С.В. Шерегов, Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций

2010

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73
Ш49

Авторы: старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов;** кандидаты физико-математических наук, доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова**

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент *С.А. Шлапаков*

Курс лекций «Основы высшей математики» подготовлен в соответствии с базовыми учебными программами по дисциплинам «Основы высшей математики» и «Общий курс математики» для студентов очной и заочной форм обучения специальностей «Психология» и «Социальная работа».

В данном издании излагается теоретический материал и рассматриваются наиболее типичные задачи из основных разделов высшей математики.

Предназначено для самостоятельной работы студентов.

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73

В В Е Д Е Н И Е

Данное учебное издание предназначено в помощь студентам очного отделения специальностей «психология» и «социальная работа», а также студентам заочного отделения специальности «социальная работа» в изучении курсов «Основы высшей математики» и «Общий курс математики».

Учебное издание особенно необходимо для студентов отделения заочного обучения, так как часть материала читаемого курса выносится на самостоятельное изучение.

Оно состоит из четырех основных частей:

1. Элементы теории множеств.
2. Основы математического анализа.
3. Элементы линейной алгебры.
4. Элементы теории вероятностей.

Каждая часть содержит основные определения и теоремы по данной тематике, а также решения некоторых типовых задач.

Изучение лекционного материала служит развитию у студентов указанных специальностей логического и абстрактного мышления.

Студенты должны освоить основные математические понятия, уметь применять их на практике, а именно: они должны уметь пользоваться алгоритмами решения задач, строить и исследовать математические модели.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1.1. Понятие множества. Операции над множествами

Понятие множества является фундаментальным первичным понятием. Это одно из основных понятий математики.

Под **множеством** понимают совокупность объектов, характеризуемых некоторым общим признаком.

***Примеры множеств*:** множество студентов какой-либо группы, множество млекопитающих и т.д.

Различают **дискретные** и **непрерывные** множества. Дискретные множества обозначают фигурными скобками. Например, множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – дискретное множество. Непрерывные множества обозначают круглыми или квадратными скобками. Множество точек отрезка $[a, b]$ является непрерывным множеством.

Объекты, входящие в состав множества, называются его **элементами**.

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$, означает, что множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$. Если элемент a принадлежит множеству A, то будем писать $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$. Если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то это записывается следующим образом: $A = \{x \mid P(x)\}$.

Например, $[a, b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$.

Определение* 1.1.** *Два множества A и B называются* ***равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.*

***Обозначение*:** $A = B$.

Другими словами, равенство двух множеств A и B означает, что из $x \in A$ следует, что $x \in B$, и наоборот.

Определение* 1.2.** *Множество A называется* ***подмножеством *множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.*

***Обозначение*:** $A \subset B$ (читается: “множество A содержится в множестве B” или “множество B содержит множество A”), где “$\subset$” – знак включения.

Пример. Множество студентов группы является подмножеством множества студентов университета; множество N натуральных чисел – подмножество множества Z целых чисел.

Определение* 1.3.** *Множество, не содержащее ни одного элемента, называется* ***пустым*.*

***Обозначение*:** $\varnothing$.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Операции над множествами.

Определение* 1.4. *Объединением *множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B*.

***Обозначение*:** $C = A \bigcup B$.

По определению $C = A \bigcup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

***Определение* 1.5. Пересечением** множеств A и B называется множество D, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

***Обозначение*:** $D = A \bigcap B$.

По определению $D = A \bigcap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

***Определение* 1.6. Разностью** множеств A и B называется множество F, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

***Обозначение*:** $F = A \setminus B$.

По определению $D = A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример. Найти объединение, пересечение и разность множеств $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 3, 5, 8\}$.

Объединением этих множеств является множество

$$C = A \bigcup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}.$$

Пересечением множеств является множество

$$D = A \bigcap B = \{3, 5\}.$$

Разностью множеств является множество

$$F = A \setminus B = \{1, 7\}.$$

§ 1.2. *Универсальное множество. Дополнение множества. Диаграммы Эйлера-Венна*

Во многих приложениях теории множеств рассматриваются только такие множества, которые содержатся в некотором фиксированном множестве.

Например, в геометрии имеют дело только с множеством точек данного пространства.

Это фиксированное множество называется **универсальным,** и обозначается буквой U. Таким образом, будем считать, что каждое рассматриваемое множество A является подмножеством универсального множества U, т.е. $A \subset U$. Следовательно, для каждого множества А справедливы следующие свойства:

1) $A \bigcup U = U$;

2) $A \bigcap U = A$.

***Определение* 1.7** Множество $U \setminus A$ называется **дополнением** множества A до универсального и обозначается $\overline{A}$ (или A'), (или CA).

Нетрудно видеть, что $A \bigcup \overline{A} = U$; $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

***Теорема* 1.1.** *Для любого множества A выполняется равенство*:

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ (}\textbf{\textit{закон инволюции}}\text{)}.$$

Доказательство: Возьмем произвольный элемент a из множества A, тогда $a \notin \overline{A}$, а значит $a \in \overline{\overline{A}}$. Получили, что $A \subset \overline{\overline{A}}$. Аналогично доказывается, что $\overline{\overline{A}} \subset A$. Из двух включений и следует, что $A = \overline{\overline{A}}$. ■

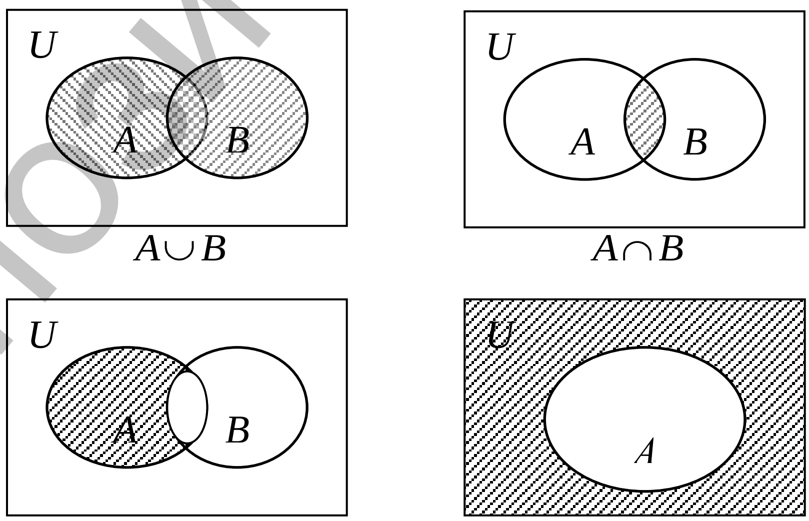
***Теорема* 1.2.** *Если* $A \subset B$, *то* $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Доказательство: Пусть $A \subset B$. Покажем, что для любого элемента x из U, если $x \in \overline{B}$, то $x \in \overline{A}$. Этим мы и докажем требуемое. Действительно, если $x \in \overline{B}$, то $x \notin B$, а так как $A \subset B$, то $x \notin A$, т.е. $x \in \overline{A}$. ■

Для графического изображения множеств и их свойств используют так называемые ***диаграммы Эйлера-Венна.***

На этих диаграммах множество изображается кругом на плоскости и мыслится как множество точек круга. Универсальное множество U изображается множеством точек некоторого прямоугольника.

Изобразим штриховкой на диаграммах Эйлера результаты основных операций над множествами.



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$ $\overline{A}$

Рис 1.1.

§ 1.3. *Счетные и несчетные множества*

Пусть даны два конечных множества A и B. Если множество A состоит из n элементов, а множество B – из m элементов, то между m и n возможно только одно из трех соотношений $n = m, n < m, n > m$. Какое из них имеет место в каждом конкретном случае легко определить непосредственным подсчетом элементов в данных множествах или постановкой их элементов во взаимно однозначное соответствие. Сущность последнего метода в следующем. Если сравнить два конечных множества с одинаковым числом элементов, то каждому элементу одного множества можно поставить в пару элемент другого множества. Например, каждый палец правой руки можно положить на такой же по названию палец левой руки и сразу становится очевидным, что число пальцев на обеих руках одинаково.

Если же множества A и B бесконечные, то говорить о количестве элементов не имеет смысла, а значит, и сравнить эти множества по числу элементов нельзя. Однако метод установления взаимно однозначного соответствия (постановки в пары) элементов двух различных множеств можно распространить и на бесконечные множества.

Определение* 1.8**. *Если каждому элементу* a *множества* A *по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент* b *из множества* B, *причем различным элементам множества* A *отвечают различные элементы множества* B *и каждый элемент* $b \in B$ *соответствует одному и только одному элементу* $a \in A$, *то говорят, что между множествами* A *и* B *установлено* ***взаимно однозначное соответствие .

Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества **эквивалентны** и пишут: $A \sim B$.

***Свойства эквивалентности множеств*:**

1) $A \sim A$(рефлексивность);
2) если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность);
3) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность).

Пусть дано произвольное множество A. Рассмотрим наряду с A совокупность всех множеств, эквивалентных множеству A. На основании свойства транзитивности все эти множества будут эквивалентны между собой. Назовем такую совокупность множеств **классом эквивалентных между собой множеств**. Поставим в соответствие каждому классу эквивалентных между собой множеств некоторый символ α, который будем называть **кардинальным числом** или **мощностью**. Таким образом, под мощностью мы понимаем то общее, что присуще всем эквивалентным между собой множествам.

Определение* 1.9.** *Два множества называются* ***равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Определение* 1.10.** *Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется* ***счетным*.*

Таким образом, если множество M – счетно, то между M и множеством натуральных чисел N можно установить взаимно однозначное соответствие, или, как говорят, можно занумеровать элементы множества M, понимая под номером каждого элемента $m \in M$ соответствующее ему при указанном соответствии натуральное число.

Пример. Множество четных натуральных чисел счетно, т.к. каждому четному числу k можно поставить во взаимно однозначное соответствие натуральное число n по следующему закону: $k = 2n$.

Счетные множества являются в определенном смысле простейшими бесконечными множествами. Для бесконечных множеств справедлива следующая лемма.

Лемма. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство: Пусть X – бесконечное множество. Пусть x_1 - какой либо элемент этого множества. В силу того, что X – бесконечное множество, в нем заведомо имеется хотя бы один элемент, отличный от x_1. Выберем какой-либо из таких элементов и обозначим его x_2. Продолжая этот процесс, мы в результате получим множество $\{x_n\}$, элементов $x_n \in X$, $n = 1,2,...$, которое является счетным подмножеством множества X. ■

Таким образом, мощность множества N есть наименьшая мощность бесконечного множества. Теорема о мощности множества рациональных чисел дает интересный пример счетного множества.

***Теорема* 1.3.** *Множество всех рациональных чисел Q счетно.*

Доказательство: Расположим рациональные числа в таблицу следующим способом. В 1-ую строчку поместим все целые числа в порядке возрастания их абсолютной величины и так, что за каждым натуральным числом стоит ему противоположное:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \dots,\ n,\ -n,\ \dots\ ,\quad \text{где } n \in N.$$

Во 2-ую строку поместим все несократимые рациональные дроби со знаменателем 2, упорядоченные по их абсолютной величине, причем снова за каждым положительным числом поставим ему противоположное:

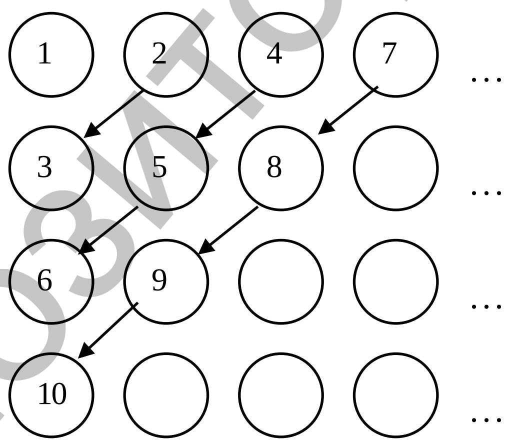
$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{5}{2},\ \dots\ .$$

Вообще в n-ую строчку помесим все несократимые рациональные дроби со знаменателем n, упорядоченные по их абсолютной величине, так что за каждым положительным числом следует ему противоположное.

В результате получим таблицу с бесконечным числом строк и столбцов:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Очевидно, что каждое рациональное число попадает на какое-то место в этой таблице. Занумеруем теперь элементы этой таблицы по следующей схеме.



В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т.е. множество Q рациональных чисел счетно. ■

Мощность счетного множества называется **счетной мощностью** и обозначается $\aleph_0$ (алеф-ноль).

Возникает вопрос: а существует ли бесконечные множества, не являющиеся счетными? Оказывается, что да, существуют, и они называются **несчетными множествами**. Важный пример несчетных множеств устанавливается следующей теоремой.

***Теорема* (*Кантора*) 1.4.** *Множество R всех действительных чисел отрезка* [0, 1] *несчетно*.

Доказательство: Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел α, лежащих на отрезке [0, 1] и представленных в виде десятичных дробей:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots, a_{1n} \ldots, \\ \alpha_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots, a_{2n} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots, a_{nn} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь a_{ik} – k-я десятичная цифра числа α_i . Построим дробь

$$\beta = 0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots\, b_n \ldots$$

следующим образом: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11}, за b_2 – произвольную цифру, не совпадающую с a_{21}, и т.д.; за b_n примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{nn}. Эта десятичная дробь не может совпадать ни с одной дробью, содержащейся в перечне (1). Действительно, от α_1 число β отличается, по крайней мере, первой цифрой после запятой, от α_2 – второй цифрой и т.д. Вообще, т.к. $b_n \neq a_{nn}$ для всех n, то дробь β отлична от любой из дробей α_i, входящих в перечень (1). Таким образом, никакое счетное множество чисел, лежащих на отрезке [0, 1], не исчерпывает этого отрезка. ■

Итак, отрезок [0, 1] дает пример несчетного множества.

Приведем некоторые примеры множеств, эквивалентных отрезку [0, 1], т.е. являющихся несчетными множествами.

1. Множество точек любого отрезка $[a, b]$ или любого интервала (a, b).
2. Множество всех точек на прямой.
3. Множество всех точек плоскости, пространства.

Более того, как бы не велика была мощность некоторого множества, всегда можно построить множество более высокой мощности.

***Теорема* 1.5.** *Мощность множества всех подмножеств любого непустого множества A больше, чем мощность данного множества A*.

§ 1.4. *Характеристическая функция множества*

Определение* 1.11. *Характеристической функцией множества *E пространства X называется функция* $\chi(x)$ (*Хи от икс*), *задаваемая следующим образом*:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \textit{ если } x \in E; \\ 0, \textit{ если } x \in CE \ (\textit{дополнению } E \textit{ до } X). \end{cases}$$

§ 1.5. *Понятие о лингвистической переменной*

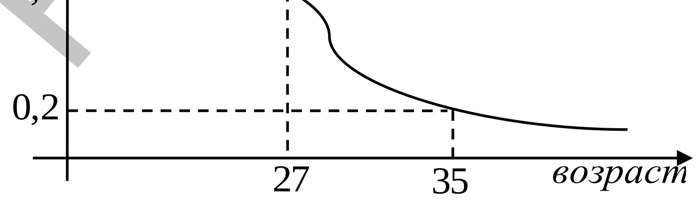
Лингвистической переменной мы будем называть переменную, значениями которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка. Например, возраст является лингвистической переменной, если она принимает лингвистические, а не числовые значения: молодой, не молодой, юный, старый, не очень старый и т.п. а не 20 лет, 21 год, … .

С помощью лингвистической переменной можно приближенно описывать явления, которые настолько сложны или плохо определены, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.

Рассматриваемый лингвистический подход применяется в таких областях, как искусственный разум, лингвистика, процессы принятия решений человеком, психология, экономика…

Более точно лингвистические переменные описываются набором (X, $T(X)$, U, G, M), в котором X – название этой переменной, например, возраст, внешность, $T(X)$ – терм-множество X, т.е. совокупность ее лингвистических значений (ЛЗ), например, терм множество лингвистических переменных *возраст* можно записать так

T(*Возраст*) = *молодой*∪*не молодой*∪*очень молодой*∪*не очень молодой* ∪ … ∪ *среднего возраста*∪…∪*старый*∪*очень старый*∪…



U – универсальное множество; G – синтаксическое правило, порождающее термы множества $T(X)$; М – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению X ставит в соответствие его смысл $M(X)$, причем

$M(X)$ обозначает нечеткое подмножество множества U.

Смысл лингвистического значения X характеризуется функцией совместимости c: $u \to [0, 1]$, которая каждому элементу $u \in U$ ставит в соответствие значение совместимости этого элемента X. Так, например, совместимость возраста 27 лет со значением *молодой* может быть равна 0,7, а возраста 35 лет – 0,2.

Назначение семантического правила – связать совместимости так называемых первичных термов в составном лингвистическом значении с совместимостью составного значения, например, первичных термов *молодой* и *старый* в составном лингвистическом значении *не очень молодой* и *не очень старый*. Неопределенности, такие как *очень, совсем, чрезвычайно* и т.п., а также союзы *и* и *или* понимаются при этом как операторы, преобразующие смысл соответствующих термов.

Уточним некоторые основные аспекты понятия лингвистическая переменная.

Во-первых, важно уяснить, что понятие совместимости отлично от понятия вероятности. Правильная интерпретация значения совместимости, равного 0,7, состоит в том, что оно есть лишь субъективная мера того, насколько возраст 27 лет соответствует в представлении субъекта ЛЗ *молодой*.

Во-вторых, обычно предполагается, что лингвистическая переменная имеет структуру в том смысле, что она связана с двумя правилами: синтаксическим и семантическим. В связи с этим отметим, что типичное значение лингвистической переменной, например, не очень молодой и не очень старый включает в себя первичные термы *молодой* и *старый*, смысл которых субъективен и зависит от контекста. Предполагается, что смысл таких термов определен заранее. Кроме первичных термов ЛЗ можно включать в себя связки, такие как *и, или, ни* и т.п.; отрицание *не*; неопределенности: *очень, более или менее, совсем, отчасти* и т.п. Как уже говорилось связки, неопределенности и отрицание можно понимать как операторы, которые видоизменяют смысл первичных термов. Так функцию совместимости ЛЗ *очень молодой* можно получить возведением в квадрат значений функции совместимости ЛЗ *молодой*.

В третьих, когда мы говорим о лингвистической переменной, такой как *возраст*, соответствующая базовая переменная *возраст* является по своей природе числовой переменной. В этом случае мы можем определить смысл ЛЗ этой лингвистической переменной функцией совместимости, которая ставит в соответствие каждому значению базовой переменной из [0, 100] число из [0, 1]. А, например, для лингвистической переменной «Внешность» мы не имеем базовой переменной, т.е не знаем, как выразить степень красоты в форме функции тех или иных физических величин. Мы можем приписать каждой женщине из рассматриваемой группы степень принадлежности классу прекрасных женщин, например, Ирине – 0,9, Инне – 0,7 и т.д., но эти значения функции совместимости основываются лишь на наших впечатлениях, которые точно не формализуются.

Особенно важной областью приложения понятия лингвистическая переменная является область приближенных рассуждений.

Пример.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ ìàëî,} \\ x \text{ è } y \text{ ïðèìåðíî ðàâíû,} \end{array}\right| \Rightarrow y \text{ áîëåå èëè ìåíåå ìàëî.}$$

Другая важная область приложения этого понятия – теория вероятностей. Если вероятность рассматривать как лингвистическую переменную, то ее терм- множество может, например, иметь следующий вид:

T(*Вероятность*) = *правдоподобно* ∪ *очень правдоподобно* ∪ *неправдоподобно* ∪ … ∪ *вероятно* ∪ *невероятно* ∪ *более или менее вероятно* ∪ …

Допустив использование ЛЗ вероятности, мы получаем возможность на вопрос: “Какова вероятность того, что завтра будет теплый день?” ответить следующим образом: “весьма высокая”, вместо, например “0,8”.

§ 1.6. *Нечеткие множества*

***Определение* 1.12. *Нечетким множеством* (*НМ*)** *называется подмножество A универсального множества U, которое характеризуется функцией принадлежности* $\mu_A : U \to [0, 1]$, *которое ставит в соответствие каждому элементу* $u \in U$ *число* $\mu_A(u)$ *из* [0, 1], *характеризующее степень принадлежности элемента* u *подмножеству A*.

***Определение* 1.13. Носителем множества A** *называется множество таких точек в U, для которых величина* $\mu_A(u) > 0$.

Определение* 1.14. *Точкой перехода множества A *называется такой элемент множества U, степень принадлежности которого множеству A равна* 0,5.

Пример. Пусть *U* представляет собой интервал [0, 100] и переменная *u*, принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как *возраст*. Нечеткое подмножество универсального множества *U*, обозначаемое термином *старый*, можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0, \text{ при } 0\le u\le 50\\ \left(1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, \text{ при } 50<u\le 100.\end{cases}$$

Здесь, носителем множества *старый* является интервал (50, 100], а точкой перехода является значение u = 55.

***Обозначение*:** $A = \{\mu_1\ u_1,\ \ldots,\ \mu_n\ u_n\}$, где μ_i $(i=1,\ldots,n)$ - степень принадлежности элемента u_i носителю множества A. В случае когда u_i - числа, может возникнуть двоякое толкование записи $\mu_i u_i$, связанное с невозможностью различить компоненты μ_i и u_i. Чтобы избежать этого, будем разделять такие значения μ_i и u_i чертой: $A=\{\mu_1|u_1,\ldots,\mu_n|u_n\}$.

Если носитель множества A имеет мощность континуум, то будем использовать запись $A=\int\mu_A(u)/u$, знак $\int$ обозначает объединение нечетких одноточечных множеств $\int\mu_A(u)/u$, $u\in U$.

II. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 2.1. *Числовые множества*

Определение* 2.1.** *Множество, элементами которого являются числа, называется* ***числовым.

Рассмотрим основные числовые множества.

Исторически первыми возникли числа, которые используются в процессе счета: 1, 2, 3, … . Такие числа называются **натуральными** и образуют **множество натуральных чисел *N*:** $N = \{1, 2, 3,\ldots\}$.

В связи с возросшими потребностями в измерениях появились **целые** (обеспечивающие операцию вычитания) и **рациональные** (обеспечивающие операцию деления, кроме деления на ноль) числа, образующие, соответственно, **множество целых *Z*** и **множество рациональных *Q*** чисел:

$$Z = \{\ldots-2, -1, 0, 1, 2,\ldots\},\quad Q=\left\{\frac{p}{q}\right\},\ p\in \mathrm{Z},\ q\in \mathrm{N}.$$

Очевидно, что $N\subset Z\subset Q$.

Числа, которые не являются рациональными, называются **иррациональными** и образуют **множество иррациональных чисел *I*.**

$I\bigcap Q=\varnothing$.

Из школьного курса известно, что рациональные числа представляются в виде конечных или бесконечных периодических десятичных дробей и наоборот.

Иррациональные числа представляются в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Например:

$\frac{1}{8} = 0{,}125$ – рациональное число;

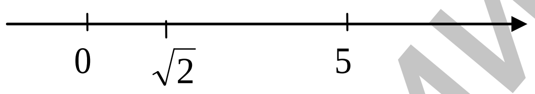
$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}(3)$ – рациональное число;

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ – иррациональное число;

$\pi = 3{,}14159\ldots$ – иррациональное число.

Рациональные числа в объединении с иррациональными образуют множество **действительных чисел *R*:** $R = Q \bigcup I$.

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой:



§ 2.2. Операции с числами

Определение* 2.2. *Средним арифметическим *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называется число*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Определение* 2.3. *Средним геометрическим *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называется число* $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ (*корень* n*-й степени из их произведения*).

Определение* 2.4. *Средним гармоническим *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называется число*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Определение* 2.5. *Модулем *или* ***абсолютной величиной*** *числа x называется число x, если это число неотрицательное, или число ему противоположное, если x* < 0:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Например: $|2| = 2$, так как $2 > 0$; $|-2| = -(-2) = 2$, так как $-2 < 0$.

Рассмотрим простейшее уравнение с модулем: $|x| = a$, где $a \in R$. Его решение зависит от значений параметра a:

1) при $a < 0$, решений нет;

2) при $a = 0$, $x = 0$;

3) при $a > 0$, $x = \pm a$.

Определение* 2.6.** *Одним* ***процентом *от числа а называется его сотая часть.*

Пример.

1. Найти n% от числа a .
2. Дано a составляющее n% от x. Найти x.
3. Пусть 30 есть 15% от числа x. Найти x.

Решение.

1. Найдем n% от числа a : n% от a *равно* $\frac{a}{100} \cdot n$.
2. a равно n% от x, или $a = \frac{x}{100} \cdot m$, $x = \frac{a \cdot 100}{n}$.
3. 30 равно 15% от x, тогда $x = \frac{30 \cdot 100}{15} = 200$.

Определение* 2.7. *n – ой степенью *числа а, где* $n \in R$, *называется произведение*:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Свойства степеней.

Рассмотрим положительные действительные числа $a > 0$, $b > 0$, тогда:

$a^0 = 1$, $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

$a^1 = a$, $\qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $(a : b)^n = a^n : b^n$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$, $\qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

$\sqrt[n]{a} = b, b^n = a$ $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

если x – любое действительное число, то $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$.

§ 2.3. *Числовые последовательности*

Определение* 2.8.** *Пусть каждому натуральному числу* n по *некоторому закону поставлено в соответствие действительное число* x_n, *тогда говорят, что задана* ***последовательность чисел.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются ***членами числовой последовательности***. Число, стоящее в этой последовательности на n-м месте, называется ***общим*** или ***n-м членом последовательности*** и обозначается x_n.

Сама последовательность обозначается $\{x_n\}$ или $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

Обычно последовательность задается формулой ее общего члена или перечислением достаточного количества первых членов данной последовательности.

Пример. Последовательность, общий член которой можно задать формулой: $x_n = \dfrac{1}{3 \cdot n}$ имеет следующие члены: $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{6}$, $x_3 = \dfrac{1}{9}$, … . Таким образом, ее можно записать двумя способами: $\left\{\dfrac{1}{3 \cdot n}\right\}$ или $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right\}$.

Существуют и другие способы задания последовательности. Например, последовательность может задаваться с помощью правила, по которому подбираются члены последовательности. Так, последовательность, состоящая из чисел Фибоначчи, строится следующим образом: каждое следующее число, начиная с третьего, есть сумма двух предыдущих чисел: $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$.

Важными частными случаями числовых последовательностей являются прогрессии.

Определение* 2.9. *Арифметической прогрессией *называется последовательность чисел, которая задается с помощью ее первого члена* a_1 *и числа* d, *которое называется разностью прогрессии, следующим образом*:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

…………………

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + d\,(n-1).$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии S_n находится по одной из формул:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Определение* 2.10. *Геометрическая прогрессия *– это последовательность чисел, которая задается ее первым членом* b_1 *и числом* q (*знаменателем прогрессии*) *следующим образом*:

$b_2 = b_1 \cdot q,$

$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2,$

....

$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}.$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии S_n находится по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то каждый последующий член прогрессии будет по модулю меньше предыдущего и геометрическая прогрессия в этом случае называется ***убывающей.*** В этом случае можно найти сумму всех членов S_∞ прогрессии по формуле

$$S_\infty = \frac{b_1}{1 - q}.$$

III. *ФУНКЦИИ*

§ 3.1. *Понятие функции. Способы задания функции*

При изучении процессов реального мира (физических, химических, биологических) мы постоянно встречаемся с характеризующими их величинами, меняющимися в течении рассматриваемых процессов. При этом часто бывает, что изменение одной величины является причиной изменения другой. Взаимосвязанные изменения числовых характеристик рассматриваемых величин приводит к их функциональной зависимости в соответствующих математических моделях. Поэтому понятие функции является одним из самых важных в математике и ее приложениях.

Рассмотрим два произвольных множества действительных чисел D и E.

Определение* 3.1. *Функцией, *заданной на множестве D и принимающей значения из множества E, называется соответствие f, по которому каждому* $x \in D$ *единственным образом сопоставляется* $y \in E$.

***Обозначение*:** $y = f(x)$.

Множество D называется ***областью определения функции*** и обозначается $D(f)$. Множество E называется ***множеством значений функции*** и обозначается $E(f)$.

Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом функции***, а переменная y – ***зависимой переменной***. Говорят также, что переменная y является функцией от переменной x.

Заметим, что определение функции совпадает с определением отображения множества D на множество E по закону соответствия f. Отметим, что безразлично какой буквой обозначить аргумент и какой – значение функции. Так при заданном законе f, записи $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in E$, и $v = f(u)$, $u \in D$, $v \in E$ обозначают одно и то же.

Способы задания функций.

1. **Аналитический способ задания функции.** Функция задается с помощью формулы $y = f(x)$. Например $y = x^2 + 6x + 5$. В этом случае областью определения такой функции является множество всех значений x, для которых данная формула имеет смысл.

2. **Табличный способ задания функции.** В этом случае функция задается с помощью таблицы некоторых значений аргумента x и соответствующих им значений функции.

На практике значения переменных x и y получаются опытным путем или из наблюдений.

3. **Графический способ задания функции.** В этом случае соответствие между значениями аргумента x и функции y устанавливаются с помощью графика.

Определение* 3.2. *Графиком *функции* $y = f(x)$ *называется множество точек* (x, y) *числовой плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению* $y = f(x)$, *т.е. множество точек* $(x, f(x))$.

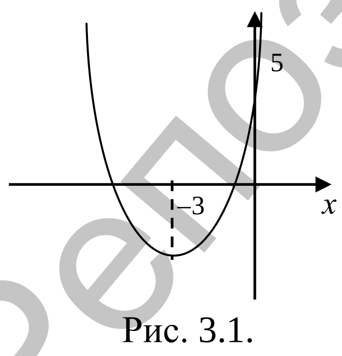


Рис. 3.1.

Например, графиком функции $y = x^2 + 6x + 5$ является парабола, изображенная на рисунке 3.1.

Графическое задание функции удобно тем, что по виду графика функции можно составить общее впечатление о том, как протекает моделируемый процесс.

4. **Программный способ задания функции.** В этом случае дается алгоритм по которой для каждого значения x вычисляется значение $y = f(x)$.

Основные свойства функций.

Одной из основных задач математического анализа является анализ функций. Напомним вкратце основные характеристики поведений функций.

***Определение* 3.3.** *Функция f*(x) *называется* **четной** (*нечетной*), *если выполняются следующие условия*:

1) *область ее определения симметрична относительно начала координат*;
2) *для любого* $x \in D(f)$ *выполняется равенство* $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Ось OY – ось симметрии для графика любой четной функции, а начало координат – точка симметрии для графика любой нечетной функции, т.е. достаточно изучить эти функции при $x > 0$.

Например, функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x>0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0, \\ -1, & \text{если} \quad x<0 \end{cases}$ является нечетной, а $y = |x|$ - четной. Графики функции $y = \operatorname{sgn} x$ и $y = |x|$ изображены на рисунках 3.2 и 3.3 соответственно.

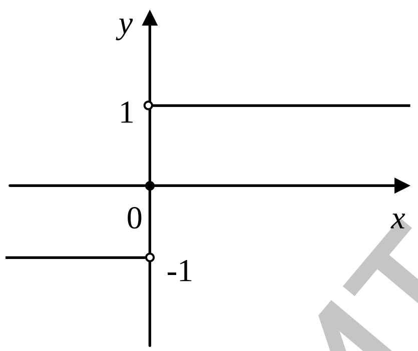


Рис. 3.2

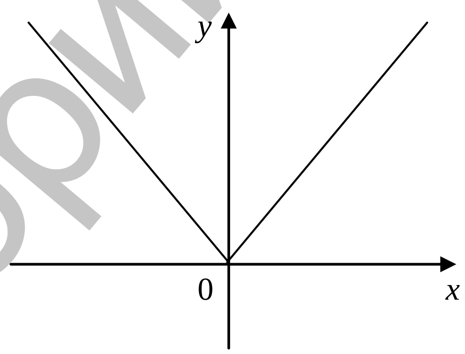


Рис. 3.3

Определение* 3.4.** *Функция f*(x) *называется* ***периодической, *если для нее существует такое число* $T \neq 0$, *что выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $x \in D(f)$, *числа* $x - T$ *и* $x + T$ *также принадлежат* $D(f)$;
2) $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$, *для любого* $x \in D(f)$.

Очевидно, что если число T является периодом функции $f(x)$, то числа вида kT, $k \in Z$, также будут являться периодами этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то его называют основным периодом.

Далее употребляя термин период функции будем иметь ввиду ее основной период. Чтобы построить график любой периодической функции, достаточно построить ее график на одном из интервалов длиной равным периоду Т и затем произвести параллельный перенос его вдоль оси OX на Tk, $k \in Z$.

Определение* 3.5.** *Функция $f(x)$ называется* ***возрастающей (убывающей) *на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции.*

Аналогично определяется **неубывающие и невозрастающие функции**.

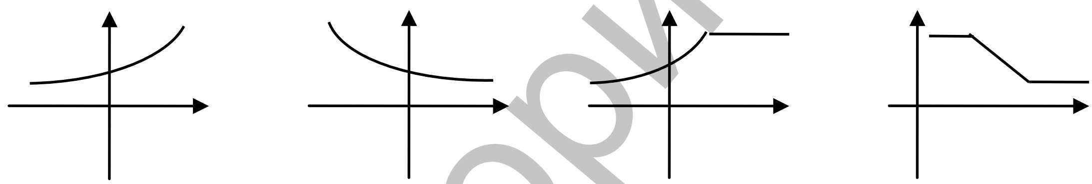
Если функция $y = f(x)$ − возрастает на множестве X, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$;

если функция $y = f(x)$ − убывает на множестве X, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$;

если функция $y = f(x)$ − не убывает на множестве X, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$;

если функция $y = f(x)$ − не возрастает на множестве X, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$;

Графики возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей на интервале X функций изображены на рисунке 3.4.



возрастающая *убывающая* *неубывающая* *невозрастающая*

Рис. 3.4

§ 3.2. *Определение предела функции*

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий x_0.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может, за исключением самой точки x_0.

Определение* 3.6.** *Число A называется* ***пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 *(или в точке x_0), если для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Если число A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Пример. Показать, что

а) если $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$;

б) если $f(x) = x$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ для любой точки x_0.

Решение.

а) Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

Для данного $\varepsilon > 0$ в этом случае в качестве δ можно взять любое положительное число $\delta > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, имеем

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c.$$

б) Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ для любой точки x_0.

Для данного $\varepsilon > 0$ в качестве δ можно взять любое положительное число δ, удовлетворяющее условиям $0 < \delta \le \varepsilon$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, имеем

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta \le \varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Геометрическая иллюстрация предела функции дана на рисунке 3.5.

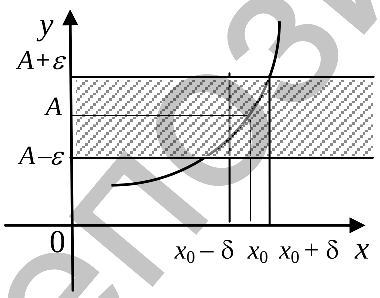


Рис 3.5.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Значение δ по выбранному ε для точки x_0 определяется так: проводятся прямые $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, затем выбирается $\delta > 0$ таким образом, чтобы для всех x, $x \neq x_0$, из интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ соответствующие значения функции находились в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. При этом значение функции в точке x_0 может быть равным A, отличаться от A или не существовать. Значение δ по заданному ε находится неоднозначно. Действительно, если мы для данного ε нашли какое-либо δ, то любое $\delta_1 < \delta$ также удовлетворяет сделанному построению.

То есть, число A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ сколько угодно близко подходит к A, когда x достаточно близко подходит к x_0.

***Определение* 3.7.** *Число A называется **пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)**, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$ ($x < -M$), имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Обозначается: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

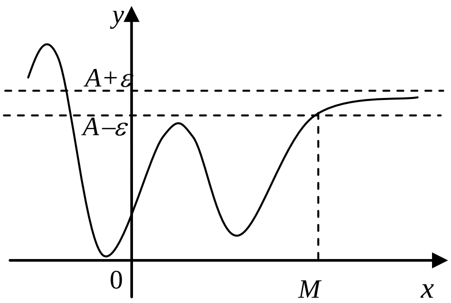


Рис. 3.6.

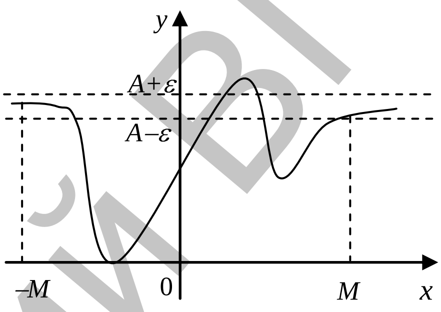


Рис. 3.7.

***Определение* 3.8.** *Число A называется **пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$,** если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Обозначается: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Геометрические иллюстрации того, что $f(x) \to A$ при $x \to +\infty$ и $f(x) \to A$ при $x \to \infty$ даны на рисунках 3.6 и 3.7 соответственно.

***Определение* 3.9.** *Говорят, что предел функции $f(x)$ равен ∞, при $x \to x_0$, если для любого $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.*

Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

***Определение* 3.10.** *Говорят, что предел функции $f(x)$ равен $+\infty$ ($-\infty$), при $x \to x_0$, если для любого $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$).*

Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$). (См. рис. 3.8 и 3.9).

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

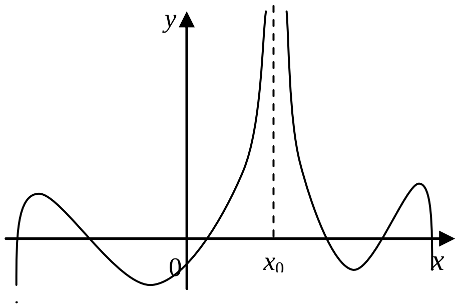


Рис. 3.8.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

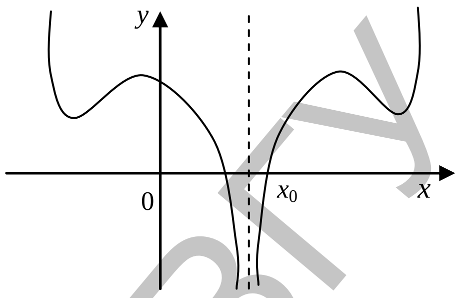


Рис. 3.9.

Замечание. Можно ввести определения, аналогичные определениям 3.9 и 3.10 при $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

Определение **3.11.** *Число А называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке x_0 справа****, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $x > x_0$, $x - x_0 < \delta$, имеет место неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$.*

В этом случае пишут:

$$A = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Определение **3.12.** *Число А называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке x_0 слева****, если для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $x < x_0$, $x_0 - x < \delta$, имеет место неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$.*

$$A = f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Замечание. Предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда для данной функции существуют левый и правый пределы в точке x_0, и они равны. При этом выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

§ 3.3. *Основные теоремы о пределах*

Приведем без доказательства следующие теоремы о пределах функций.

***Теорема* 3.1.** *Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = x_0$, то он единственный.*

***Теорема* 3.2.** *Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке $x = x_0$, то $f(x)$ ограничена в некоторой выколотой окрестности точки x_0.*

***Теорема* 3.3.** *Предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равен A, тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to x_0$.*

***Теорема* 3.4.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть самой точки x_0, и существуют пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то существуют пределы их суммы (разности), произведения и, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то и частного, и имеют место равенства:*

а) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$; *при* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Следствие. *Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то*

а) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\,A$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n = A^n$;

т.е. постоянный множитель можно выносить из-под знака предела; предел степени равен степени предела.

***Теорема* 3.5.** *Пусть для функции $y = f(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, кроме может быть самой точки x_0, выполняется неравенство $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), и в точке x_0 эта функция имеет предел, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq 0$).*

***Теорема* 3.6.** *Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ и в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением может быть самой точки x_0) имеет место неравенство $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.*

§ 3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение **3.13.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно малой*** *при* $x \to x_0$ (*в точке* x_0), *если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Примерами бесконечно малых функций служат функции:

а) x, при $x \to 0$;

б) x^2, при $x \to 0$;

в) $\sin x$, при $x \to k\pi$, в частности, при $x \to 0$.

Обычно бесконечно малые функции обозначаются маленькими греческими буквами: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые в точке x_0 функции. Рассмотрим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l.$$

1) Если $l = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка** в точке x_0, чем $\beta(x)$;

2) если $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется **бесконечно малыми одного порядка малости** в точке x_0;

3) если $l = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется **эквивалентными бесконечно малыми** в точке x_0 и обозначаются следующим образом: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Определение **3.14.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой*** *при* $x \to x_0$ (*в точке* x_0), *если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Исходя из определений бесконечно малой и бесконечно большой в точке x_0 функций, а также теорем о пределах, можно сформулировать следующие свойства бесконечно малых и бесконечно больших точке x_0 функций.

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма, разность, произведение конечного числа бесконечно малых в точке x_0 функций есть бесконечно малая функция в этой точке.
2. Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция, а функция $g(x)$ – ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда произведение $\alpha(x) \cdot g(x)$ есть бесконечно малая в точке x_0 функция.
3. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0 функция, а c – некоторое число, то $c \cdot \alpha(x)$ есть бесконечно малая в точке x_0 функция.

4. Если функция $y = \alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Например, так как x и $\sin x$ − бесконечно малые функции при $x \to 0$, то $x \cdot \sin x$, $x + \sin x$ − так же бесконечно малые функции при $x \to 0$. Функция $\dfrac{1}{x}$ − бесконечно большая функция, при $x \to 0$.

Свойства бесконечно больших функций.

1. Произведение бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция.

2. Если в некоторой выколотой окрестности точки x_0 функция f_1 такова, что $0 < \ell < |f_1(x)|$, а функция f_2 бесконечно большая в точке x_0, то $f = f_1 \cdot f_2$ - бесконечно большая функция в точке x_0.

3. Если функция $y = f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

***Замечание* 1.** Справедливы следующие символические записи:

$\dfrac{c}{\infty} = 0$ (если постоянную функцию разделить на бесконечно большую в точке x_0 функцию, то получим функцию бесконечно малую в этой точке);

$\dfrac{c}{0} = \infty$ $(c \neq 0)$ (если постоянную функцию разделить на бесконечно малую в точке x_0 функцию, то получим функцию бесконечно большую в этой точке);

$\infty \cdot c = \infty$ $(c \neq 0)$(произведение бесконечно большой в точке x_0 функции на постоянную есть бесконечно большая в этой точке функция),

$c \cdot 0 = 0$ (произведение бесконечно малой в точке x_0 функции на постоянную есть бесконечно малая в этой точке функция);

$\dfrac{\infty}{c} = \infty$, $\dfrac{0}{c} = 0$(если бесконечно большую (бесконечно малую) в точке x_0 функцию, разделить на постоянную функцию, то получим функцию бесконечно большую (бесконечно малую) в этой точке).

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − бесконечно малые функции в точке x_0, тогда нельзя сразу сказать, какой функцией будет отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Говорят, что в этом случае имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ необходимо преобразовать выражение, стоящее под знаком предела так, что бы эта неопределенность исчезла.

Существуют и другие типы неопределенностей: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(\infty\cdot 0)$, (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}).

Для раскрытия неопределенностей используются специальные приемы, зависящие от типа неопределенностей и от вида функции, стоящей под знаком предела. Кроме того, часто применяются пределы, называемые замечательными пределами:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$ (первый замечательный предел).

Первый замечательный предел раскрывает неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и применяется, если под знаком предела стоит тригонометрическое выражение.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=(1^{\infty})=e\approx 2{,}7$ (второй замечательный предел).

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность типа (1^{∞}).

***Замечание* 2.** Все сказанное о бесконечно малых и бесконечно больших при $x\to x_0$ функциях справедливо и в том случае, когда $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

§ 3.5. *Вычисление пределов*

Приводим некоторые приемы вычисления пределов, излагая их на конкретных примерах.

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)$.

Используя теорему 3.4 § 3.4, получим

$$\lim_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)=\lim_{x\to 2}(5x^3)+\lim_{x\to 2}(2x^2)-\lim_{x\to 2}(3x)+\lim_{x\to 2}7=$$

$$=5\lim_{x\to 2}x^3+2\lim_{x\to 2}x^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}7=5(\lim_{x\to 2}x)^3+2(\lim_{x\to 2}x)^2-3(\lim_{x\to 2}x)+\lim_{x\to 2}7=$$

$$=5\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=49.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$.

Знаменатель дроби $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$, то можно применить теорему 3.4 § 3.4:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}$.

Числитель дроби $f(x) = x^3 - 2x - 3$, знаменатель дроби $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Так как $f(2) = 2^3 - 2\cdot 2 - 3 = 1$, $g(2) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0$, то теорему 3.4 § 3.4 применять нельзя. Но из замечания 1 § 3.5 следует, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

4) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Так как $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 4 = 0$, то имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

4) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-3}{3x^3+2x^2+x}$.

Учитывая, что $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$ (свойство 4 бесконечно больших функций, § 3.5), получим $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x^2-3) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3+2x^2+x) = \infty$, следовательно, имеет место неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, для раскрытия которой в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}{x^3(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

5) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{\tilde{o}})$.

Так как функция $y = x$ − бесконечно малая в точке $x = 0$ функция, а функция $y = \sin\frac{1}{\tilde{o}}$ − ограничена на всей числовой прямой (при $x \neq 0$, $-1 \le \sin\frac{1}{\tilde{o}} \le 1$; при $x = 0$ − функция не определена), то по свойству 2 бесконечно малых функций (см. §3.5) функция $x\cdot\sin\frac{1}{\tilde{o}}$ является бесконечно малой в точке $x = 0$ функцией. Следовательно

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{\tilde{o}}) = 0.$$

6) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x} = |\,7x = t,\ t\to 0| = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin t}{t} = 7\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t} = 7.$$

§ 3.6. *Непрерывность функции*

Рассмотрим функцию $f(x)$ определенную в некотором интервале X и пусть x_0 – точка этого интервала, так что в этой точке функция имеет значение $f(x_0)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

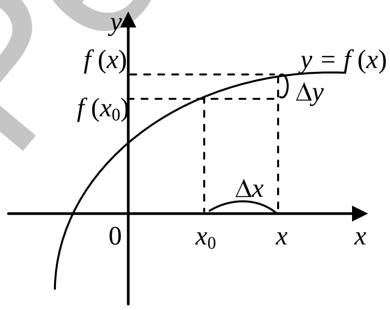


Рис. 3.10.

***Определение* 3.15.** *Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0**, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Разность $\Delta x = x - x_0$ назовем **приращением аргумента функции**

в точке x_0, а разность $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – **приращением функции** $f(x)$ **в точке** x_0 (рисунок 3.10).

Дадим теперь другое определение непрерывности:

***Определение* 3.16.** *Функция* $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, *если бесконечно малому приращению аргумента функции в точке* x_0 *соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, т.е.* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (рис 3.10).

Определение* 3.17.** *Функция непрерывная в каждой точке интервала* X *называется* ***непрерывной на *этом* ***интервале.***

Точка, в которой функция $y = f(x)$ *не определена или определена, но не является непрерывной, называется* ***точкой разрыва*** *функции*

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Классификация точек разрыва.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода***, если в ней существуют и являются конечными оба односторонних придела.

Возможны следующие случаи точек разрыва I рода:

1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, но функция не определена в точке x_0 («выколотая точка») или $f(x_0) \neq A$. В этом случае точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Данный разрыв называют «конечным скачком».

Например, функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но так как существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел), то

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

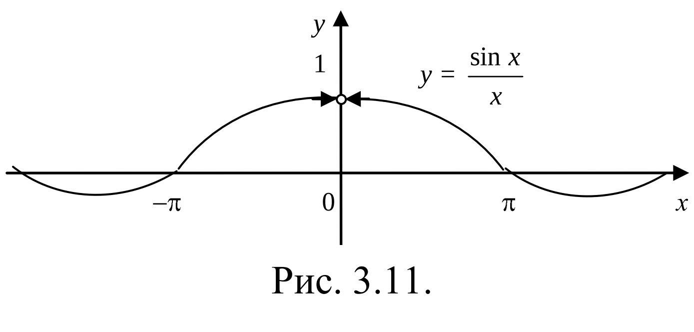


Рис. 3.11.

Следовательно, точка $x = 0$ – точка устранимого разрыва. На графике функции точка (0, 1) является выколотой (рисунок 3.11).

В этом случае функцию $y = \frac{\sin x}{x}$ можно доопределить:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ïðè} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{ïðè} \quad x = 0. \end{cases}$$

Заданная таким образом функция будет непрерывна в точке $x = 0$.

Функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ скачок, так как $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to -0} (-1) = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to -0} 1 = 1$. График функции $y = \operatorname{sgn} x$ изображен на рисунке 3.2.

Точка x_0 **называется точкой разрыва II рода**, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

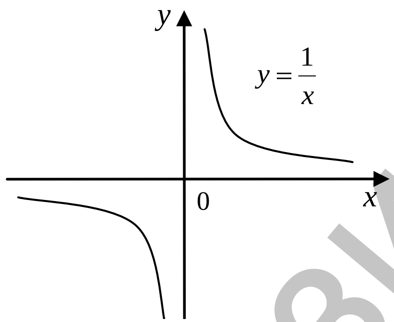


Рис. 3.12.

Например, функция $y = \frac{1}{\tilde{o}}$ не определена в точке $x = 0$. При этом

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{\tilde{o}} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{\tilde{o}} = +\infty.$$

Оба односторонних предела равны бесконечности. Следовательно, точка $x = 0$ – точка разрыва второго рода. Графиком функции является гипербола, изображенная на рисунке 3.12.

***Теорема* 3.7.** *Основные элементарные функции непрерывны всюду на своей области определения.*

IV. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

§ 4.1. *Понятие производной функции*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале X. Рассмотрим точку $x_0 \in X$. Придадим ей приращение Δx так, чтобы $x_0 + \Delta x \in X$ и рассмотрим приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение* 4.1**. ***Производной *функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т.е.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке.

С ***физической точки зрения*** $f'(x_0)$ есть мгновенная скорость изменения функции в точке x_0.

Если материальная точка движется по прямой, а закон движения задается формулой $y = s(t)$ (t – время, $s(t)$ − перемещение), то производная функции $s(t)$ равна мгновенной скорости материальной точки в момент времени t: $s'(t) = V(t)$. Производная функции $V(t)$ есть ускорение материальной точки в момент времени t: $V'(t) = a$.

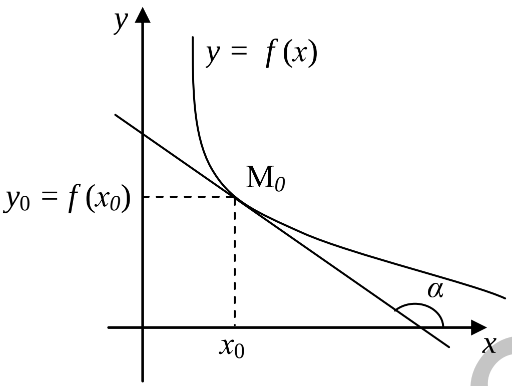


Рис.

С ***геометрической точки зрения*** производная функции в точке x_0 есть тангенс угла, образованного касательной, проведенной к графику функции точке $M(x_0; y_0)$, и положительным направлением оси Ox:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Сформулируем две важные теоремы.

***Теорема* 4.1.** *Если функция дифференцируема в точке* x_0, *то ее приращение в этой точке может быть представлено в виде* $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, *где* $\alpha \to 0$, *при* $\Delta x \to 0$.

Доказательство следует из определения производной функции в точке x_0 и теоремы 3.3 § 3.4.

***Теорема* 4.2.** *Если функция дифференцируема в точке* x_0, *то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Рассмотрим равенство $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$. Перейдем в данном равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда и $\Delta y \to 0$, а это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (см. определение 3.16 § 3.7). ■

Обратное утверждение вообще говоря не верно.

Например: функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная функции в этой точке не существует.

§ 4.2. Правила нахождения производных

Алгебраические свойства производных.

***Теорема* 4.3.** *Пусть функция $y = f(x)$ равна некоторой постоянной величине c: $y = c$, тогда производная этой функции равна нулю.*

Доказательство. Поскольку y – постоянная величина для любого x, то $\Delta y = c - c = 0$.

Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, а значит $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$. ■

***Теорема* 4.4.** *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, тогда функции $u \pm v$, $u \cdot v$, $\dfrac{u}{v}$ (в случае частного $v(x_0) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, и справедливы следующие равенства*:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(uv)' = u'v + v'u$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доказательство. Докажем одно из равенств, например 2.

Придадим значению аргумента x_0 приращение Δx и получим точку $x = x_0 + \Delta x$. Пусть $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$, $u(x_0 + \Delta x) = u_0 + \Delta u$, $v(x_0 + \Delta x) = v_0 + \Delta v$. Рассмотрим функцию $y = uv$. Тогда $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ $= (u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta v \cdot \Delta u$. С другой стороны $y(x)$ $= y_0 + \Delta y$, где $y_0 = y(x_0)$, следовательно

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta v \cdot \Delta u,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Перейдем в данном равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x \to 0}\Delta v = u'v + v'u,$$

т.е. $(uv)' = u'v + v'u$. ■

Аналогично доказываются и остальные утверждения теоремы.

Из теоремы 4.3. и из равенства 2 теоремы 4.4. следует, что $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$; 1*a*) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a$; 2*a*) $(e^{x})' = e^{x}$;

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; 3*a*) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

4. $(\sin x)' = \cos x$;

5. $(\cos x)' = -\sin x$;

6. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

7. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции.

***Теорема* 4.5.** (*о производной сложной функции*). *Пусть соотношениями* $u = \varphi(x)$ *и* $y = f(u)$ *задана сложная функция* $y = F(x) = f(\varphi(x))$. *Тогда если функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *а функция* $f(u)$ *дифференцируема в точке* $u_0 = \varphi(x_0)$, *то сложная функция* $F(x)$ *будет также дифференцируема в точке* x_0, *причем производная сложной функции находится по формуле*:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0). \qquad \text{или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример. Найти производные следующих функций:

а) $y = \mathrm{tg}\sqrt{x}$; *б*) $y = \ln^3(\cos x^2)$.

Решение.

а) Функция $y = \mathrm{tg}\sqrt{x}$ является сложной функцией, где $u = \sqrt{x}$, $y = \mathrm{tg}\, u$. Тогда $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

б) $y = \ln^3(\cos x^2)$.

$$y' = 3\ln^2(\cos x^2) \cdot \frac{1}{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = -6\mathrm{tg}\, x^2 \cdot \ln^2(\cos x^2).$$

§ 4.3. *Исследование функции с помощью производной*

Исследование функции с помощью первой производной.

Приведем без доказательства следующую важную теорему дифференциального исчисления.

***Теорема* 4.6 (*Лагранжа*).** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема на интервале* (a, b), *тогда внутри этого интервала существует такая точка* $c \in (a, b)$, *что выполняется равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

С помощью этой теоремы докажем необходимое и достаточное условие монотонности функции на интервале:

***Теорема* 4.7.** *Для того, чтобы функция* $y = f(x)$ *была неубывающей* (*невозрастающей*) *на интервале* (a, b) *необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этого интервала выполнялось неравенство* $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$).

Доказательство.

1. *Необходимость*. Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Докажем, что на интервале (a, b) выполняется неравенство $f'(x) \ge 0$.

Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы точка $x + \Delta x \in (a, b)$. Найдем производную функции:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$ и, так как функция не убывает на интервале (a, b), то $f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0$. Следовательно, $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$.

Аналогично, можно доказать, что если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$, таким образом, $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$ для любого Δx.

Тогда, по теореме 3.5 § 3.2 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Значит и $y'(x) \geq 0$ для любых $x \in (a, b)$.

2. *Достаточность.* Пусть для любых $x \in (a, b)$ производная функции $y'(x) \geq 0$. Докажем, что функция $y = f(x)$ не убывает на интервале (a, b).

Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из (a, b) так, чтобы $x_1 > x_2$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. На этом отрезке для функции $y = f(x)$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Значит, существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c).$$

Так как $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, получаем $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, а это и означает по определению, что функция $y = f(x)$ не убывает на интервале (a, b). ■

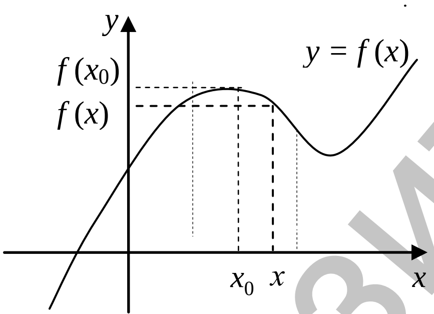


Рис. 4.2.

***Определение* 4.2.** *Точка x_0 называется точкой **локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что для всех точек x из этой окрестности ($x \neq x_0$) выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) (См. рисунок 4.2).

Точки локального минимума и локального максимума называются точками **экстремума функции.**

Значение функции в точке экстремума называется экстремумом функции.

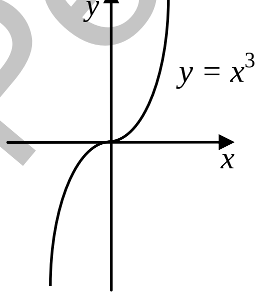


Рис. 4.3.

***Теорема* 4.8 (*Ферма*).** (*необходимое условие существования экстремума*). *Пусть x_0 - точка экстремума функции, тогда если в этой точке существует конечная производная $f'(x)$, то она равна* 0.

Эта теорема говорит о том, что точку экстремума следует искать лишь в тех точках, где $f'(x) = 0$ или не существует. Такие точки называют ***подозрительными на экстремум***, а точки, в которых $f'(x) = 0$ – ***стационарными***.

Заметим, что условия этой теоремы не являются достаточными.

Например, рассмотрим функцию $y = x^3$. Производная этой функции $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума. Графиком функции является кубическая парабола, изображенная на рисунке.

Сформулируем достаточное условие существования экстремума в точке.

***Теорема* 4.9.** *Пусть x_0 - точка подозрительная на экстремум и пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, за исключением быть может самой точки x_0, тогда, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с «+» на «–», то точка x_0 является точкой локального максимума, если с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума. Если $f'(x)$ не меняет свой знак, то в точке x_0 экстремума нет.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет свой знак с «+» на «–». Так как $f'(x) > 0$, при $x < x_0$, то по теореме 4.7 функция $f(x)$ возрастает, а значит на некотором интервале (x, x_0) $(x < x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$, то на некотором интервале (x_0, x) $(x_0 < x)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Тогда по определению x_0 – точка максимума.

Аналогично рассматривая случай, когда при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет знак с «–» на «+», можно доказать, что точка x_0 – точка минимума. ■.

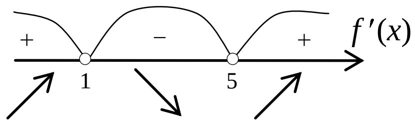
Пример 1. Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

Решение.

1) Найдем область определения функции: $D(f) = R$.

2) Найдем производную функции: $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.

3) Найдем точки, в которых производная равна 0. Для этого решим уравнение: $x^2 - 6x + 5 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.



4) Отметим точки $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ на числовой прямой и найдем знаки производной на полученных интервалах.

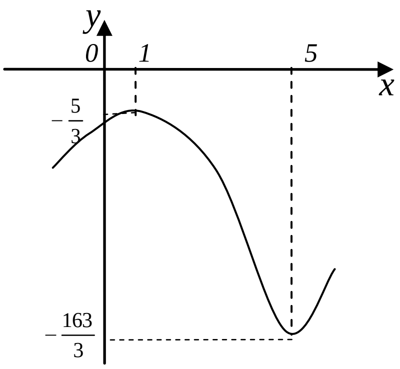


Рис. 4.4.

5) Точка $x = 1$ является точкой локального максимума, а точка $x = 5$ – точкой локального минимума функции. Найдем значение функции в этих точках: $f(1) = -\dfrac{5}{3}$, $f(5) = -\dfrac{163}{3}$.

6) Функция убывает на интервале $(1, 5)$, функция возрастает на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(5, +\infty)$.

7) По полученным данным строим график функции (рисунок 4.4).

Исследование функции с помощью второй производной.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $f'(x)$ представляет собой функцию, определенную в этой же окрестности. Пусть функция $y = f'(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда производную функции $f'(x)$ называют **второй производной (производной второго порядка)** функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f''(x_0)$, $y''(x_0)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Будем говорить, что функция $y = f(x)$ **вогнута вверх** (**выпукла**) на отрезке $[a, b]$, если график этой функции в пределах указанного отрезка лежит ниже любой своей касательной.

Функция $y = f(x)$ называется **вогнутой вниз** (**вогнутой**) на отрезке $[a, b]$, если график функции в пределах указанного отрезка лежит выше любой касательной, проведенной к этому графику в произвольной точке отрезка $[a, b]$.

На рисунке 4.5 изображен график, имеющий на отрезке $[a, b]$ вогнутость вниз, а на рисунке 4.6 изображен график функции, имеющий вогнутость вверх.

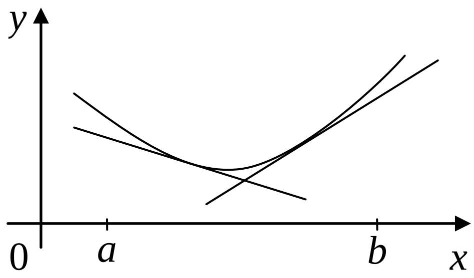


Рис. 4.5.

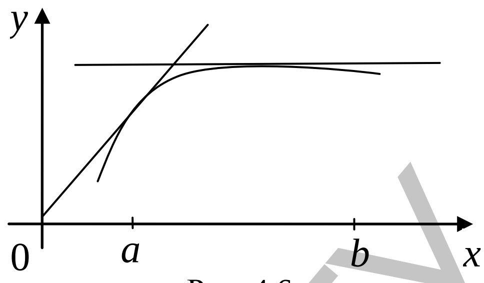


Рис. 4.6.

***Теорема* 4.10.** *Если на интервале* (a, b) *существует вторая производная функции* $y = f(x)$, *которая положительна* (*отрицательна*) *всюду на интервале, то график функции* $y = f(x)$ *имеет на интервале* (a, b) *вогнутость вниз* (*вверх*).

Точка x_0, в которой функция $y = f(x)$ меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется **точкой перегиба**.

Необходимое условие перегиба: $f''(x_0) = 0$ или не существует.

Достаточное условие перегиба: вторая производная функции $f(x)$ меняет знак, при переходе через точку x_0.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 4.$$

Решение.

Найдем вторую производную данной функции, как производную от первой производной этой функции.

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5,$$

$$f''(x) = (x^2 - 6x + 5)' = 2x - 6 = 2(x - 3).$$

Поскольку вторая производная обращается в нуль при $x = 3$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 2$ − абсцисса точки перегиба. Ордината этой точки $y = f(3) = -7$, т.е. $M(3, -7)$, − точка перегиба графика функции.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 3$ и $f''(x) > 0$ при $x > 3$, то график функции является вогнутым вверх на интервале $(-\infty, 3)$ и вогнутым вниз на интервале $(3, +\infty)$.

Асимптоты графика функции.

Определение* 4.3**. *Говорят, что прямая* $x = a$ *является* ***вертикальной асимптотой *графика функции* $y = f(x)$, *если хотя бы одно из предельных значений* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ *или* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ *равно* $\pm\infty$.

Из данного определения следует, что вертикальная асимптота существует в точке разрыва функции или на концах области определения.

Определение 4.4. *Прямая* $y = kx + b$ *называется* ***наклонной асимптотой*** *графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, *если функция представима в виде*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ *при* $x \to \pm\infty$.

***Теорема* 4.11.** *Для того, чтобы график функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) *имел наклонную асимптоту* $y = kx + b$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad и \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \tag{2}$$

$$\left(k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad и \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)\right).$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$, тогда $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы вида (2). Тогда, по свойству предела функции, $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, а это и есть определение наклонной асимптоты.

В случае $x \to -\infty$ доказательство аналогично. ■

***Замечание* 1.** Если пределы вида (2) существуют при $x \to \infty$, то у функции существует наклонная асимптота $y = kx + b$ и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$.

Схема полного исследования функции.

1. Найти область определения функции.
2. Найти нули функции, т.е. решить уравнение $f(x) = 0$. Корни этого уравнения и точки разрыва функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.
3. Находим точки пересечения функции с координатными осями.

4. Установить, является ли функция четной, нечетной, периодической. Если функция нечетная, то график данной функции симметричен относительно начала координат. График четной функции симметричен относительно оси *ОУ*.
5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции и установить их вид.
6. Изучить поведение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения. Ответить на вопрос: существуют ли вертикальные и наклонные асимптоты функции?
7. Исследовать функцию с помощью первой производной (найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума).
8. Исследовать функцию с помощью второй производной (найти промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба).
9. Построить график функции.

Пример 3. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение.

1. Найдем область определения функции:

$D(f) = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$.

2. Так как уравнение $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 0$ не имеет действительных корней, то $y \neq 0$. Если $x = 0$, то $y = -1$.

3. Так как $f(x+T) = \dfrac{(x+T)^2+1}{(x+T)^2-1} \neq \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$, то функция $f(x)$ непериодическая. Так как $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ и область определения функции симметрична относительно начала координат, то функция $f(x)$ – четная, а значит, график функции симметричен относительно оси *ОУ*.

4. Функция непрерывна в своей области определения, как частное двух непрерывных функций. Точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва функции. Так как

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$

то точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва второго рода.

5. Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1.$$

Учитывая исследование, проведенное в пункте 4, получим, что график функции имеет две вертикальные асимптоты: $x=-1$ и $x=1$.

Найдем наклонные асимптоты функции. Рассмотрим следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1.$$

Следовательно, имеем наклонную (горизонтальную) асимптоту $y=1$ при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

6. Исследуем функцию с помощью первой производной (найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции).

$$f'(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная равна нулю при $x=0$. Кроме того, сама функция и, следовательно, ее производная не существуют при $x=\pm 1$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Найдем знаки производной на каждом из полученных интервалов, значение функции в точке $x=0$, и запишем результаты в таблицу.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	не существ.	+	0	–	не существ.	–
$f(x)$	возрастает	не существ	возрастает	-1	убывает	не существ	убывает

В точке $x=0$ производная меняет знак с "+" на "–", следовательно, это точка максимума.

7. Исследуем функцию с помощью второй производной (найдем промежутки выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба).

$$f''(x)=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль и не существует в точках $x=\pm 1$. Найдем знаки второй производной на промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	не существ.	–	не существ.	+
$f(x)$	вогнута	не существ	выпукла	не существ	вогнута

Из приведенной таблицы, очевидно, что график функции не имеет точек перегиба.

По полученным данным строим график функции.

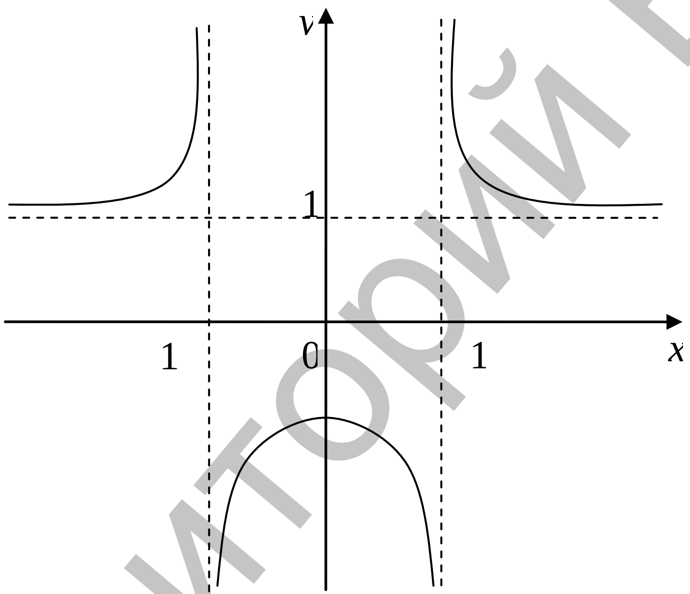


Рис.4.7.

V. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 5.1. *Матрицы и действия над ними*

Определение* 5.1. *Матрицей *A размера $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов.*

Обозначение

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами матрицы***. Если $m \neq n$, то матрица называется ***прямоугольной***, если $m = n$ – ***квадратной*** порядка <u>n</u>. Матрица размера $n \times 1$ вида $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ называется ***вектор-столбцом***, а матрица $1 \times n$ называется ***вектор-строкой*** $a_1, ..., a_n$.

Две матрицы называются ***равными***, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

В случае квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ элементы $a_{11}, ..., a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ называется ***диагональной***. При $\lambda_i = 1,\ i = \overline{1, n}$ диагональная матрица называется ***единичной***. Она обозначается **E**.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ – матрицы размера $m \times n$.

Определение* 5.2**. ***Суммой матриц *A и B называется матрица C размера* $m \times n$*, элементы которой* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$*,* $i = 1, ..., m$ *и* $j = 1, ..., n$.

Обозначение: $C = A + B$.

Пример 1. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-3 & 3+2 & -4-1 \\ 0+6 & -1+0 & -2+3 \\ -5+3 & 6+7 & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 6 & -1 & 1 \\ -2 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сумма матриц обладает следующими свойствами:

1. $A+B=B+A$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3. Для любых двух матриц A и B одинакового размера всегда существует матрица X такая, что $A+X=B$. Матрица X обозначается $B-A$ и называется разностью матриц B и A.

***Определение* 5.**3. *Матрица C, элементы которой $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, где $\alpha \in R$, a_{ij} – элементы матрицы A, называется **произведением матрицы A на число** α.*

Обозначается $C=\alpha A$.

Пример 2. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\alpha = -2$.

Решение.

$$C=\alpha \cdot A=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & -6 \\ 4 & -12 & -2 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц A и B на действительные числа α и β обладает следующими свойствами:

1. $1 \cdot A = A$, $(-1)A=-A$ (противоположная матрица), $0 \cdot A = 0$, где 0 – нулевая матрица (все элементы нули).

2. $(\alpha \cdot \beta)A=\alpha(\beta A)$.

3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

***Определение* 5.4.** *Матрицы A и B называются **согласованными**, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.*

Произведение AB матриц A и B определяется только для согласованных матриц.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$ – $m \times n$ и $n \times k$ матрицы соответственно.

Определение* 5.5. *Произведением матрицы *A* ***на матрицу*** *B* *называется* $m \times k$ *матрица* $C = A \cdot B$, *элементы которой находятся по формуле*:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj},$$

$$i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,k}.$$

Таким образом, элементы c_{ij} матрицы С равны сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-ого столбца матрицы *B*.

Пример 3. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем элементы матрицы С = *AB*:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -15;$

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1;$

$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) = -9;$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = -16;$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0;$

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) = -14;$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} = (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 13;$

$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} = (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11;$

$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) = -12.$

Следовательно матрица *C* имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ -16 & 0 & -14 \\ 13 & 11 & -12 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что произведение $A \cdot B$ часто называют произведением матрицы A на матрицу B слева или произведением матрицы B на матрицу A справа. Произведение матриц в общем случае не обладает свойством коммутативности, т.е. не всегда $A \cdot B = B \cdot A$.

Например: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются ***коммутативными***.

Коммутативными могут быть только квадратные матрицы одинаковых размеров. Из определения произведения матриц следует, что:

1. $AE = EA = A$;
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $(A + B)C = AC + BC$;
5. $A(B + C) = AB + AC$.

***Определение* 5.6**. *Матрица, получаемая из данной матрицы A путем замены строк на столбцы, и наоборот, называется **транспонированной**.*

Обозначение: A^T.

По определению: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

Пример 4. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Заменим строки матрицы A ее столбцами, получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования.

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

§ 5.2. *Определители 2-го и 3-го порядка*

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение* 5.7**. ***Определителем квадратной матрицы *второго порядка* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *называется число* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обозначение:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель называется также ***детерминантом.***

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называют ***элементами определителя.*** Элементы a_{11}, a_{22} образуют ***главную диагональ*** определителя, а элементы a_{12}, a_{21} – побочную.

Свойства определителя матрицы.

1. Если поменять местами строки или столбцы, то знак определителя изменится на противоположный, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

2. Если элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то этот определитель равен нулю.

3. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя матрицы можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если элементы некоторых двух строк (столбцов) определителя пропорциональны. то такой определитель равен нулю.

5. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженное на одно и тоже число *к*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix}.$$

6. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлены из первых слагаемых, а у другого – из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \grave{a}_{12}+b_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11}+b_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21}+b_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \grave{a}_{12} \\ b_{21} & \grave{a}_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение* 5.8. *Определителем квадратной матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *называется число*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы удобно пользоваться правилом, которое называется ***правилом треугольников*** (правилом Саррюса). Согласно этому правилу первые три слагаемые в правой части вычисляются, как показано на рисунке 1.Они представляют собой произведение элементов, расположенных на главной диагонали определителя, образованной элементами a_{11}, a_{22}, a_{33}, и в вершинах треугольников у которых одна из сторон параллельна главной диагонали. Эти слагаемые берутся со знаком «+». Остальные три слагаемые правой части равенства вычисляются аналогично (рис. 2), только за основу берется побочная диагональ, образованная элементами a_{13}, a_{22}, a_{31}, и перед ними стоит знак «–».

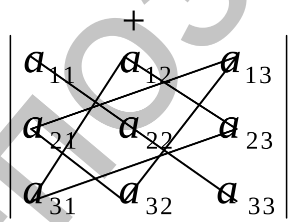


Рис. 1

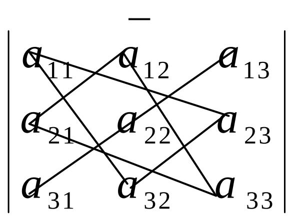


Рис. 2

Если из определителя $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ij}, то получим определитель второго порядка M_{ij}, который называется ***минором элемента*** a_{ij}.

Например, минором элемента a_{23}, является определитель

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Сформулируем еще два свойства определителей:

1. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца).

Например, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, разложив определитель по третьему столбцу.

Решение.

Разложение определителя по третьему столбцу определяется формулой:

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33},$$

т.е.

$$|A| = (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8-8+0 = -16.$$

Используя это свойство, можно свести вычисление определителя порядка больше трех к вычислению определителя третьего порядка.

2. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

§ 5.3. *Обратная матрица*

Пусть дана квадратная матрица А размера $n \times n$.

Определение* 5.9**. *Матрица A^{-1}, называется* ***обратной *для A, если выполняется равенство*

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E, \qquad (1)$$

где E – единичная матрица порядка n.

Из определения вытекает, что матрица A^{-1} является матрицей размера $n \times n$.

Назовем квадратную матрицу порядка n ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю.

***Теорема* 5.1.** *Для того чтобы матрица А имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.*

Доказательство:

Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная ей матрица A^{-1}. Тогда из равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ и свойства определителей $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ имеем $|A|\,|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$, отсюда $|A| \neq 0$, значит матрица A − невырожденная.

Достаточность: Пусть А=$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $|A| \neq 0$.

Рассмотрим матрицу А*, составленную из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы А.

$$А^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее и получим присоединенную матрицу

$$В = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы A и B, в силу двух последних свойств определителя, получим: $A \cdot B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$, отсюда матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B$ и является обратной к A. ■

***Следствие*:** $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, что следует из равенств $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$, т.е. $|A|^{-1} = \frac{1}{|\grave{A}|}$.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Отметим, что алгебраические дополнения элементов каждой строки матрицы A записаны в столбец с тем же номером.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\det A \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $\det A \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \grave{A}_{11} & \grave{A}_{21} & \grave{A}_{31} \\ \grave{A}_{12} & \grave{A}_{22} & \grave{A}_{32} \\ \grave{A}_{13} & \grave{A}_{23} & \grave{A}_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем определитель данной матрицы, разложив его по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Т.к. $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

Тогда,

$$B=\begin{pmatrix}\grave{A}_{11} & \grave{A}_{21} & \grave{A}_{31}\\ \grave{A}_{12} & \grave{A}_{22} & \grave{A}_{32}\\ \grave{A}_{13} & \grave{A}_{23} & \grave{A}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^{-1}=-\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -\dfrac{3}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Для невырожденных матриц имеют место следующие свойства:

1. $(A^{-1})^{-1}=A$,
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,
3. $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$,
4. $(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}$.

Лемма. *Если матрица A имеет обратную матрицу, то она единственна.*

Доказательство:

Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} — матрицы, обратные к A. Тогда $A\cdot A_1^{-1}=E$ $A\cdot A_2^{-1}=E$, отсюда

$$A_1^{-1}=A_1^{-1}\cdot E=A_1^{-1}\left(A\cdot A_2^{-1}\right)=\left(A_1^{-1}\cdot A\right)\cdot A_2^{-1}=EA_2^{-1}=A_2^{-1}.$$

Т.е. $A_1^{-1}=A_2^{-1}$.

§ 5.4. *Системы линейных уравнений третьего порядка*

В данном пункте мы будем рассматривать только системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, т.е. системы вида

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\qquad(1)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, индекс i показывает какому уравнению принадлежит коэффициент, а индекс j – при каком неизвестном он стоит (i, j = 1, 2, 3).

Матрица, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ составленная из коэффициентов при неизвестных называется ***матрицей системы*** (1). Запишем систему (1) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Числа, стоящие в правых частях уравнения образуют столбец $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, называемый ***столбцом свободных членов***.

Если свободные члены всех уравнений равны нулю, система называется ***однородной***.

Определение* 5.10**. *Совокупность трёх чисел* (α_1, α_2, α_3) *называется* ***решением системы (1), *если каждое уравнение системы обращается в тождество после подстановки в него чисел* α_i *вместо соответствующих неизвестных* x_i *для всех* $i = 1,2,3$.

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***. Если система не имеет решений, она называется ***несовместной***. Заметим, что однородные системы всегда имеют нулевое решение, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Такое решение называется ***тривиальным***.

Обозначим через Δ определитель матрицы системы (1), т.е. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а через Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

***Теорема* 5.2** (*Правило Крамера*). *Система* (1), *в случае, когда определитель* Δ *матрицы системы не равен нулю, имеет решение, и притом только одно. Это решение находится по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = 1,2,3. \qquad (3)$$

Пример. Найти решение системы $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

Решение.

Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, столбец свободных членов $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, определитель матрицы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2$.

Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то система является невырожденной и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Итак, решением системы является тройка чисел (1; -1; 2).
В случае, когда определитель матрицы системы (1) $\Delta = 0$, система либо совсем не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

VI. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 6.1. *Элементы комбинаторики*

В теории вероятностей одной из важнейших является задача о подсчете числа способов, с помощью которых может происходить то или иное событие, или числа способов упорядочения данной совокупности объектов. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то их называют комбинаторными. Раздел математики, в которых изучаются такие задачи, называется **комбинаторикой.**

Для комбинаторных задач справедлив **основной принцип перечисления:** *если множество E_1 содержит n_1 элемент, множество E_2 – n_2 элементов, …, множество E_m содержит n_m элементов, то* *число способов выбора по одному элементу из каждого множества равно* $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Определение* 6.1. *Перестановкой *из n элементов называется расположение этих элементов в определенном порядке.*

Например, из букв *a, b, c* мы можем составить следующие перестановки: (*a, b, c*), (*a, c, b*), (*c, b, a*), (*b, a, c*), (*b, c, a*), (*c, a, b*). Пусть P_n – число перестановок.

Для множества, состоящего из *n* элементов, мы можем составить *n*! перестановок, т.е. справедлива формула

$$P_n = n!. \qquad (1)$$

Так для множества, состоящего из букв *a, b, c,* мы составили 3! = 6 перестановок.

Определение* 6.2.** *Любой выбор m элементов, взятых в определенном порядке из n элементов, называется* ***размещением из n элементов по m.

Пусть A_n^m – число размещений из *n* элементов по *m*.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Определение* 6.3.** *Любой выбор m элементов из n элементов без учета их порядка называется* ***сочетанием из n элементов по m.

Отметим еще раз, при подсчете числа сочетаний из *n* элементов по *m* порядок расположения выбранных *m* элементов несущественен. Например, выборки (*a*, *b*) и (*b*, *a*) неразличимы. Пусть C_n^m – число сочетаний из *n* элементов по *m*.

Справедлива формула

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (3)$$

§ 6.2. *Предмет теории вероятностей. Поле событий*

Предмет теории вероятности. В окружающем нас мире можно наблюдать события, которые обязательно произойдут, если будет осуществлена определенная совокупность условий. Например, если нагреть воду в сосуде до температуры 100º при нормальных условиях, то она обязательно закипит. Такие события принято называть **достоверными**. Событие, которое заведомо не произойдет, при осуществлении определенных условий, называется **невозможным событием.** Например, если в урне имеются только белые шары и из урны наудачу вытащить шар, то невозможным будет событие «извлечь красный шар».

Однако в окружающем нас мире часто приходится сталкиваться с событиями, которые при осуществлении определенных условий могут произойти, а могут и не произойти. Такие события называются **случайными**. Совокупность условий, при которых случайное событие может произойти, а может и не произойти, называется **испытанием** или **опытом**. Например: «брошена монета» – испытание, «появление герба» – случайное событие; «произведен выстрел по мишени» – испытание, «попадание» – случайное событие.

Случайные события обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, … .

Отметим, что всякое событие является следствием очень многих причин, поэтому нельзя заранее предсказать произойдет оно или нет. Иначе обстоит дело при изучении многократно повторяющихся опытов. Оказывается, что однородные случайные события при многократном повторении опыта подчиняются определенным закономерностям.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных событий.

Возникла теория вероятностей в середине XVII века. У ее истоков стояли французские математики Б.Паскаль и П.Ферма, а также голландский математик Х.Гюйгенс. В переписке между ними, вызванной анализом задач, связанных с азартными играми, формировались основные понятия теории вероятностей.

Виды случайных событий. Действия над событиями.

События, которые невозможно разложить на более простые называются **элементарными.** Все остальные события называются **составными.**

Например, событие «сумма очков, выпадающих при бросании двух игральных костей, равна шести» является составным событием, так как оно наступит, только в результате наступления одного из пяти возможных элементарных событий – «выпадение на гранях костей одной из следующих пар цифр: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)».

Множество всех элементарных событий таких, что в результате данного опыта непременно произойдет одно и только одно событие из данного множества, называется **пространством элементарных событий** и обозначается символом Ω, а сами элементарные события (исходы опыта) называются **точками ω данного пространства**.

Событие A является составным событием, если оно наступит только в результате наступления какого либо одного из элементарных событий ω_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), образующих некоторое подмножество $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ пространства Ω. В таком случае говорят, что событие A

разлагается на элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (состоит из на элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$), и пишут $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Например, при подбрасывании 2-х игральных костей пространством Ω является множество элементарных событий «выпадение на гранях костей одной следующих пар цифр: (1, 1), (1, 2), …, (2, 1), …, (6, 1),(6, 2), …, (6, 6)». Точкой ω (элементарным событием) этого пространства является, например, событие «выпадение на гранях костей пары цифр (1, 1)». Событие $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ заключается в выпадении шести очков в сумме при бросании двух игральных костей.

Определение* 6.4. С*обытия называются* *несовместными,* *если появление одного из них исключает появление других в условиях данного эксперимента.

Например, в ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A_1 – «появилась стандартная деталь» и A_2 – «появилась нестандартная деталь» являются несовместными событиями.

Определение* 6.5. С**_обытие_ $\overline{A}$, которое обязательно произойдет, если не произойдет событие A, *называется* ***противоположным событию A.

Так в предыдущем примере событие A_1 противоположно событию A_2.

Определение* 6.6.** *События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются* ***попарно несовместными, *если любые два из этих событий несовместны.*

Определение* 6.7.** *События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются* ***равно возможными, *если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.*

Определение* 6.8.** *Говорят, что* ***событие А влечет за собой событие В, *если из того, что произошло событие A, следует, что произойдет и событие B.*

Обозначение: $A \subset B, \quad B \supset A$.

Например, событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпадет 2 очка, событие B – «выпадет 2, 4 или 6 очков». Очевидно, что если произойдет событие A, то произойдет и событие B. Следовательно, событие A влечет событие B.

Определение* 6.9.** *Если событие A влечет за собой событие B и в тоже время событие B влечет за собой событие A, то события A и B называются* ***эквивалентными или равносильными.

Обозначение: $A = B$.

При бросании двух игральных костей равносильными оказываются события A – «выпадение четной суммы очков», B – «на обе грани выпадают очки одинаковой четности».

Определение* 6. 10. *Суммой* (*объединением*) *событий *A и B называется событие C, состоящее из элементарных событий, входящих в хотя бы одно из событий A или B.*

Обозначение: $C = A \bigcup B$ или $C = A + B$.

Например, событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпадет нечетное число очков: 1, 3, 5, событие B – «выпадают очки кратные трем: 3, 6», событие C – «выпадает число очков: 1, 3, 5, 6». Следовательно, $C = A + B$.

Определение* 6. 11. *Произведением* (*пересечением*) *событий *A и B называется событие D, состоящее из элементарных событий, одновременно входящих в события A и B.*

Обозначение: $D = A \bigcap B$ или $D = A \cdot B$.

В предыдущем примере событие $D = A \cdot B$. состоит в выпадении трех очков.

Определение* 6. 12. *Разностью событий *A и B называется событие F, состоящее из элементарных событий, входящих в событие A, но не входящих в событие B.*

Обозначение: $F = A \setminus B$ или $F = A - B$.

В рассматриваемом выше примере событие $F = A \setminus B$ состоит в выпадении одного или пяти очков.

Пусть дано пространство элементарных событий Ω. Пусть это пространство удовлетворяет следующим условиям:

а) если пространству Ω принадлежат события A и B, то ему принадлежат также и события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$;

б) пространство Ω содержит достоверные и недостоверные события.

Определение* 6. 13.** *Пространство Ω. удовлетворяющее условиям а) и б) называется* ***полем событий.

§ 6.3. *Классическое определение вероятности*

Частота событий. Отметим, прежде всего, что теория вероятностей изучает лишь те события, которые могут быть осуществлены сколь угодно большое число раз, причем в неизменных условиях. Например, монету или игральную кость можно бросать в одних и тех же условиях столько раз, сколько будет нужно исследователю.

Далее, теория вероятностей изучает только те события, которые обладают так называемой статистической устойчивостью, или, иначе, устойчивостью частот.

Рассмотрим это требование более подробно. Представим, что производится последовательность испытаний, в каждом из которых происходит или не происходит некоторое событие A. Эти испытания происходят в одних и тех же условиях, и результаты одних испытаний не оказывают влияние на результаты других (в этом случае говорят, что испытания **независимы**).

Обозначим через m число появлений события A в каких либо n проведенных испытаниях.

Определение* 6.14.** *Отношение* $\frac{m}{n}$ *числа* m *испытаний в которых событие А появилось, к общему числу* n *проведенных испытаний называется* ***частотой события А.

Оказывается, что при многократном проведении опыта, частота события принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу. Например, при многократном бросании игральной кости частота выпадения каждого из количества очков от 1 до 6 колеблется около числа $\frac{1}{6}$.

Многократно проводились опыты бросания однородной монеты, в которых подсчитывали число появлений «герба». Каждый раз, когда число опытов было достаточно велико, частота события «выпадение герба» незначительно отличалось от $\frac{1}{2}$. Для наглядности приводим таблицу результатов, полученных английским статистом Пирсоном и французским естествоиспытателем Бюффоном.

Экспериментаторы	Число бросаний	Число выпадений герба	Частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пирсон	12000	6014	0,5016
Пирсон	24000	12012	0,5006

Свойство устойчивости частоты случайного события было подмечено и на явлениях демографического характера. Так частота рождения мальчиков колеблется около числа 0, 517.

Классическое определение вероятности. Пусть Ω − конечное пространство равновозможных и попарно несовместных элементарных событий.

Определение* 6.15. *Вероятностью $P(A)$ *события А называется отношение числа m элементарных событий, в результате которых происходит событие А, к общему числу n равновозможных элементарных событий*:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (4)$$

Свойства вероятности. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Для любого события A выполняется неравенство*

$$0 \le P(A) \le 1,$$

Это свойство следует из неравенства $0 \le m \le n$.

2. *Вероятность невозможного события равна* 0, *а вероятность достоверного события равна* 1.

3. *Для любых двух событий A и B, таких что* $A \subset B$, *выполняется неравенство* $P(A) \le P(B)$.

Доказательство. Так как $A \subset B$, то событие B состоит из элементарных событий ω_i, составляющих событие A, и, может быть, из элементарных событий, не входящих в A, т.е выполняется неравенство $m_A \le m_B$. Тогда из определения вероятности, следует, что $P(A) \le P(B)$. ■

4. *Если события A и B несовместны, т.е.* $A \bigcap B = 0$, *то* $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Пусть n – общее число равновозможных несовместных элементарных событий испытания, в результате которого произошло одно из событий A или B, m_A – число элементарных событий, составляющих событие A, m_B – число элементарных событий, составляющих событие B. Так как события A и B несовместны, то наступлению события $A + B$ благоприятствуют $m_A + m_B$ элементарных событий.

Тогда, по формуле (4)

$$P(A) = \frac{m_A}{n},\ P(B) = \frac{m_B}{n},\ P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n},$$

то справедливо равенство $P(A+B) = P(A) + P(B)$. ■

5. *Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *равна сумме вероятностей этих событий, т.е.*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Это свойство непосредственно вытекает из свойства 4.

6. *Если события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *образуют пространство* Ω *попарно несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны и образуют пространство Ω, то $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ –достоверное событие. Следовательно,

$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(\Omega) = 1.$ ■

7. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Это свойство непосредственно следует из свойства 6.

8. *Если события A и B совместны, то вероятность их суммы выражается формулой*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Пусть m – число равновозможных элементарных событий, составляющих событие A, k – число равновозможных элементарных событий, составляющих событие B. Допустим, что среди $m + k$ элементарных событий содержится l таких, которые благоприятствуют как событию A, так и событию B. Тогда, если n – общее число равновозможных элементарных событий, то

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n}, \quad P(A \cdot B) = \frac{l}{n},$$

Так как событие $A + B$ состоит в том, что произошло или событие A, или событие B, или то и другое, то, очевидно, что $A + B$ разлается на $m + k - l$ элементарных событий. Поэтому

$$P(A+B) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB). \ ■$$

9. *Если* $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Пример 1.В урне 20 шаров: 10 красных, 7 синих, 3 белых. Найти вероятность что

а) извлеченный наугад шар синий;

б) извлеченный наугад шар синий или красный.

Решение.

а) Пусть событие A – «извлеченный шар красный», событие B – «извлеченный шар синий», событие C – «извлеченный шар белый». События A, B и C несовместны. По формуле (4) вероятность наступления события B

$$P(B) = \frac{7}{20}.$$

б) *П е р в ы й   с п о с о б.* Событие D – «извлеченный наугад шар синий или красный» равно сумме событий A и B. Тогда, по свойству 4

$$P(D) = P(A+B) = \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}.$$

В т о р о й   с п о с о б. Событие $\overline{D}$ – «извлеченный наугад шар белый». $P(\overline{D}) = \frac{3}{20}$. Тогда, по свойству 7

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}.$$

Пример 2. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение.

Пусть событие A – «выпадение шести очков при бросании первой игральной кости», событие B – «выпадение шести очков при бросании второй игральной кости», событие $A \cap B$ – «выпадение шести очков при бросании первой и второй игральной кости».

$$P(A) = \frac{1}{6}, \; P(B) = \frac{1}{6}, \; P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Так как события A и B совместны, то по свойству 8

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

§ 6.4. *Условная и полная вероятности*

Условная вероятность. Часто, при проведении некоторого опыта вероятность наступления интересующего нас события A изменяется в зависимости от наступления (или не наступления) другого события B. В таких случаях говорят об **условной вероятности события** A при условии наступления события B.

Обозначение: $P(A|B)$.

Пример 1. В семье два ребенка разного возраста.

1. Найти вероятность того, что оба ребенка – мальчики.

2. Найти вероятность того, что оба ребенка мальчики, если известно, что один ребенок – мальчик.

3. Известно, что старший ребенок – мальчик. Найти вероятность того, что младший ребенок тоже мальчик.

Решение.

Пусть событие D – «один ребенок – девочка», событие M – «один из детей мальчик», событие MD – «первый ребенок – мальчик, второй – девочка», MM – «первый и второй ребенок – мальчики», DM – «первый ребенок – девочка, второй ребенок – мальчик», DD – «оба ребенка – девочки».

1. Поле событий Ω для первой задачи: $\Omega = \{MM, MD, DM, DD\}$. Тогда вероятность того, что один из детей мальчик находится по формуле (4), где $m = 1$, $n = 4$

$$P(MM) = \frac{1}{4}.$$

2. Поле событий Ω для второй задачи: $\Omega = \{MM, MD, DM\}$. В формуле (4) $m = 1$, $n = 3$. Тогда

$$P(MM) = \frac{1}{3}.$$

3. Поле событий Ω для третьей задачи: $\Omega = \{MM, MD\}$. В формуле (4) $m = 1$, $n = 2$. Тогда

$$P(MM) = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Во втором и третьем случаях мы находим условную вероятность.

***Теорема* 6.1.** *Условная вероятность события A при условии B находится по формуле*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{5}$$

где $P(B) \neq 0$.

Замечание. Аналогично определяется вероятность события A при условии B ($P(A) \neq 0$).

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{6}$$

Следствие. Из формул (5) и (6) получим **формулу для умножения вероятностей**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{7}$$

Пример 2. В коробке 3 красных и 7 синих шаров. Наудачу извлекли один шар, затем второй. Найти вероятность того, что первый извлеченный шар – красный, второй – синий.

Решение.

Пусть событие A – «первый вытащенный шар – красный», событие B – «второй вытащенный шар – синий», событие $A \cap B$ – «первый вытащенный шар – красный, второй вытащенный шар – синий».

Вероятность $P(A) = \frac{3}{10}$. Если произошло событие A, то в коробке осталось 9 шаров, из которых 7 черных. Тогда вероятность события B при условии, что произошло событие A

$$P(B \mid A) = \frac{7}{9}.$$

По формуле (7) вероятность события $P(A \cap B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$.

Независимые события.

Определение* 6.15.** *Говорят, что* ***событие А не зависит от события В*, если имеет место равенство* $P(A|B) = P(A)$, *т.е., если наступление события В не изменяет вероятности события А.*

Если событие А не зависит от события B, то по формуле (7) имеем $P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A)$. Следовательно, $P(B \mid A) = P(B)$, т.е. событие B также не зависит от A.

Для независимых событий формула умножения вероятностей принимает вид

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (8)$$

Пример 3. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первого стрелка – 0,8, второго стрелка – 0,7, третьего – 0,9. Найти вероятность

а) хотя бы одного попадания;

б) попадания ровно одного стрелка.

Решение.

а) Пусть событие A_1 – «попадание в цель первого стрелка», событие A_2 – «попадание в цель второго стрелка», событие A_3 – «попадание в цель третьего стрелка».

Попадание в цель одного стрелка не зависит от результатов стрельбы других стрелков, следовательно, события A_1, A_2, A_3 независимы.

Пусть события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ являются противоположными событиям A_1, A_2, A_3, т.е. событие $\overline{A_i}$ – «промах i-го стрелка» (i = 1, 2, 3). Тогда по свойству 7, § 6.3: $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Событие $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ состоит в том, что все три стрелка промахнулись. $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$. Событие A – «хотя бы один стрелок попал в цель», является противоположным тому, что все стрелки промахнулись. Тогда $P(A) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

б) Событие A – «ровно одно попадание в цель», может осуществиться в одном из трех случаев: $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$, $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}$, или $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$. Эти события несовместны. Тогда вероятность события A находится следующим образом:

$$P(A) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} + \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) =$$

$$= P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) +$$

$$+ P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно независимые и несовместные события, образующие полную группу событий, т.е. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Тогда имеет место следующая теорема.

***Теорема* 6.2.** *Вероятность события A, которое наступит лишь при появлении одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу событий, равно сумме произведений вероятностей каждого из событий H_i на условную вероятность события A при условии H_i, т.е.*

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n). \quad (9)$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i).$$

Так как события $A \cap H_i$ попарно несовместны, то, по свойству 4, §6.3, выполняется равенство

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i). \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i).$$

Применяя формулу (7), получим

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n). \blacksquare$$

Формула (9) называется **формулой полной вероятности.** События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются при этом **гипотезами для события *A***, а вероятности $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ – **априорными вероятностями гипотез.**

Так же справедлива следующая формула:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n)}, \quad (10)$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Эта формула называется **формулой Байеса** и позволяет найти априорные вероятности гипотез, т.е. вероятности гипотез, вычисленные при условии, что событие A произошло.

Пример 4. В учебных мастерских на станках a, b, c изготовляют соответственно 25%, 35% и 40% деталей. В их продукции брак составляет соответственно 15%, 12% и 6%. Найти

а) вероятность того, что наугад взятая деталь оказалась дефектной,

б) вероятность того, что эта деталь изготовлена на станке c.

Решение.

а) Обозначим события:

A – «наугад взятая деталь дефектна»,

H_1 – «деталь изготовлена на станке a,

H_2 – «деталь изготовлена на станке b,

H_3 – «деталь изготовлена на станке c,.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную систему попарно несовместных событий и $P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}40$. Кроме того числа 0,15, 0,12, 0,06 являются условными вероятностями события A при условии событий H_1, H_2, H_3 соответственно:

$$P(A|\,H_1) = 0{,}15, \quad P(A|\,H_2) = 0{,}12, \quad P(A|\,H_2) = 0{,}06.$$

По формуле (9) находим

$$P(A) = P\,(H_1)P(A\,|\,H_1) + P\,(H_2)P(A\,|\,H_2) + P\,(H_3)P(A\,|\,H_3) =$$

$$= 0{,}25\cdot 0{,}15 + 0{,}35\cdot 0{,}12 + 0{,}4\cdot 0{,}06 = 0{,}1035.$$

б) По формуле (10) находим вероятность того, что деталь изготовлена на станке c

$$P(H_3\,|\,A) = \frac{P(H_3)P(A\,|\,H_3)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) + P(H_3)P(A\,|\,H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}40\cdot 0{,}06}{0{,}1035} \approx 0{,}2319.$$

§ 6.5. *Последовательность независимых испытаний Я. Бернулли*

В научной и практической деятельности часто приходиться проводить многократно повторяющиеся испытания в сходных условиях, в результате каждого из которых может появиться или не появиться некоторое событие A. При этом представляет интерес исход не каждого отдельного испытания, а общее число появления события A в результате определенного числа опытов.

***Определение* 6.16.** Последовательные испытания называются независимыми, если вероятность осуществления любого исхода в каждом n – м испытании не зависит от реализации исходов предыдущих испытаний.

Легко представить испытания с двумя возможными исходами A и не $A(\overline{A})$, причём в каждом испытании вероятность p «успеха» (A произошло) и вероятность q=1 $-p$ «неудачи» (A не произошло или произошло не A) постоянны.

***Определение* 6.17.** Серию независимых испытаний с одной и той же вероятностью $p = p(A)$ исхода A называют испытаниями или схемой Бернулли.

Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A произойдёт m раз $(0 \le m \le n)$.

Справедлива формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (11)$$

Пример 1. По каналу связи передаётся 5 сообщений. Каждое из сообщений независимо от других с вероятностью 0,3 искажается помехами. Найти вероятность события: из 5 сообщений 3 искажены.

Решение.

так как вероятность искажения p=0,3, а вероятность передачи сообщения без искажения q = 1 – p = 0,7, то по формуле Бернулли

$$P_5(3) = C_5^3 (0,3)^3 \cdot (0,7)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,027 \cdot 0,49 = 0,1323 .$$

§6.6. *Предельные теоремы Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона*

При рассмотрении числовых примеров предыдущего пункта было замечено, что при больших значениях m и n вычисление $P_n(m)$ превращается в технически сложную задачу. Возникла необходимость в асимптотических формулах как для $P_n(m)$, так и для $\sum_{m=k}^{l} P_n(m)$. Приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ устанавливает локальная предельная теорема.

***Теорема* 6.3 (Муавра-Лапласа).** *Пусть вероятность события A в n независимых испытаниях равна p,* $0 < p < 1$. *Тогда вероятность* $P_n(m)$, *удовлетворяет при* $n \to \infty$ *соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $q = 1 - p$; $x = \dfrac{(m - np)}{\sqrt{npq}}$.

Другими словами, при больших n имеет место приближенная локальная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{12}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, значения этой функции берут в таблице для $x > 0$, так как $\varphi(x)$ – четная функция.

Формула (12) даёт удовлетворительные значения вероятности при достаточно больших n, а также, если p не слишком близко к 0 или 1.

Приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(m_1 \le m \le m_2)$, то есть вероятности того, что число m появления события A при n испытаниях лежит на отрезке $[m_1, m_2]$ устанавливает интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа.

***Теорема* 6.4.** *Пусть р – вероятность наступления события А при каждом из n независимых испытаниях. Тогда вероятность* $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ *удовлетворяет при* $n \to \infty$ *соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Другими словами, при больших значениях n имеет место приближенная интегральная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = (\Phi(x_2) - \Phi(x_1)), \tag{13}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-z^2/2} dz,$$

$\Phi(x)$ – нечетная функция, её значения берут в таблице.

Формула (13) даёт хорошую точность при значениях $npq \ge 10$.

Пример 1. По данным ОТК радиозавода, 0,8 всего объёма выпускаемых транзисторов не имеют дефектов. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 400 транзисторов дефекты будут иметь ровно 80.

Решение.

В задаче n=400, m=80, p=0,2; q=0,8; $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = 0$;

$\varphi(0) = 0{,}3989$. Тогда по формуле (12):

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986 .$$

Заметим, что при вычислении этой вероятности по формуле Бернулли, получается громоздкое выражение

$$P_{400}(80) = \frac{400}{80!320!}\left(\frac{1}{5}\right)^{80}\left(\frac{4}{5}\right)^{320}.$$

Пример 2. Найти вероятность того, что при 10000 бросаниях монеты, цифра (решка) выпадет не менее 4000 и не более 6000 раз.

Решение:

В задаче: $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$; $n = 10000$; $m_1 = 4000$; $m_2 = 6000$,

$$x_1 = \frac{4000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500}} = -20, \quad x_2 = \frac{6000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2500}} = 20.$$

Тогда по формуле (13) искомая вероятность равна

$$P_{10000}(4000 \le m \le 6000) = \Phi(20) - \Phi(-20) = 2 \cdot \Phi(20) = 2 \cdot 0{,}5 = 1.$$

Мы отмечали, что формулы Муавра-Лапласа плохо действуют при значения p и q близких к нулю.

Возникает, таким образом, задача разыскания асимптотической формулы, специально приспособленной для случая малых p (q). Такая формула была найдена Пуассоном.

***Теорема* 6.4 (Пуассона).** *Пусть вероятность события А при каждом испытании в серии из n независимых испытаний равна* $\frac{\lambda}{n}$, *где* $\lambda > 0$ *– постоянная, не зависящая от n. Тогда вероятность* $P_n(m)$ *при* $n \to \infty$ *и фиксированном m стремится к* $\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \lambda = np,\ m = 0,\ 1,\ \ldots,n \qquad (14)$$

Пример 3. ВЦ обслуживает 100 программистов, не связанных общей задачей. Вероятность того, что в течение 1 минуты программист обратится в ВЦ, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обратятся в ВЦ:

а) менее трёх программистов;
б) хотя бы один программист.

Решение.

Так как обращения в ВЦ программистов являются независимыми событиями, n = 100 велико, а вероятность p = 0,01 мала, воспользуемся формулой (14), где $\lambda = np = 1$.

а) $P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} \approx 0{,}920.$

б) Событие A – «в ВЦ обратится хотя бы один программист» и поэтому $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$.

§6.7. *Случайные величины.*

Основные понятия.

Понятие случайной величины является одним из важнейших понятий теории вероятности.

Определение* 6.18.** *Под* ***случайной величиной *понимают величину, которая в результате испытания принимает то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.*

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Определение* 6.19. *Дискретной*(*прерывной*) *случайной величиной *называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения с определёнными вероятностями.*

Определение* 6.20. *Непрерывной *называют случайную величину, которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка*.

Будем рассматривать только дискретные случайные величины, которые принимают конечное число значений. Для полного описания дискретной случайной величины надо знать все её возможные значения и вероятности, с которыми эти значения принимаются.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется таблица

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

в которой в первой строке записаны все возможные значения случайной величины X, а во второй – их вероятности. Обычно полагают $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Очевидно, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Определение* 6.21.** *Пусть случайная величина X принимает лишь конечное число значений* x_1, x_2, …, x_n *вероятности которых соответственно равны* p_1, p_2, …, p_n, *тогда* ***математическое ожидание *M(X) случайной величины X определяется равенством*

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Свойства математического ожидания.

1. $M(C) = C$.

2. $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.

3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Если случайные величины X и Y независимые, то

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Отклонением случайной величины *X* от своего математического ожидания *M*(*X*) называется случайная величина $X_0 = X - M(X)$.

Определение* 6.22.** ***Дисперсией *случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.*

Обозначают *D*(*X*).

По определению

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = \left[x_1 - M(X)\right]^2 \cdot p_1 + \ldots + \left[x_n - M(X)\right]^2 \cdot p_n .$$

Дисперсия характеризует меру отклонения случайной величины от её среднего значения. Для вычисления дисперсии удобно пользоваться формулой

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Свойства дисперсии.

1. $D(C) = 0$

2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$

3. Если X и Y независимые случайные величины, то

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Определение* 6.23. *Средним квадратическим отклонением случайной величины X *называется квадратный корень из дисперсии.*

Обозначают $\sigma(X)$.

По определению

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Определение* 6.24. *Модой $M_0(X)$ ***дискретной случайной величины X*** *называется такое её значение, вероятность появления которого наибольшая.*

Определение* 6.25. *Медианой случайной величины X *называется такая точка* $x = M_e(X)$, *для которой* $P(X \le M_e(X)) \ge 0{,}5$ *и* $P(X \ge M_e(X)) \ge 0{,}5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк П.М., Карпук А.А. Высшая математика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1.
2. Александров И.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М., Наука, 1977.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
4. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенных решений. – М.: Изд-во МФТИ, 1975.

СОДЕРЖАНИЕ