для основных тригонометрических функций справедливы теоремы сложения:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \sin z_2 \cdot \cos z_1. \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

<u>Доказательство.</u>

Требуемые соотношения получаются как следствия теоремы сложения для показательной функции. Заменяя в (10.1.4) z суммой $z_1 + z_2$, находим:

$$\cos(z_1 + z_2) + i \cdot \sin(z_1 + z_2) = e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} =$$

$$= (\cos z_1 + i \cdot \sin z_1) \cdot (\cos z_2 + i \cdot \sin z_2) =$$

$$= (\cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2) + i \cdot (\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1).$$

Подставляя в полученное равенство вместо z_1 и z_2 соответственно числа $(-z_1)$ и $(-z_2)$, с учетом (10.1.5) получаем:

$$\cos(z_1 + z_2) - i \cdot \sin(z_1 + z_2) =$$

$$= (\cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2) - i \cdot (\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1).$$

Складывая и вычитая почленно два последних равенства, имеем (10.1.6). ▲

<u>Замечание.</u> 1. Равенства (10.1.6) являются основными в теории тригонометрических функций. В частности, в них содержатся так называемые формулы приведения аргумента. В самом деле, полагая в (10.1.6) $z_1 = z$, $z_2 = \pi/2$, получаем:

$$\cos(z + \pi/2) = \cos z \cdot \cos \pi/2 - \sin z \cdot \sin \pi/2 = -\sin z,$$

$$\sin(z + \pi/2) = \sin z \cdot \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \cdot \cos z = \cos z.$$

При $z_1 = z$, $z_2 = \pi$ находим другую пару формул приведения:

$$\cos(z+\pi) = -\cos z, \quad \sin(z+\pi) = -\sin z.$$

2. Полагая в первой из формул (10.1.6) $z_1 = z$, $z_2 = -z$, имеем:

$$\cos(z - z) = \cos z \cdot \cos z + \sin z \cdot \sin z, \text{ т.е. } \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

3. Мы видим, что все известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного переменного сохраняются и в комплексной области. Однако из формулы

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ нельзя заключить, что $|\cos z| \le 1$ и $|\sin z| \le 1$, поскольку $\sin^2 z$ и $\cos^2 z$ не являются, вообще говоря, действительными неотрицательнуми числами.

4. Вслед за функциями $\cos z$ и $\sin z$ могут быть определены и изучены другие тригонометрические функции комплексного переменного, например, такие, как

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \cos ec\, z = \frac{1}{\sin z}.$$

§ 2. Гиперболические функции

С основными тригонометрическими функциями тесно связаны гиперболические функции $ch\, z$ и $sh\, z$, которые определяются посредством формул:

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \qquad (10.2.1)$$

При действительных значениях аргумента функции (10.2.1), называемые соответственно гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом, принимают действительные значения и совпадают с известными из анализа функциями $ch\, x$ и $sh\, x$. Гиперболический косинус $ch\, x$ — четная функция, она убывает на полуинтервале $-\infty < x \le 0$ от ∞ до 1, а затем возрастает на полуинтервале $0 \le x < \infty$ от 1 до ∞. Гиперболический синус $sh\, x$ — нечетная функция, она возрастает на всей числовой прямой от -∞ до +∞, причем $sh\, 0 = 0$.

Сравнивая гиперболические функции (10.2.1) с основными тригонометрическими функциями (10.1.3), легко заметить, что между ними существует тесная связь:

$$ch\, z = \cos(iz), \quad sh\, z = i \cdot \sin(iz). \qquad (10.2.2)$$

Из (10.2.2) вытекает важное соотношение:

$$ch^2 z - sh^2 z = 1. \qquad (10.2.3)$$

С помощью функций (10.2.1) можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 10.2.1. Основные тригонометрические функции (10.1.3) могут принимать сколь угодно большие по модулю значения.

Доказательство.

Найдем действительные и мнимые части, а также модули функций $\cos z$ и $\sin z$, положив $z = x + iy$:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) = \cos x \cdot ch\, y - i \cdot \sin x \cdot sh\, y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos(iy) + \sin(iy) \cdot \cos x = \sin x \cdot ch\, y + i \cdot \cos x \cdot sh\, y.$$

Отсюда имеем:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\cos(x+iy)=\cos x\cdot ch\, y,\\
&\operatorname{Im}\cos(x+iy)=-\sin x\cdot sh\, y,\\
&\operatorname{Re}\sin(x+iy)=\sin x\cdot ch\, y,\\
&\operatorname{Im}\sin(x+iy)=\cos x\cdot sh\, y.
\end{aligned}
\qquad (10.2.4)
$$

Тогда для модулей функций $\cos z$ и $\sin z$, исходя из (6.4), получаем:

$$|\cos z|=\sqrt{(\cos x\cdot ch\, y)^2+(-\sin x\cdot sh\, y)^2}=\sqrt{ch^2 y-\sin^2 x},$$

$$|\sin z|=\sqrt{(\sin x\cdot ch\, y)^2+(\cos x\cdot sh\, y)^2}=\sqrt{sh^2 y+\sin^2 x}.$$

Из последних соотношений имеем следующие оценки:

$$ch\, y\ge|\cos z|\ge\sqrt{ch^2 y-1}=|sh\, y|,$$

$$\sqrt{sh^2 y+1}=ch\, y\ge|\sin z|\ge|sh\, y|.$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&|sh\, y|\le|\cos z|\le ch\, y,\\
&|sh\, y|\le|\sin z|\le ch\, y.
\end{aligned}
\qquad (10.2.5)
$$

Неравенства (10.2.5) показывают, что при $|y|\to\infty$ получаются следующие асимптотические оценки:

$$|\cos z|\sim\frac{1}{2}e^{|y|},\quad |\sin z|\sim\frac{1}{2}e^{|y|}. \qquad (10.2.6)$$

Оценки (10.2.6) показывают, что $|\cos z|$ и $|\sin z|$ могут принимать сколь угодно большие значения при достаточно больших значениях $|y|$. ▲

Замечание. 1. Поскольку $sh\, y\ne 0$ при $y\ne 0$, то из (10.2.6) вытекает, что $\cos z$ и $\sin z$ не могут обратиться в нуль вне действительной оси, т.е. уравнения $\cos x=0$ и $\sin x=0$ не имеют мнимых корней. Следовательно, корнями уравнения $\cos z=0$ будут числа $z={\pi}/{2}\,(2k-1)$, а уравнения $\sin z=0$ – числа $z=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. Несложно выводятся и формулы для производных тригонометрических и гиперболических функций:

$$(\cos z)'=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=-\sin z,$$

$$(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}=\cos z,$$

$$(ch\, z)'=(\cos(iz))'=-i\cdot\sin(iz)=sh\, z,$$

$$(sh\, z)'=(-i\cdot\sin(iz))'=-i\cdot i\cdot\cos(iz)=ch\, z.$$

Лекция 11

ОБЩАЯ СТЕПЕННАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. Степень с произвольным комплексным показателем

Чтобы ввести в рассмотрение такие функции как z^{α} и a^{z}, дадим определение степени с произвольным комплексным показателем. Пусть $a \neq 0,\ p \in \mathrm{Z},\ \ q \in \mathrm{N}$, причем ÍÎÄ $(p, q) = 1$. Тогда

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p} = \sqrt[q]{|a|^{p}} \cdot \left(\cos\frac{p \cdot Arg\ a}{q} + i \cdot \sin\frac{p \cdot Arg\ a}{q}\right). \qquad (11.1.1)$$

Равенство (11.1.1) при $q = 1$ определяет единственное число a^{p}. Если же $q > 1$, то (11.1.1) определяет ровно q различных значений $a^{\frac{p}{q}}$. Учитывая, что

$$\cos\frac{p \cdot Arg\ a}{q} + i \cdot \sin\frac{p \cdot Arg\ a}{q} = e^{i \cdot \frac{p}{q} \cdot Arg\ a} \quad \text{и} \quad \sqrt[q]{|a|^{p}} = e^{\ln\sqrt[q]{|a|^{p}}} = e^{\frac{p}{q} \cdot \ln|a|},$$

формула (11.1.1) перепишется в виде:

$$a^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \cdot \ln|a|} \cdot e^{i \cdot \frac{p}{q} \cdot Arg\ a} = e^{\frac{p}{q} \cdot (\ln|a| + i \cdot Arg\ a)} = e^{\frac{p}{q} \cdot Ln\ a}.$$

Определим теперь a^{α}, где α — произвольное действительное иррациональное число. Для $a > 0$ в курсе анализа задача решалась следующим образом: для последовательности рациональных чисел $\{r_k\}$, такой, что $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = \alpha$, полагали $a^{\alpha} = \lim\limits_{k \to \infty} a^{r_k}$. Следуя аналогичным путем, можно уже определить a^{α} для любого действительного или мнимого $a \neq 0$ и иррационального α.. А именно, для последовательности рациональных чисел $\{r_k\}$ $(\lim\limits_{k \to \infty} r_k = \alpha)$ и для фиксированного значения *Ln a*, скажем *ln a*, рассмотрим последовательность значений $a^{r_k} = e^{r_k \cdot \ln a}$, которая сходится при $k \to \infty$ к числу $e^{\alpha \cdot \ln a}$, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $\{r_k\}$. Его естественно считать одним из значений a^{α}. Множество же значений a^{α} будет задаваться равенством:

$$a^{\alpha} = e^{\alpha \cdot Ln\ a}, \qquad (11.1.2)$$

в котором берутся всевозможные значения *Ln a*.

Распространим теперь (11.1.2) на случай $\alpha \in \tilde{N}$. Во-первых, если $\alpha \in R \setminus Q$, то a^{α} имеет бесконечное множество различных значений, содержащихся в (11.1.2).

К примеру, двум различным значениям $Ln\ a$, скажем $Ln_1\ a$ и $Ln_2\ a$, отвечают два различных значения a^{α}, равные соответственно $e^{\alpha\cdot Ln_1 a}$ и $e^{\alpha\cdot Ln_2 a}$. Действительно, воспользовавшись тем, что равенство $e^{z_1}=e^{z_2}$ выполняется только при $z_1-z_2=2\pi i\cdot k$, $k\in Z$, имеем:

$$\alpha(Ln_1\ a-Ln_2\ a)=\alpha\cdot 2\pi i\cdot m,\quad m\neq 0,\, m\in Z. \qquad (11.1.3)$$

На основании (11.1.3) из равенства $2\pi i\cdot k=\alpha\cdot 2\pi i\cdot m$, $m\neq 0$, следует, что $\alpha = k/m$.

Замечание 1. Формула (11.1.2) даже при $a>0$, $\alpha\in R\setminus Q$, дает бесконечное множество различных значений a^{α}. Одно из них является действительным числом $e^{\alpha\cdot\ln a}$, которое совпадает с определением степени a^{α}, данным в курсе анализа. Все остальные значения являются мнимыми и определяются, следующим образом через (11.1.2):

$$a^{\alpha}=e^{\alpha\cdot Ln\, a}=e^{\alpha\cdot\ln a}\cdot e^{\alpha\cdot 2\pi ik},\quad k=\pm1,\pm2,\ldots .$$

Пример 1. Найдите все значения $1^{\sqrt{2}}$ и $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Решение.

Следуя (11.1.2), имеем:

$$1^{\sqrt{2}}=e^{Ln\,1^{\sqrt{2}}}=e^{\sqrt{2}Ln\,1}=e^{\sqrt{2}\cdot 2\pi ik},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Из всего бесконечного множества значений только одно будет действительным, это единица (при k=0). Аналогично, $(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\cdot Ln(-1)}=e^{\sqrt{2}(\ln|-1|+i\cdot Arg(-1))}=e^{\sqrt{2}\cdot(2k+1)\pi i}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Все бесконечное множество значений — мнимые числа.

▲

Замечание 2. Вообще говоря, все значения a^{α} в случае $a<0$, $\alpha\in R\setminus Q$ являются мнимыми числами:

$$a^{\alpha}=e^{\alpha\cdot(\ln|a|+(2k+1)\pi i)}=e^{\alpha\cdot\ln|a|}\cdot e^{\alpha\cdot(2k+1)\cdot\pi i},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Пример 2. Найдите все значения i^{i}.

Решение.

$$i^{i}=e^{i\cdot Ln\, i}=e^{i\cdot(\ln|i|+i\cdot Arg(i))}=e^{i\cdot(0+i\cdot(\pi/2+2\pi k))}=e^{-(\pi/2+2\pi r)}=e^{\frac{4k-1}{2}\pi},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Среди значений искомого выражения есть сколь угодно большие и сколь угодно малые действительные числа.

▲

Пример 3. Найдите все значения e^{α}, $\alpha\in R$.

Решение.

$$e^{\alpha}=e^{\alpha\cdot Ln\, e}=e^{\alpha\cdot(\ln|e|+i\cdot Arg(e))}=e^{\alpha\cdot(1+2\pi i\cdot k)}=e^{\alpha}\cdot e^{\alpha\cdot 2\pi i\cdot k},\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots ,$$

одно из значений e^{α} совпадает с действительным числом, а остальные – мнимые. Их конечное число при $\alpha \in Q$ и бесконечное число при $\alpha \in R \setminus Q$.

▲

<u>Замечание 3.</u> Для степени с произвольным показателем, вообще говоря, уже не справедливо правило сложения показателей при умножении степеней, а именно: $a^{\alpha_1} \cdot a^{\alpha_2} \neq a^{\alpha_1+\alpha_2}$, $a \neq 0$. В самом деле, с одной стороны

$$a^{\alpha_1} \cdot a^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \cdot Ln\, a} \cdot e^{\alpha_2 \cdot Ln\, a} =$$

$$= e^{\alpha_1 (Ln\, a + i\cdot Arg\,(a))} \cdot e^{\alpha_2 (Ln\, a + i \cdot Arg\,(a))} =$$

$$= e^{\alpha_1 \cdot \ln a + \alpha_1 \cdot 2\pi i \cdot k_1} \cdot e^{\alpha_2 \cdot \ln a + \alpha_2 \cdot 2\pi i \cdot k_2} =$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot \ln a + 2\pi i \cdot (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)},\ k_1, k_2 \in Z.$$

С другой стороны,

$$a^{\alpha_1+\alpha_2} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot Ln\, a} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot (\ln a + 2\pi i \cdot (\alpha_1+\alpha_2)\cdot m}, \quad m \in Z.$$

Например, $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \{4, 4\}$, а $4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \{4\}$.

§ 2. Общая степенная и общая показательная функции

На основании определения степени a^{α} можно рассматривать две многозначные функции такие, как z^{α} и a^{z}.

Функция $f(z) = z^{\alpha}$ – степень с произвольным показателем – определена при $z \neq 0$.

I. Если $\alpha \in \mathrm{Z}$, то z^{α} является однозначной функцией частного вида.

II. Если $\alpha = p/q$, $p \in \mathrm{Z}$, $q \in \mathrm{N}$ и НОД $(p, q) = 1$, то имеем представление:

$$z^{\alpha} = \left(\sqrt[q]{z}\right)^{p}. \qquad (11.2.1)$$

Функция (11.2.1) является многозначной (q-значной) по причине q-значности $\sqrt[q]{z}$. Для нее точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления порядка $q-1$. Если в $\overline{C}$ провести разрез, соединяющий точки ветвления, то в разрезанной плоскости можно выделить q различных однозначных дифференцируемых ветвей функции (11.2.1). Эти ветви будут непрерывно переходить одна в другую, если точкой z обходить кривую, огибающую начало координат (бесконечно удаленную точку).

III. Если α не есть действительное рациональное число (оно иррационально или является мнимым), то

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot Ln\, z}. \qquad (11.2.2)$$

Эта формула определяет бесконечнозначную функцию, только $z = 0$ и $z = \infty$ будут точками ветвления бесконечного порядка, т.к. они являются таковыми для функции $Ln\, z$.

Общая показательная функция a^z $(a \neq 0)$ определена при всех $z \in C$ и все ее значения содержатся в формуле типа (11.1.2):

$$a^z = e^{z \cdot Ln\, a} \qquad (11.2.3)$$

Для получения определенной однозначной ветви достаточно зафиксировать одно из значений $Ln\, a = b$, а если брать все возможные значения $Ln\, a$, то получим все возможные однозначные ветви функции (11.2.3). Но два значения $Ln\, a$ отличаются на слагаемое $2\pi i \cdot k$, следовательно, две ветви функции (11.2.3) различаются множителем вида $e^{z \cdot 2\pi \cdot k}$, который представляет собой однозначную всюду дифференцируемую функцию, которая принимает значение, равное единице, при целых действительных значениях z $(e^{2\pi i \cdot n} = 1)$. Каждая ветвь функции (11.2.3) является непрерывной и однозначной во всей конечной плоскости *C*. Двигаясь вдоль любой замкнутой кривой и возвратясь в исходную точку *z*, мы получим то же самое значение функции e^{bz}, $b = Ln\, a$ — фиксированное значение.

Итак, многозначная функция (11.2.3) не имеет ни одной точки ветвления и ее однозначные непрерывные ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Поэтому на них можно смотреть как на самостоятельные, не связанные друг с другом целые функции.

Замечание. Фиксируя одну из ветвей функции $z = a^w = e^{bw}$, $b = Ln\, a$, можно рассматривать функцию, обратную по отношению к этой ветви:

$$w = \frac{1}{b} \cdot Ln\, z, \quad b = \ln a + 2\pi i \cdot k_0, \quad k_0 \in Z. \qquad (11.2.4)$$

Эта функция отличается от $Ln\, z$ постоянным множителем $\frac{1}{b}$. Из (11.2.4) заключаем, что $z = e^{bw} = a^w$, т.е. *w* можно рассматривать как лигарифм числа *z* по основанию *a*. Таким образом, логарифм произвольного комплексного числа по некоторому, вообще говоря, комплексному основанию $a \neq 0$, определяется на основании (11.2.4):

$$Log_a z = \frac{Ln\, z}{Ln\, a}.$$

Лекция 12

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§1. Интеграл вдоль кривой

Наиболее часто применяются интегралы от функций комплексного переменного вдоль линий на комплексной плоскости. Предположим, что функция $f(z) = u(z) + iv(z)$ непрерывна в некоторой области $D \subset C$. Пусть в этой области уравнением $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, задана кусочно-гладкая ориентированная кривая L с начальной точкой $z_0 = \gamma(\alpha)$ и конечной точкой $z^* = \gamma(\beta)$. Можно было бы ограничиться и более слабым предположением, что функция *f(z)* определена и кусочно-непрерывна только на кривой *L*, а не во всей области *D*, т.е. сложная функция $\Phi(t) = f(\gamma(t)) = \varphi(t) + i\psi(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$ непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода. Разобьем теперь кривую L на малые дуги $z_0z_1, z_1z_2, \ldots, z_{n-1}z_n, z_n = z^*$, имеющие общими концами точки разбиения $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. На каждой из дуг $z_{k-1}z_k$ выбираем произвольную точку ξ_k, которая, вообще говоря, может совпадать с одной из концевых точек z_{k-1} или z_k, и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}. \qquad (12.1.1)$$

При фиксированных кривой L и функции *f(z)* сумма (12.1.1) зависит, вообще говоря, от выбора точек разбиения z_k и точек ξ_k (рис. 12.1).

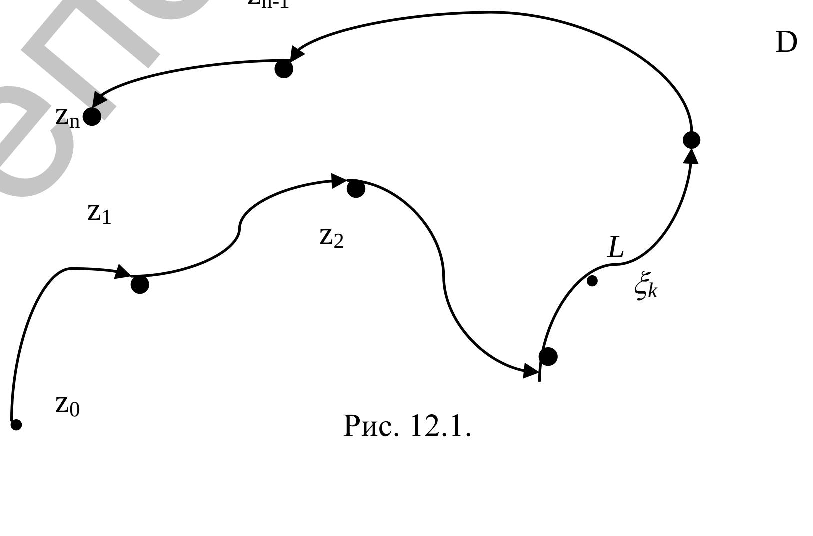

Рис. 12.1.

Пусть d_k – диаметр дуги $z_{k-1}z_k$, т.е. максимум расстояния между двумя произвольными точками этой дуги, а $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ – диаметр разбиения.

Определение 12.1.1. Если существует конечный предел интегральных сумм (12.1.1) при $d \to 0$ и он не зависит ни от способа разбиения L на части, ни от выбора точек ξ_k, то его называют интегралом функции *f(z)*, т.е.

$$\lim_{d \to 0} \sigma = \int_L f(z)dz.$$

Принимая во внимание равенства

$z = x + iy$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\xi_k = \zeta_k + \eta_k$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, выделим в интегральной сумме (12.1.1) действительную и мнимую части:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}(u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k)$$

или

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (12.1.2)$$

Из (12.1.2) следует, что интеграл от функции комплексного переменного существует, если существуют оба криволинейных интеграла.

Отметим простейшие свойства интеграла.

- $\int_L \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_L f_k(z)$, $c_k \in C$ (линейность интеграла);
- $\int_{\sum_{k=1}^{n} L_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz$ (аддитивность интеграла);
- $\int_L f(z)dz = -\int_{\overline{L}} f(z)dz$, где $\overline{L}$ – противоположно ориентированная кривая к кривой L;
- $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds$, где $ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Для вычисления интеграла от функции комплексного переменного будем исходить из формулы (12.1.2). Пусть кривая L задана уравнением $z=\gamma(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Тогда параметрические уравнения этой кривой выглядят так:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},$$

причем

$dz=\gamma'(t)dt=[\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt$.

Подставляем вместо x и y их значения из параметрических уравнений и вычисляем полученный определенный интеграл:

$$\int_L f(z)dz=\int_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_L v(x,y)dx+u(x,y)dy=$$

$$=\int_\alpha^\beta \left\{u(\varphi,\psi)\varphi'(t)-v(\varphi,\psi)\psi'(t)\right\}dt+i\int_\alpha^\beta \left\{v(\varphi,\psi)\varphi'(t)+u(\varphi,\psi)\psi'(t)\right\}dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta [u+iv][\varphi'(t)+i\psi'(t)]dt=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Итак $\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Пример. Вычислить интеграл от функции $f(z)=(z-a)^{-n}$, $n\in N$, вдоль кривой L: $|z-a|=R$.

Решение.

Кривая L представляет собой окружность с центром в точке a. Поэтому $z-a=R\cdot e^{it}$ и $dz=Rie^{it}dt,\ 0\le t\le 2\pi$. А тогда

$$\int_{|z-a|=R}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{it}dt}{R^n e^{nit}}=\frac{i}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)it}dt=$$

$$=\begin{cases} i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i,\ \ n=1, \\ \frac{i}{R^{n-1}}\frac{e^{(1-n)it}}{(1-n)i}\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}=\frac{1}{(1-n)R^{n-1}}\left(e^{(1-n)2\pi i}-1\right)=0,\ n\ne 1. \end{cases}$$

▲

§ 2. Интегральная теорема Коши

Эта теорема является одной из основных теорем в теории аналитических функций. В ней выясняются условия, при которых интеграл в односвязной области не зависит от пути интегрирования или интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Теорема 12.2.1 (Коши). Если функция *f(z)* является аналитической в односвязной области *D*, то интеграл от нее по любой замкнутой кривой *L*, лежащей в этой области, равен нулю.

Доказательство.

Докажем теорему при дополнительном предположении, что $f'(z) \in C(D)$ (далее это будет показано в случае аналитичности функции). Согласно (12.1.2) имеем:

$$\oint_L f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \oint_L u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0$$

и

$$\oint_L v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0.$$

Из курса математического анализа известно, что если *D* односвязная область, а функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial Q/\partial x$, $\partial P/\partial y$ непрерывны в этой области, то

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Leftrightarrow \partial Q/\partial x = \partial P/\partial y, \ \forall (x,y) \in D.$$

Поскольку функция *f(z)* является аналитической в области *D*, то $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ будет непрерывной в этой области, т.е. $f(z) \in C(D) \Leftrightarrow u(x,y), v(x,y) \in C(D)$. Так как по предположению $f'_z = u'_x + iv'_x \in C(D)$, то $u'_x, v'_x \in C(D)$. А поскольку *f(z)* аналитическая, то $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ и $u'_y, v'_y \in C(D)$. Равенство нулю интегралов $\oint_L u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0$ и $\oint_L v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$, следует из уравнений Коши-Римана (4.2.2): $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ и $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x$. Поэтому $\int_L f(z)dz = 0$.

▲

Замечание 1. Согласно интегральной теореме Коши интеграл от аналитической в односвязной области *D* не зависит от пути интегрирования, а определяется началом и концом кривой. Очевидно, что интеграл от *f(z)* не будет меняться при непрерывной деформации контура. Если вспомнить понятие гомотопии 2-х кривых, то интегральную теорему Коши можно сформулировать следующим образом: если *f(z)* аналитическая в односвязной области *D*, а кривые L_1 и L_2 гомотопны, то $\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz$.

2. В первой формулировке теоремы Коши содержится требование аналитичности функции *f(z)* как внутри контура, так и на самом контуре. Оказывается, что свойства функции на кривой интегрирования можно ослабить, заменив аналитичность непрерывностью: $\int\limits_{L} f(z)dz = 0$, если подинтегральная функция *f(z)* аналитична в односвязной области *D* и непрерывна на ее границе $L = \partial D$.

3. Требование односвязности области *D* в теореме Коши является существенным. Например, если рассмотреть функцию *f(z)=1/z*, то она будет аналитической в кольце $0 < |z| < 2$ (точка *z=0* является особой для рассматриваемой функции) и получаем:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i(2\pi - 0) = 2\pi i.$$

4. Оказывается справедливой и теорема, обратная теореме Коши.

<u>Теорема 12.2.2</u> (Морер). Если функция *f(z)* непрерывна в односвязной области *D* и интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю, то *f(z)* – аналитическая в этой области.

Интегральная теорема Коши и теорема Морера позволяют дать новое определение аналитической в области *D* функции, которое равносильно первоначальному.

<u>Определение 12.2.1.</u> Функция *f(z)* называется аналитической в области *D*, если она непрерывна в этой области, и интеграл вдоль любого замкнутого контура, лежащего в этой области, равен нулю.

§3. Обобщение интегральной теоремы Коши на случай многосвязной области

Всякая многосвязная область с помощью разрезов может быть приведена к односвязной. Система разрезов выбирается не однозначно. Пусть *D* – *(n+1)*-связная область, ограниченная кривыми L_0 (внешний контур), $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (внутренние контуры), а функция *f(z)* является аналитической в области D и непрерывной на ее границе

$$\partial D = \bigcup_{k=0}^{n} L_k \qquad \text{(рис. 12.2).}$$

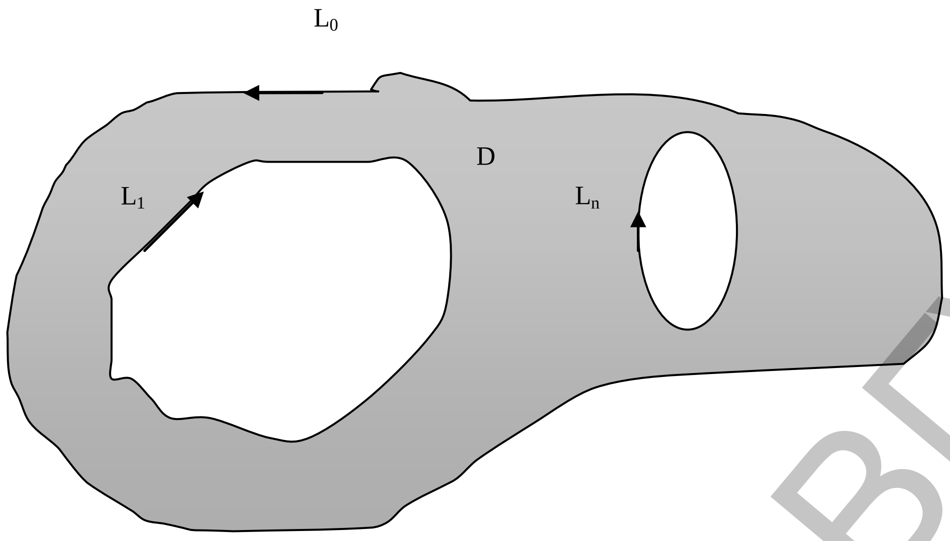

Рис 12.2.

Проведем разрезы γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, по отрезкам (для простоты), которые соединяют границы кривых L_i и L_0. Эта система разрезов сделает нашу область односвязной с границей $\partial\tilde{D} = \bigcup_{k=0}^{n} L_k \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$. Так как функция *f(z)* аналитична в этой односвязной области и непрерывна, включая границу $\partial\tilde{D}$, то по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\partial\tilde{D}} f(z)dz = 0$ (рис. 12.3).

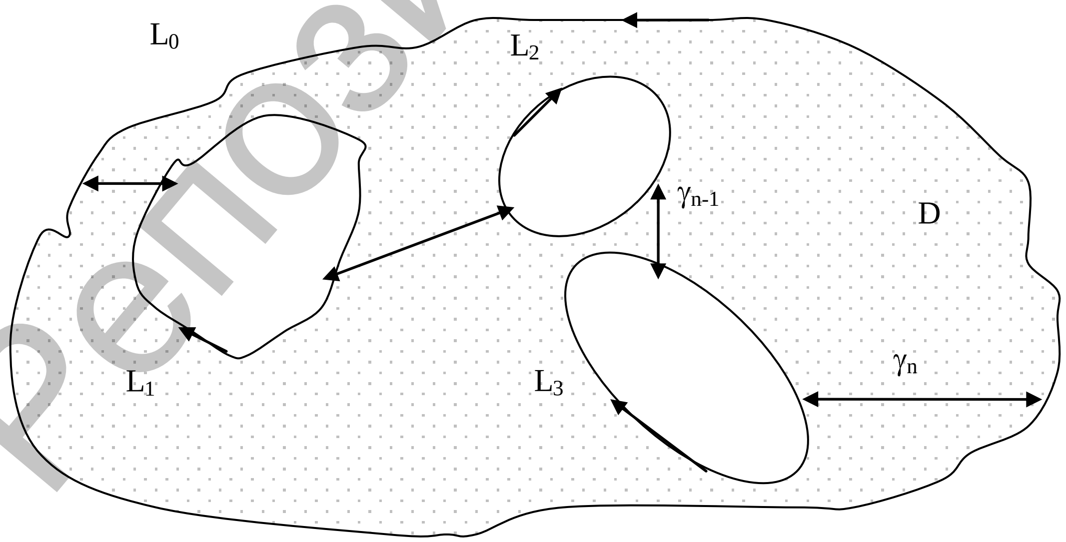

Рис. 12.3.

Условимся обходить границу односвязной области $\partial\tilde{D}$ так, чтобы она оставалась слева при движении по границе. Так как каждый разрез при этом пробегается дважды и в противоположных направлениях, то $\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz = 0. \tag{12.3.1}$$

Формула (12.3.1) выражает интегральную теорему Коши для многосвязной области. Если на внутренних контурах изменить направление движения (направление движения будет совпадать с направлением движения по внешнему контуру), то

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz. \tag{12.3.2}$$

Таким образом, интегральная теорема Коши для многосвязной области (ее еще называют теоремой о составном контуре) может быть сформулирована так.

<u>Теорема 12.3.1.</u> Если функция *f(z)* аналитична в *(n+1)*-связной области D и непрерывна вплоть до границы, т.е. $f \in C(\overline{D})$, то интеграл от этой функции по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам (все контуры при этом проходятся в одинаковом направлении).

Лекция 13

ИНТЕГРАЛ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

§ 1. Основная формула интегрального исчисления

До сих пор нами рассматривался интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ в предположении, что $f \in C(L)$. Будем теперь считать, что функция *f(z)* является аналитической в некоторой односвязной области *D* и кривая интегрирования *L* целиком находится в этой области, т.е. $L \subset D$. В этом случае значение интеграла $\int\limits_L f(z)dz$, согласно интегральной теореме Коши, не зависит от пути интегрирования, а определяется только начальной и конечной точками кривой *L* (рис. 13.1). Если z_0 – начальная точка кривой, а z — конечная, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz. \qquad (13.1.1)$$

Будем как обычно называть точки z_0 и z соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

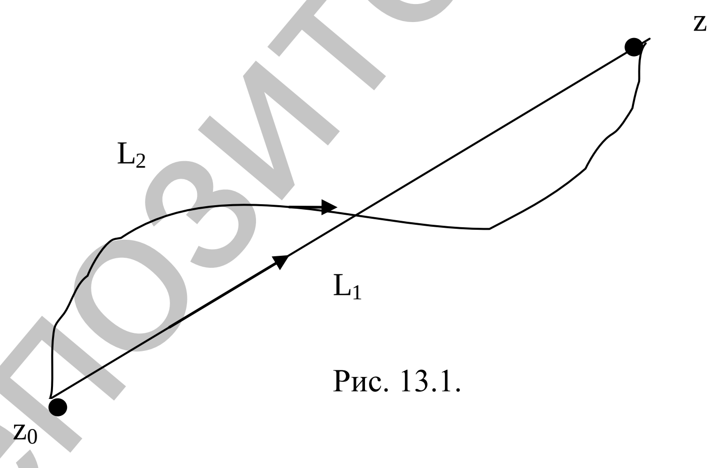

Рис. 13.1.

Пусть z_0 будет фиксированным числом, а z – переменная точка. Тогда рассмотрим интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ как функцию верхнего предела:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi. \qquad (13.1.2)$$

Определение 13.1.1. Функция *Φ(z)* называется первообразной для функции $\varphi(z)$ в области *D*, если *Φ(z)* является аналитической в этой области и $\forall z \in D \quad \Phi'(z) = \varphi(z)$.

Покажем, что $F(z)$ является первообразной для *f(z)*.

Теорема 13.1.1 Пусть $f(z)$ — функция, непрерывная в области *D*, для которой интегралы вдоль любых спрямляемых кривых, принадлежащих этой области, зависят только от начальной и конечной точек кривых. Тогда интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

является аналитической функцией в области *D*, причем $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Доказательство.

Покажем, что $F'(z_1) = f(z_1), \forall z_1 \in D$. Пусть $U_{z_1}^{\rho}$ — окрестность точки z_1 целиком расположенная в *D*. Тогда для любого приращения Δz, $|\Delta z| < \rho$, точка $z_1 + \Delta z \in U_{z_1}^{\rho}$. Найдем разность значений функции $F(z)$ в точках z_1 и $z_1 + \Delta z$.

$F(z_1) = \int_L f(\xi)d\xi$, L — произвольный спрямляемый путь, соединяющий z_0 и z_1, $L \subset D$. Пусть λ — отрезок прямой, соединяющий точки z_1 и $z_1 + \Delta z$ (рис. 13.2). Тогда $L + \lambda$ — спрямляемая кривая с началом в точке z_0 и концом в $z_1 + \Delta z$, лежащая в области *D*. Поэтому

$$F(z_1 + \Delta z) = \int_{L+\lambda} f(\xi)d\xi = \int_L f(\xi)d\xi + \int_\lambda f(\xi)d\xi$$

и

$$F(z_1 + \Delta z) - F(z_1) = \int_\lambda f(\xi)d\xi .$$

И далее

$$\frac{F(z_1 + \Delta z) - F(z_1)}{\Delta z} - f(z_1) = \frac{\int_\lambda f(\xi)d\xi - f(z_1)\Delta z}{\Delta z} =$$

$$= \left\{ \Delta z = \int_\lambda d\xi \Rightarrow f(z_1)\,\Delta z = \int_\lambda f(z_1)d\xi \right\} = \frac{\int_\lambda \left[f(\xi) - f(z_1) \right] d\xi}{\Delta z} .$$

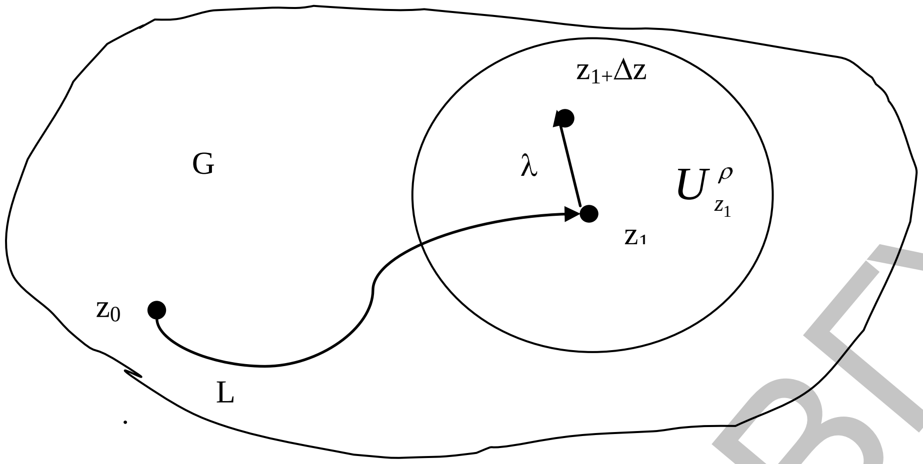

Рис. 13.2.

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_1 $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|z - z_1| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$. Взяв $\rho = \delta$, находим:

$$\left|\frac{F(z_1+\Delta z) - F(z_1)}{\Delta z} - f(z_1)\right| = \left|\frac{\int\limits_{\lambda}\left[f(\xi) - f(z_1)\right]d\xi}{\Delta z}\right| \le \frac{\varepsilon \cdot \ddot{a}\ddot{e}.\lambda}{|\Delta z|} = \varepsilon,$$ поскольку $\lambda \subset U_{z_1}^{\delta}$, $\ddot{a}\ddot{e}.\lambda = |\Delta z|$. Полученное неравенство доказывает, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z_1+\Delta z) - F(z_1)}{\Delta z} = f(z_1) = F'(z_1).$$

В силу произвольности z_1 теорема доказана.

▲

<u>Теорема 13.1.2.</u> Любая первообразная функции $f(z)$ — функция $\Phi(z)$ – может быть записана в виде

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C, \qquad (13.1.3)$$

где $C = c_1 + ic_2$ – комплексная постоянная.

<u>Доказательство.</u>

Положим

$$\omega(z) = \Phi(z) - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = u(x,y) + iv(x,y).$$

Тогда

$$\omega'(z) = \Phi'(z) - f(z) = f(z) - f(z) \equiv 0, \; z \in D.$$

С другой стороны

$$\omega'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0 .$$

Значит $u(x,y)=c_1$, $v(x,y)=c_2$, т.е. $\omega(z)=u(x,y)+iv(x,y)=c_1+ic_2$. ▲

Полагая в формуле (13.1.3) $z=z_0$, имеем $\Phi(z_0)=C$. Откуда получаем

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=\Phi(z)-\Phi(z_0). \qquad (13.1.4)$$

Замечание. Полученный результат по форме совпадает с известной формулой Ньютона–Лейбница и сводит вычисление интеграла от аналитической функции $f(z)$ к отысканию какой-либо первообразной этой функции. Оказываются справедливыми и все приемы вычисления интегралов, основанные на формуле (13.1.4), например, интегрирование по частям, интегрирование методом замены переменных.

Пример 1. Вычислите интеграл $\int_L \frac{\ln\xi}{\xi}d\xi$, где L – дуга параболы $y^2=1-x$ с началом в точке $z=1$ и концом в $z=i$.

Решение.

В односвязной области $G:-\pi<\arg z<\pi$, в которой лежит дуга L, одной из первообразных для $\frac{\ln z}{z}$ является функция $\frac{\ln^2 z}{2}$, отсюда

$$\int_L \frac{\ln\xi}{\xi}d\xi=\left.\frac{\ln^2 z}{2}\right|_1^i=\frac{1}{2}\left(\ln^2(i)-\ln^2(1)\right)=-\frac{\pi^2}{8}. \qquad ▲$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L \frac{d\xi}{\xi}$, где L – спрямляемая кривая с началом в точке z' и концом в z'', не проходящая через начало координат.

Решение

Рассмотрим случай, когда L помещается в области G – плоскости с разрезом вдоль некоторого луча, выходящего из начала координат. Фиксируем непрерывную ветвь $Arg\, z$ в области G, скажем $Arg^* z$. Пусть $Arg^* z'=\varphi_1$ и $Arg^* z''=\varphi_2$. Соответствующей однозначной ветвью $Ln\, z$ в G будет $Ln^* z=\ln|z|+iArg^* z$. Это и есть одна из первообразных для подинтегральной функции в области G. Значит

$$\int_L \frac{d\xi}{\xi}=Ln^* z''-Ln^* z'=\ln|z''|-\ln|z'|+i(\varphi_2-\varphi_1). \qquad ▲$$

§ 2. Интегральное определение логарифмической функции

Пользуясь теоремой о составном контуре, будем изучать интегралы от аналитических функций в многосвязной области. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в многосвязной области *G*. Если $\int\limits_L f(\xi)d\xi = 0$ для каждой замкнутой спрямляемой кривой *L*, то

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \tag{13.2.1}$$

есть однозначная аналитическая функция от *z*, первообразная для $f(z)$. Рассмотрим теперь случаи, когда в области *G* существуют замкнутые контуры (по крайней мере один), для которых $\int\limits_L f(\xi)d\xi \neq 0$.

К примеру, рассматривая функцию $1/z$ в области $z \neq 0$, ранее было замечено, что $\oint\limits_{|\xi|=1} \dfrac{d\xi}{\xi} = 2\pi i$. В таком случае для любых точек $z, z_0 \in G$ найдутся два пути, соединяющих эти точки, скажем L_1 и L_2, такие, что $\int\limits_{L_1} f(\xi)d\xi \neq \int\limits_{L_2} f(\xi)d\xi$. Рассмотрим этот аспект более подробно. Пусть для простоты область *G* будет двухсвязной и *L* — замкнутый спрямляемый контур, расположенный в ней. L_1 — путь, соединяющий точки z_0 и z, расположенные вне *L*; L_2 — другой путь, соединяющий эти же точки. Он строится следующим образом: из начальной точки z_0 идем в какую-либо точку контура *L*, обходим один раз этот контур против часовой стрелки, возвращаемся обратно в точку z_0 и по пути L_1 приходим в конечную точку z. Обозначив начальную точку z_0, конечную точку z и точку контура *L* соответственно А, В и С (рис. 13.3), получаем:

$$\int\limits_{L_2} f(\xi)d\xi - \int\limits_{L_1} f(\xi)d\xi = \int\limits_{AC} f(\xi)d\xi + \oint\limits_{L} f(\xi)d\xi + \int\limits_{CA} f(\xi)d\xi = \oint\limits_{L} f(\xi)d\xi \neq 0.$$

Таким образом, если определить $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ как множество значений интегралов от $f(z)$ по всевозможным спрямляемым путям $\Lambda \subset G$, соединяющим точки z_0 и z, то каждому значению z будет соответствовать по крайней мере два различных значения интеграла $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$. Итак, в данном случае функция (13.2.1) будет многозначной в области *G*.

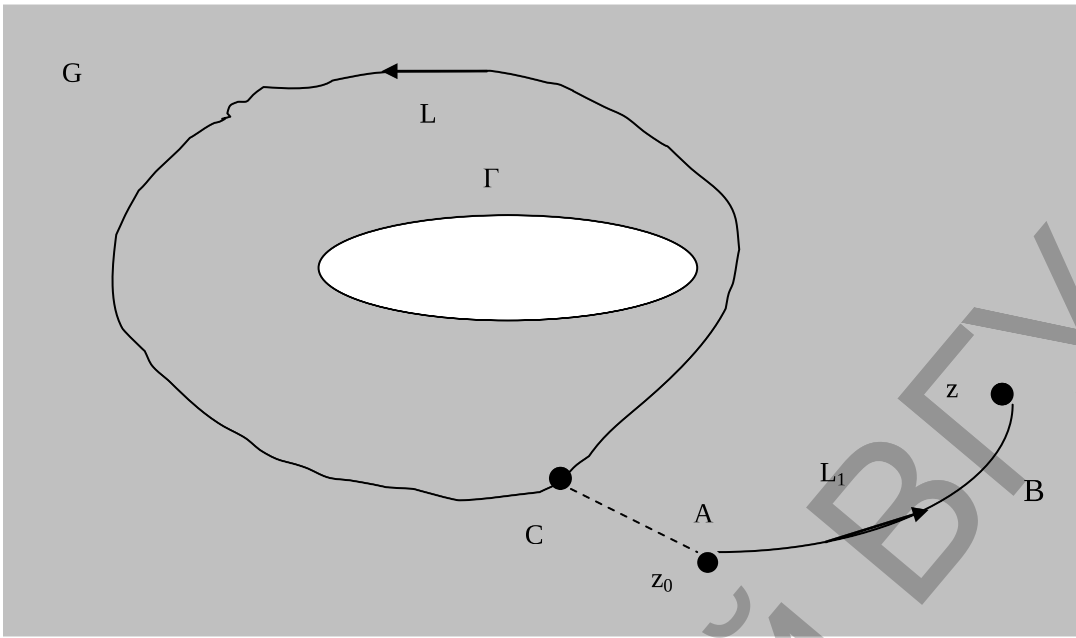

Рис. 13.3.

Покажем, как можно выделить однозначные аналитические ветви функции (13.2.1) в любой односвязной области $G^{'} \subset G$. Фиксируем $z_0 \in G,\quad z_1 \in G^{'}$ и некоторый путь L_0, соединяющий эти точки. Этому соответствует выбор значения

$$F(z_1) = \int_{L_0} f(\xi)d\xi. \qquad (13.2.2)$$

Пусть z — произвольная точка, расположенная в односвязной области $G^{'}$ и λ — произвольная кривая, соединяющая точку z_1 с z и лежащая в $G^{'}$ (рис. 13.4). Тогда интеграл $\int_{\lambda} f(\xi)d\xi$ не зависит от выбора кривой λ и является в области $G^{'}$ однозначной аналитической функцией z. Положим $\varphi(z) = \int_{\lambda} f(\xi)d\xi$. Тогда $\varphi^{'}(z) = f(z),\quad z \in G^{'}$, и имеем:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \int_{L_0+\lambda} f(\xi)d\xi = \int_{L_0} f(\xi)d\xi + \int_{\lambda} f(\xi)d\xi = \int_{L_0} f(\xi)d\xi + \varphi(z) = \\ &= F(z_1) + \varphi(z). \end{aligned} \qquad (13.2.3)$$

Функция $F_1(z)$, определяемая (13.2.3), является однозначной аналитической функцией от переменного z в односвязной области $G^{'}$, т.к. отличается от $\varphi(z)$ на постоянное слагаемое $F(z_1)$, определяемое равенством (13.2.2).

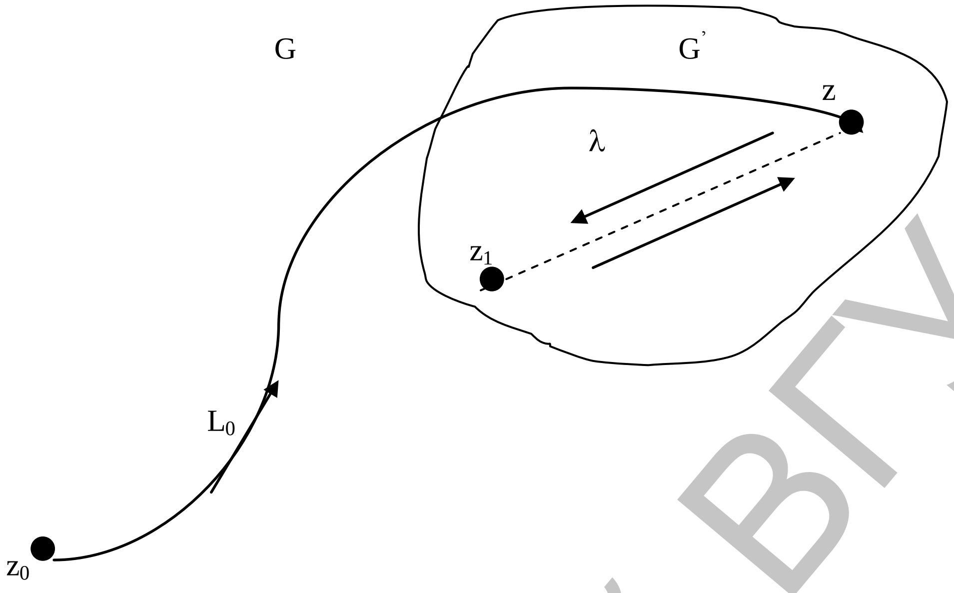

Рис. 13.4.

С другой стороны $F_1(z)$, $z \in G'$, есть одно из значений многозначной функции $F(z)$, определяемой (13.2.1), т.е. $F_1(z)$ является однозначной аналитической ветвью функции $F(z)$ в области G', причем $F_1'(z) = f(z)$. Выбирая для z_1 всевозможные значения $F(z_1)$ (они будут равны интегралам от $f(\xi)$ вдоль некоторых путей, соединяющих точку z_0 с точкой z_1), будем получать различные однозначные аналитические ветви функции $F(z)$ в односвязной области G'. Они отличаются друг от друга на постоянные слагаемые и являются различными первообразными для функции $f(z)$ в области G'.

К примеру, функция $f(z) = 1/z$ аналитична в области G — комплексная плоскость с выброшенной точкой $z = 0$. Пусть односвязная область G' представляет собой комплексную плоскость с разрезом, например, вдоль отрицательной части действительной оси. Положим $z_0 = z_1 = 1$, а L — произвольная спрямляемая кривая в области G с началом в z_0 и концом в z_1, т.е. замкнутая, причем точка $z = 0$ находится внутри кривой. Тогда имеем:

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int_L \frac{d\xi}{\xi} + \int_\lambda \frac{d\xi}{\xi}\,, \qquad (13.2.4)$$

где интеграл $\int_\lambda \frac{d\xi}{\xi}$ будем брать вдоль произвольной спрямляемой кривой λ, расположенной в области G' с началом в z_1 и концом в z. Одной из первообразных для $f(z) = 1/z$ в области G' служит ветвь логарифма — главное значение логарифма. По формуле Ньютона–Лейбница (13.1.4) находим:

$$\int_{\lambda}\frac{d\xi}{\xi}=\ln z-\ln 1=\ln z\text{, а }\int_{L}\frac{d\xi}{\xi}=2\pi i\cdot k,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots\ .$$

Отсюда находим интеграл (13.2.4):

$$\int_{1}^{z}\frac{d\xi}{\xi}=\ln z+2\pi i\cdot k=Ln\, z,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\dots\ .$$

Таким образом, все возможные значения $Ln\, z$ могут быть получены в результате интегрирования функции $f(z)=1/z$ вдоль кривых, соединяющих точки 1 и z в области $G=C\setminus\{0\}$.

§ 3. Интегральная формула Коши

Пусть замкнутый контур L разбивает плоскость комплексного переменного на две области D^{+} и D^{-}, а функция $w=f(z)$ является аналитической в D^{+} или в D^{-} и непрерывна вплоть до границы. Точка z ни от чего не зависит, а точка ξ — точка контура, т.е. она подчиняется уравнению контура; $z\neq\xi$, $z\in D^{+}$ или $z\in D^{-}$.

Определение 13.3.1. Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{L}\dfrac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$ называют интегралом Коши, величина $\dfrac{1}{\xi-z}$ является ядром Коши, а $f(\xi)$ — плотность интеграла Коши.

Интеграл Коши в общем случае представляет собой функцию, зависящую от параметра z.

Теорема 13.3.1. Пусть $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая в области G и на ее границе L, состоящей из одного или нескольких спрямляемых контуров, ориентированных положительно относительно области G. Тогда для всякой точки $z_0\in G$ справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}. \tag{13.3.1}$$

Доказательство.

Проведем окружность γ_ρ с центром в точке z_0 столь малого радиуса ρ, что замкнутый круг $K_\rho:|z-z_0|\le\rho$ целиком лежит внутри G (рис.13.5).

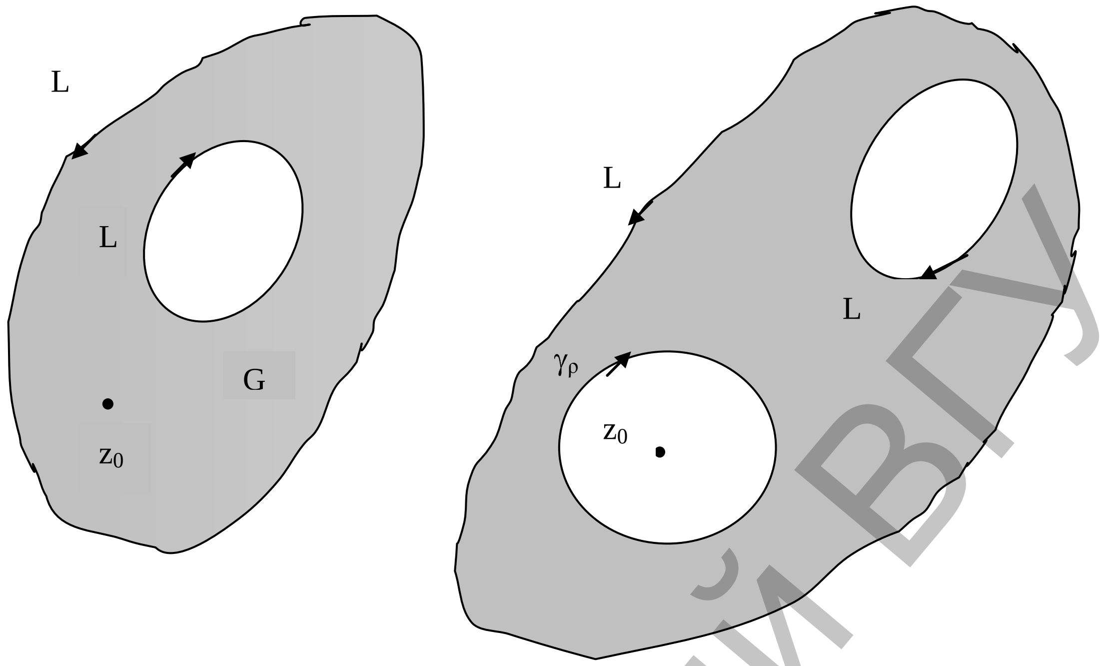

Рис. 13.5.

Тогда функция $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ будет аналитической в области G_ρ, полученной удалением из G круга K_ρ, и на границе G_ρ, состоящей из L и окружности γ_ρ. В силу теоремы о составном контуре интеграл от функции $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ по $L+\gamma_\rho$ — границе области G_ρ,— ориентированной положительно относительно этой области, равен нулю:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L+\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\overline{\gamma_\rho}}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0},$$

где $\overline{\gamma_\rho}$ — окружность, ориентированная противоположно γ_ρ. Интеграл, стоящий справа, не зависит от величины ρ и, следовательно, имеет предел при $\rho\to 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\overline{\gamma_\rho}}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z_0}. \qquad (13.3.2)$$

Для доказательства (13.3.1) осталось проверить, что предел (13.3.2) равен $f(z_0)$. Для этого покажем, что модуль соответствующей разности оценивается бесконечно малой величиной:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} - f(z_0) = \left\{\oint_{\gamma_\rho}\frac{d\xi}{\xi - z_0} = 2\pi i\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} - \frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{d\xi}{\xi - z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}d\xi.$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0, $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ будет выполняться при всех $z \in U_{z_0}^{\delta}$. И для значений $\rho < \delta$ получаем:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\xi\in\gamma_\rho}\left|\frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0}\right| \cdot 2\pi\rho < \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot 2\pi\rho = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = f(z_0)$.

▲

Замечание. 1. Мы доказали, что $\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = f(z_0), \quad z_0 \in G$.

Если же $z_0 \notin \overline{G}$, то подинтегральная функция $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{z - z_0}$ будет аналитической всюду в области G и на ее границе L (функция $f(z)$ аналитична в $\overline{G}$, $z - z_0 \ne 0$ при $z \in \overline{G}$). Тогда, согласно интегральной теореме Коши, интеграл по границе области G от функции $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{z - z_0}$ равен нулю. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in G, \\ 0, & z_0 \notin \overline{G}. \end{cases}$$

2. Для точки $z_0 \in L$ интеграл Коши, вообще говоря, не определен не только как собственный, но и как несобственный интеграл.

3. Рассмотрим случай, когда L — окружность с центром в точке z_0 радиуса ρ. Запишем уравнение L в виде: $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$. Применив интегральную формулу Коши, получим:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi})i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0 + \rho e^{i\varphi})d\varphi.$$

Последний интеграл можно рассматривать как среднее арифметическое значение функции $f(z)$ на окружности $|z - z_0| = \rho$.

Лекция 14

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 1. Теорема Коши–Адамара

При изучении функций комплексного переменного весьма важное значение имеет их представление, когда это возможно, в виде суммы ряда хорошо изученных функций. Одним из простейших классов таких рядов являются так называемые степенные ряды.

Определение 14.1.1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad (14.1.1)$$

где $z_0, a_n \quad (n=0,1,2,\dots)$ — фиксированные комплексные числа, а z — комплексное переменное. Такой ряд, вообще говоря, сходится при одних и расходятся при других значениях z. Сведения о том, где это происходит, дает следующая теорема.

Теорема 14.1.1 (Коши–Адамар). Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \Lambda$, то

- при $\Lambda = 0$ ряд (14.1.1) абсолютно сходится во всей плоскости;
- при $\Lambda = \infty$ он сходится только в одной точке $z = z_0$ и расходится при $z \neq z_0$;
- при $0 < \Lambda < \infty$ ряд (14.1.1) абсолютно сходится в круге $|z-z_0| < 1/\Lambda$ и расходится во внешности этого круга (при $|z-z_0| > 1/\Lambda$.

Доказательство.

Сразу же отметим, что ряд (14.1.1) всегда сходится в точке $z = z_0$ (его сумма равна a_0). С помощью признака Коши будем исследовать (14.1.1) на абсолютную сходимость при $z \neq z_0$, для чего будем рассматривать ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \cdot |z-z_0|^n. \qquad (14.1.2)$$

Вычисляя предел из условия теоремы, могут представиться случаи, перечисленные в заключении теоремы. Рассмотрим их в порядке очередности.

а) $\Lambda = 0$. Тогда получаем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0| \cdot 0 = 0.$$

В силу признака Коши ряд (14.1.2) сходится во всей комплексной плоскости, а, значит, ряд (14.1.1) абсолютно сходится при всех z.

б) $\Lambda = \infty$. При всех $z \neq z_0$ будем иметь:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0|\cdot\infty = \infty .$$

Общий член ряда (14.1.2) не стремится к нулю, следовательно, не стремится к нулю и общий член ряда (14.1.1). Отсюда и следует расходимость ряда (14.1.1) при $z \neq z_0$.

в) $0 < \Lambda < \infty$. При всех z имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0|\cdot\Lambda .$$

Если $|z-z_0|\cdot\Lambda < 1$ или $|z-z_0| < 1/\Lambda$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} < 1$ и ряд (14.1.2) сходится по признаку Коши, следовательно ряд (1.1) абсолютно сходится в круге $|z-z_0| < 1/\Lambda$. При $|z-z_0| > 1/\Lambda$ имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|z-z_0|^n} = |z-z_0|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0|\cdot\Lambda > 1.$$

В силу признака Коши общий член ряда (14.1.2) не стремится к нулю. Поэтому ряд (14.1.1) расходится при $|z-z_0| > 1/\Lambda$.

▲

Определение 14.1.2. Число $r = 1/\Lambda$ называют радиусом сходимости степенного ряда (14.1.1).

В связи с этим областью сходимости степенного ряда (14.1.1) является круг с центром в точке z_0 радиуса r: $K_r = \{z \in C \mid |z-z_0| < r\}$. Этот круг при $\Lambda = 0$ ($r = \infty$) совпадает со всей комплексной плоскостью.

Замечание. 1. При $0 < r < \infty$ ряд (14.1.1) в точках границы круга сходимости — окружности $|z-z_0| = r$ — может как сходиться, так и расходиться.

2. Из курса анализа известно, что степенной ряд $\sum\limits_{\hat{o}=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x_0, a_n, x \in R$, сходится абсолютно в некотором интервале $|x-x_0| < r$ и расходится при $|x-x_0| > r$. Этот результат является следствием теоремы Коши–Адамара.

Пример. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2+1}$.

Решение

Кругом сходимости заданного ряда будет $|z-i|<1$, т.к. $\Lambda=1$ и $r=1/\Lambda=1$. При $|z-i|=1$ ряд, составленный из абсолютных величин, т.е. $\sum_0^\infty \frac{1}{n^2+1}$, является сходящимся. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится в замкнутом круге $|z-i|\le 1$.

▲

§ 2. Равномерная сходимость степенного ряда

Определение равномерной сходимости функциональных рядов с комплексным переменным почти дословно повторяет таковое из действительного анализа. В виду его важности, приведем его здесь.

Определение 14.2.1. Пусть функции $f_k(z)$, $k\in \mathrm{N}$, определены на множестве $E\subset C$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ называется равномерно сходящимся на множестве $E_1\subset E$, если он сходится на E_1 и $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon)$, что неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right|<\varepsilon \qquad (14.2.1)$$

выполняется одновременно $\forall z\in E_1$ и $\forall n\ge N$. Введем обозначения:

$$S(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ , \qquad (14.2.2)$$

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z), \qquad (14.2.3)$$

$$R_n(z)=S(z)-S_n(z). \qquad (14.2.4)$$

Тогда из (14.2.1) и (14.2.4) для $\forall n\ge N$ выполняется $\sup_{z\in E_1}|R_n(z)|\le\varepsilon$ или $\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E_1}|R_n(z)|=0$. Обратно, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится на E_1 и $\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in E_1}|R_n(z)|=0$, то этот ряд сходится на подмножестве E_1 равномерно.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости, который доказывается так же, как и в курсе вещественного анализа.

Теорема 14.2.1. (признак Вейерштрасса). Пусть u_k — положительные постоянные такие, что $|f_k(z)|\le u_k$ для всех $z\in E_1$, а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E_1.

С использованием этого признака докажем теорему о равномерной сходимости степенных рядов.

Теорема 14.2.2. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, радиус сходимости которого $r > 0$, сходится равномерно в любом замкнутом круге $K_\rho = \{z \in C \mid |z - z_0| \le \rho, \rho < r\}$.

Доказательство.

Пусть точка z_1 лежит на границе круга, т.е. на окружности $|z_1 - z_0| = \rho$. Следовательно, она из круга сходимости $|z - z_0| < r$ (рис.14.1) и степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ в точке z_1 сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z - z_0|^n$.

Для всех $n \ge 0$ и $z \in K_\rho$ выполняется неравенство $|a_n (z - z_0)^n| \le |a_n| \cdot |z - z_0|^n$, откуда и следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ в замкнутом круге K_ρ.

▲

Замечание. Теоремы о равномерно сходящихся рядах действительного переменного переносятся на случай функций комплексного переменного. Например, точно так же, как и для функций действительного переменного, доказываются следующие теоремы.

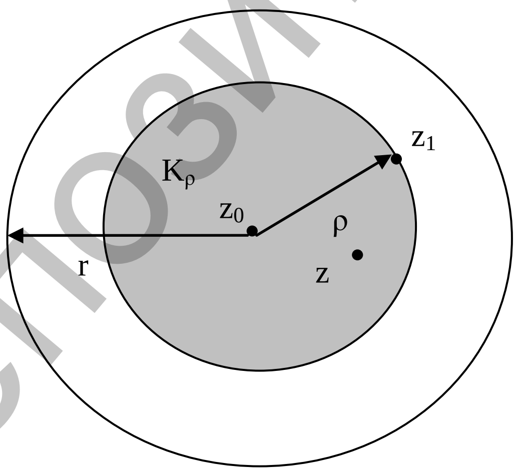

Рис. 14.1.

Теорема 14.2.3. Если функции $f_k(z)$, $k \in \mathrm{N}$, непрерывны на множестве E_1 и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится на E_1, то функция (14.2.2) непрерывна при всех $z \in E_1$.

Теорема 14.2.4. Пусть E_1 — спрямляемая кривая и функции $f_k(z), \quad k\in \mathrm{N}$, непрерывны на ней. Тогда, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится на E_1 и $S(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, то

$$\int\limits_{E_1} S(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_1} f_k(z)dz.$$

§ 3. Аналитичность суммы степенного ряда

Будем рассматривать степенной ряд (14.1.1). Пусть его радиус сходимости $r>0$, т.е. он сходится абсолютно в круге $|z-z_0|<r$, и $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ — сумма этого ряда.

Теорема 14.3.1. В круге сходимости $|z-z_0|<r$ сумма степенного ряда (14.1.1), функция $f(z)$, является аналитической, причем ее производная $f'(z)$ может быть получена путем почленного дифференцирования соответствующего ряда:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}. \tag{14.3.1}$$

Доказательство.

Убедимся сначала, что радиусы сходимости рядов (14.1.1) и (14.3.1) совпадают. Пусть r' — радиус сходимости ряда (14.3.1). Тогда для ряда (14.3.1) будем иметь:

$$\Lambda'=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n\cdot|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\Lambda,$$

т.е.

$$r'=\frac{1}{\Lambda'}=\frac{1}{\Lambda}=r.$$

Пусть теперь z_1 — произвольная точка круга $|z-z_0|<r$, а точку ξ выберем так, чтобы $|z_1-z_0|<|\xi-z_0|=\rho<r$. Т. к. ряд (14.3.1) в точке $z=\xi$ абсолютно сходится, то $\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon)$, что неравенство $\sum\limits_{n_0+1}^{\infty} j|a_j|\rho^{j-1}<\varepsilon$ будет выполняться при $j\ge n_0$. Установим факт дифференцируемости степенного ряда (14.1.1) по определению. Положим $\varphi(z)=f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, тогда при $z\ne z_1$ и $|z-z_0|\le\rho$ имеем:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-\varphi(z_1)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n (z_1-z_0)^{n-1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z_1-z_0)+\cdots+(z_1-z_0)^{n-1}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n (z_1-z_0)^{n-1}\right| \le$$

$$\le \left\{a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})\right\}$$

$$\le \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_n \left[(z-z_0)^{n-1}+\cdots+(z_1-z_0)^{n-1}-n(z_1-z_0)^{n-1}\right]\right| +$$

$$+2\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n\cdot|a_n|\cdot\rho^{n-1} < \varepsilon+2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Таким образом, $\left|\dfrac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-\varphi(z_1)\right| < 3\varepsilon$ при $|z-z_1|<\delta(\varepsilon)$, откуда и следует справедливость теоремы.

▲

Применяя эту теорему к сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = f'(z)$ получаем, что функция $f'(z)$ также является аналитической в круге $|z-z_0|<r$, причем $f''(z)$ получается формальным дифференцированием равенства (14.3.1):

$$f''(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}\ . \qquad (14.3.2)$$

Повторное применение теоремы к (14.3.2) приводит к следующему выводу.

<u>Теорема 14.3.2.</u> Функция $f(z)$, которая является суммой степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z)$, бесконечно дифференцируема в круге сходимости $|z-z_0|<r$ $(r>0)$, причем производная любого порядка p получается путем p-кратного почленного дифференцирования ряда:

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p}\ . \qquad (14.3.3)$$

Полагая в (14.3.3) $z=z_0$, находим:

$$f^{(p)}(z_0)=p(p-1)(p-2)\ldots1\cdot a_p$$

или

$$a_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}. \qquad (14.3.4)$$

Результат будет верным, если считать $f^{(0)}(z) = f(z)$ и $0! = 1$. Поэтому степенной ряд можно переписать в виде:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \qquad (14.3.5)$$

Ряд (14.3.5) называется рядом Тейлора функции $f(z)$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 14.3.3. Каждый степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора для своей суммы.

Замечание 1. Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ имеют одну и ту же сумму $f(z)$ в окрестности $|z - z_0| < \rho$ точки z_0, то $a_n = b_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. разложение в степенной ряд единственно.

2. Выше было показано, что сумма каждого степенного ряда с отличным от нуля радиусом сходимости является аналитической функцией. Далее будет показано и обратное, что любая аналитическая функция разлагается в степенной ряд в некоторой окрестности ее точки аналитичности, а это в свою очередь позволит распространить на все аналитические функции свойства сумм степенных рядов, установленные выше.

3. Ряды Тейлора

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

получаются из общей формулы (14.3.5) и сходятся при $|z| < +\infty$. Они не отличаются от рядов соответствующих функций в действительном анализе. Это объясняется тем, что ряд Тейлора и формулы для производных в действительном и комплексном анализе совпадают.

Лекция 15

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

§ 1. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Теорема Лиувилля

С помощью интегральной формулы Коши (13.3.1) можно установить разложимость аналитической функции в круге в степенной ряд.

Теорема 15.1.1. Пусть $f(z)$ — функция однозначная и аналитическая в области G. Если $z_0 \in G$ и r — расстояние точки z_0 до границы G, то в круге $K_r = \{z \in C \mid |z - z_0| < r\}$ она разлагается в ряд Тейлора, расположенный по степеням разности $z - z_0$.

Доказательство.

Пусть $z \in K_r$, рассмотрим концентрический круг K_{ρ_1} радиуса ρ_1, $0 < \rho_1 < r$, который содержит эту точку внутри (рис. 15.1). Если γ_{ρ_1} — граница этого круга, то по интегральной формуле Коши имеем:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \qquad (15.1.1)$$

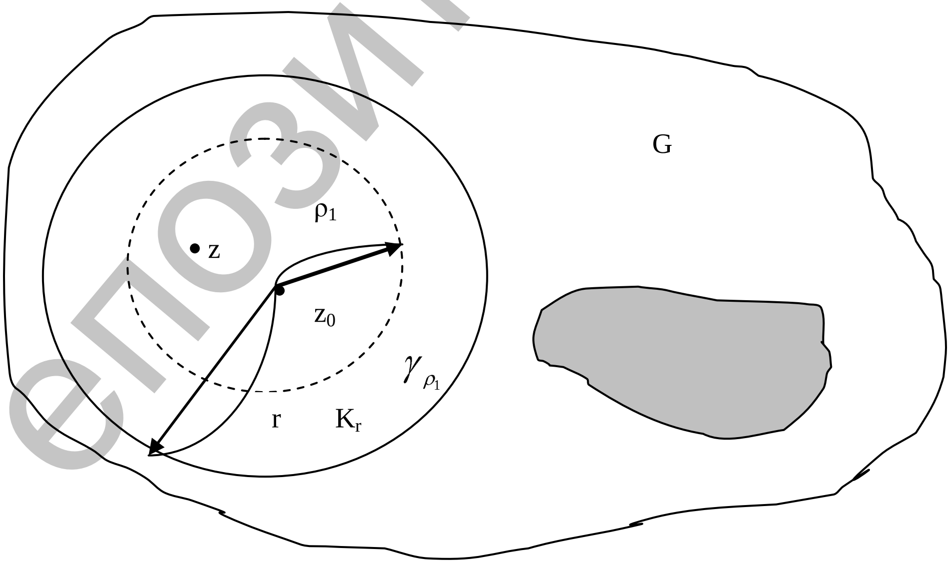

Рис. 15.1.

Разложим подинтегральную функцию в равенстве (15.1.1) по степеням разности $z - z_0$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \{|\xi - z_0| > |z - z_0|\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad \text{ò.å.} \ \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

При фиксированном значении z последний ряд равномерно сходится относительно $\xi \in \gamma_{\rho_1}$, т.к. имеет место оценка:

$$\left| f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \le \max_{\xi \in \gamma_{\rho_1}} |f(\xi)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{\rho_1^{n+1}},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{\xi \in \gamma_{\rho_1}} |f(\xi)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{\rho_1^{n+1}}$$

сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\dfrac{|z - z_0|}{\rho_1}$.

Поэтому законно почленное интегрирование соответствующего ряда. Обращаясь к (15.1.1), будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Коэффициенты a_n не зависят от z, хотя γ_{ρ_1} берется в зависимости от него ($|z - z_0| < \rho_1$). Можно взять $\rho \ne \rho_1$, $0 < \rho < r$. Тогда подынтегральная функция $\dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ будет аналитичной в кольцевой области, ограниченной окружностями γ_ρ и γ_{ρ_1}, и по теореме о составном контуре получаем:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

где обе окружности проходятся в одном и том же направлении.

Итак, нами получено, что для любой точки $z \in K_r$ аналитическая функция $f(z)$ является суммой степенного ряда, т.е. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad 0 < \rho < r. \qquad (15.1.2)$$

▲

Положим теперь $\max_{\xi \in \gamma_\rho} |f(\xi)| = M(\rho)$. Тогда из (15.1.2) получаем:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^n}.$$

Соотношения

$$|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}, n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (15.1.3)$$

называются неравенствами Коши. Они позволяют проводить оценку сверху модулей коэффициентов степенного ряда через максимум модуля суммы ряда на окружности $|z - z_0| = \rho$ и радиус окружности.

Замечание. 1. Используя (15.1.3), можно получить оценку остатка степенного ряда:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M(\rho)}{\rho^k} |z - z_0|^k =$$

$$= M(\rho) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^k = \{ |z - z_0| < \rho \} = \frac{M(\rho) |z - z_0|^{n+1}}{\rho^n (\rho - |z - z_0|)}.$$

Оценка дает представление о величине погрешности приближенного равенства, заменяя $f(z)$ частичной суммой: $f(z) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$.

2. Ряд Тейлора будет сходиться во всяком круге, где функция $f(z)$ аналитическая. Радиус сходимости ряда Тейлора не может быть меньше кратчайшего расстояния от центра круга до ближайшей особой точки функции $f(z)$. С другой стороны радиус сходимости ряда Тейлора не может быть больше расстояния от центра круга до ближайшей особой точки функции (в противном случае функция $f(z)$ не была бы аналитической). Итак, радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию от центра z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

С помощью (15.1.3) легко устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 15.1.2 (Лиувилль). Всякая целая функция, ограниченная по модулю, является постоянной.

Доказательство.

Пусть $f(z)$ является целой функцией, тогда ее степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

сходится во всей комплексной плоскости C ($r = \infty$ — расстояние от точки $z_0 = 0$ до бесконечно удаленной точки). Берем произвольное вещественное число $\rho, \quad 0 < \rho < r$ и в силу того, что $|f(z)| \le M$, M>0, имеем (15.1.3). Зафиксируем n>0 и устремим число ρ к бесконечности, получаем, что $|a_n| \le 0, \quad n > 0$, и $f(z) \equiv a_0 = Const$.

▲

С помощью только что доказанной теоремы можно легко установить справедливость основной теоремы алгебры.

Теорема 15.1.3. Всякий многочлен n-ой степени

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ n \ge 1,\ a_n \ne 0$$

имеет, по крайней мере, один корень.

Доказательство.

От противного, пусть многочлен $P_n(z)$ не имеет корней. Тогда функция $f(z) = 1/P_n(z)$ является целой и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Функция $f(z)$ ограничена по модулю во всей плоскости, т.к найдется такое положительное число r, что $|f(z)| < 1$ при $|z| > r$, а с другой стороны $|f(z)| < m + 1$ при всех $z \in C$, где $m = \max\limits_{|z|<r} |f(z)|$. Поэтому $f(z) \equiv 0 = Const$, что противоречит определению этой функции.

▲

§ 2. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций

Из результатов предыдущих рассуждений вытекают следующие следствия.

Теорема 15.2.1. Всякая функция $f(z)$, аналитическая в области G, имеет производные всех порядков, т.е. является бесконечно дифференцируемой в ней.

Доказательство.

В окрестности любой точки $z_0 \in G$ функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд, который можно дифференцировать сколько угодно раз, и разложение для функции может быть записано в виде ряда:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<r, \qquad (15.2.1)$$

где r — расстояние от точки $z_0 \in G$ до границы области G.

▲

<u>Замечание.</u> Если функция $f(z)$ является целой ($r=\infty$), то при $z_0=0$ из (15.2.1) имеем:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n, \quad |z|<\infty.$$

<u>Теорема 15.2.2.</u> Производная аналитической в области G функции есть снова аналитическая функция в этой области.

<u>Доказательство.</u>

Функция $f'(z)$ обладает всюду в области G производной $(f'(z))' = f''(z)$.

▲

<u>Теорема 15.2.3.</u> Пусть функция $f(z)$ является аналитическая в области G, L — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, принадлежащая области вместе со своей внутренностью D. Тогда $\forall z \in D$ и $n \in \mathrm{N}$ справедливо равенство:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}. \qquad (15.2.2)$$

<u>Доказательство.</u>

Пусть $z_1 \in D$ — произвольная точка, r — расстояние от точки z_1 до замкнутого контура L. Тогда круг $U_{z_1}^r = \{z \in C \mid |z-z_1|<r\}$ целиком содержится в области D и функция $f(z)$ будет аналитичной в нем, а, следовательно, внутри круга она представляется степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ с коэффициентами (15.1.2):

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_1)^{n+1}}, \quad 0<\rho<r,$$

где γ_ρ в данном случае представляет собой окружность $|\xi-z_1|<\rho$. Но с другой стороны $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_1)}{n!}$ или $f^{(n)}(z_1)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\dfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_1)^{n+1}}, \quad 0<\rho<r$. Применив к функции $F(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\dfrac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}}$, которая будет аналитической в замкнутой облас-

ти, ограниченной контуром L и окружностью γ_ρ, теорему о составном контуре, будем иметь:

$$f^{(n)}(z_1)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_1)^{n+1}}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_1)^{n+1}},$$ где оба контура

проходятся в одном и том же направлении (например, в положительном). Положив в последнем равенстве $z_1=z$, получим (15.2.2).

▲

Пример. Вычислите интеграл $\oint\limits_{|\xi|=2}\frac{e^{\xi}d\xi}{(\xi-1)^4}$.

Решение

Для его нахождения применим формулу (15.2.2). Положим $f(\xi)=e^{\xi}$, $z=1$, $D=\{\xi\in C\,\big|\,|\xi|<2\}$. Тогда $f(\xi)$ будет аналитичной в круге $|\xi|\le 2$, и получаем:

$$f'''(1)=\frac{3!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=2}\frac{e^{\xi}d\xi}{(\xi-1)^4}=e \quad \text{или} \quad \oint\limits_{|\xi|=2}\frac{e^{\xi}d\xi}{(\xi-1)^4}=e\cdot\frac{2\pi i}{3!}=\frac{e\pi i}{3}.$$

▲

Замечание 1. Равенство (15.2.2) формально получается, если продифференцировать интегральную формулу Коши по z, считая дифференцирование под знаком интеграла законным. Но коль формула (15.2.2) установлена, то такое дифференцирование возможно.

2. Согласно (15.2.2) получаются неравенства Коши для производных:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\frac{n!}{2\pi}M\,\frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}=M\cdot\frac{n!}{\rho^{n}}.$$

Они показывают, что рост значений производных аналитической функции при $n\to\infty$ не может быть произвольным, он связан с расстоянием до границы области аналитичности.

3. Обобщением интеграла Коши является так называемый интеграл типа Коши:

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}.$$

Здесь L — произвольная спрямляемая кривая (в интеграле Коши это всегда спрямляемая замкнутая жорданова кривая), а $\varphi(\xi)$ — непрерывная функция на кривой L (в интеграле Коши эта функция аналитическая во внутренности L и на самой кривой L). Интеграл типа Коши представляет собой функцию, зависящую от параметра z.

§ 3. Теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций

Известная теорема математического анализа о возможности почленного дифференцирования ряда из функций $f_n(x)$, которые на отрезке [a, b] имеют производную, предполагает, кроме сходимости самого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на [a, b], еще и равномерную сходимость на этом отрезке ряда из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x)$. Для рядов из аналитических функций комплексного переменного соответствующая теорема справедлива без дополнительного условия равномерной сходимости ряда из производных. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{15.3.1}$$

члены которого определены в области *G* на плоскости комплексного переменного.

Определение 15.3.1. Будем говорить, что ряд (15.3.1) равномерно сходится внутри области *G*, если он равномерно сходится в любом замкнутом круге, содержащемся в этой области.

Замечание. Ряд (15.3.1), равномерно сходящийся внутри области *G*, не обязан равномерно сходиться в ней. К примеру, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится равномерно внутри круга сходимости $|z|<1$, хотя он сходится неравномерно в круге $|z|<1$. Действительно,

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1;\quad S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} z^k,\quad R_n(z)=S(z)-S_n(z)=\frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Откуда

$$\underset{|z|<1}{Sup}|R_n(z)|=\underset{|z|<1}{Sup}\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|=+\infty .$$

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 15.3.1. (Вейерштрасс). Пусть функции $f_n(z)$ являются аналитическими и однозначными в области *G*, а ряд (15.3.1) сходится равномерно внутри этой области к функции $f(z)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ — аналитическая в области *G* функция;

б) ряд (15.3.1) можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k=0,1,2,\ldots,$$

причем все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, полученные почленным дифференцированием ряда (15.3.1), также сходятся равномерно внутри области G.

<u>Доказательство.</u>

а) Пусть $\overline{U}_{z_0}^{\rho}=\{z\in C \mid |z-z_0|\le\rho\}$ — произвольный замкнутый круг, причем $\overline{U}_{z_0}^{\rho}\subset G$. Установим аналитичность функции $f(z)$ в круге $U_{z_0}^{\rho}$. Во-первых, эта функция непрерывна в $U_{z_0}^{\rho}$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. В силу теоремы Морера нужно установить равенство $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$, где γ — любой замкнутый спрямляемый контур, расположенный в $U_{z_0}^{\rho}$ (рис. 15.2).

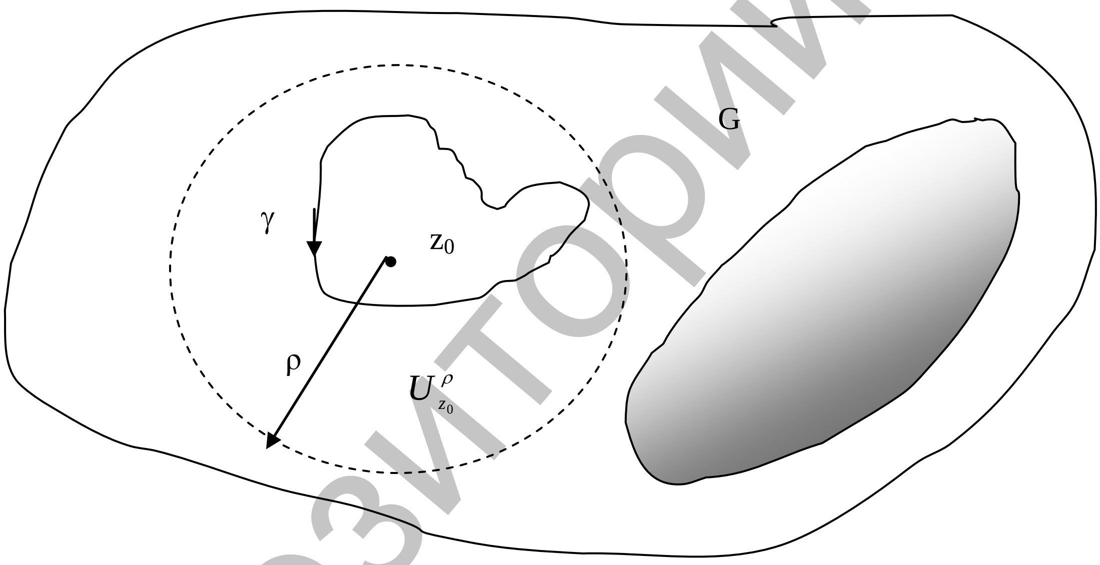

Рис. 15.2.

Ряд (15.3.1) равномерно сходится в круге $\overline{U}_{z_0}^{\rho}$, а, значит, и на контуре γ, поэтому его можно почленно интегрировать вдоль контура:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\oint_{\gamma} f_n(z)dz.$$

Т.к функции $f_n(z)$ являются аналитическими в $U_{z_0}^{\rho}$, то $\oint_{\gamma} f_n(z)dz=0$.

Поэтому $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ и функция $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ будет аналитична во всей области G в силу произвольности $U_{z_0}^{\rho}$.

б) Пусть δ — расстояние от точки $z_0 \in G$ до границы области G и $0<\rho<\rho^{'}<\delta$. Тогда $\overline{U}_{z_0}^{\rho^{'}} \subset G$ и $\overline{U}_{z_0}^{\rho} \subset \overline{U}_{z_0}^{\rho^{'}}$ (рис. 15.3). Для точки $z \in \overline{U}_{z_0}^{\rho}$ имеем:

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}\ ,\ f_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}$$

и

$$\left|f^{(k)}(z)-\sum_{n=1}^{N}f_n^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}-\frac{k!}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}\right|=$$

$$=\frac{k!}{2\pi}\left|\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\frac{f(\xi)-\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi\right|\le$$

$$\le\left\{|\xi-z_0|=\rho^{'},\ |z-z_0|\le\rho,\ \rho^{'}-\rho\le|\xi-z|\right\}\le$$

$$\le\frac{k!}{2\pi}\cdot\sup_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\left|f(\xi)-\sum_{n=1}^{N}f_n(\xi)\right|\cdot\frac{2\pi\rho^{'}}{(\rho^{'}-\rho)^{k+1}}.$$

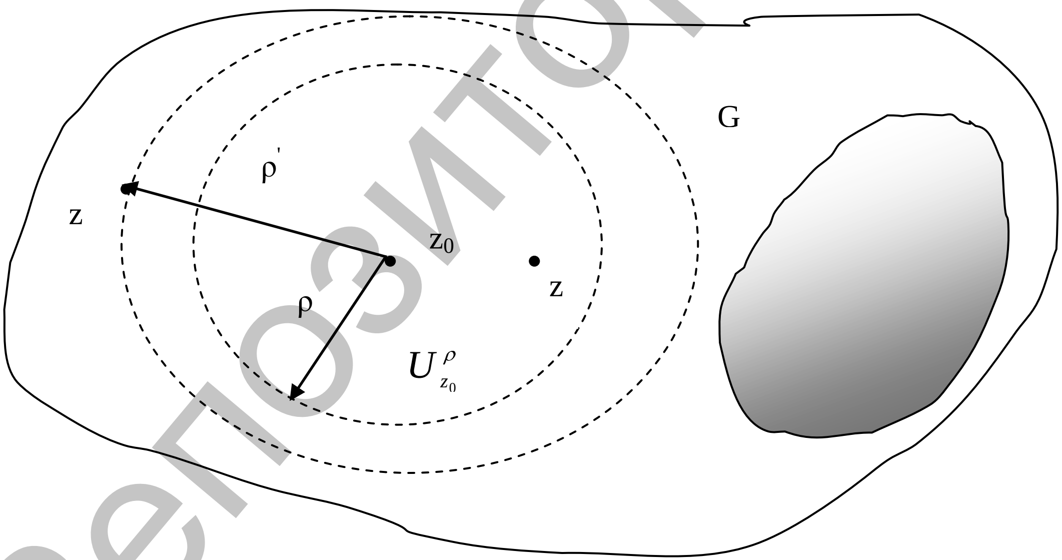

Рис. 15.3.

В силу равномерной сходимости ряда (15.3.1) в круге $|\xi-z_0|\le\rho^{'}$, а, значит и на окружности $|\xi-z_0|=\rho^{'}$. Поэтому $\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0(\varepsilon)$, что при всех $N\ge n_0(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство:

$$\sup_{|\xi-z_0|=\rho^{'}}\left|f(\xi)-\sum_{n=1}^{N}f_n(\xi)\right|<\varepsilon\frac{(\rho^{'}-\rho)^{k+1}}{\rho^{'}\cdot k!}.$$

Отсюда $\forall z \in \overline{U}_{z_0}^{\rho}$ при $N \ge n_0(\varepsilon)$ имеем $\left| f^{(k)}(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n^{(k)}(z) \right| < \varepsilon$, что означает равномерную сходимость ряда из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ к функции $f^{(k)}(z)$ в замкнутом круге $\overline{U}_{z_0}^{\rho}$. Поскольку этот круг выбирался произвольно, то теорема доказана.

▲

Замечание. Ранее было показано, что функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < r$, представляется в нем рядом Тейлора. Поскольку степенной ряд равномерно сходится в каждом концентрическом круге меньшего радиуса $|z - z_0| \le r_1$, $r_1 < r$, то в нем выполняется неравенство:

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon, r).$$

Другими словами, существует многочлен, приближающий аналитическую в круге $|z - z_0| \le r_1$ функцию $f(z)$ с произвольно высокой точностью.

Справедливым оказывается и обратное утверждение.

Теорема 15.3.2. Если функцию $f(z)$, определенную в круге $|z - z_0| < r$, можно в каждом концентрическом круге меньшего радиуса сколь угодно точно приблизить многочленом, то эта функция является аналитической в этом круге.

Доказательство.

Рассмотрим возрастающую последовательность положительных чисел $\{r_n\}$, которая сходится к числу r. Для каждого круга $|z - z_0| \le r_n$ построим многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$|f(z) - P_n(z)| \le 1/n, \quad |z - z_0| \le r_n.$$

Тогда имеем:

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} [P_k(z) - P_{k-1}(z)],$$

т.е. $f(z)$ представляется в круге $|z - z_0| < r$ в виде ряда из многочленов, который равномерно сходится в каждом меньшем круге. Из теоремы Вейерштрасса заключаем, что функция $f(z)$ является аналитической в круге $|z - z_0| < r$.

▲

Лекция 16

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Теорема единственности

Одно из важнейших свойств аналитических функций составляет содержание теоремы единственности.

Теорема 16.1.1. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — однозначные аналитические функции в области G и пусть $f_1(z) = f_2(z)$ на подмножестве $E \subset G$, которое имеет хотя бы одну предельную точку в G. Тогда $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $\boldsymbol{z \in G}$.

Доказательство.

Пусть $f_1(z) = f_2(z)$ при всех $z \in E$. Тогда функция $\omega(z) = f_1(z) - f_2(z)$ будет аналитической в области G и $\omega(z) = 0, \quad z \in E$. Фактически нужно показать, что $\omega(z) \equiv 0, \quad z \in G$. Для этого рассмотрим сначала частный случай, когда область G представляет собой круг конечного или бесконечного радиуса (в последнем случае конечная плоскость) с центром в точке $z_0 \in G$, причем он является предельной точкой для множества E. Для $\omega(z)$ в круге справедливо представление в виде степенного ряда:

$$\omega(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots, \qquad (16.1.1)$$

который сходится во всем круге. Покажем, что $\tilde{n}_k = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. $\omega(z) \equiv 0, \ z \in G$. Поскольку z_0 — предельная точка множества E, то существует последовательность различных между собой точек z_k, отличных от z_0, что $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = z_0$. При этом имеем:

$$\omega(z_k) = c_0 + c_1(z_k - z_0) + c_2(z_k - z_0)^2 + \cdots + c_n(z_k - z_0)^n + \cdots = 0, \ k \in \mathrm{N}.$$

Переходя к пределу при $z_k \to z_0$, имеем $\omega(z_0) = c_0 = 0$. Пусть уже доказано, что $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Тогда

$$\omega(z_k) = c_n(z_k - z_0)^n + c_{n+1}(z_k - z_0)^{n+1} + \cdots = 0$$

или

$$\omega(z_k) = c_n + c_{n+1}(z_k - z_0) + c_{n+2}(z_k - z_0)^2 + \cdots = 0, k \in \mathrm{N}. \qquad (16.1.2)$$

Переходя в (16.1.2) к пределу при $z_k \to z_0$, получим $c_n = 0$. В итоге имеем, что в (16.1.1) все $c_k = 0$ и теорема в частном случае оказывается справедливой.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть K — круг, содержащийся в области G, Γ — граница области, а z_0— центр круга, который является предельной точкой для $E \subset G$. По доказанному выше $\omega(z) = 0, z \in K$, но $G \neq K$ и есть точки области, которые находятся вне круга. Покажем, что $\omega(z)=0,\ z\in G\setminus K$. Соединяем z_0 с одной из точек $z'\in G\setminus K$ непрерывной кривой *L*, расположенной в области *G*. Пусть *ρ>0* — расстояние между кривой *L* и границей *Г*. Разобьем кривую на дуги точками $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = z'$ так, чтобы расстояние между любыми двумя соседними точками было меньше *ρ*, и опишем из каждой точки z_j, как из центра, круг K_j радиуса *ρ* (рис. 16.1). Внутренность K_j принадлежит области *G* и содержит центр следующего круга $z_{j+1},\ j=0,1,\ldots,n-1$. Во всех точках круга K_0 функция $\omega(z)=0$. Предположим, что $\omega(z)=0$ во всех точках круга K_j, $j\le n-1$. Покажем, что $\omega(z)=0,\ z\in K_{j+1}$. Действительно, $z_{j+1}\in K_j$ и z_{j+1} является предельной точкой для множества, на котором $\omega(z)=0$, следовательно, $\omega(z)=0$ для всех $z\in K_{j+1}$. Значит $\omega(z)=0,\ z\in K_n$, в частности $\omega(z')=0$. Таким образом, $\omega(z)=0,\ z\in G$.

▲

Со свойством единственности тесно связано весьма важное понятие аналитического продолжения.

Определение 16.1.1. Пусть выполняются следующие условия:

- $E\subset G$ и на множестве *E* задана функция $f(z)$;
- существует функция $F(z)$, аналитическая в области *G*;
- $f(z)=F(z)$ при любом $z\in E$.

Тогда функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$ с множества *E* на область *G*.

Теорема 16.1.2. Если множество *E* из определения аналитического продолжения имеет предельную точку $a\in G$, то аналитическое продолжение из множества *E* в область *G* единственно.

Доказательство.

Предположим, что существуют две функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, которые являются аналитическим продолжением $f(z)$ из *E* на *G*. Но при всех $z\in E$

$f(z)=F_1(z)$ и $f(z)=F_2(z)$. Тогда $F_1(z)=F_2(z)\quad \forall z\in E$. Но множество *E* имеет предельную точку в области *G*. По теореме 16.1.1 $F_1(z)=F_2(z)\quad \forall z\in G$.

▲

Фактически аналитическое продолжение некоторой функции $f(z)$ можно осуществить, строя всевозможные цепочки кругов, как на рис. 16.1, и разлагая последовательно $f(z)$ в ряды Тейлора в этих кругах. Имеются и другие, более эффективные способы аналитического продолжения. Ясно, что препятствиями для аналитического продолжения могут оказаться только особые точки функции $f(z)$.

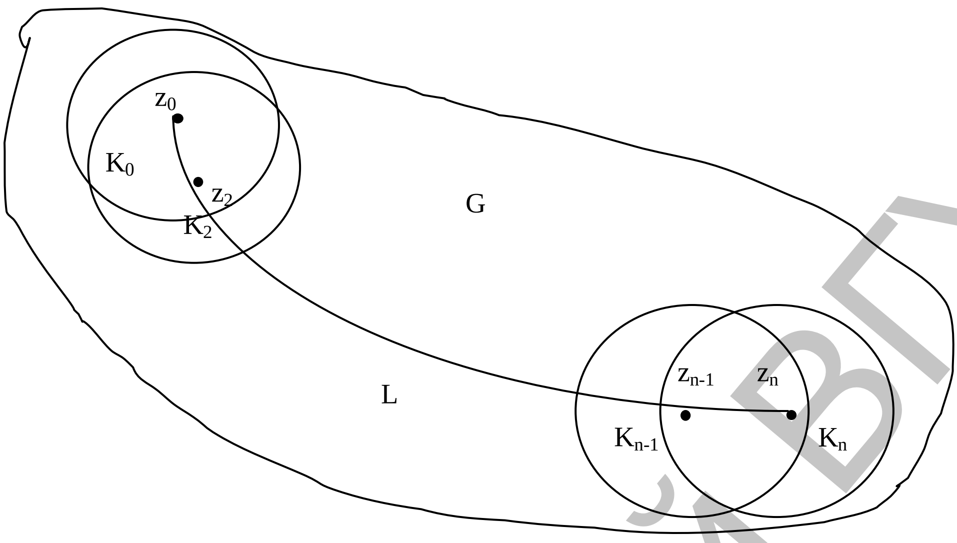

Рис. 16.1.

Замечание. 1. Если $G = C$ (C — комплексная плоскость), а $E = R$ (R — действительная ось), то каждая точка $z \in E$ действительной оси является предельной для E и $z \in G$. Ранее мы определили функцию $f(z) = e^z$, которая является аналитической во всей комплексной плоскости и совпадает при действительных значениях z с показательной функцией e^x. В силу теоремы единственности другой аналитической функции, совпадающей с e^x при $z = x$, не существует. Аналогично функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

являются единственными аналитическими функциями во всей комплексной плоскости, которые на действительной оси совпадают соответственно с действительными функциями действительного переменного $\cos x$ и $\sin x$.

2. Пусть $E = \left(0, \pi/2\right) \subset C$. Равенство $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ выполняется на множестве $E \subset C$. Функции $f_1(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ и $f_2(z) = 1$ являются аналитическими во всей комплексной плоскости и на интервале E совпадают. По теореме единственности они будут совпадать $\forall z \in C$, т.е. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ во всей плоскости.

3. Если ставить вопрос о существовании аналитической в C функции $f(z)$ такой, что $f(\pi k) = 0$, то функций найдется бесконечно много: $\sin z, \sin^2 z, \ldots, \sin^n z, \ldots$. С теоремой единственности нет никаких противоречий, т.к. множество $E = \{z_k = \pi k, k \in Z\}$, где указанные

выше функции обращаются в нуль, не имеет ни одной конечной предельной точки.

Задача аналитического продолжения функции $f(z)$, определенной на множестве E, заключается в таком распространении определения этой функции на возможно более широкую область $G \supset E$, при котором $f(z)$ была бы аналитической в области G. Простейшим примером аналитического продолжения может служить переход от функций действительного переменного $e^x, \cos x, \sin x$ (они определены только на действительной оси) к функциям комплексного переменного $e^z, \cos z, \sin z$, которые аналитичны во всей комплексной плоскости, и на действительной оси совпадают с соответствующими функциями действительного переменного. Этот переход можно осуществить, заменив в степенных рядах

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

действительное переменное x комплексным переменным z (ряды при этом остаются сходящимися).

Если рассматривать степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, то он является сходящимся в единичном круге $|z|<1$ и определяет в нем аналитическую функцию $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Хотя вне круга $|z|<1$ ряд расходится, функцию $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ можно аналитически продолжить на более широкую область $G = C \setminus \{1\}$ и положить в ней $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

Лекция 17

РЯДЫ ЛОРАНА

§ 1. Ряды по отрицательным степеням разности. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} b_n (z-a)^n = \frac{b_{-1}}{z-a} + \frac{b_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{b_{-3}}{(z-a)^3} + \cdots. \qquad (17.8.1)$$

Простой заменой $t = 1/(z-a)$ ряд (17.8.1) можно свести к обычному степенному ряду

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} b_n t^{-n} = b_{-1}t + b_{-2}t^2 + b_{-3}t^3 + \cdots. \qquad (17.8.2)$$

Известно, что ряд (17.8.2) сходится абсолютно в некотором круге $|t| < \rho$ и сумма этого ряда будет в нем аналитической функцией. Следовательно, исходный ряд (17.8.1) будет сходиться, если $\left|\frac{1}{z-a}\right| < \rho$ или $|z-a| > \frac{1}{\rho}$. Обозначим $r = \frac{1}{\rho}$.

Таким образом, областью сходимости ряда (17.8.1) является внешность круга с центром в точке *a* радиуса *r*.

Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n = f_1(z) + f_2(z). \quad (17.8.3)$$

Решим вопрос об области сходимости ряда (17.8.3). Чтобы ряд (17.8.3) сходился, нужна одновременная сходимость двух рядов

$$\sum_{-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n \qquad (17.8.4)$$

и

$$\sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n . \qquad (17.8.5)$$

Ряд (17.8.4) сходится во внешности круга $|z-a| > r$. Ряд (17.8.5) — ряд Тейлора. Он сходится в круге $|z-a| < R$. Возможны случаи:

I. $r<R$. Областью сходимости ряда (17.8.3) будет кольцо $r<|z-a|<R$. Функция $f_1(z)=\sum_{-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n$ будет аналитической во внешности круга $|z-a|>r$, а функция $f_2(z)=\sum_{0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ будет аналитической в круге $|z-a|<R$. Следовательно, функция $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ будет аналитической в кольце $r<|z-a|<R$ как сумма двух аналитических в кольце функций.

II. $r>R$. Ряд (17.8.4) сходится вне большего круга, а ряд (17.8.5) сходится внутри меньшего круга. Значит, $r<R$, нет общей области сходимости и ряд (17.8.3) расходится.

III. $r=R$. Ряд (17.8.4) сходится вне круга $|z|>R$, а ряд (17.8.5) сходится внутри круга $|z|<R$. Общей области сходимости нет (окружность — это не область).

Замечание. Следовательно, если ряд (17.8.3) сходится, то его областью сходимости будет кольцо и в этом кольце функция $f(z)$ будет аналитической.

Справедливым оказывается и обратное утверждение.

Теорема 17.1.1 (Лоран). Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $r<|z-a|<R$, то в любой точке этого кольца она может быть представлена рядом $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$, называемым ее рядом Лорана, и такое представление единственно.

Доказательство.

Проведем две окружности так, чтобы точка z лежала в кольце $r<r_1\le|z-a|\le R_1<R$. Урезаем кольцо так, чтобы в замкнутом кольце $r_1\le|z-a|\le R_1$ функция $f(z)$ была аналитической. Как известно, такая функция может быть представлена интегралом Коши, взятом по границе этой области (областью является замкнутое кольцо, а границей его — две окружности), т.е.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}+C_{r_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} \qquad (17.8.6)$$

$$=f_1(z)-f_2(z),$$

где обе окружности проходятся в положительном направлении (против хода часовой стрелки).

Разложим в ряд ядро Коши:

$\xi \in C_{R_1}$	$\xi \in C_{r_1}$
$\dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{\xi - a - (z-a)} =$	$\dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{\xi - a - (z-a)} =$
$\dfrac{1}{\xi - a}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}} =$	$= \left\{ \left\lvert \dfrac{\xi - a}{z-a} \right\rvert < 1 \right\} =$
$= \left\{ \left\lvert \dfrac{z-a}{\xi - a} \right\rvert < 1 \right\} =$	$= -\dfrac{1}{z-a}\dfrac{1}{1-\dfrac{\xi-a}{z-a}} =$
$= \dfrac{1}{\xi - a}\sum\limits_{0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{\xi-a}\right)^n =$	$= -\dfrac{1}{z-a}\sum\limits_{0}^{\infty}\left(\dfrac{\xi-a}{z-a}\right)^n =$
$= \sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}.$	$= -\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = -\sum\limits_{-1}^{-\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$
Итак, $\dfrac{1}{\xi - z} = \sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}.$	Итак, $\dfrac{1}{\xi - z} = -\sum\limits_{-1}^{-\infty}\dfrac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}.$

Возвращаясь к (17.8.6), получаем следующее разложение функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} + \sum_{-1}^{-\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}.$$

Обозначим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}, \quad n = -1,-2,-3,\ldots \quad .$$

В силу аналитичности $f(z)$ в кольце $r < |z-a| < R$, интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому $\oint\limits_{C_{R_1}} = \oint\limits_{C_{r_1}} = \oint\limits_{C_\rho}, \quad r_1 \le \rho \le R_1$.

Таким образом,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}, \quad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \qquad (17.8.7)$$

и

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n,\ c_n \text{ — коэффициенты Лорана.}$$

Докажем единственность такого разложения, т.е. покажем, что если в некотором кольце функция $f(z)$ представима рядом

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n \,, \qquad (17.8.8)$$

то этот ряд есть ее ряд Лорана, т.е. $b_n = c_n$. В самом деле, разделим обе части (17.8.8) на функцию $2\pi i(z-a)^{n+1}$ и проинтегрируем полученное равенство по окружности радиуса ρ, лежащей в кольце $r<|z-a|<R$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{b_n}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{dz}{(z-a)^{n-k+1}}.$$

Но

$$\oint_{C_\rho}\frac{dz}{(z-a)^{n-k+1}}=\begin{cases}0, & n-k+1\neq 1 \quad \text{èëè} \quad n\neq k,\\ 2\pi i, & n-k+1=1 \quad \text{èëè} \quad n=k.\end{cases}$$

Тогда

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=b_n\,\frac{2\pi i}{2\pi i}=b_n$$ (от суммы остается одно слагаемое).

▲

Замечание. 1. Если в кольце $r<|z-a|<R$ функция $f(z)$ представима рядом Лорана, то часть разложения, содержащая неотрицательные степени разложения, т.е. (17.8.5), называется правильной или регулярной, а часть разложения, содержащая отрицательные степени в разложении, т.е. (17.8.4), называется главной.

2.Очевидно, ряд Тейлора – частный случай ряда Лорана (все коэффициенты при отрицательных степенях равны нулю).

§ 2. Нули аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ будет аналитической в некоторой окрестности точки $z=a\in C$ и отлична от тождественного нуля в этой окрестности.

Определение 17.2.1. Точка $z=a$ называется нулем функции $f(z)$ порядка n, если $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, но $f^{(n)}(a)\neq 0$.

Из определения видно, что порядок нуля совпадает с первой отличной от нуля производной.

Теорема 17.2.1. Если в точке a функция $f(z)$ имеет нуль порядка n, то в некоторой окрестности этой точки она может быть представлена в виде

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z)\,, \qquad (17.2.1)$$

причем функция $\varphi(z)$ будет аналитической в точке a и $\varphi(a)\neq 0$.

Доказательство.

Если точка $z=a$ — нуль порядка n функции $f(z)$, то в окрестности этой точки $f(z)$ имеет представление:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1}+\cdots=$$

$$=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots=(z-a)^n\left[c_n+c_{n+1}(z-a)+c_{n+2}(z-a)^2+\cdots\right]=$$

$$=(z-a)^n\varphi(z),\quad \varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+c_{n+2}(z-a)^2+\cdots.$$

По свойству степенного ряда функция $\varphi(z)$ будет аналитической в некоторой окрестности U_a^{δ} точки a:

$$U_a^{\delta}=\{z\in C\mid |z-a|<\delta\},\ \text{причем}\quad \varphi(a)=c_n\neq 0.$$

▲

Упражнение. Показать, что если $z=\infty$ является нулем функции $f(z)$ порядка n, то в окрестности этой точки имеет место следующее представление:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z^n},\quad \varphi(\infty)\neq 0.$$

Теорема 17.2.2. Нули аналитической функции изолированы, т.е. возле каждого нуля функции можно указать такую окрестность, в которой нет других нулей.

Доказательство.

Пусть для определенности точка $z=a$ есть нуль порядка n функции $f(z)$. Тогда $f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$, $\varphi(a)\neq 0$. Функция $\varphi(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки a, а значит и непрерывна в этой окрестности. Т.к. $\varphi(a)\neq 0$, то и $|\varphi(a)|\neq 0$. Модуль — действительная непрерывная функция. Поскольку $|\varphi(a)|\neq 0$, то найдется такая окрестность точки a, в которой $|\varphi(z)|\neq 0$, поэтому и $\varphi(z)\neq 0$ в этой окрестности. ▲

§ 3. Изолированные особые точки функции и их классификация

Определение 17.3.1. Точка $z=a\in\overline{C}$ называется изолированной особой точкой функции f, если функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки a.

Напомним, что в случае конечной точки a проколотая окрестность будет иметь вид:

$$0<|z-a|<R,$$

в случае же, когда $z=\infty$, проколотая окрестность имеет вид вырожденного кольца:

$$r<|z|<\infty .$$

Если $z=a\in\overline{C}$ — изолированная особая точка, то $f(z)$ аналитична в кольце, а значит в окрестности этой точки она может быть представлена рядом Лорана. Классификацию изолированных особых точек проведем по характеру разложения функции в ряд Лорана. Точнее, в зависимости от того, каково множество отрицательных степеней разности $z-a$, если $a<\infty$, и степеней z, если $a\neq\infty$: пусто, конечно или бесконечно.

<u>Определение 17.3.2.</u> Изолированная особая точка функции f называется устранимой особой точкой, если в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки главная часть отсутствует (нет отрицательных степеней).

<u>Определение 17.3.3.</u> Изолированная особая точка функции f называется полюсом, если в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки главная часть содержит конечное число членов.

<u>Определение 17.3.4.</u> Изолированная особая точка функции f называется существенно особой точкой, если в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки главная часть содержит бесконечно много членов.

<u>Замечание 1.</u> В случае устранимой особой точки $f(z)=\sum_{0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$, a — конечная точка. Равенство выполняется в кольце $0<|z-a|<R$. Ряд, стоящий справа, сходится в круге $|z-a|<R$, включая и сам центр. Равенство между функцией и ее степенным рядом нарушается только в одной точке $z=a$. Если доопределить функцию $f(z)$ значением $f(a)=c_0$, то особенность устранится.

<u>Пример 1.</u> Какие изолированные особые точки имеет функция $f(z)=\dfrac{Sin\,z}{z}$ и каков их характер?

<u>Решение.</u>

Точка $z=0$ является изолированной особой точкой этой функции. Выясним ее характер согласно классификации. Для этого разложим ее в степенной ряд в окрестности нуля (по степеням z):

$$f(z)=\frac{Sin\,z}{z}=\frac{z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots}{z}=\{z\neq 0\}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots .$$

$z=0$ — устранимая особая точка; $z=\infty$ — существенно особая точка (в главной части содержится бесконечно много членов).

▲

Пусть теперь точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$. Тогда получаем:

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k(z-a)^k=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots=$$

$$=\frac{c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\cdots}{(z-a)^n}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n},\quad \psi(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+c_{-n+2}(z-a)^2+\cdots,$$

$\psi(z)$ – аналитическая функция в некоторой окрестности точки a, $\psi(a)=c_{-n}\neq 0$.

Отметим также, что старшая из отрицательных степеней в главной части разложения является порядком полюса. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 17.3.1. Если функция $f(z)$ в точке a имеет полюс порядка n, то в некоторой окрестности этой точки она может быть представлена в виде:

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n}. \qquad (17.3.1)$$

Пример 2. Выясните характер изолированной особой точки $z=0$ функции $f(z)=\dfrac{Cos\,z}{z}$.

Решение.

Выясним характер изолированной особой точки $z=0$ путем разложения $f(z)$ в степенной ряд в окрестности нуля:

$$f(z)=\frac{Cos\,z}{z}=\frac{1-z^2/2!+z^4/4!-z^6/6!+\cdots}{z}=\{z\neq 0\}\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\cdots.$$

$z=0$ – полюс первого порядка или простой полюс.

▲

Замечание 2. Легко заметить, что представления (17.2.1) и (17.3.1) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы функция $f(z)$ в точке $z=a$ имела нуль или полюс порядка n соответственно.

В заключение приведем теорему о связи между нулями и полюсами.

Теорема 17.3.2. Если точка $z=a$ является нулем функции $f(z)$ порядка n, то эта точка является полюсом функции $\dfrac{1}{f}$ того же порядка n. Если точка $z=b$ является полюсом функции $f(z)$ порядка m, то эта точка является нулем функции $\dfrac{1}{f}$ того же порядка m.

Лекция 18

ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Вычеты. Основная теорема о вычетах

Теорема Коши 12.2.1 утверждает, что интеграл от регулярной функции $f(z)$ по простому замкнутому контуру γ равен нулю, если внутри γ нет особых точек. Если же внутри контура γ имеются особые точки, то существует тесная связь между характером поведения функции в окрестности особых точек и величиной интеграла по охватывающему эти точки контуру. Эта связь выражается с помощью понятия вычета.

Пусть a – изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$, γ – простая замкнутая спрямляемая кривая, ориентированная против хода часовой стрелки и содержащая внутри a, причем $f(z)$ аналитична на контуре γ и во всех точках внутри γ, за исключением точки a.

<u>Определение 18.1.1.</u> Вычетом функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z=a$ называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$. Это записывают так:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz. \qquad (18.1.1)$$

Рассмотрим некоторые из свойств вычетов.

- $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = c_{-1}$.

  В самом деле, из формулы для коэффициентов Лорана имеем:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho} f(z)dz \overset{def}{=} \operatorname*{res}_{z=a} f(z).$$

- Пусть точка $z=a$ является полюсом первого порядка функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Действительно, $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_o + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$. Нам нужно определить c_{-1}. Умножим обе части равенства на $(z-a)$ и перейдем к пределу при $z\to a$: $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = c_{-1} = \operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$.

- Пусть точка $z=a$ является полюсом первого порядка функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Тогда

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}.$$

Т.к. $z = a$ — полюс функции $f(z)$ первого порядка, то $z = a$ будет нулем функции $\psi(z)$ первого порядка. Следовательно, $\psi(a) = 0$ и $\psi'(a) \neq 0$.

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

- Пусть функция $f(z)$ в точке $z = a$ имеет полюс порядка *n*. Тогда

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}(a).$$

Иногда эту формулу записывают иначе:

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}.$$

Т.к. функция $f(z)$ в точке $z = a$ имеет полюс порядка *n*, то справедливо представление:

$f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-a)^n}$, где $\psi(z)$ — аналитическая функция. Представив ее рядом Тейлора, будем иметь:

$$f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k}{(z-a)^n} = \frac{\psi(a)}{(z-a)^n} + \frac{\psi'(a)}{(z-a)^{n-1}} + \frac{\psi''(a)}{2!(z-a)^{n-2}} + \cdots +$$

$$+ \frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!(z-a)} + \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!} + \frac{\psi^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots.$$

По первому свойству $\underset{z=a}{res}\, f(z) = c_{-1}$, поэтому будем иметь:

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = c_{-1} = \frac{\psi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = \frac{\left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Сформулируем теперь основную теорему о вычетах.

<u>Теорема 18.1.1.</u> Пусть функция $f(z)$ аналитична в области *D*, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots a_n$, и аналитична на Г — границе области *D*, ориентированной положительно относительно области *D*. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z).$$

Доказательство.

С центрами в точках a_k проведем окружности C_{r_k} радиусов r_k так, чтобы они не пересекались. Выбросим эти круги из области D (рис. 18.1). В полученной многосвязной области D функция $f(z)$ является аналитической. Согласно интегральной теореме Коши для многосвязной области будем иметь:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_{r_k}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r_k}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{res} f(z).$$

▲

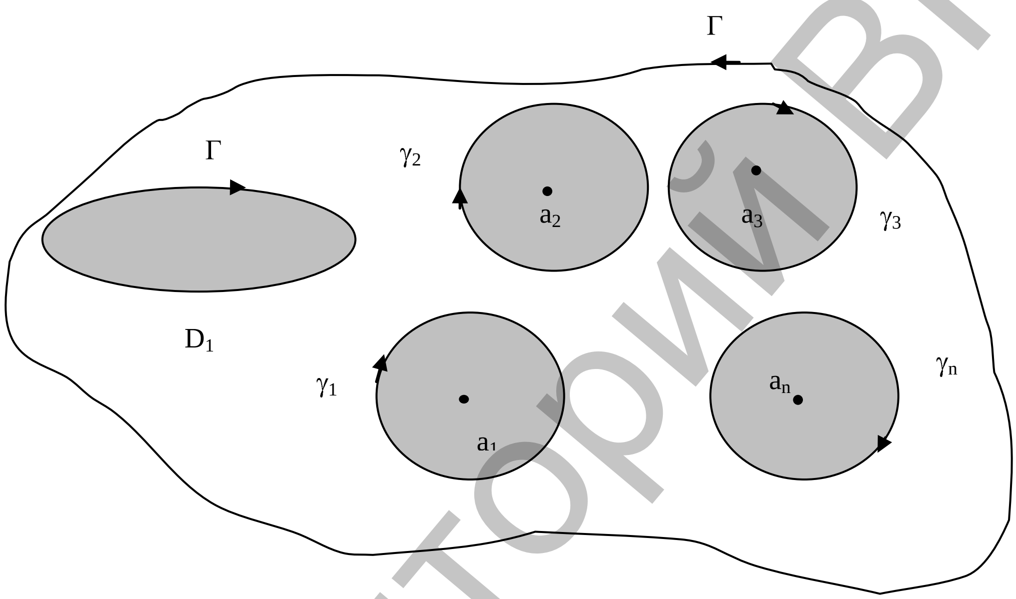

Рис. 18.1.

§ 2. Применение вычетов к вычислению интегралов

Доказанную выше теорему можно успешно применять для вычисления определенных интегралов. В частности, рассмотрим интеграл $\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$, где f — рациональная функция. Классическая теория вычисления таких интегралов преподавалась на первом курсе при изучении курса математического анализа. Поэтому целесообразно ее кратко напомнить.

Если функция f нечетна относительно синуса, то применяют подстановку $t = \cos\varphi$. Если функция f нечетна относительно косинуса, то применяют подстановку $t = \sin\varphi$. Если функция четна и относительно синуса и относительно косинуса, то применяют подстановку $t = tg\varphi$. Если не выполняется ни одно из выше перечисленных условий (четность), то применяется подстановка $t = tg\frac{\varphi}{2}$. Далее работают методы интегрирования рациональных функций.

Если к вычислению этого определенного интеграла привлечь комплексный анализ, то множество указанных подстановок можно заменить одной: $z = e^{i\varphi}$. Когда параметр φ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, то z однократно в положительном направлении пробегает окружность единичного радиуса $|z| = 1$. Исходный интеграл сводится к вычислению комплексного интеграла по замкнутому контуру. При этом

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z};$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz};$$

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow dz = e^{i\varphi}\cdot i\cdot d\varphi = i\cdot z\cdot d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} R(z)dz.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью теории вычетов.

<u>Пример.</u> Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}, \quad a > 1.$

<u>Решение.</u>

Обозначим $K_1 = \{z \in C \mid |z| = 1\}$. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \{z = e^{i\varphi}\} = \oint_{K_1}\frac{dz}{iz}\cdot\frac{2z}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i}\oint_{K_1}\frac{dz}{z^2+2az+1} =$$

$$= \{z^2 + 2az + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -a \pm\sqrt{a^2-1}, \quad z_1 z_2 = 1; \quad z_1 = -a - \sqrt{a^2-1} \notin K_1\} =$$

$$= 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}}\frac{2}{i(z^2+2az+1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

▲

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М., 1968.
2. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – М., 1977.
3. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. – М., 1988.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1987.
5. Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М., 1975.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М., 1981.
7. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М., 1979.
8. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. – Мн., 1975.
9. Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. – Мн., 2002.
10. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. – Мн., 2008. – Кн. 4, ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М., 1976. – Ч. 1.
12. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М., 1977.
13. Стельмашук Н.Т., Шилинец В.А. Элементы теории аналитических функций. – Мн., 1997.