Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

● ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Курс лекций

2010

Репозиторий ВГУ

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
И20

Авторы: доцент кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук **Ж.В. Иванова**; доцент кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук **Т.Л. Сурин**; старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Рецензент:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент *С.А. Шлапаков*

Репозиторий ВГУ

Курс лекций «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных» подготовлен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математический анализ» и предназначен для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения математического факультета.

В данном издании излагается теоретический материал и рассматриваются наиболее типичные задачи по излагаемым разделам математического анализа.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

© Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов, 2010
© УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное издание «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции многих переменных» является продолжением опубликованных раннее учебных изданий «Математический анализ. Введение в анализ. Производная», «Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной» и предназначено для студентов второго курса заочного отделения математического факультета. В этой части содержится теоретический материал, который обычно изучается на втором курсе заочного отделения и включает в себя следующие разделы: «Понятие функции нескольких переменных», «Дифференцируемость функции нескольких переменных», «Локальный экстремум», «Неявные функции», «Двойной интеграл», «Тройной интеграл», «Применение двойных и тройных интегралов». Курс лекций написан в соответствии с учебным планом по математическому анализу для специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика». Материал излагается в простой, доступной для самостоятельного изучения форме. Приводится большое количество примеров, которые способствуют более основательному, осмысленному изучению теоретического материала, а также будут полезны при решении контрольной работы за III семестр.

Данный курс лекций будет полезен также студентам очного отделения, занимающимся на математическом и физическом факультетах.

В конце данного издания приведен список основной и дополнительной литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов математического анализа.

Репозиторий ВГУ

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие *n* – мерного евклидова пространства

Будем называть **n-мерной точкой M** упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество всевозможных n-мерных точек называется **n - мерным арифметическим (координатным) пространством A^n**.

Определение* 1.** *Арифметическое n-мерное пространство A^n называется* ***евклидовым n-мерным пространством*, если для любых двух точек $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ арифметического пространства A^n определено расстояние* (*метрика*) *по формуле*:

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + \ldots + (x_n'' - x_n')^2}. \qquad (1)$$

Евклидово n-мерное пространство обозначается символом R^n.

При $n = 1$ евклидово пространство R^1 представляет собой координатную прямую. Применим формулу (1) для нахождения расстояния между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|.$$

При $n = 2$ евклидово пространство R^2 представляет собой координатную плоскость и точки пространства R^2 – это точки координатной плоскости, координаты которых обычно обозначаются (x, y). Расстояние между этими точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

При $n = 3$ получим знакомое нам координатное пространство, точки которого имеют координаты (x, y, z).

При $n > 3$ пространство R^n уже не имеет геометрической интерпретации.

Будем обозначать символом $\{M\}$ некоторое множество точек n-мерного евклидова пространства R^n. Введем определения некоторых важных множеств.

1. Множество $\{M\}$ точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют неравенству $\rho(M, M_0) \le R$ $(R \ge 0)$ или

Репозиторий ВГУ

$(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 \le R^2$, где точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – некоторая фиксированная точка множества $\{M\}$, а точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная точка этого множества, называется ***n*-мерным замкнутым шаром** радиуса R с центром в точке M_0.

Множество $\{M\}$ точек пространства R^n, удовлетворяющее строгому неравенству $\rho(M, M_0) < R$, называется **открытым *n*-мерным шаром**.

Так, в пространстве R^3 это множество является шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. В пространстве R^2 – кругом радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. В пространстве R^1 – отрезком длинной $2R$ с серединой в точке $M_0(x_0)$.

2. Множество $\{M\}$ точек пространства R^n, удовлетворяющих равенству $\rho(M, M_0) = R$, называется ***n* – мерной сферой** радиуса R с центром в точке M_0.

3. Множество $\{M\}$ точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1, \ldots, \left|x_n - x_n^0\right| \le d_n$, ($d_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) называется ***n*-мерным координатным параллелепипедом.** При этом точка $M_0\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется центром этого параллелепипеда.

Если координаты множества $\{M\}$ удовлетворяют строгим неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| < d_1, \ldots, \left|x_n - x_n^0\right| < d_n$, то множество $\{M\}$ называется **открытым *n*-мерным** координатным параллелепипедом.

4. ***ε* - окрестностью точки** M_0 пространства R^n называется открытый n-мерный шар с центром в точке M_0 и радиусом равным ε.

5. **Прямоугольной окрестностью** точки M_0 пространства R^n называется открытый n-мерный координатный параллелепипед с центром в точке M_0.

Пусть $\{M\}$ некоторое множество точек n-мерного евклидова пространства R^n. Введем следующие понятия.

1. Точка M множества $\{M\}$ называется **внутренней** точкой этого множества, если существует ε – окрестность этой точки, принадлежащая множеству $\{M\}$.

2. Точка A называется **предельной** точкой множества $\{M\}$, если в любой ε - окрестности точки содержится хотя бы одна точка этого множества, отличная от A.

3. Точка A называется **граничной точкой** множества $\{M\}$, если любая ε - окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие множеству $\{M\}$, так и точки, не принадлежащие ему.

4. Множество $\{M\}$ называется **открытым множеством**, если любая точка этого множества внутренняя.

Репозиторий ВГУ

5. Если все граничные точки множества $\{M\}$ принадлежит этому множеству, то множество $\{M\}$ называется **замкнутым**.

Можно дать определение, эквивалентное приведенному выше: если все предельные точки множества $\{M\}$ принадлежит этому множеству, то множество $\{M\}$ называется **замкнутым**.

6. Если множество $\{M\}$ является открытым множеством, то множество $\{\overline{M}\}$, полученное присоединением к $\{M\}$ всех граничных точек этого множества, называется **замыканием** множества $\{M\}$.

7. Множество $\{M\}$ называется **ограниченным**, если существует такое действительное число $R > 0$, что все точки множества лежат внутри шара $\rho(0, M) \leq R$.

8. Множество $\{M\}$ называется **компактным**, если оно ограничено и замкнуто.

9. **Непрерывной кривой *L*** в пространстве R^n называется множество $\{M\}$ точек этого пространства, координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которых представляют собой непрерывные функции параметра t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

10. Множество $\{M\}$ пространства R^n называется **связным**, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

11. **Областью** называют открытое и связное множество.

2. Предел последовательности точек пространства R^n

Рассмотрим последовательность точек $\{M^k\}$ пространства R^n. Понятие последовательности точек n-мерного евклидова пространства вводится аналогично понятию последовательности точек числовой прямой (пространства R^1) (определение 1, § 2.1, гл. II, [9]).

Определение 2. *Точка $A \in R^n$ называется **пределом последовательности** $\{M^k\}$, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число K, что для любого элемента последовательности с номером $k \geq K$ выполняется неравенство*

$$\rho(M^k, A) < \varepsilon. \qquad (2)$$

Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся.** Обозначение: $\lim\limits_{k\to\infty} M^k = A$, или $M^k \to A$ при $k \to \infty$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Рассмотрим последовательность точек $\{M^k\}$ евклидова пространства R^n. Пусть $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ - координаты точки*

Репозиторий ВГУ

$M^k \in \{M^k\}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – координаты точки А. Тогда, для того, чтобы последовательность $\{M^k\}$ сходилась к точке А, необходимо и достаточно, чтобы числовые последовательности $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$, составленные из координат точек M^k, сходились соответственно к числам $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\{M^k\} \to A$, тогда для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число K, что для любого номера $k \ge K$ выполняется неравенство $\rho(M^k, A) < \varepsilon$ или

$$\sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} < \varepsilon .$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left|x_1^{(k)} - a_1\right| \le \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} < \varepsilon .$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное K, что для любого номера $k \ge K$ выполняется неравенство $\left|x_1^{(k)} - a_1\right| \le \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_1^{(k)}\}$ сходится к числу a_1.

Аналогично доказывается сходимость последовательностей $\{x_2^{(k)}\}, \dots, \{x_n^{(k)}\}$ к числам $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно.

Достаточность. Пусть $\{x_i^{(k)}\} \to a_i$, $i = 1, \dots, n$. Значит, существуют такие числа K_i, что при $k \ge K$, где $K = \max\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$, выполняются неравенства

$$\left|x_1^{(k)} - a_1\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ \dots, \ \left|x_n^{(k)} - a_n\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} .$$

Получаем,

$$\rho(M_k, A) = \sqrt{(x_1^{(k)} - a_1)^2 + (x_2^{(k)} - a_2)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - a_n)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Таким образом, доказали, что последовательность $\{M^k\}$ сходится к точке $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$. □

Теорема 2 (критерий Коши). *Для того, чтобы последовательность $\{M^k\}$ точек n-мерного евклидова пространства сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер K, что для любых $k \ge K$ и для всех натуральных чисел p выполнялось неравенство*

Репозиторий ВГУ

$$\rho(M^{k+p}, M^k) < \varepsilon. \qquad (3)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть последовательность $\{M^k\}$ сходится, следовательно, сходятся числовые последовательности $\left\{x_1^{(k)}\right\}, \left\{x_2^{(k)}\right\}, \ldots, \left\{x_n^{(k)}\right\}$. Значит, для этих последовательностей выполняется критерий Коши сходимости числовых последовательностей (теорема 3, § 2.4. [9]), т. е. для любого $\varepsilon > 0$, существуют такие натуральные числа $K_1, K_2, \ldots, K_n$, что для любого $k \geq K$, где $K = \max\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$, и для любого натурального p выполняются неравенства: $\left|x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, $i = 1, \ldots, n$.

Найдем $\rho(M^{k+p}, M^k) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)})^2} < \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2}{n} n} = \varepsilon$, значит, выполняется неравенство (3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется неравенство (3). Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число K, что для любых номеров $k \geq K$ и любого натурального p выполняются неравенства

$$\left|x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)}\right| < \sqrt{(x_1^{(k+p)} - x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k+p)} - x_2^{(k)})^2 + \ldots + (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} < \varepsilon,$$

$i = 1, \ldots, n$. Значит, последовательности $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ – фундаментальные, а, следовательно, сходятся. Тогда и последовательность $\{M^k\}$ является сходящейся. □

Последовательность точек пространства R^n, удовлетворяющая критерию Коши, называется **фундаментальной**.

Замечание. Если последовательность $\{M^k\}$ принадлежит замкнутому множеству $\{M\}$, то и предел этой последовательности также принадлежит этому множеству. Действительно, в любой окрестности точки A имеются элементы последовательности $\{M^k\}$, т.е. точки множества $\{M\}$. Следовательно, точка A является или внутренней, или граничной точкой множества $\{M\}$, а, так как данное множество замкнуто, то A принадлежит этому множеству.

Пример 1. Найти предел последовательности $\{M^k\}$, где $M_k(\sqrt[k]{k}, \dfrac{1}{k})$.

Решение.

Для нахождения предела последовательности $\{M^k\}$, находим

Репозиторий ВГУ

пределы $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$.

Рассмотрим $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}$.

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\lim_{k\to\infty}e^{\frac{1}{k}\ln k}=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}}=e^0=1.$$

(Для нахождения предела $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}$ воспользуемся правилом Лопиталя для функции $y=\frac{\ln x}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Тогда, по определению предела функции по Гейне, получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=0$.)

Воспользовавшись леммой 1, получим, что $\lim\limits_{k\to\infty}M_k=A(1,0)$.

3. Понятие функции нескольких переменных

Введем понятие функции n-переменных.

Определение 3. *Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек пространства R^n ставится в соответствие по некоторому закону действительное число u из множества $\{u\}$, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана* ***функция*** $u=u(M)$ *или* $u=f(M)$.

При этом множество $\{M\}$ называется **областью определения** функции $u=f(M)$. Обозначение: $D(u)$ или $D(f)$.

Число u, соответствующее точке M, будем называть **значением функции** $u(M)$ в точке M. Множество $\{u\}$ всех значений функции называется **множеством значений** функции $u=u(M)$. Обозначение: $E(u)$ или $E(f)$.

Так как точка M пространства R^n определяется координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то для функции $u=u(M)$ используется также обозначение $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Замечание **1**. В пространстве R^1 (координатная прямая) понятие функции соответствует понятию функции одной переменной $y=y(x)$ или $y=f(x)$, которая изучалась ранее.

Замечание **2**. В пространстве R^2 (координатная плоскость) задается функция двух переменных $z=z(x,y)$ или $z=f(x,y)$.

Для функции двух переменных можно ввести понятие **графика функции**. Графиком функции $z=f(x,y)$ называют множество точек пространства R^3, которые имеют координаты $(x, y, f(x,y))$.

Репозиторий ВГУ

***Замечание* 3**. В пространстве R^3 (координатное пространство) задается функция трех переменных $u = f(x, y, z)$.

Рассмотрим примеры функций двух и трех переменных

1. $u = x^2 + y^2 + z^2$. Областью определения данной функции является множество всех точек пространства R^3, т.е. $D(u) = R^3$. $E(u) = [0, +\infty)$.

2. $u = \ln xyz$.

$D(u)$ – множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $xyz > 0$.

$E(u) = (-\infty, +\infty)$.

3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Область определения этой функции задается неравенством $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$. Это круг с центром в начале координат и радиусом 2. $E(u) = [0, 2]$.

4. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Область определения задается неравенством $x^2 + y^2 - 4 > 0$ или $x^2 + y^2 > 4$. Это часть плоскости вне круга радиуса 2 с центром в точке 0. $E(u) = (0, +\infty)$.

5. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$. Область определения функции задается неравенством: $\cos(x^2 + y^2) \geq 0$ или неравенством

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Это система концентрических колец с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусами $\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k}$ (рис. 1.1). Множество значений – отрезок [0, 1].

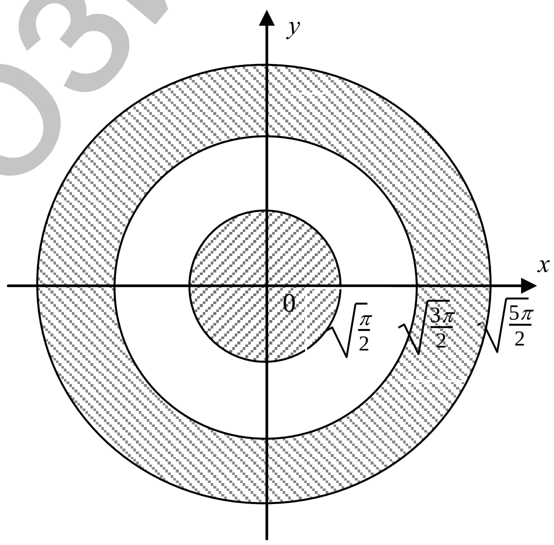


Рис. 1.1.

Репозиторий ВГУ

4. Предел функции *n* - переменных

Рассмотрим функцию $u = f\,(M)$, определенную на множестве $\{M\}$, $M\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ и точку $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – предельную точку множества $\{M\}$.

Определение* 4.** *Число* b *называется* ***предельным значением *функции* $u = f(M)$ *в точке* A (*или пределом функции* $f(M)$ *при* $M \to A$), *если для любой сходящейся к* A *последовательности* $\{M^k\}$ *точек множества* $\{M\}$ $(M^k \neq A)$ *соответствующая ей последовательность значений функции* $f\,(M^k)$ *сходится к* b.

Приведенное определение называется определением предела функции на языке последовательностей. Сформулируем определение предела функции на языке «ε–δ»

Определение* 5**. *Число* b *называется* ***предельным значением *функции* $u = f(M)$ *в точке* A, *если для любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое действительное число* $\delta > 0$, *что для всех точек* M *из области определения функции* $u = f(M)$, *удовлетворяющих условию* $0 < \rho\,(M, A) < \delta$, *выполняется неравенство:*

$$|\, f\,(M) - b| < \varepsilon.$$

Замечание. Можно доказать, что **о**пределения 4 и 5 эквивалентны.

Обозначение: $\lim\limits_{M \to A} f\,(M) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f\,(x_1, \ldots, x_n) = b.$

Дадим определение предела функции в бесконечной точке.

***Определение* 6.** *Число* b *называется предельным значением функции* $f\,(M)$ *при* $M \to \infty$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $K > 0$, *что для любой точки* M *из области определения функции* $f\,(M)$, *удовлетворяющей неравенству* $\rho\,(O,\ M) > K$, *выполняется неравенство* $|\, f\,(M) - b| < \varepsilon$.

Для предела функции от нескольких переменных справедливы все свойства и теоремы аналогичные свойствам и теоремам сформулированным для предела функции одной переменной (см.[9] гл.III, § 3.2.).

Замечание. Предел функции $u = f\,(M)$ в точке A существует, если его значение не зависит от пути, по которому точка M стремится к точке A.

***Теорема* 3.** *Пусть* $\lim\limits_{M \to A} f\,(M) = b$, $\lim\limits_{M \to A} g\,(M) = c$. *Тогда*

1. $\lim\limits_{M \to A} \left[f(M) \pm g(M) \right] = \lim\limits_{M \to A} f(M) \pm \lim\limits_{M \to A} g(M)$.

2. $\lim\limits_{M \to A} f(M) \cdot g(M) = \lim\limits_{M \to A} f(M) \cdot \lim\limits_{M \to A} g(M)$.

Репозиторий ВГУ

3. $\lim\limits_{M\to A}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to A} f(M)}{\lim\limits_{M\to A} g(M)}$, $\left(\lim\limits_{M\to A} g(M)\neq 0\right)$.

***Теорема* 4.** *Если* $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$, *и* $b < 0$ ($b > 0$), *то существует окрестность точки* A, *в которой выполняется неравенство* $f(M) < 0$ ($f(M) > 0$).

Определение* 7.** *Функция* $f(M)$ *называется* ***бесконечно малой *в точке* A, *если* $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$.

***Теорема* 5.** *Если* $\lim\limits_{M\to A} f(M) = b$, *то функция* $\alpha(M) = f(M) - b$ *является бесконечно малой в точке* A.

Сравнение бесконечно малых функций производится так же, как и в случае функции одной переменной. Для бесконечно малых функций нескольких переменных справедливы свойства, аналогичные свойствам бесконечно малых функций одной переменной.

***Теорема* 6 (*критерий Коши*).** *Для того, чтобы функция* $f(M)$ *имела конечное предельное значение в точке* A, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\delta > 0$, *что для всех точек* M' *и* M'' *из области определения функции удовлетворяющих неравенствам* $0 < \rho(A, M') < \delta$, $0 < \rho(A, M'') < \delta$, *выполнялось неравенство*

$$\rho(f(M'), f(M'')) < \varepsilon.$$

Повторные пределы функции. Для функции многих переменных вводится понятие повторного предела, т. е. предела, при котором изменяется только одна переменная, а остальные остаются фиксированными.

Рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных $u = f(x, y)$.

Пусть эта функция определена в прямоугольной окрестности $Q = \{|x - x_0| < d_1,\ |y - y_0| < d_2\}$ точки $M_0(x_0, y_0)$ за исключением, может быть, самой точки M_0.

Зафиксируем переменную y, удовлетворяющую неравенству $0 < |y - y_0| < d_2$. Тогда функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как функцию от одной переменной x. Пусть для любого зафиксированного таким образом значения y, существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$.

Пусть также существует $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$.

Тогда говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует повторный

Репозиторий ВГУ

предел функции $f(x, y)$ и пишут $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=b$.

Аналогично определяется предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=b$.

Теорема 7. *Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой прямоугольной окрестности $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке предельное значение b. Пусть, кроме того, для любого фиксированного значения x, такого что $0 < |x - x_0| < d_1$ существует предел $\psi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, и для любого фиксированного y, $0 < |y - y_0| < d_2$, существует $\varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ Тогда существуют повторные пределы функции и справедливо равенство $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=b$.*

Пример 2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$; *б*) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

Решение.

а) Так как $(x + y) \to 0$, при $x \to 0$ и $y \to 0$, а $\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ ограниченная функция, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$ ([9], гл.III, § 3.2, п.3).

б) Под знаком предела стоит неопределенность 1^∞. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела.

$$(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}=\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2xy}{x^2+xy}}.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{2xy}{x^2+xy}}.$$

Найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]$. Введем новую переменную: $z = xy$. Так как $xy \to 0$ при $x \to 0$ и $y \to 2$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e.$$

Репозиторий ВГУ

Найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2xy}{x^2+xy} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2y}{x+y} = 2$.

Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}} = e^2$.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение.

Если функция $f(M)$ имеет предел в точке O, то значение предела не зависит от пути, по которому точка M стремится к точке O (0, 0).

Пусть точка $M(x, y) \to O(0, 0)$ по прямой $y = kx$.

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

и

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Величина этого предела зависит от углового коэффициента прямой $y = kx$, т.е, величина предела зависит от пути по которому точка M стремится к точке O, а значит предел не существует.

5. Непрерывность функции n – переменных

Пусть точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – внутренняя точка области определения функции $u = f(M)$.

Определение 8. *Функция $u = f(M)$ называется* ***непрерывной в точке*** *A, если предел функции в точке A существует и равен значению функции в этой точке, т.е.*

$$\lim_{M\to A} f(M) = f(A). \qquad (4)$$

Точки, в которых равенство (4) не выполняется, называются точками разрыва функции.

Определение 9. *Функция $u = f(M)$ называется* ***непрерывной на некотором множестве*** *$\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Назовем полным приращением функции $u = f(M)$ в точке $A(a_1, \ldots, a_n)$ разность

$$\Delta u = f(M) - f(A),$$

Репозиторий ВГУ

где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная точка из области $D(f)$ определения функции.

Обозначим через $\Delta x_1 = x_1 - a_1$, …, $\Delta x_n = x_n - a_n$ – приращения аргументов функции $u = f(M)$, тогда приращение функции в точке A можно задать в виде $\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Очевидно, что для непрерывности функции необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{M \to A} \Delta u = 0$.

Частным приращением функции $f(M)$ по аргументу x_i в точке M называется разность

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Таким образом, частное приращение функции $\Delta_{x_i} u$ – это приращение, при котором изменяется только переменная x_i, а все остальные переменные остаются неизменными.

Определение 10. *Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M по переменной x_i, если выполняется равенство*

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta_{x_i} u = 0.$$

Пример 4. Доказать, что функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $O(0, 0)$ по переменным x и y, но не является непрерывной в точке $O(0, 0)$ в смысле определения 8.

Решение.

Докажем, что функция непрерывна в точке O по переменной x, для этого найдем частное приращение функции в точке O по этой переменной

$$\Delta_x u\Big|_{(0,0)} = u(0 + \Delta x, 0) - u(0, 0) = u(\Delta x, 0) - u(0, 0) = \frac{\Delta x^2 \cdot 0}{\Delta x^4 + 0} - 0 = 0,$$

значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$ и функция непрерывна в точке O по переменной x.

Аналогично доказывается, что функция непрерывна по переменной y.

Можно также доказать, что функция непрерывна на любой прямой $y = kx$.

Репозиторий ВГУ

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0 = f(0, 0).$$

Докажем, что функция не является непрерывной в точке $O\,(0, 0)$. Для этого докажем, что предел функции в этой точке не существует, т.е. зависит от пути, по которому точка O стремится в начало координат. Рассмотрим предел функции по параболам $y = kx^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \begin{vmatrix} y = kx^2 \\ x \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + k^2 x^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^4}{x^4(1+k^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Предел зависит от вида параболы $y = kx^2$, значит предел не существует и определение 8 не выполняется. Следовательно, точка (0, 0) – точка разрыва функции.

6. Основные теоремы о непрерывных функциях *n* – переменных

Сформулируем основные теоремы о непрерывных функциях многих переменных.

***Теорема* 8 (*арифметические свойства непрерывных функций*).** *Сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных в точке A функций, есть функция непрерывная в этой точке (в случае частного функция, стоящая в знаменателе дроби, не равна нулю в точке A).*

***Теорема* 9 (*о сохранении знака непрерывной функции*).** *Если функция* $u = f(M)$ *непрерывна в точке A пространства* R^n *и если* $f(A) \neq 0$, *то существует такая* δ*-окрестность точки A, во всех точках которой функция* $u = f(M)$ *не обращается в нуль и имеет тот же знак, что и* $f(A)$.

***Теорема* 10 (*о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение*).** *Пусть функция* $u = f(M)$ *непрерывна на множестве* $\{M\}$ ($\{M\}$ *- связное множество из пространства* R^n). *и* $f(A)$ *и* $f(B)$ *– значения этой функции в точках A и B этого множества. Пусть* c *– число лежащее между числами* $f(A)$ *и* $f(B)$. *Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей во множестве* $\{M\}$ *найдется такая точка C, что* $f(C) = c$.

Для непрерывных функций многих переменных справедливы теоремы, аналогичные первой и второй теоремам Вейерштрасса об ограниченности функции одной переменной на отрезке и достижении ею своей точной верхней и точной нижней граней.

Репозиторий ВГУ

Определения ограниченной сверху, снизу, ограниченной на множестве $\{M\}$ функции $u = f(M)$ аналогичны соответствующим определениям, введенным для функции одной переменной (см. [9], гл. III, §3.1, п.2).

***Теорема* 11 (*первая теорема Вейерштрасса*).** *Если функция* $u = f(M)$ *непрерывна на компактном множестве* $\{M\}$, *то она ограничена на этом множестве.*

***Теорема* 12 (*вторая теорема Вейерштрасса*).** *Если функция* $u = f(M)$ *непрерывна на компактном множестве* $\{M\}$, *то она достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.*

Введем понятие **сложной функции многих переменных**. Пусть функции

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m) \end{cases} \qquad (5)$$

заданы на множестве $\{T\}$ пространства R^m. Тогда каждой точке $T(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \{T\}$ ставится в соответствие с помощью формул (5) точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{M\}$ пространства R^n. Пусть на множестве $\{M\}$ определена функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M)$. Тогда говорят, что на множестве $\{T\}$ m-мерного евклидова пространства определена **сложная функция**

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)).$$

Замечание. Для краткости будем обозначать соотношения (5) следующим образом: $x = \varphi(t)$, где $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – точка пространства R^n, а $(t) = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ – точка пространства R^m. Тогда сложную функцию

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$$

можно записать следующим образом: $u = f(\varphi(t))$. Справедлива следующая теорема.

***Теорема* 13 (*о непрерывности сложной функции*).** *Пусть функции* $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ *непрерывны в точке* $B(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in R^m$, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, *где* $a_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$. *Тогда сложная функция* $u = f(\varphi(t))$ *непрерывна в точке B.*

Репозиторий ВГУ

Введем понятие **равномерной непрерывности функции многих переменных.**

Определение* 11.** *Функция* $u = f(M)$ *называется* ***равномерно непрерывной *на множестве* $\{M\}$ *пространства* R^n, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любых двух точек* M' *и* M'' *из множества* $\{M\}$ *таких, что* $\rho(M', M'') < \delta$ *справедливо неравенство* $\left| f(M') - f(M'') \right| < \varepsilon$.

***Теорема* 14 (*о равномерной непрерывности*).** *Непрерывная на компактном множестве* $\{M\}$ *функция равномерно непрерывна на этом множестве.*

Назовем **диаметром ограниченного множества** $\{M\}$ точную верхнюю грань чисел $\rho(M', M'')$, где M' и M'' любые точки из множества $\{M\}$. **Колебанием** функции $u = f(M)$ на замкнутом множестве $\{M\}$ называется разность между точной верхней и точной нижней границами этой функции на данном множестве $\omega = \sup f(M) - \inf f(M)$.

Следствие. *Если функция* $f(M)$ *непрерывна на компактном множестве* $\{M\}$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что на каждом принадлежащем множеству* $\{M\}$ *замкнутом подмножестве, диаметр которого меньше* δ, *колебание функции* $\omega < \varepsilon$.

§ 1.2 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Частные производные функции *n*-переменных

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве $\{M\} \in R^n$. Рассмотрим точку M_0 $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – внутреннюю точку области определения функции и найдем частное приращение функции по переменной x_i в точке M_0:

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) -$$

$$- f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Приращение Δx_i выбирается таким образом, чтобы точка

$$M(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

принадлежала области определения функции u.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$.

Определение* 1.** *Если предел* $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$ *существует и конечен, то он называется* ***частной производной *функции по переменной* x_i *в точке* M_0.

Обозначение: $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $f'_{x_i}(M_0)$, u'_{x_i}.

Так как при нахождении частной производной функции по переменной x_i все координаты точки M_0, за исключением координаты x_i, фиксированы, то функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассматривается как функция от одной переменной x_i. Следовательно, частные производные функции находятся по тем же правилам, что и производные функции одной переменной.

Пример 1. Найти частные производные функции $u = x^3 + xy^2 + xy^2z$ в произвольной точке.

Решение.

Считая y и z постоянными, находим

$$u'_x = (x^3 + xy^2 + xy^2z)'_x = 3x^2 + y^2 + y^2z.$$

Затем, полагая x и z постоянными, находим

$$u'_y = (x^3 + xy^2 + xy^3z)'_y = 2xy + 3xy^2z.$$

Полагая x и y постоянными, находим

$$u'_z = (x^3 + xy^2 + xy^3z)'_z = xy^3.$$

Пример 2. Найти частные производные функции $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ в точке $M(0, 2, 1)$.

Решение.

Найдем частные производные функции $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ в произвольной точке

$$u'_x = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad u'_y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad u'_z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Найдем значение частных производных в точке $M(0, 2, 1)$.

$$u'_x(M) = 0, \quad u'_y(M) = \frac{1}{3}, \quad u'_z(M) = \frac{1}{6}.$$

Замечание. В отличие от функции одной переменной, из существования у функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в данной точке частных производных, не следует непрерывность функции в данной точке.

Репозиторий ВГУ

2. Дифференцируемость функции *n*-переменных

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определенную на множестве $\{M\}$ и точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{M\}$.

***Определение* 2.** *Функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется дифференцируемой в точке М, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n, \qquad (1)$$

где A_i – *некоторые постоянные числа, а функции* $\alpha_i \to 0$ *при* $\Delta x_i \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Можно доказать, что $\alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$. Поэтому формула (1) может быть также записана в виде

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + o(\rho). \qquad (2)$$

Главная часть приращения функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **дифференциалом функции** в точке M и обозначается du, т.е.

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n\,. \qquad (3)$$

***Теорема* 1.** *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке М, то в этой точке существуют частные производные функции по всем аргументам.*

Доказательство. Рассмотрим частное приращение функции u по аргументу x_i в точке M

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Так как функция дифференцируема в точке M, то приращение $\Delta_{x_i} u$ можно найти по формуле (1), где приращения всех аргументов, за исключением приращения Δx_i, будут равны 0. Следовательно, $\Delta_{x_i} u = A_i\Delta x_i + \alpha_i\Delta x_i$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{A_i\Delta x_i + \alpha_i\Delta x_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0}(A_i + \alpha_i) = A_i.$$

Значит, у дифференцируемой в точке M функции существуют в этой точке частные производные по всем аргументам и $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$. □

***Замечание* 1.** Из доказательства теоремы следует, что приращение дифференцируемой в точке M функции можно записать в виде

Репозиторий ВГУ

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho), \qquad (4)$$

а дифференциал – следующим образом:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

***Замечание* 2.** Дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M является функцией, зависящей от приращений Δx_1, Δx_2, …, Δx_n аргументов этой функции.

Учитывая, что $dx_i = \Delta x_i$, получим

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \qquad (5)$$

***Замечание* 3.** Частные производные в формулах (4) и (5) находятся в точке M_0.

Пример 1. Найти дифференциал функции

$$u = \sin(\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2 + \pi)$$

в точке M_0 (1, 1, 1).

Решение.

Найдем частные производные функции в произвольной точке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\pi x\cos(\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2 + \pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\pi y\cos(\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2 + \pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\pi z\cos(\pi x^2 + \pi y^2 + \pi z^2 + \pi).$$

Найдем значение этих производных в точке M_0

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 2\pi, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 2\pi, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 2\pi.$$

Тогда, по формуле (5),

$$du(M_0) = 2\pi\,dx + 2\pi\,dy + 2\pi\,dz = 2\pi(dx + dy + dz).$$

***Теорема* 2.** *Пусть у функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в некоторой окрестности точки M существуют частные производные по всем аргументам, непрерывные в точке M. Тогда функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке M.*

Репозиторий ВГУ

Замечание. Эта теорема говорит о том, что в отличие от функции одной переменной, для дифференцируемости функции многих переменных в точке M не достаточно существования в этой точке частных производных функции по всем переменным. Требуется:

а) существование частных производных в некоторой окрестности точки M,

б) непрерывность частных производных в точке M.

Пример 2. Доказать,

1) что функция $z = \sqrt{xy}$ имеет частные производные z'_x и z'_y в точке $O(0, 0)$, но не является дифференцируемой в этой точке;

2) что частные производные функции не являются непрерывными в точке O.

Решение.

1. Докажем, что функция $z = \sqrt{xy}$ не является дифференцируемой в точке $O(0, 0)$, но частные производные z'_x и z'_y в этой точке существуют.

Частные производные функции $z = \sqrt{xy}$ в точке $O(0, 0)$ найдем исходя из определения 1. Для этого найдем частные приращения функции в точке $O(0, 0)$:

$$\Delta_x z = z(\Delta x, 0) - z(0, 0) = 0,$$

$$\Delta_y z = z(0, \Delta y) - z(0, 0) = 0.$$

Тогда $z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z(0, 0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$, аналогично, $z'_y = 0$.

Докажем, что функция не является дифференцируемой в точке $O(0, 0)$. Для этого рассмотрим приращение функции в этой точке.

$$\Delta z(0, 0) = z(\Delta x, \Delta y) - z(0, 0) = \sqrt{\Delta x \Delta y} = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \sqrt{\Delta x \Delta y}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ не существует. Для этого можно показать, что данный предел зависит от углового коэффициента k прямой $y = kx$, по которой точка $M(\Delta x, \Delta y) \to O(0, 0)$ (доказательство аналогично доказательству, приведенному в примеру 3, п. 4, §1.1). Тогда $\sqrt{\Delta x \Delta y} \neq o(\rho)$. Значит, приращение функции $z = \sqrt{xy}$ нельзя представить по формуле (4), т.е. функция не дифференцируема в точке $O(0, 0)$.

Репозиторий ВГУ

2. Докажем, что частные производные функции в этой точке $O(0, 0)$ на являются непрерывными, т.е. не выполняются равенства

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z'_x(x, y) = z'_x(0, 0), \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z'_y(x, y) = z'_y(0, 0).$$

Найдем частные производные функции в произвольной точке M области определения функции отличной от точки $O(0, 0)$:

$$z'_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad z'_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Аналогично примеру 3, п. 4, §1.1 можно доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z'_x(x, y) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{y}{x}}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z'_y(x, y) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{x}{y}}$ не существуют. Значит, частные производные функции в точке $O(0, 0)$ не являются непрерывными. Тогда, по теореме 2 функция $z = \sqrt{xy}$ не является дифференцируемой в этой точке.

3. Геометрический смысл частных производных и дифференцируемости функции *n*-переменных

Геометрический смысл частных производных функции *n*-переменных.

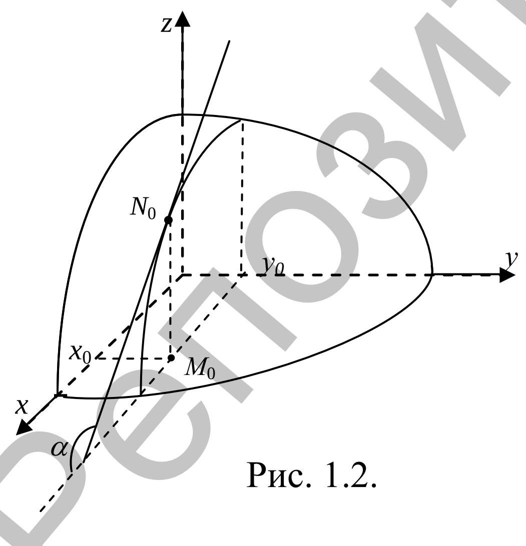


Рис. 1.2.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на множестве $\{M\}$. Графиком функции является некоторая поверхность в пространстве. Пусть точка M_0 $(x_0, y_0, 0)$ – это проекция точки N_0 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, принадлежащей данной поверхности.

Пусть в точке $M_0 \in \{M\}$ функция имеет частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$. Для нахождения данной частной производной функции зафиксируем переменную $y = y_0$. На поверхности плоскость $y = y_0$ отсекает кривую l_1, и на этой кривой функция $z = f(x, y)$ является функцией от одной переменной $z = f(x, y_0)$. Тогда

Репозиторий ВГУ

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = f'(x, y_0)\big|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол между касательной к кривой l_1 и положительным направлением оси OX.

Аналогично, геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}$ определяется как тангенс угла, образованного касательной к кривой l_2, в точке N_0. Кривая l_2 – линия пересечения графика функции $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$.

Геометрический смысл дифференцируемости функции *n*-переменных.

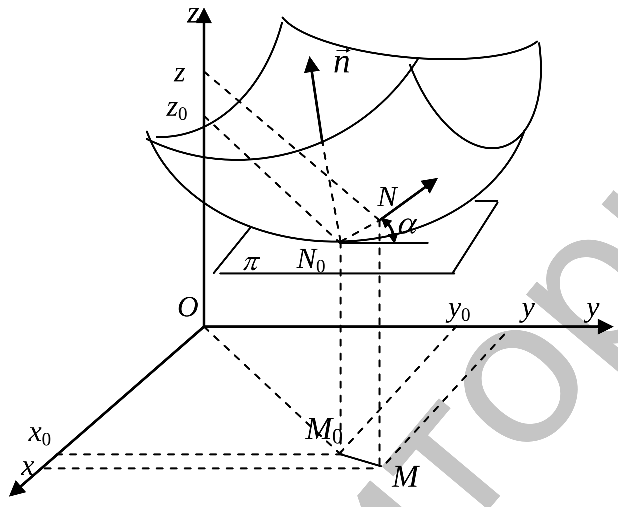


Рис. 1.3.

В случае функции двух переменных условие дифференцируемости имеет следующий геометрический смысл.

Рассмотрим поверхность, являющуюся графиком функции $z = f(x, y)$, точку $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ поверхности и произвольную точку $N(x, y, f(x, y))$ также принадлежащую данной поверхности.

Определение* 3.** *Плоскость π, проходящая через точку N_0 поверхности, называется* ***касательной плоскостью *к данной поверхности в точке N_0, если угол α между секущей NN_0 и плоскостью π стремится к* 0 *при N стремящейся к N_0* (см. рисунок 1.3).

***Теорема* 3.** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то существует касательная плоскость, проведенная к графику этой функции в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, уравнение которой может быть записано в виде*

$$z - z_0 = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}(y - y_0)\,. \qquad (6)$$

Репозиторий ВГУ

Нормальный вектор $\overline{n} = \left(-\frac{\partial z(M_0)}{\partial x},\ -\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}, 1 \right)$ касательной плоскости принято называть **нормалью к поверхности** $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример 2. Составить уравнение касательной плоскости к графику функции $z = x^2 + y^2$ в точке $N_0(1, 2, 5)$ и найти нормаль к этой поверхности в точке N_0.

Решение.

Поверхность, задаваемая уравнением $z = x^2 + y^2$, является параболоидом. Проекцией точки $N_0(1, 2, 5)$ на плоскость XOY является точка $M_0(1, 2)$. Найдем частные производные функции $z = x^2 + y^2$ в точке M_0.

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2x\big|_{M_0} = 2, \qquad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 2y\big|_{M_0} = 4.$$

Учитывая также, что в уравнении (6) $z_0 = z(M_0) = 5$, получим уравнение касательной плоскости

$$2(x-1) + 4(y-2) = (z-5), \quad \text{или} \quad 2x + 4y - z - 5 = 0.$$

Вектор $\overline{n} = (2, 4, -1)$ является нормалью к параболоиду в точке N_0.

4. Дифференцируемость сложной функции

Пусть дана сложная функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $\{M\} \in R^n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функции от m переменных, задаваемые уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m), \end{cases} \tag{7}$$

$(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \{T\} \in R^m$, т.е. на множестве $\{T\}$ задана сложная функция (Понятие сложной функции было введено в п.5 § 1.1).

***Теорема* 4.** *Пусть функции* (7) *дифференцируемы в точке* $T_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, *а функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *где* $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *тогда сложная функция* $u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ *дифференцируема в точке* $T_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, *при этом частные произ-*

Репозиторий ВГУ

водные этой функции в точке T_0 находятся по формулам

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_m} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_m}. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай, когда функции (7) зависят только от одного параметра t: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, …, $x_n = \varphi_{\mathrm{n}}(t)$. Тогда сложная функция зависит от одной переменной t и ее производная определяется следующей формулой

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \qquad .(9)$$

Пример 1. Найти

а) производную сложной функции $u = x^y$, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$;

б) частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$ по переменным x, y, z.

Решение.

а) Производную сложной функции $u = x^y$ будем находить по формуле (9) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dy}{dt}$, тогда,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Следовательно,

$$\frac{du}{dt} = yx^{y-1}\cdot\varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t).$$

б) Функция $u = f(x, xy, xyz)$ может быть записана в виде $u = f(t, v, w)$, где $t = x$, $v = xy$, $w = xyz$. Тогда на основании формул (8) получим

Репозиторий ВГУ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v}y + \frac{\partial u}{\partial w}yz,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v}x + \frac{\partial u}{\partial w}xz,\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial w}xy.
\end{aligned}$$

Замечание. Функции $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial w}$ являются функциями от тех же аргументов, что и функция $f(x, xy, xyz)$.

5. Инвариантность формы первого дифференциала

В п. 2 данного параграфа введено понятие дифференциала du функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и установлено, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются независимыми переменными, то дифференциал функции находится по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \qquad (10)$$

Докажем, что дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно найти по формуле (10) и в случае, если аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сами являются дифференцируемыми функциями от m переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, задающимися формулами (7) п.4. Это свойство называется свойством **инвариантности формы первого дифференциала**.

Пусть функции (7) дифференцируемы в точке $T_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, а функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, по теореме 4, сложная функция

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m))$$

является дифференцируемой в точке $T_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$ и дифференциал этой функции находится по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t_m}dt_m,$$

где производные $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ находятся по формулам (8) п.4. Тогда имеем

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right)dt_1 +$$

Репозиторий ВГУ

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}\right)dt_2+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\right)dt_m=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x_1}\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial t_m}dt_m\right)}_{d\,x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\underbrace{\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_2}{\partial t_m}dt_m\right)}_{d\,x_2}+$$

$$+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\underbrace{\left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_n}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial t_m}dt_m\right)}_{d\,x_n}=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Значит, дифференциал сложной функции может находиться по формуле (10), в которой дифференциалы dx_i, будут дифференциалами функций $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 1. Найти дифференциал функции

$$u=\cos(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1\cdot x_2\cdot x_3+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3).$$

Решение.

Для упрощения вычислений, используем свойство инвариантности формы первого дифференциала. Введем промежуточные переменные:

$$t_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad t_2=x_1\cdot x_2\cdot x_3,\ \ t_3=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$$

Получим сложную функцию $u=\cos(t_1+t_2+t_3)$, дифференциал которой по свойству инвариантности найдем по формуле (10)

$$du=\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2+\frac{\partial u}{\partial t_3}dt_3=$$

$$=-\sin(t_1+t_2+t_3)dt_1-\sin(t_1+t_2+t_3)dt_2-\sin(t_1+t_2+t_3)dt_3=$$

$$=-\sin(t_1+t_2+t_3)(dt_1+dt_2+dt_3).$$

Учитывая, что

$$dt_1=2x_1dx_1+2x_2dx_2+2x_3dx_3,\quad dt_2=x_2x_3dx_1+x_1x_3dx_2+x_1x_2dx_3,$$

$$dt_3=a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3,$$

получим

$$du=-\sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)((2x_1+x_2x_3+$$

$$+a_1)dx_1+(2x_2+x_1x_3+a_2)dx_2+(2x_3+x_1x_2+a_3)dx_3).$$

Репозиторий ВГУ

С помощью свойства инвариантности можно доказать следующие правила дифференцирования.

Пусть u и v – дифференцируемые функции нескольких переменных, тогда

1) $d(cu) = c\,du$ (c = const);

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3) $duv = v\,du + u\,dv$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ ($v \neq 0$).

Для примера докажем свойство 3. Рассмотрим функцию $w = uv$, которая является функцией двух переменных u и v. Найдем дифференциал этой функции $dw = \dfrac{\partial w}{\partial u}du + \dfrac{\partial w}{\partial v}dv = v\,du + u\,dv$. В силу инвариантности формы первого дифференциала, выражение $v\,du + u\,dv$ является дифференциалом функции uv и в случае, если переменные u и v являются дифференцируемыми функциями каких-либо переменных.

§ 1.3. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИИ

1. Производная по направлению и градиент функции трех переменных

Пусть на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(x, y, z)$. Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \{M\}$ и единичный вектор $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, задающий направление в точке M_0. Выберем точку $M(x, y, z)$ так, чтобы вектор $\bar{l}$ был направляющим вектором прямой M_0M (рис. 1.4). Длину вектора $\overline{M_0M}$ обозначим через l ($|M_0M| = l$), если векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ одинаково направлены, и через $-l$ ($|M_0M| = -l$), если $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ направлены в противоположные стороны. Тогда величину l можно рассматривать как параметр или координату на прямой. В этом случае прямую M_0M можно задать параметрически уравнениями

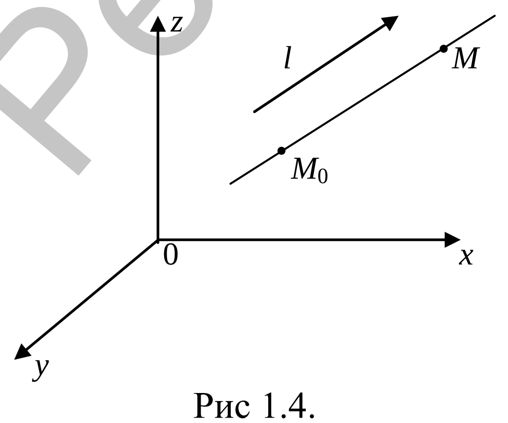


Рис 1.4.

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\alpha \\ y = y_0 + l\cos\beta\,. \\ z = z_0 + l\cos\gamma \end{cases} \qquad (1)$$

Репозиторий ВГУ

Тогда функцию $u = f(x, y, z)$ на прямой M_0M можно рассматривать как сложную функцию от одной переменной l:

$$u = f(x, y, z) = f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta, z_0 + l\cos\gamma).$$

Если эта функция имеет в точке $l = 0$ производную, то эта производная называется **производной по направлению** $\bar{l}$ **от функции** $u = f(x, y, z)$ **в точке** M_0 и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

Рассмотрим приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, где точки M_0 и M – точки, лежащие на прямой l. Тогда можно дать также следующее определение производной по направлению.

Определение* 1. *Производной функции $u = f(x, y, z)$ *в точке* M_0 *в направлении вектора* $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *называется предел*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta u}{|M_0M|}, \qquad (2)$$

если этот предел существует.

Эту производную можно найти как производную сложной функции $u = f(x, y, z)$, аргументы которой являются функциями, заданными уравнениями (1) и зависящими от переменной l:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Так как $\dfrac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dl} = \cos\gamma$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (3)$$

Производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в формуле (3) находятся в точке M_0.

Рассмотрим вектор, обозначаемый символом $\operatorname{grad} u$ и имеющий координаты

$$\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right), \qquad (4)$$

который называется **градиентом функции** $u = f(x, y, z)$ в точке M_0. Тогда формулу (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{l} \cdot \operatorname{grad} u, \qquad (5)$$

или, по формуле скалярного произведения двух векторов, учитывая, что $\bar{l}$ – единичный вектор, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \bar{l} \cdot \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cdot |\bar{l}| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\bar{l}$. Так как величина $|\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi$ является наибольшей при $\cos\varphi = 1$ ($\varphi = 0$), то можно сделать вывод, что производная функции u по направлению $\bar{l}$ в точке M_0 будет наибольшей, если направления векторов $\operatorname{grad} u$ и $\bar{l}$ совпадают.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u|.$$

В этом случае говорят, что функция $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 имеет наибольшую скорость роста в направлении вектора $\operatorname{grad} u$. Величина наибольшего роста функции равна $|\operatorname{grad} u|$.

Определение 2. Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ *называется поверхность, во всех точках которой функция* $f(x, y, z)$ *сохраняет постоянное значение.*

Следовательно, поверхность уровня задается формулой $f(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$. Величина C в уравнении поверхности уровня, проходящей через точку M_0 x_0, y_0, z_0), равна $f(x_0, y_0, z_0)$.

Нетрудно убедиться, что градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 является нормальным вектором к поверхности уровня данной функции, проходящей через точку M_0.

Пример 1. Для функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$ найти

1) производную функции по направлению вектора $\bar{l}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ в точке $M_0(0, 3, 1)$,

2) величину и направление наибольшего роста функции в точке M_0,

3) поверхность уровня функции в точке M_0.

Решение.

1. Найдем координаты единичного вектора $\vec{e}$ сонаправленного с вектором $\bar{l}$. Так как $|\bar{l}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то вектор $\vec{e}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Значит, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Репозиторий ВГУ

Найдем значение частных производных функции в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = \left.\frac{x}{2}\right|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left.\frac{2y}{9}\right|_{M_0} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left.\frac{z}{2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Тогда по формуле (3)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{18}.$$

2. Найдем координаты и абсолютную величину вектора $\operatorname{grad} u$.

Координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(0, 3, 1)$ находятся по формуле (3):

$$grad\ u = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Этот вектор указывает направление наибольшего роста функции в точке M_0.

Величина наибольшего роста функции равна $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$.

3. Поверхности уровня функции задаются уравнением $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = C$, где C − произвольная постоянная. Найдем значение этой постоянной соответствующей поверхности уровня, проходящей через точку M_0. Для этого подставим координаты точки в данное уравнение. Получим $C = 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25$. Тогда, уравнение поверхности уровня, проходящей через точку M_0, имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1{,}25$.

2. Производная по направлению и градиент функции двух и *n*-переменных

Для функции $z = f(x, y)$ двух переменных единичный вектор $\bar{l}$, определяющий направление в точке M_0, имеет координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Поэтому в указанном случае формула (3) имеет вид

$$\frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

В случае функции двух переменных градиент функции определяется как вектор с координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Определение 3. Линией уровня функции *$z = f(x, y)$ называется линия на плоскости, задаваемая уравнением $f(x, y) = C$, где $C = const$.*

Аналогично функции двух и трех переменных определяется понятие производной по направлению и градиента функции n-переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. А именно, производная $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ данной функции в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ по направлению, задаваемому единичным вектором $\bar{l}(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, определяется как производная сложной функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1 = x_1^0 + l\cos\alpha_1$, $x_2 = x_2^0 + l\cos\alpha_2$, …, $x_n = x_n^0 + l\cos\alpha_n$. Если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке M_0, то производная по направлению определяется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n .$$

Градиентом функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0 называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{M_0}, \dots, \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{M_0} \right).$$

§ 1.4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Частные производные высших порядков

Пусть частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в области $\{M\}$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ на множестве $\{M\}$ является функцией от n переменных $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в свою очередь в некоторой точке $M_0 \in \{M\}$ частную производную по аргументу x_k. Тогда эта производная называется **частной производной второго порядка (второй частной производной) функции** $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Репозиторий ВГУ

Обозначение: $u''_{x_i x_k}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$.

Если $i \neq k$, то частная производная $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ называется **смешанной** частной производной второго порядка. При $i = k$ частная производная обозначается следующим образом: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Для функции $z = f(x, y)$ можно найти следующие частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f_x'(x, y)\right)_x' = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f_y'(x, y)\right)_y' = f_{yy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f_x'(x, y)\right)_y' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f_y'(x, y)\right)_x' = f_{yx}''(x, y).$$

Пример 1. Найти частные производные второго порядка для функции $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$.

Решение.

Найдем первые частные производные данной функции.

$$f_x' = 2xy^2z^2, \qquad f_y' = 2yx^2z^2, \qquad f_z' = 2zx^2y^2.$$

Найдем частные производные второго порядка, как производные от первых производных этой функции.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2xy^2z^2)_x' = 2y^2z^2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2xy^2z^2)_y' = 4xyz^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2x^2yz^2)_y' = 2x^2z^2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = (2xy^2z^2)_z' = 4xy^2z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2x^2y^2z)_z' = 2x^2y^2; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x^2yz^2)_x' = 4xyz^2;$$

Репозиторий ВГУ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = (2x^2yz^2)_z' = 4x^2yz;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = (2x^2y^2z)_x' = 4xy^2z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = (2x^2y^2z)_y' = 4x^2yz.$$

Заметим, что для данной функции смешанные частные производные второго порядка равны, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}.$$

Введя понятие второй частной производной функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и, предположив, что эта производная определена на некотором множестве, мы можем ввести понятие **третьей частной производной функции** или производной третьего порядка, как производную от функции $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ по некоторому аргументу x_j:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right).$$

Аналогично вводится понятие n-ой частной производной как производной по аргументу x_{i_n} от $(n-1)$ частной производной по аргументам $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ (отдельные или даже все номера аргументов могут совпадать), т.е.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right).$$

Замечание. В примере 1 смешанные частные производные равны друг другу. В общем случае значение смешанных производных зависит от порядка дифференцирования.

Пример 2. Найти частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

в точке $O(0, 0)$.

Репозиторий ВГУ

Решение.

Найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции в произвольной точке (x, y) отличной от точки O.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{y\big((x^2 - y^2 + 2x^2)(x^2 + y^2) - x(x^2 - y^2)\cdot 2x\big)}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

Теперь найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции в точке O, используя определение (см. определение 1, п.1, §1.2). Учитывая, что $z\,(0, 0) = 0$ и $z\,(\Delta x, 0) = 0$ для любого Δx. получим

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = 0.$$

Значит, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y)$ может быть записана в виде

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Найдем производную функции $\varphi\,(x,y)$ по переменной y в точке $O(0, 0)$.

$$\frac{\partial \varphi(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y\partial x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(x_0, y_0 + \Delta y) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(0, \Delta y) - \varphi(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\Delta y\frac{0 - (\Delta y)^4 + 4\cdot 0\cdot(\Delta y)^2}{\Delta y(0 + (\Delta y)^2)^2} = \lim_{\Delta y\to 0}(-1) = -1.$$

Аналогично находим $\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x\partial y} = 1.$

Значит,

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y\partial x} \neq \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x\partial y}.$$

Репозиторий ВГУ

Выясним достаточные условия независимости значений смешанных производных от порядка, в котором проводится дифференцирование.

***Теорема* 1.** *Предположим, что*:

1) *функция* $z = f(x, y)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$;

2) *в этой окрестности существуют производные* f_x', f_y', f_{xy}'', f_{yx}'';

3) *производные* f_{xy}'', f_{yx}'' - *непрерывны в точке* M_0.

Тогда эти смешанные производные равны в точке M_0 *и выполняется равенство* $\dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y \partial x}$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$, где h – любое сколь угодно малое число, такое, что точка $(x_0 + h, y_0 + h)$ принадлежит указанной окрестности точки M_0.

Приращение этой функции в точке x_0 имеет вид

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) =$$

$$= f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0).$$

Так как по условию 2 теоремы в окрестности точки M_0 существует производная f_x', то функция $\varphi(x)$ на промежутке $(x_0, x_0 + h)$ имеет производную:

$$\varphi_x' = f_x'(x, y_0 + h) - f_x'(x, y_0).$$

Следовательно, эта функция непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0 + h)$. Тогда, по теореме Лагранжа, ее приращение, вызванное приращением аргумента x, можно представить в виде:

$$\Delta\varphi = \varphi'(x_0 + \theta h) \cdot h = \left(f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0 + \theta h, y_0)\right) \cdot h,$$

где $0 < \theta < 1$.

В скобках на этот раз записано приращение функции $f_x'(x_0 + \theta h, y)$, которая является функцией от переменной y на отрезке $[y_0, y_0 + h]$. Так как в окрестности точки M_0 существует f_{xy}'', непрерывная в точке M_0, то, применяя формулу Лагранжа к функции $f_x'(x_0 + \theta h, y)$ на отрезке $[y_0, y_0 + h]$, получим:

Репозиторий ВГУ

$$\Delta f_x' = f_{xy}''(x_0 + \theta\, h,\, y_0 + \theta_1\, h)h^2,$$

следовательно,

$$\Delta\varphi = f_{xy}''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) \cdot h^2,$$

где $0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta < 1.$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(y) = f(x_0 + h,\, y) - f(x_0,\, y)$.

Рассуждая аналогично, получим, что

$$\Delta\psi = f_{yx}''(x_0 + \theta_2\, h,\, y_0 + \theta_3\, h) \cdot h^2.$$

Учитывая, что

$$\Delta\psi(y) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0) = \Delta\varphi,$$

получим $f_{xy}''(x_0 + \theta\, h,\, y_0 + \theta_1\, h) = f_{yx}''(x_0 + \theta_2\, h,\, y_0 + \theta_3\, h)$.

Перейдем к пределу при $h \to 0$ и, учитывая непрерывность функций f_{xy}'' и f_{yx}'', получим:

$$f_{xy}''(x_0,\, y_0) = f_{yx}''(x_0,\, y_0)\,.\square$$

***Определение* 1.** *Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n раз дифференцируемой в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если все частные производные* (n-1)*-го порядка этой функции являются дифференцируемыми функциями в точке M_0.*

Замечание. Из данного определения и теоремы 2, п.1, § 1.2. следует, что функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет n раз дифференцируемой в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, если все частные производные n-го порядка этой функции будут непрерывны в точке M_0.

***Теорема* 2.** *Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n раз дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, то в этой точке значения смешанных частных производных не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование.*

2. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим сначала функцию от двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть эта функция дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда существует первый дифференциал dz в окрестности точки M_0:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (1)$$

Репозиторий ВГУ

Будем обозначать дифференциал как буквой d, так и буквой δ, т. е. формулу (1) можно записать следующим образом:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y. \qquad (1')$$

Предположим, что dx и dy – имеют фиксированные значения в окрестности точки M_0. Так как функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке M_0, то производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются дифференцируемыми функциями от переменных x и y в этой окрестности, значит в данной окрестности дифференциал dz есть функция от переменных x и y, дифференцируемая в точке M_0.

Найдем дифференциал от дифференциала dz, учитывая, что в силу двукратной дифференцируемости функции $z = f(x, y)$, смешанные производные этой функции второго порядка равны.

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\delta y\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\delta y\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\delta y dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\delta x dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left[\delta y dx + \delta x dy\right] + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y dy.$$

Пусть $\delta x = dx$ и $\delta y = dy$. Тогда выражение

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (2)$$

называется вторым дифференциалом функции $z = f(x, y)$.

Аналогично вводится понятие третьего дифференциала для трижды дифференцируемой в точке M_0 функции. Для этого находят дифференциал от второго дифференциала функции $d^3 z = \delta(d^2 z)$, считая dx и dy фиксированными, а $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. В результате получается формула

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \qquad (3)$$

Репозиторий ВГУ

Для сокращения записи второго и последующих дифференциалов функции $z = f(x, y)$ введем в рассмотрение символ, который называется **оператором дифференцирования**: $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$. При действии этого оператора на функцию $z = f(x, y)$ получаем первый дифференциал функции $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Определим n-ю степень оператора дифференцирования, как n-ю степень двучлена $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$. В частности, при $n = 2$ имеем

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2.$$

При действии оператора d^2 на функцию z получим второй дифференциал этой функции, т.е. формулу (2).

Пусть функция $z = f(x, y)$ n раз дифференцируема в точке M_0, тогда определим n-ый дифференциал этой функции в точке M_0, как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала: $d^n z = d(d^{n-1}z)$, считая dx и dy фиксированными. В операторном виде эта формула задается следующим образом:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Аналогично рассматривается второй, третий, n-ый дифференциал от функции многих переменных $u = f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)u.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n u.$$

Рассмотрим сложную функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сами являются функциями

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_m),$$
$$x_2 = \varphi_2(t_1, \ldots, t_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_m).$$

Репозиторий ВГУ

В этом случае для второго дифференциала справедлива формула

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} d^2 x_n,$$

где d^2x_1 – второй дифференциал функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_m)$, d^2x_n - второй дифференциал функции $x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_m)$. Следовательно, форма второго дифференциала функции многих переменных, в отличие от первого дифференциала, не является инвариантной.

***Замечание* 1.** Если $x_i = a_i + \sum\limits_{k=1}^{j} b_k t_k$ – линейные функции от переменных t_1, t_2, …, t_m, то $d^2x_i = 0$. В этом случае дифференциал d^2u имеет инвариантную форму и может быть записан в форме (2).

3. Формула Тейлора для функции многих переменных

***Теорема* 3.** *Пусть функция* $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *задана в некоторой* ε*-окрестности точки* $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ *и* $n+1$ *раз дифференцируема в указанной* ε*-окрестности. Тогда полное приращение функции в точке* M_0 *может быть представлено в форме:*

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) = du\big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u\Big|_{M_0} + \frac{1}{3!} d^3u\Big|_{M_0} + \ldots + \frac{1}{n!} d^n u\Big|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}u\Big|_N,$$

где M *– любая точка* ε*-окрестности точки* M_0, $N\,(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n)$, $0 < \theta < 1$ *– некоторая точка* ε*-окрестности, зависящая от выбора точки* M*. Дифференциалы* dx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) *независимых переменных, входящие в выражения* $du\big|_{M0}$, …, $d^n u\big|_{M0}$ *равны* $\Delta x_i = x_i - x_i^0$.

Эта формула называется формулой Тейлора для функции $u = f(M)$ с центром разложения в точке M_0.

§ 1.5. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Квадратичные формы

Функция вида

$$Q\,(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

Репозиторий ВГУ

где $a_{ij} = a_{ji}$, называется **симметричной квадратичной формой** относительно переменных x_1, x_2, …, x_n. Постоянные a_{ij} называются коэффициентами квадратичной формы.

Например, второй дифференциал функции n-переменных

$$d^2u\Big|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{M_0} dx_i dx_j$$

является квадратичной формой от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n, числа $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0}$ – коэффициенты квадратичной формы.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей квадратичной формы.**

Определители $\delta_1 = a_{11}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, … ,

$\delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называются **главными минорами матрицы *A***.

Квадратичная форма $Q(x_1, \dots, x_n)$ называется **положительно определенной**, если для любых значений переменных x_1, x_2, …, x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные значения ($Q(x_1, \dots, x_n) > 0$).

Квадратичная форма $Q(x_1, \dots, x_n)$ называется **отрицательно определенной**, если для любых значений переменных x_1, x_2, …, x_n, одновременно не равных нулю, она принимает отрицательные значения ($Q(x_1, \dots, x_n) < 0$).

Положительно или отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными** квадратичными формами.

Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется **знакопеременной** формой.

Например, квадратичная форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является положительно определенной, так как $x_1^2 + x_2^2 > 0$ для любых x_1 и x_2 одновременно не равных нулю. Квадратичная форма $Q(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$ – отрицательно определенная. Квадратичная

Репозиторий ВГУ

форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$ – знакопеременная квадратичная форма.

***Теорема* 1.** *Для того чтобы квадратичная форма* $Q(x_1, \ldots, x_n)$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры были положительные, т.е.* $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0$.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, причем $\delta_1 < 0$, *т. е.* $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \ldots$.

2. Определение локального экстремума. Необходимые условия локального экстремума

Определение* 1.** *Пусть функция* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. *Точка* M_0 *называется точкой* ***локального максимума *данной функции, если существует такая окрестность точки* M_0, *в которой выполняется неравенство*:

$$f(M) < f(M_0),$$

для всех $M \neq M_0$.

Точка M_0 *называется точкой* ***локального минимума*** *функции, если существует такая окрестность точки* M_0, *в которой выполняется неравенство*:

$$f(M) > f(M_0),$$

для всех $M \neq M_0$.

Точки локального максимума и минимума называются **точками экстремума** функции $u = f(M)$.

***Теорема* 2 (*необходимое условие локального экстремума*).** *Пусть функция* $u = f(M)$ *имеет в точке* M_0 *локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные первого порядка, то все эти частные производные равны нулю.*

Доказательство.

Пусть функция $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет в точке $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ первые частные производные. Докажем, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0$.

Зафиксируем переменные $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, тогда $u = f(M) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – функция от одной переменной x_1, которая в точке $x_1 = x_1^0$ имеет локальный экстремум. Следовательно,

Репозиторий ВГУ

производная функции по аргументу x_1 в данной точке равна нулю. А это значит, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0. \qquad (1)$$

Аналогично доказывается равенство нулю всех остальных частных производных первого порядка.□

***Замечание* 1.** Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$du\big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{M_0} dx_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{M_0} dx_n \equiv 0 \qquad (2)$$

при любых значениях дифференциалов независимых переменных.

Точки, в которых все частные производные функции (дифференциал функции) равны 0, называются ***точками возможного экстремума*** функции.

Для отыскания этих точек необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

3. Достаточное условие локального экстремума

Рассмотрим случай функции двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ частные производные функции $f(x, y)$ равны нулю. Пусть функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0.

Обозначим: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = a_{11}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} = a_{12}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = a_{22}$.

***Теорема* 3 (*достаточное условие локального экстремума*).** *Пусть в некоторой окрестности точки M_0 функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема и все вторые частные производные этой функции непрерывны в точке M_0. Тогда, если в точке возможного экстремума M_0 выполняется условие* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$, *то функ-*

Репозиторий ВГУ

ция $z = f(x, y)$ *имеет в точке* M_0 *локальный экстремум* (*максимум при* $a_{11} < 0$, *и минимум при* $a_{11} > 0$). *Если же в этой точке* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, *то функция* $z = f(x, y)$ *в точке* M_0 *экстремума не имеет.*

Доказательство.

Согласно формуле Тейлора для $n = 1$, приращение функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 можно записать в виде:

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = dz\big|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 z\big|_N,$$

где $\frac{1}{2} d^2 z\big|_N$ – остаточный член формулы Тейлора. Точка $N(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$ – точка из некоторой окрестности точки M_0, зависящая от выбора точки $M(x, y)$. Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка возможного экстремума, то $dz\big|_{M_0} \equiv 0$ (при dx и dy одновременно не равных нулю). Тогда

$$\Delta z = \frac{1}{2!} d^2 z\big|_N = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_N dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_N dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_N dy^2 \right).$$

Так как частные производные второго порядка непрерывны в точке M_0, то в точке N эти производные можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_N = a_{11} + \alpha_{11}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_N = a_{12} + \alpha_{12}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_N = a_{22} + \alpha_{22},$$

где $\alpha_{11} \to 0$, $\alpha_{12} \to 0$, $\alpha_{22} \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Кроме этого $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$.

Тогда

$$\Delta z = \frac{1}{2}(a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2) \; .$$

Пусть $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками M_0 и M.

Тогда

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2}(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) +$$

Репозиторий ВГУ

$$+\frac{\rho^2}{2}(\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi).$$

I. Пусть $a_{11}\neq 0$. Тогда умножим и разделим первое слагаемое на a_{11}:

$$\Delta z=\frac{\rho^2}{2a_{11}}\left[(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi\right]+$$
$$+\frac{\rho^2}{2}(\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi).$$

Введем следующие обозначения:

$I_1=(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi,$

$I_2=\alpha_{11}\,cos^2\varphi+2\alpha_{12}\,cos\,\varphi\,sin\,\varphi+\alpha_{22}\,sin^2\varphi.$

а). Пусть $a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2>0$, $a_{11}\neq 0$. Тогда

$$I_1=(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi>0.$$

Так как I_1 – это непрерывная функция от одной переменной φ, определенная на отрезке $[0;2\pi]$, то эта функция достигает своего наименьшего значения на этом отрезке. Значит, найдется такое число m, что

$$|I_1|=\left|(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi\right|\geq m>0.$$

Кроме того,

$$|I_2|=\left|\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\right|\leq|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|^2+|\alpha_{22}|\to 0,$$

при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, а, следовательно, и при $\rho\to 0$. Выберем ρ настолько малым, чтобы $|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|^2+|\alpha_{22}|<m$. Тогда знак приращения Δz определяется знаком первого слагаемого.

При $a_{11}>0$, $\Delta z=f(M)-f(M_0)>0$. Тогда, $f(M)>f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0. Следовательно, M_0 – точка минимума.

При $a_{11}<0$, $\Delta z<0$, т. е. точка M_0 – точка максимума.

б). Пусть $a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2<0$, $a_{11}\neq 0$.

Рассмотрим $I_1=(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi$.

$I_1=a_{11}{}^2\cos^2\varphi=a_{11}{}^2>0$, при $\varphi=0$. $I_1=(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\sin^2\varphi_2<0$, если φ – угол, при котором, $a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi=0$.

Трехчлен $I_2=\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi$ можно сделать сколь угодно малым. Следовательно, знак Δz определяется зна-

Репозиторий ВГУ

ком первого трехчлена I_1, который может быть и больше, и меньше нуля, в зависимости от значения угла φ. Значит, в окрестности точки M_0 есть точки M, для которых выполняется неравенство $f(M) - f(M_0) < 0$, и точки M, для которых справедливо неравенство $f(M) - f(M_0) > 0$. Следовательно, точка M_0 не является точкой экстремума.

II. Пусть $a_{11} = 0, \quad a_{12} \neq 0$. Тогда $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 < 0$ и

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2}\left[\sin\varphi(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi) + \sin\varphi(2\alpha_{12}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi)\right]$$

и так как $I_2 = \sin\varphi\,(2\alpha_{12}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi) \to 0$ при $\rho \to 0$, то знак Δz определяется знаком выражения I_1.

При $\sin\varphi = 0$, $I_1 = \sin\varphi\,(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi) = 0$.

Пусть $\sin\varphi \neq 0$, тогда $I_1 = \sin^2\varphi\,(2a_{12}ctg\varphi + a_{22})$. Рассмотрим угол φ при котором $ctg\varphi > -\dfrac{a_{22}}{2a_{12}}$, т.е. $\varphi = \varphi_1 < arcctg\left(-\dfrac{a_{22}}{2a_{12}}\right)$, тогда $2a_{12}ctg\varphi + a_{22} > 0$, а значит $I_1 > 0$. Если $ctg\varphi < -\dfrac{a_{22}}{2a_{12}}$, т.е. $\varphi = \varphi_1 > arcctg\left(-\dfrac{a_{22}}{2a_{12}}\right)$, то $I_1 < 0$,.

Значит, в окрестности точки M_0 приращение функции Δz может быть как положительным, так и отрицательным, следовательно, точка M_0 не является точкой экстремума. □

***Замечание* 1.** При выполнении условия $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$, для определения характера точки M_0 требуются дополнительные исследования.

***Замечание* 2.** Учитывая то, что дифференциал $d^2z(M_0)$ является симметричной квадратичной формой, а знак Δz определяется знаком этого дифференциала, то теорема может быть сформулирована следующим образом.

***Теорема* 4.** *Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ – точки возможного экстремума, функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема и все вторые частные производные этой функции непрерывны в точке M_0. Тогда, если в этой точке второй дифференциал функции $d^2z\big|_{M_0}$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов dx и dy, то функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в точке M_0 (если $d^2z(M_0) < 0$, то точка M_0 – точка максимума, если $d^2z(M_0) > 0$, то точка M_0 – точка минимума).*

Репозиторий ВГУ

Если в точке M_0 дифференциал функции является знакопеременной квадратичной формой, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Обобщим теорему 4 на случай функции n-переменных.

***Теорема* 5.** *Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (M_0 – точка возможного экстремума). Пусть все частные производные второго порядка данной функции непрерывны в точке M_0. Тогда, если $d^2u\big|_{M_0}$ - знакоопределенная квадратичная форма от дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$, то точка M_0 - точка экстремума.*

При этом, если $d^2z(M_0) < 0$ ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$), то точка M_0 - точка максимума; если $d^2z(M_0) > 0$ ($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$), то точка M_0 - точка минимума.

Если $d^2z(M_0)$ знакопеременная квадратичная форма, то точка M_0 не является точкой экстремума.

Пример 1. Найти точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение.

1. Находим точки возможного экстремума функции. Для этого находим частные производные функции и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x - y + 2z = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2z = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему. Получим точки возможного экстремума функции: $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума в этих точках, при этом воспользуемся теоремой 5. Найдем частные производные второго порядка в произвольной точке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_{11} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a_{21} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = a_{13} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_{31} = 2, \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a_{22} = 6y,$$

Репозиторий ВГУ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = a_{23} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = a_{32} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_{33} = 2\,.$$

Рассмотрим точку $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Найдем значения частных производных функции в точке M_1:

$$a_{11} = 4,\ a_{12} = a_{21} = -1,\ a_{13} = a_{31} = 2, \quad a_{22} = 4, a_{23} = a_{32} = 0,\ a_{33} = 2\,.$$

Рассмотрим второй дифференциал функции в точке M_1: $d^2u(M_1) = 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz + 4dy^2 + 2dz^2$. Это – квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.. Построим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдем миноры матрицы:

$$\delta_1 = 4 > 0,\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0\,,\ \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0\,.$$

Значит, $d^2u\big|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой, и точка $M_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ – точка минимума функции.

Находим значение частных производных в точке $M_2(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$: $a_{11} = 4, a_{12} = -1,\ a_{13} = 2,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 0, a_{33} = 2$. Матрица для второго дифференциала функции в точке M_2 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим миноры матрицы:

$$\delta_1 = 4 > 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13 < 0,$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0\,.$$

Репозиторий ВГУ

Значит, $d^2u\big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой и точка M_2 не является точкой экстремума.

Пример 2. Найти точки локального экстремума функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение.

1. Находим точки возможного экстремума. Проверяем необходимые условия экстремума.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим точки возможного экстремума: $M_1(0, 0)$, $M_2(6, 3)$.

2. Проверяем достаточные условия экстремума. Найдем частные производные второго порядка функции.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_{11} = 6y - 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a_{12} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_{22} = -12y^2.$$

Находим значение частных производных в точке M_1 (0, 0):

$$a_{11} = 0, \ a_{12} = 0, \ a_{22} = 0,$$

следовательно, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, т.е требуются дополнительные исследования (замечание 1 к теореме3).

Найдем значение функции в точке M_1: $z(0, 0) = 0$.

Рассмотрим прямую $y = 0$. На этой прямой $z(0, y) = -x^3$, тогда при $x < 0$, $z(0, y) > 0$, при $x > 0$, $z(0, y) < 0$, т.е. в любой окрестности точки M_1 существуют точки, в которых функция принимает как значения большие, чем $z(M_1)$, так и значения меньшие, чем $z(M_1)$. Следовательно, точка M_1 не является точкой экстремума.

Находим значение частных производных в точке $M_2(6, 3)$:

$$a_{11} = -18, a_{12} = 36, a_{22} = -108,$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 648 > 0$ ($a_{11} < 0$), значит, по теореме 3, точка M_2 – точка максимума.

Репозиторий ВГУ

4. Наибольшее и наименьшее значение функции

Пусть функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна на замыкании $\overline{D}$ ограниченной области D. По теореме Вейерштрасса ([9], § 3.3, п.4, теорема 8) эта функция достигает на множестве $\overline{D}$ своего наибольшего и наименьшего значения.

Рассмотрим метод отыскания наибольшего и наименьшего значения функции в случае, когда функция дифференцируема в области D. Если функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке множества $\overline{D}$, то эта точка является точкой локального максимума (минимума) функции. Значит, частные производные первого порядка этой функции в данной точке равны 0.

Поэтому, для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в области необходимо:

1) найти все точки возможного экстремума функции $u = f(M)$ лежащие в области D (т.е. найти частные производные функции; найти точки, в которых частные производные равны нулю; выбрать те точки, которые принадлежат области D);

2) найти значения функции в этих точках;

3) найти наибольшее и наименьшее значение на границе области;

4) сравнить все полученные значения.

Пусть область D – плоская область, и ее граница задается кривой $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Тогда вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на границе сводится к исследованию функции одной переменной $f(x(t), y(t))$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в треугольнике, ограниченном осями OX, OY и прямой $x + y = 2\pi$.

Решение.

Найдем точки подозрительные на экстремум. Для этого рассмотрим необходимое условие экстремума функции:

$$\begin{cases} z'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0, \\ z'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{2x+y}{2}\sin\dfrac{y}{2} = 0, \\ 2\sin\dfrac{2y+x}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0. \end{cases}$$

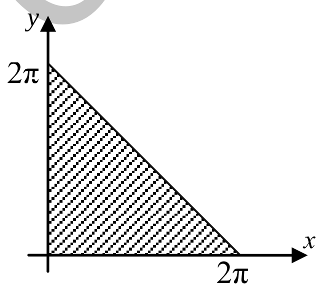


Рис. 1.5.

Репозиторий ВГУ

Из системы получаем, что: $y = 2\pi k,\ x = 2\pi n$, где $n, k \in Z$, или

$$\begin{cases} 2x + y = 2\pi k, \\ 2y + x = 2\pi n, \end{cases} \quad n, k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2\pi n}{3},\ x = \frac{2\pi k}{3}, \quad n, k \in Z.$$

Выбираем точки, которые лежат в рассматриваемом треугольнике. Получаем одну точку $M_1(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$. Находим значение функции $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в этой точке: $z(M_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим функцию на границе области.

На прямой $x = 0$ значение функции $z = 0$.

На прямой $y = 0$ значение функции $z = 0$.

Рассмотрим функцию на прямой $x + y = 2\pi$:

$$z = \sin x + \sin y - \sin (x + y) =$$
$$= \sin x + \sin (2\pi - x) - \sin 2\pi = \sin x - \sin x = 0.$$

Значит, в точке $M_1(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$ функция достигает наибольшего значения. Наименьшее значение достигается функцией на границе области.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $x^2 + y^2 = z$ внутри области ограниченной $y = x^2 - 1$ и $x + y = 1$.

Решение.

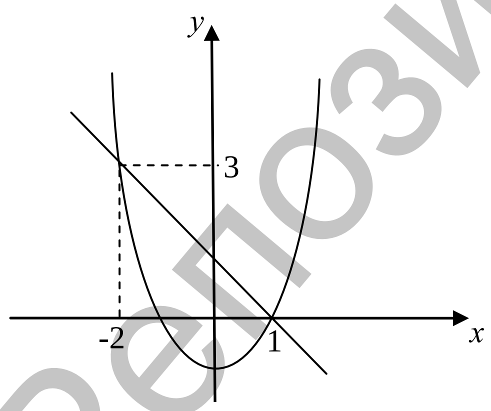


Рис. 1.6.

Найдем точки подозрительные на экстремум. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = 2y = 0. \end{cases}$$

Следовательно, точка O (0, 0) – точка подозрительная на экстремум. Найдем значение функции в этой точке: $z(O) = 0$.

Рассмотрим функцию на прямой $x + y = 1$. На этой прямой функция имеет вид $z(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 0$, где $x \in [-2; 1]$, и является функцией одной переменной. Найдем значение функции в критических точках, принадлежащих отрезку [–2; 1], и на концах этого отрезка.

Репозиторий ВГУ

Так как $z'_x = 2x - 2 = 0$, то $x = 1$ – критическая точка функции $z\,(x,\, 1–x)$. Значение функции в этой точке $z\,(1, 0) = 1$. Найдем значение функции в точке $x = –2$: $z\,(–2, 3) = 13$.

Рассмотрим функцию на кривой $y = x^2 - 1$.

$$z\,(x,\, x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 = x^4 - x^2 + 1, \text{ где } x \in [-2, 1].$$

$$z'_x = 4x^3 - 2x = 0, \text{ тогда } \; x_1 = 0,\; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Найдем значение функции $z\,(x,\, x^2 - 1)$ в этих точках

$$z(0, -1) = 1,$$

$$z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

$$z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Сравнивая все полученные значения функции, делаем вывод, что наибольшее значение функции $z = 13$ достигается в точке $(–2, 3)$. Наименьшее значение $z = 0$ достигается в точке $(0, 0)$.

§ 1.6. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие неявной функции

В математике и в ее приложениях часто приходится сталкиваться с задачами, в которых переменная u, зависящая по смыслу задачи от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, задается посредством функционального уравнения

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \qquad (1)$$

В этом случае говорят, что функция u переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задана неявно уравнением (1).

Например, функция $y = 1 - x$ – функция от одной переменной x, может быть задана неявно с помощью уравнения $x + y - 1 = 0$. Функция $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ – функция от двух переменных x и y, может быть задана в неявном виде формулой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \qquad (*)$$

Однако, с помощью уравнения (*) может быть задана также и функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Поэтому возникает вопрос об условиях однозначной разрешимости уравнения (1) относительно переменной u.

Репозиторий ВГУ

Этот вопрос особенно актуален в случае, когда из уравнения (1) выразить переменную *u* бывает сложно или вообще невозможно. Например, уравнение (1) задано в виде $\cos xy + x^2 + y - 1 = 0$ или $2^x - 2y + x^2 - 1 = 0$.

2. Теорема о существовании неявной функции. Свойства неявной функции.

Рассмотрим вопрос об условиях, которым должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение

$$F(x, y) = 0 \qquad (2)$$

определяло некоторую функцию $y = f(x)$.

***Теорема* 1.** *Предположим, что*

1) *функция* $F(x, y)$ *непрерывна вместе со своими частными производными* F'_x, F'_y *в некоторой окрестности точки* M_0 (x_0, y_0);

2) *функция* $F(x, y)$ *в точке* M_0 *обращается в нуль, т.е.* $F(x_0, y_0) = 0$;

3) *производная функции по переменной* y *не равна нулю, т.е.* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда

1) *в некоторой окрестности точки* M_0 $D_0 : (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ y_0 - \delta' < y < y_0 + \delta')$ *уравнение* (1) *однозначно разрешимо относительно переменной* y *и определяет* y *как функцию от* x: $y = f(x)$;

2) *при* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *принимает значение* $y_0 = f(x_0)$;

3) *функция* $f(x)$ *непрерывна для любого* x *из интервала* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;

4) *функция* $f(x)$ *имеет непрерывную производную на этом интервале, которая находится по формуле*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \qquad (3)$$

Доказательство.

1. Прежде всего докажем, что найдется такая прямоугольная окрестность точки M_0, в которой существует единственная функция $y = f(x)$, являющаяся решением уравнения (2).

Ради определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда, так как F'_y непрерывна в некоторой окрестности точки M_0, то существует прямоугольник

$$D:\{x_0-\delta''\le x\le x_0+\delta'',\ y_0-\delta'\le y\le y_0+\delta'\},$$

целиком лежащий в этой окрестности, в котором данная производная сохраняет знак. Значит, во всех точках прямоугольника D производная $F'_y>0$. Следовательно, при любых постоянных x из отрезка $[x_0-\delta',\ x_0+\delta']$ функция $F(x, y)$, как функция от одной переменной y, будет монотонно возрастающей.

Обозначим вершины прямоугольника D: $A_1(x_0-\delta'', y_0-\delta')$, $A_2(x_0+\delta'', y_0-\delta')$, $B_1(x_0-\delta'', y_0+\delta')$, $B_2(x_0+\delta'', y_0+\delta')$ (см. рисунок 1.7).

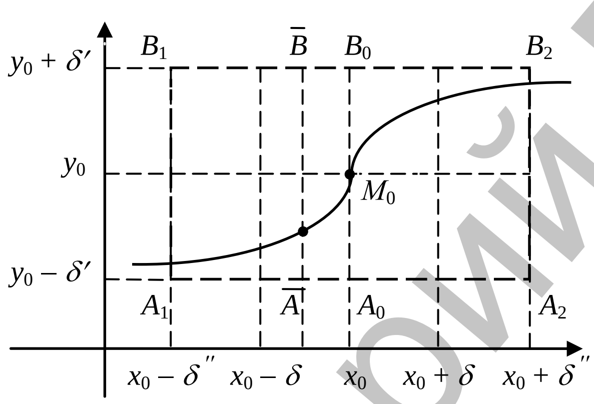


Рис. 1.7.

Зафиксируем $x=x_0$, тогда $F(x, y)\big|_{x=x_0}=F(x_0, y)$ – возрастающая функция. При этом в точке y_0: $F(x_0, y_0)=0$. На отрезке $[A_0, M_0]$, где $A_0(x_0, y_0-\delta')$, выполняется неравенство $y<y_0$, следовательно, $F(x_0, y)<F(x_0, y_0)<0$. На отрезке $[M_0, B_0]$, где $B_0(x_0, y_0+\delta')$, выполняется неравенство $y>y_0$, следовательно,
$F(x_0, y)>F(x_0, y_0)>0$.

Следовательно, $F(A_0)=F(x_0, y_0-\delta')<0$, $F(B_0)=F(x_0, y_0+\delta')>0$.

Рассмотрим отрезки $[A_1, A_2]$ и $[B_1, B_2]$, На отрезке $[A_1, A_2]$ функция $F(x, y_0-\delta')$ является функцией от одной переменной x. При $x=x_0$ функция $F(x_0, y_0-\delta')<0$. А так как функция $F(x, y_0-\delta')$ – непрерывна в точке x_0, то существует некоторая окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в которой эта функция будет отрицательна.

Аналогично, на отрезке на $[B_1, B_2]$ функция $F(x, y_0+\delta')>0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Зафиксируем произвольную точку $x=\bar{x}\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Репозиторий ВГУ

Рассмотрим функцию $F(\bar{x}, y)$ на отрезке $\left[\bar{A}, \bar{B}\right]$.

В точке $\bar{A}\,(\bar{x}, y_0 - \delta')$ функция $F(\bar{x}, y)\big|_{\bar{A}} = F(\bar{x}, y_0 - \delta) < 0$.

В точке $\bar{B}\,(\bar{x}, y_0 + \delta')$ функция $F(\bar{x}, y)\big|_{\bar{B}} = F(\bar{x}, y_0 + \delta) > 0$.

По свойству непрерывных функций, существует такое значение $y = \bar{y}$ из интервала $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, при котором функция $F(\bar{x}, y)$ обращается в нуль: $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

А так как функция $F(\bar{x}, y)$ монотонна, то $\bar{y}$ – единственное значение, принимаемое переменной y на интервале $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, при котором данная функция равна нулю.

Следовательно, мы доказали, что для любого $x = \bar{x}$ из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ существует единственное значение $y = \bar{y}$ из интервала $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, удовлетворяющее уравнению (2).

То есть в окрестности $D_0 : \{x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta' \le y \le y_0 + \delta'\}$ точки M_0 уравнение (2) определяет однозначно функцию $y = f(x)$.

2. Так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $y = y_0 = f(x_0)$ - единственное значение переменной y в интервале $(y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, удовлетворяющее уравнению $F(x, y) = 0$.

3. Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что функция $f(x)$, неявно заданная этим уравнением, непрерывна на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Придадим x приращение Δx так, чтобы точка $x + \Delta x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. При этом значения $x + \Delta x$ и $y + \Delta y$ удовлетворяют уравнению $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$.

Рассмотрим полное приращение ΔF функции $F(x, y)$

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y).$$

При $y = f(x)$ $\Delta F(x, y) = 0$, т.е. $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$.

Преобразуем данное равенство:

$$\Delta F(x, y) = \left[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)\right] + \left[F(x, y + \Delta y) - F(x, y)\right];$$

Применим теорему Лагранжа к первой и второй скобке. По этой теореме на отрезке $[x; x + \Delta x]$ существует точка c_1, такая что $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) = F'(c_1, y + \Delta y)\Delta x$. На отрезке $[y; y + \Delta y]$

Репозиторий ВГУ

существует точка c_2, такая что $F(x,\, y+\Delta y)-F(x,\, y)=F'_y(x,\, c_2)\Delta y$. Тогда

$$\Delta F(x,\, y)=F'_x(c_1,\, y+\Delta y)\Delta x+F'_y(x,\, c_2)\Delta y=0\,,$$

где $c_1\in(x,\, x+\Delta x),\;\; c_2\in(y,\, y+\Delta y)$. Значит, $\Delta y=-\dfrac{F'_x(c_1,\, y+\Delta y)}{F'_y(x,\, c_2)}\Delta x$.

Так как функции $F'_x(x,\, y)$ и $F'_y(x,\, y)$ - непрерывны в прямоугольнике D_0, то они ограничены в этом прямоугольнике и $\left|F'_x(x,\, y)\right|\le M_1$. Так как $\left|F'_y(x,\, y)\right|>0$, то

$$0<m_2\le F'_y(x,\, y)\le M_2\,.$$

Следовательно, $\left|\Delta y\right|<\dfrac{M_1}{m_2}\left|\Delta x\right|$. При $\Delta x\to 0$ приращение $\Delta y\to 0$, значит функция $y = f(x)$ – непрерывна.

г) Докажем, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке M_0. Рассмотрим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{F'_x(c_1,\, y+\Delta y)}{F'_y(x,\, c_2)}$. Так как $c_1\in(x,\, x+\Delta x)$, $c_2\in(y,\, y+\Delta y)$, то при $\Delta x\to 0$, а значит и при $\Delta y\to 0$, получаем, что $c_1\to x,\;\; c_2\to y,$. Тогда, из непрерывности частных производных функции $F(x, y)$, следует, что $F'_x(c_1,\, y+\Delta y)\to F'_x(x,\, y)$ и $F'_y(x,\, c_2)\to F'_y(x,\, y)$.

Следовательно,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,\, y)}{F'_y(x,\, y)}=-\frac{F'_x(x,\, f(x))}{F'_y(x,\, f(x))}.\quad \square$$

Сформулируем теорему о существовании неявной функции для функции $u=f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, заданной уравнением $F(u,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)=0$.

***Теорема* 2.** *Пусть*

1) *функция* $F(u,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$ *непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки* $M_0(u^0,\, x_1^{\,0},\, \ldots,\, x_n^{\,0})$;

2) $F(M_0)=0,\quad F'_u\big|_{M_0}\ne 0$;

Тогда

1) *в некоторой окрестности*

Репозиторий ВГУ

$$D_0: \ (u^0 - \Delta u \le u \le u^0 + \Delta u, \ x_1^{\ 0} - \Delta x_1 \le x_1^{\ 0} \le x_1^{\ 0} + \Delta x_1,$$
$$\ldots, x_n^{\ 0} - \Delta x_n \le x_n^{\ 0} \le x_n^{\ 0} + \Delta x_n)$$

точки M_0 *уравнение* $F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0$ *определяет однозначную функцию* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$;

2) $u_0 = f(x_1^{\ 0}, \ldots, x_n^{\ 0})$;

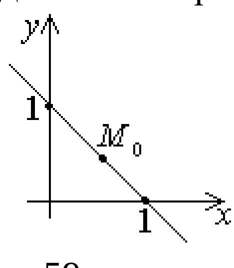
3) *функция* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам. Частные производные данной функции могут быть найдены по формулам:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}, \quad \ldots \quad , \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}. \qquad (4)$$

Геометрическая интерпретация теоремы 1. Уравнение $F(x, y) = 0$ задает кривую на плоскости и называется неявным уравнением кривой. Если в окрестности D_0 точки M_0 функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию теоремы 1 $\left(F'_y\big|_{M_0} \ne 0\right)$, то в этой окрестности уравнение (2) однозначно разрешимо относительно переменной y и кривая может быть задана явным уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – однозначная функция.

Геометрически это означает, что кривая пересекается с прямыми, параллельными оси *OY* лишь в одной точке, а, следовательно, часть кривой, лежащая в указанной окрестности точки M_0, однозначно проектируется на ось *OX* (если в условии теоремы $F'_x\big|_{M_0} \ne 0$, то уравнение однозначно разрешимо относительно *x*, $x = \varphi(y)$).

Пример 1. Уравнение $x + y - 1 = 0$ задает прямую на плоскости. $F(x, y) = x + y - 1$ – непрерывна вместе со своими частными производными в любой точке плоскости *XOY*. Кроме того $F'_y(x, y) = 1 \ne 0$. Очевидно, что данное уравнение однозначно разрешимо относительно переменной *y*. Следовательно, у произвольной точки M_0, лежащей на прямой, любая ее окрестность однозначно проектируется на ось *OX*.



Репозиторий ВГУ

Кроме того, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \neq 0$, следовательно, уравнение однозначно разрешимо относительно *x*: $x = 1 - y$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Так как функция $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ – непрерывна на всей плоскости *ХОУ*, и ее частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ также являются непрерывными функциями, кроме того $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ только в точках $M_1(1, 0)$ и $M_2(-1, 0)$, то для любой точки кривой (за исключением точек M_1 и M_2) существует окрестность, в которой уравнение $x^2 + y^2 = 1$ однозначно разрешимо относительно переменной *у*: $y = \sqrt{1 - x^2}$ (для всех точек кривой для которых $y > 0$) и $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (для всех точек кривой для которых $y < 0$). У точек M_1 и M_2 таких окрестностей не существует, следовательно, в окрестности этих точек функция неразрешима однозначно относительно *y*. Аналогично можно выяснить условия разрешимости уравнения относительно переменной *x*.

3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

Предположим, что функции

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ u_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ищутся как решения системы *m* функциональных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F_1(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Изучим вопрос об разрешимости системы функциональных уравнений (6) относительно переменных $u_1, \dots, u_m$, т. е. условия существования однозначных функций $u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$u_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе (6).

Рассмотрим m функций $F_1, \ldots, F_m$, стоящих в левых частях системы (6). Составим из частных производных этих функций следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Этот определитель называется «якобианом» системы (6) по переменным $u_1, \ldots, u_m$ и кратко обозначается символом $\Delta = \dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(u_1, \ldots, u_m)}$.

Имеет место следующая теорема.

***Теорема* 3.** *Пусть m функций*

$$\begin{matrix} F_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \\ F_2(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \qquad (8)$$

дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(u_1^0, \ldots, u_m^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *и частные производные этих функций по переменным* $u_1, \ldots, u_m$ *непрерывны в точке* M_0. *Тогда, если в точке* M_0 *все функции* (8) *обращаются в нуль, а якобиан* $\Delta\big|_{M_0} \neq 0$, *то в некоторой окрестности точки* M_0 *существуют единственные m функций* (5), *являющиеся решением системы уравнений* (6). *Причем эти функции непрерывны и дифференцируемы в точке* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

***Замечание* 1.** Если $m = 1$, то теорема 3 переходит в теорему 2 предыдущего пункта, так как якобиан (7) в этом случае равен $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Репозиторий ВГУ

II. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 2.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача об объеме цилиндрического тела

Рассмотрим тело (V), ограниченное сверху графиком непрерывной функции

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ, снизу – плоской фигурой (P) на плоскости XOY (рис. 2.1). Требуется найти объем этого тела.

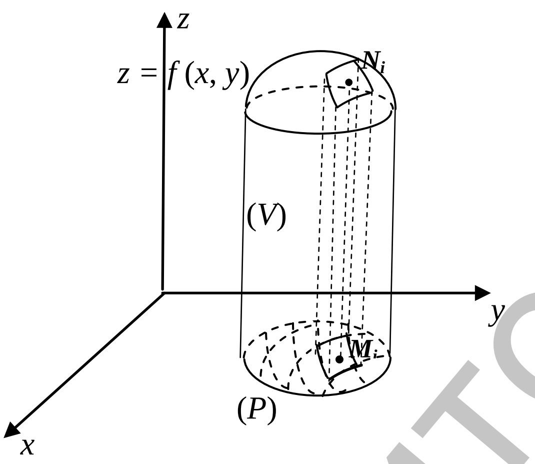


Рис. 2.1.

Разобьем область (P) сетью кривых на n частей (P_i) ($i = 1, \ldots, n$). В каждой частичной области (P_i) выберем произвольным образом точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Этой точке на графике функции соответствует точка $N_i(\xi_i, \eta_i, \nu_i)$, где $\nu_i = z(M_i) = = f(\xi_i, \eta_i)$. Построим цилиндрические столбики, которые имеют своим основанием области (P_i) и в совокупности составляют данное тело. Если приближенно принять каждый столбик за цилиндр с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$, то объем V_i каждого столбика оказывается приближенно равным $f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь фигуры (P_i). Тогда приближенное значение объема тела (V) будет:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Для нахождения точного значения объема тела перейдем в данном равенстве к пределу при $\Delta \to 0$, где Δ – наибольший из диаметров всех областей (P_i):

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{2}$$

Предел (2) называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области (P). Двойной интеграл обозначается символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dS.$$

Репозиторий ВГУ

Следовательно, объем тела (V) может быть найден по формуле

$$V = \iint\limits_{(P)} f\,(x, y)dS. \qquad (3)$$

Мы видим, что также как задача о нахождении площади криволинейной трапеции привела нас к понятию определенного интеграла, так и аналогичная ей задача о нахождении объема цилиндрического тела привела нас к новому понятию – **двойного интеграла.** Таким образом, двойной интеграл является прямым обобщением понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных.

2. Определение двойного интеграла

Введем точное понятие двойного интеграла с более общей точки зрения. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ определенную в некоторой квадрируемой области (P) двумерного евклидова пространства R^2 (функция $z = f(x, y)$ не обязательно является непрерывной). Разобьем область (P) сетью кусочно-непрерывных кривых на n частичных областей (P_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$) площади которых равны ΔS_i. В каждой частичной области (P_i) выберем произвольным образом точку $M_i\,(\xi_i, \eta_i)$ и найдем значение функции в этой точке: $z\,(M_i) = f\,(\xi_i, \eta_i)$. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i,$$

которую будем называть **интегральной суммой** для функции $f\,(x, y)$.

Обозначим через Δ наибольший из диаметров всех областей (P_i).

***Определение* 1.** *Число I называется **конечным пределом интегральных** сумм σ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения области (P) на части (P_i), при котором $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.*

***Определение* 2.** *Предел*

$$I = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i \qquad (4)$$

*называется **двойным интегралом** от функции $f\,(x, y)$ по области (P) и обозначается символом*

$$I = \iint\limits_{(P)} f\,(x, y)dS.$$

Функция, имеющая конечный предел (4), называется **интегрируемой** в области (P).

Репозиторий ВГУ

3. Условия существования двойного интеграла и классы интегрируемых функций

Далее мы будем рассматривать только ограниченные в области (P) функции.

Как и в случае функции от одной переменной, здесь также удобно ввести в рассмотрение суммы, которые называются нижней и верхней суммами Дарбу.

Обозначим через m_i и M_i – точную нижнюю и точную верхнюю грани функции $f(x, y)$ в области (P_i). Тогда суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \quad \text{и} \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

называются **нижней и верхней суммами Дарбу** для функции $f(x, y)$ в области (P).

***Теорема* 2.** *Для того, чтобы функция* $f(x, y)$ *была интегрируема в области* (P), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0. \qquad (5)$$

***Определение* 2.** *Колебанием функции* $f(x, y)$ *в области* (P_i) *называется величина*

$$\omega_i = M_i - m_i.$$

Тогда равенство (5) можно записать следующим образом:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta S_i = 0. \qquad (6)$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично таким же теоремам для определенного интеграла.

Классы интегрируемых функций.

1. Всякая непрерывная в области (P) функция $f(x, y)$ интегрируема в этой области.

2. Если ограниченная в области (P) функция $f(x, y)$ имеет разрывы разве лишь на конечном числе кривых с нулевой площадью, то она интегрируема.

4. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов

1. *Если произвольным образом изменять значения интегрируемой в области* (P) *функции* $f(x, y)$ *вдоль какой-либо кривой* (L) *с нулевой площадью (с тем лишь условием, чтобы и изменённая функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в* (P) *и ее интеграл равен интегралу от* $f(x, y)$.

Репозиторий ВГУ

Таким образом, существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с нулевой площадью.

2. *Если область* (P), *в которой задана функция* $f(x, y)$, *кривою* (L) *с нулевой площадью разбита на две области* (P') *и* (P''), *то из интегрируемости функции* $f(x, y)$ *во всей области* (P) *следует ее интегрируемость в частичных областях* (P') *и* (P''), *и обратно — из интегрируемости функции* $f(x, y)$ *в обеих областях* (P') *и* (P'') *вытекает интегрируемость этой функции в области* (P). *При этом выполняется равенство*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dS = \iint\limits_{(P')} f(x, y)dS + \iint\limits_{(P'')} f(x, y)dS.$$

3. *Если функции* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *интегрируемы в области* (P), *то функция* $\alpha \cdot f(x, y) \pm \beta \cdot g(x, y)$ также будет интегрируема в этой области, и при этом *выполняется равенство*

$$\iint\limits_{(P)} (\alpha \cdot f(x, y) \pm \beta \cdot g(x, y))dS = \alpha \cdot \iint\limits_{(P)} f(x, y)dS + \beta \cdot \iint\limits_{(P)} g(x, y)dS.$$

4. *Если для интегрируемых в области* (P) *функций* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *выполняется неравенство* $f(x, y) \le g(x, y)$, *то*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dS \le \iint\limits_{(P)} g(x, y)dS.$$

5. *Если для интегрируемой в области* (P) *функции* $f(x, y)$ *выполняется неравенство* $m \le f(x, y) \le M$, *то*

$$m\Delta S \le \iint\limits_{(P)} f(x, y)dS \le M\Delta S,$$

где ΔS – площадь области (P)

6. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в области* (P), *то в области* (P) *существует точка* $(\bar{x}, \bar{y})$, *такая что*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dS \le f(\bar{x}, \bar{y})\Delta S.$$

Это наиболее часто встречающаяся форма **теоремы о среднем** для двойного интеграла.

5. Повторные интегралы

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ определенную в некотором прямоугольнике $(\Pi) = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ (рис. 2.2).

Репозиторий ВГУ

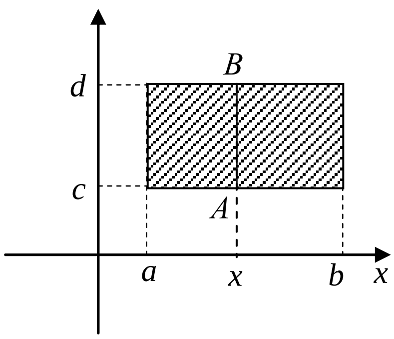


Рис. 2.2

Зафиксируем произвольное x из отрезка $[a, b]$. Тогда на отрезке AB функция $f(x, y)$ является функцией от одной переменной $y \in [c, d]$. Пусть существует определенный интеграл от данной функции по отрезку $[c, d]$, который зависит от выбора переменной x и является функцией от переменной x

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Функция $I(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть существует определенный интеграл от данной функции по отрезку $[a, b]$

$$I_1 = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Этот интеграл называется **повторным интегралом** от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику (Π) и обозначается

$$I_1 = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \ . \qquad (8)$$

Аналогично вводится понятие повторного интеграла

$$I_2 = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \ . \qquad (9)$$

Пример 1. Найти повторный интеграл $\int_4^8 dx \int_1^2 xydy$.

Решение.

Найдем интеграл $\int_1^2 xydy$, считая x постоянной.

$$\int_1^2 xydy = x\frac{y^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{x}{2}(4-1) = \frac{3}{2}x.$$

Тогда

$$\int_4^8 dx \int_1^2 xydy = \frac{3}{2}\int_4^8 xdx = \frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_4^8 = \frac{3}{4}(64-16) = 36.$$

6. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена в прямоугольнике* $(P) = \{a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$ *и для этой функции существует двойной*

Репозиторий ВГУ

интеграл

$$\iint_{(P)} f\,(x, y)dS.$$

Пусть для любого значения x *из отрезка* $[a, b]$ *существует определенный интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Тогда для функции $f(x, y)$ *существует и повторный интеграл*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

и выполняется равенство:

$$\iint_{(P)} f\,(x, y)dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy\,. \qquad (10)$$

Доказательство.

Разобьем отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$, определяющие прямоугольник (P), на части точками:

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b,$$

$$y_0 = c,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m = d$$

на $n \cdot m$ частичных прямоугольников

$$(P_{ki}) = \{x_{k-1} \le x \le x_k;\quad y_{i-1} \le y \le y_i\}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m),$$

площади которых $\Delta S_{ki} = \Delta x_k \Delta y_i$.

Пусть M_{ki} и m_{ki} – точная верхняя и точная нижняя границы функции $f(x, y)$ на частичном прямоугольнике (P_{ki}). Тогда на этом прямоугольнике выполняется неравенство

$$m_{ki} \le f(x, y) \le M_{ki}\,. \qquad (11)$$

Зафиксируем произвольно $x = \xi_k$ из отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Проинтегрируем неравенство (11) по y на промежутке $[y_{i-1}, y_i]$ (считая $x = \xi_k$). Получим

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} m_{ki} dy \le \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y)dy \le \int_{y_{i-1}}^{y_i} M_{ki} dy,$$

$$m_{ki}\,\Delta y_i \le \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y)dy \le M_{ki}\,\Delta y_i$$

по свойству 9 определенных интегралов (п.2, §3.2, [10]).

Просуммируем данное неравенство по i от 1 до n

Репозиторий ВГУ

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta y_i \le \sum_{i=1}^{n}\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y)dy \le \sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta y_i .$$

Так как $\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y)dy = \int_{c}^{d} f(\xi_k, y)dy = I(\xi_k)$, то неравенство будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta y_i \le I(\xi_k) \le \sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta y_i . \qquad (12)$$

Умножим неравенство (12) на Δx_k и просуммируем по k от 1 до n. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta y_i \le \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta y_i .$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta y_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta x_k \Delta y_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\Delta S_{ki} = s,$$

где s − нижняя сумма Дарбу для функции $f(x, y)$,

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta y_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta x_k \Delta y_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ki}\Delta S_{ki} = S,$$

где S – верхняя сумма Дарбу для функции $f(x, y)$, $\sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k$ − интегральная сумма для функции $I(x)$, получим неравенство

$$s \le \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k \le S .$$

Перейдем к пределу при $\Delta x_k \to 0$ и $\Delta y_k \to 0$. Пусть d − наибольший из диаметров прямоугольников (P_{ki}), тогда $d \to 0$. Так как для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл, то $\lim\limits_{d\to 0} s = \iint\limits_{(P)} f(x, y)dS = \lim\limits_{d\to 0} S$. Кроме того

$$\lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

значит, $\iint\limits_{(P)} f(x, y)dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$ □

***Замечание* 1.** *Пусть для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл*

Репозиторий ВГУ

$$\iint\limits_{(P)} f\ (x,\,y)dS,$$

и пусть для любого значения y из отрезка $[c,\,d]$ существует определенный интеграл

$$K(x) = \int\limits_a^b f(x,\,y)dx,$$

т*огда для функции $f(x,\,y)$ существует и повторный интеграл*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{(P)} f(x,\,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \qquad (13)$$

***Замечание* 2.** *Если функция $f(x,\,y)$ непрерывна в прямоугольнике (P), то существование двойного интеграла и двух повторных интегралов для этой функции обеспечено, и выполняется равенство*

$$\iint\limits_{(P)} f\ (x,\,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\,y)dy\ = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

***Замечание* 3.** *Так как $dS = \Delta P_{ki} = \Delta x_k \Delta y_i = dxdy,$ то двойной интеграл по прямоугольнику (P) обозначается следующим образом:*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,\,y)dxdy \qquad (14)$$

или $\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,\,y)dxdy.$

Пример 2. Найти $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \dfrac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Решение.

Так как функция $y = \dfrac{x}{(1+x^2+y^2)^2}$ непрерывна в прямоугольнике $(P) = \{0 \le x \le 1;\quad 0 \le y \le 1\}$, то двойной интеграл можно находить как по формуле (10), так и по формуле (13). Воспользуемся формулой (10)

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^2} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2+y^2)^2} \right) dy =$$

Репозиторий ВГУ

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\right)dy=\int_0^1\left(-\frac{1}{2(1+x^2+y^2)}\Bigg|_0^1\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{2+y^2}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\operatorname{arctg}1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области

Рассмотрим область (D), ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, а с боков — двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2.3). Такая область обладает следующим свойством: любая прямая, параллельная оси OY, пересекает область (D) не более чем в двух точках, ординаты которых $g_1(x)$, $g_2(x)$, где $g_1(x) \le g_2(x)$.

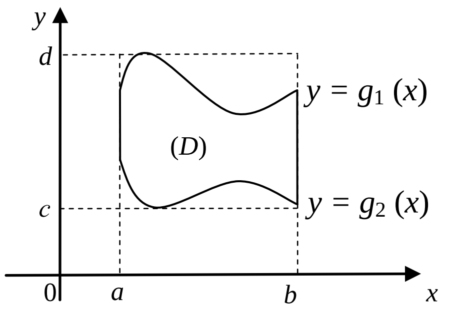


Рис. 2.3.

***Теорема* 3.** *Если для функции* $z = f(x, y)$, *определенной в области* (D),

1) *существует двойной интеграл* $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS$;

2) *при каждом постоянном значении* x *из отрезка* $[a, b]$ *существует определенный интеграл* $I(x)=\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy$;

то существует также повторный интеграл

$$\int_a^b dx\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy,$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS=\int_a^b dx\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (15)$$

Доказательство.

Обозначим через (P) прямоугольник со сторонами параллельными координатным осям и содержащий в себе область (D). Пусть

Репозиторий ВГУ

$F(x, y)$ – функция, совпадающая с функцией $f(x, y)$ в области (D), и равная нулю в остальной части прямоугольника (P). Для функции $F(x, y)$ выполняются все условия теоремы 3, а, значит, выполняется формула (10). Тогда

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x, y)dy,$$

но, т. к. $F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in P \setminus D, \end{cases}$

то получим:

$$\int\limits_c^d F(x, y)dy = \int\limits_c^{g_1(x)} F(x, y)dy + \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)dy + \int\limits_{g_2(x)}^{d} F(x, y)dy = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$$

Следовательно, $\iint\limits_{(P)} F(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$

Кроме того,

$$\iint\limits_{(P)} F(x, y)dxdy = \iint\limits_{(D)} f(x, y)dS.$$

Значит, $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(y)} f(x, y)dy$. □

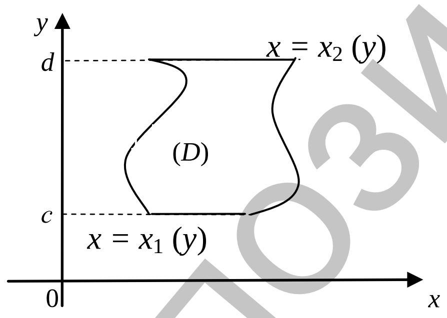


Рис. 2.4.

Замечание **1.** Если область (D) ограничена кривыми x = x_1(y), x = x_1(y), и прямыми y = c, x = d (рис. 2.4), то

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \quad (16)$$

В этом случае любая прямая, параллельная оси OX, пересекает область (D) не более чем в двух точках, ординаты которых $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y) \le x_2(y)$.

Замечание **2.** Так же как и в случае прямоугольной области, интеграл $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dS$ принято обозначать $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy$. Тогда формула (15) будет иметь вид

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$$

Репозиторий ВГУ

Пример 3. Двумя способами расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f\,(x,y)dxdy$, если область (D) ограничена линиями: $y = 0$, $y + 2x = 3$, $y = \sqrt{x}$. (рис. 2.5)

Решение.

Приведем двойной интеграл к повторному с внешними пределами интегрирования по переменной x. Рассмотрим прямые, проходящие через область (D) и параллельные оси OY. Эти прямые пересекают сначала ось OX, а затем или кривую $y = \sqrt{x}$, или прямую $y + 2x = 3$, т.е. область (D) ограничена снизу одной линией $y = 0$, сверху двумя линиями: $y + 2x = 3$, $y = \sqrt{x}$.

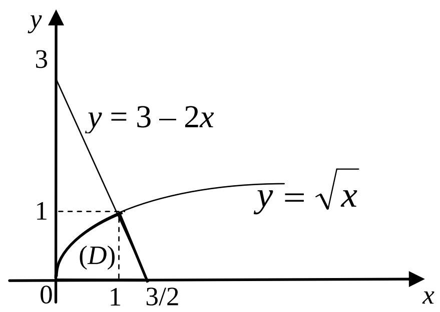


Рис. 2.5.

Разобьем область (D) прямой $x = 1$ на две области (D_1) и (D_2), где область (D_1) ограничена линиями: $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, область (D_2) ограничена линиями: $y = 0$, $y = 3 - 2x$, $x = 1$. Тогда, по свойству 2 двойных интегралов,

$$\iint\limits_{(D)} f\,(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^{3/2} dx \int\limits_0^{3-2x} f(x,y)dy.$$

Приведем двойной интеграл к повторному с внешними пределами интегрирования по переменной y. Рассмотрим прямые, проходящие через область (D) и параллельные оси OX. Эти прямые пересекают сначала кривую $y = \sqrt{x}$, а затем прямую $y + 2x = 3$, т.е. область (D) ограничена слева одной линией $y = \sqrt{x}$, которую можно задать также формулой $x = y^2$, справа прямой $y + 2x = 3$ (или $x = \frac{1}{2}(3 - y)$). Таким образом, получим

$$\iint\limits_{(D)} f\,(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)dx.$$

Пример 4. Найти двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} (x^2 + xy + y^2)dxdy$, если область (D) ограничена линиями: $y = x^2$, $y = 1$.

Репозиторий ВГУ

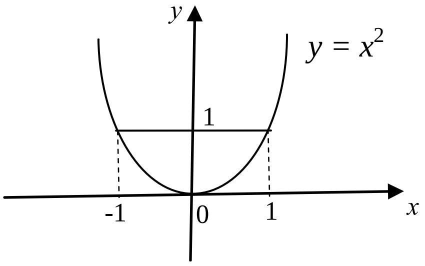


Рис. 2.6.

Решение.

Область (D) изображена на рисунке 2.6. В данном случае любая прямая, параллельная оси OY, пересекает область (D) в двух точках. Следовательно, двойной интеграл по этой области можно найти по формуле (15), где $g_1(x)=x^2$, $g_2(x)=1$.

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+xy+y^2)dxdy=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(x^2+xy+y^2)dy=\int_{-1}^{1}\left(x^2y+\frac{y^2}{2}x+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{12}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{88}{105}.$$

Замечание. Данный интеграл можно также найти и по формуле (16), так как любая прямая, параллельная оси OX, пересекает область (D) в двух точках. В этом случае: $x_1(y)=-\sqrt{y},\ x_2(y)=\sqrt{y}.$ Тогда

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+xy+y^2)dxdy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x^2+xy+y^2)dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}y+y^2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{2\sqrt{y^3}}{3}+2y^2\sqrt{y}\right)dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{2y^{3/2}}{3}+2y^{5/2}\right)dx=\left(\frac{4y^{5/2}}{15}+\frac{4y^{7/2}}{7}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{88}{105}.$$

8. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области (D). Рассмотрим две функции, задающие взаимно однозначное отображение области (G) плоскости UOV в область (D) плоскости XOY.

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v), \end{cases}\quad \text{где } (u,v)\in(G). \qquad (17)$$

Пусть функции (17) имеют непрерывные производные в области (G), и якобиан системы (17)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \qquad (18)$$

не равен нулю в области (G). Тогда, по теореме 3, п.3, § 1.6, система (17) однозначно разрешима относительно u и v. Задание пары пере-

Репозиторий ВГУ

менных u и v из области (G) однозначно определяет некоторую точку $M(x, y) \in (D)$ плоскости XOY. Поэтому u и v называют **криволинейными координатами на плоскости**. Для двойного интеграла от функции $f(x, y)$ по области (D) справедлива **формула замены переменных**:

$$\iint\limits_{(D)} f\,(x, y)dxdy = \iint\limits_{(G)} f\,(\varphi(u,v), \psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv. \quad (19)$$

Примером криволинейных координат на плоскости являются полярные координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \quad (\rho, \varphi) \in (G)$$

В этом случае $u = \rho,\ v = \varphi,\ \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \rho$. Формула замены переменных (19) в полярных координатах имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{G} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \quad (20)$$

Замечание. Если область (G) (рис. 2.7) ограничена лучами, образующими с полярной осью углы $\varphi_1 = \alpha,\ \varphi_2 = \beta,$ и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi),$ $\rho = \rho_2(\varphi),\ (\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)),$ то

$$\iint\limits_{G} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \quad (21)$$

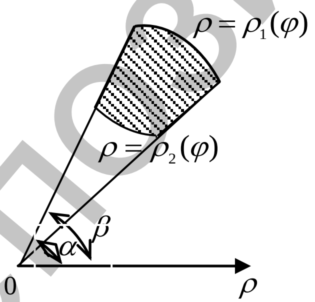


Рис. 2.7.

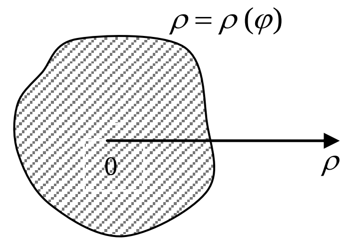


Рис. 2.8.

Если область (G) (рис. 2.8) охватывает начало координат, то

$$\iint\limits_{G} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \quad (22)$$

Репозиторий ВГУ

Пример 4. Найти двойной интеграл $\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy$, если область (D) ограничена линиями: $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ и дугой окружности $x^2+y^2=8$, лежащей в первой четверти.

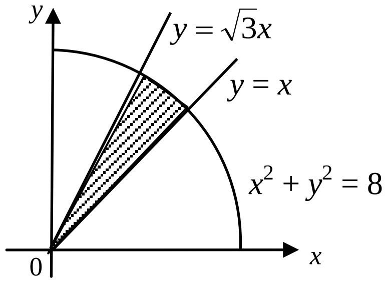


Рис. 2.9.

Решение.

Подставим полярные координаты в уравнения линий, ограничивающих область интегрирования. Тогда уравнение прямой $y=x$ имеет вид $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi$ или $tg\,\varphi=1$. Следовательно, данная прямая в полярных координатах задается уравнением $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Прямая $y=\sqrt{3}x$ в полярных координатах задается уравнением $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Подставляя полярные координаты в уравнение окружности, получим $\rho=2\sqrt{2}$.

Таким образом, область (G) ограничена лучами $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ и графиком функции $\rho=2\sqrt{2}$. Тогда, по формуле (21), имеем

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}}(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\sqrt{2}}d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}16d\varphi=\frac{4\pi}{3}.$$

9. Применение двойных интегралов

Из пункта 1 §2.1 следует, что **объем цилиндрического тела (V)**, ограниченного сверху графиком непрерывной функции $z=f(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ, снизу – плоской фигурой (D) на плоскости XOY (см. рис.1) находится по формуле

$$V=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy. \qquad (23)$$

Репозиторий ВГУ

Если $f(x, y) \equiv 1$ в области (D), то объем прямого цилиндра, построенного на этой области, будет равен площади основания, т.е площади области (D). Следовательно, **площадь области (*D*)** находится по формуле

$$S = \iint_D dxdy. \tag{24}$$

Рассмотрим некоторую плоскую область (D), в которой распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$. Тогда, масса данного тела находится по формуле

$$M = \iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{25}$$

Координаты центра тяжести тела находятся по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy., \tag{26}$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy.$$

Пример 5. Найти объем тела ограниченного плоскостями: $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y + z = 2$.

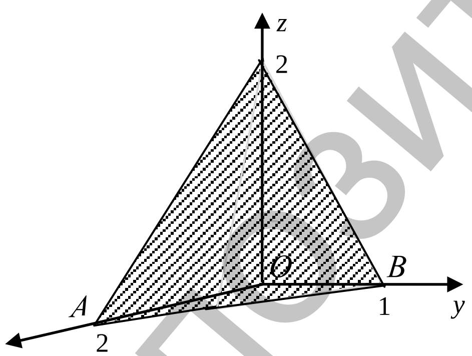


Рис. 2.10.

Решение.

Данное тело является треугольной пирамидой, ограниченной сверху плоскостью $x + 2y + z = 2$ или $z = 2 - x - 2y$, с боков плоскостями $x = 0$, $y = 0$, снизу плоскостью $z = 0$.

Плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 2 - x - 2y$ пересекаются с плоскостью XOY ($z = 0$) по прямым $x = 0$, $y = 0$, $y = \dfrac{2 - x}{2}$, образующим треугольник AOB.

Объем тела можно найти по формуле (23), где область (D) есть треугольник AOB.

$$V = \iint_{(D)} (2 - x - 2y)dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y)dy =$$

$$=\int_0^2 (2y-xy-y^2)\Big|_0^{\frac{2-x}{2}} dx=\frac{1}{4}\int_0^2 (2-x)^2 dx=-\frac{1}{4}\frac{(2-x)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли: $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

Решение.

Запишем уравнение кривой в полярных координатах, полагая

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.$$

Тогда в полярной системе координат уравнение лемнискаты имеет вид $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ или $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Решая неравенство $\cos 2\varphi\ge 0$, получим пределы изменения переменной φ: $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

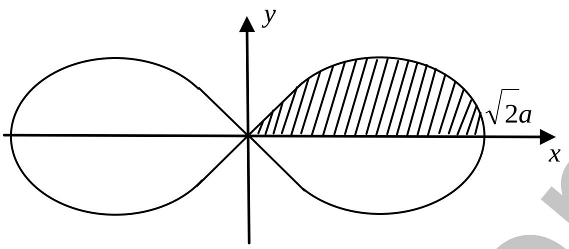


Рис. 2.11.

Фигура, ограниченная лемнискатой Бернулли изображена на рисунке 2.11. В силу симметрии можно вычислить четверть площади данной фигуры, для $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

Учитывая формулу (20) перехода к полярным координатам в двойном интеграле, площадь фигуры в полярных координатах имеет вид

$$S=\iint_G \rho\, d\rho d\varphi. \qquad (27)$$

В нашем случае область интегрирования (G) задается неравенствами

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Тогда

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right]d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi=$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2.$$

Репозиторий ВГУ

Пример 7. Найти массу фигуры (D), ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и координатными осями $x=0,\ y=0$ $(x\ge 0, y\ge 0)$. если плотность данной фигуры $\rho(x,y)=kxy,\ k=const.$

Решение.

Уравнение эллипса в этом примере равносильно уравнению $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда по формуле (25) массу фигуры (D) находим следующим образом:

$$m=\iint\limits_{(D)} kxy\,dx\,dy=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy=$$

$$=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy=k\int\limits_0^a x\left[\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right]dx=\frac{k}{2}\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a(a^2x-x^3)dx=$$

$$=\frac{k}{2}\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^a=\frac{k}{2}\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right]=\frac{k}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{a^4}{4}=\frac{a^2b^2k}{8}.$$

Замечание. Массу фигуры (D) можно найти также, перейдя к обобщенным полярным координатам $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi.$ Тогда якобиан перехода имеет вид $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=ab\rho$, подставляя координаты в уравнение эллипса получим: $\rho^2=1$. Значит, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 1$. Формула (25) в обобщенных полярных координатах запишется в виде:

$$m=ka^2b^2\iint\limits_G\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho d\varphi=ka^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\,d\rho=$$

$$=k\frac{a^2b^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d2\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho=-k\frac{a^2b^2}{4}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{a^2b^2k}{8}.$$

§ 2.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие тройного интеграла

Пусть в пространстве R^3 задано некоторое кубируемое тело (V). С помощью произвольных поверхностей разобьем его на части (V_i) (i = 1, 2, …, n), таким образом, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(V_i)=(V)$ и части (V_i) не имеют

Репозиторий ВГУ

общих внутренних точек. Обозначим через ΔV_i объем тела (V_{i}), через d – наибольший из диаметров тел (V_{i}) данного разбиения.

Пусть в области (V) задана функция $u = f(x, y, z)$. Выберем в каждой части (V_{i}) произвольную точку (ξ_i, η_i, τ_i). Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \tau_i)\Delta V_i \,. \tag{1}$$

Предел этой суммы при $d \to 0$ называется тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz.$$

В дальнейшем будем рассматривать функции $f(x, y, z)$, ограниченные в области (V).

По аналогии с двойным интегралом можно ввести понятие верхней и нижней суммы Дарбу

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta V_i \quad \text{и} \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta V_i \,,$$

где m_i и M_i – точная нижняя и точная верхняя грани функции $f(x, y, z)$ в области (V).

Справедлив критерий интегрируемости функции $f(x, y, z)$: функция $f(x, y, z)$ интегрируема в кубируемой области (V) тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\lim_{d \to 0}(S - s) = 0$$

или

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta V_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i = 0$ есть колебание функции $f(x, y, z)$ в области (V_{i}).

Классы интегрируемых функций те же, что и для двойного интеграла, а именно:

1) любая непрерывная на кубируемой замкнутой области (V) функция интегрируема на этой области.
2) если функция $f(x, y, z)$ разрывна на конечном числе поверхностей нулевого объема, содержащихся в области (V), то эта функция интегрируема в области (V).

Для тройного интеграла справедливы свойства, аналогичные свойствам, введенным для двойного интеграла.

Репозиторий ВГУ

1. *Если произвольным образом изменять значения интегрируемой в области* (V) *функции* $f(x, y, z)$ *вдоль какой-либо поверхности нулевого объема (с тем лишь условием, чтобы и изменённая функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в* (V) *и ее интеграл равен интегралу от* $f(x, y, z)$.

Таким образом, существование и величина тройного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа поверхностей с нулевым объемом.

2. *Если* $(V) = (V_1) + (V_2)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV.$$

3. *Если функции* $f(x, y, z)$ *и* $g(x, y, z)$ *интегрируемы в области* (V), *то функция* $\alpha \cdot f(x, y, z) \pm \beta \cdot g(x, y, z)$ *также будет интегрируема в этой области, и при этом выполняется равенство*

$$\iiint\limits_V (\alpha \cdot f(x, y, z) \pm \beta \cdot g(x, y, z))dV =$$
$$= \alpha \cdot \iiint\limits_V f(x, y, z)dV \pm \beta \cdot \iiint\limits_V g(x, y, z)dV.$$

4. *Если для интегрируемых в области* (V) *функций* $f(x, y, z)$ *и* $g(x, y, z)$ *выполняется неравенство* $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, *то*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV \le \iiint\limits_V g(x, y, z)dV.$$

5. *Если функция* $f(x, y, z)$ *интегрируема в области* (V), *то функция* $|f(x, y, z)|$ *также интегрируема в этой области, и имеет место неравенство*

$$\left|\iiint\limits_V f(x, y, z)dV\right| \le \iiint\limits_V |f(x, y, z)|\,dV.$$

6. *Если для интегрируемой в области* (V) *функции* $f(x, y, z)$ *выполняется неравенство* $m \le f(x, y, z) \le M$, *то*

$$m\Delta V \le \iiint\limits_V f(x, y, z)dV \le M\Delta V,$$

где ΔV *– объем области* (V).

7. *Если функция* $f(x, y, z)$ *непрерывна в области* (V), *то в области* (V) *существует точка* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, *такая что*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \Delta V.$$

Репозиторий ВГУ

2. Вычисление тройного интеграла

Пусть задан прямоугольный параллелепипед $(V) = \{\, a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f \,\}$ и на этом параллелепипеде задана функция $f(x, y, z)$, интегрируемая в области (V).

Зафиксируем переменные $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$. Получаем функцию одной переменной z. Допустим, что она интегрируема на отрезке $[e, f]$ т.е. существует $\int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz = I(x, y)$. Может оказаться, что эта функция интегрируема в прямоугольнике $(П) = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, т.е. существует

$$\iint\limits_П I(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_П dx\, dy \int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz .$$

Такой интеграл называется **повторным**. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_П dx\, dy \int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz. \qquad (2)$$

Заменим двойной интеграл по прямоугольнику $(П)$ повторным и получим окончательную формулу для нахождения тройного интеграла по прямоугольному параллелепипеду

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz. \qquad (3)$$

Понятие повторного интеграла можно ввести и по-другому.

Зафиксируем произвольное $z \in [e, f]$. Тогда функция $f(x, y, z)$ будет функцией двух переменных x и y. Если она интегрируема в прямоугольнике $(П) = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, то существует двойной интеграл

$$\iint\limits_П f(x, y, z)\, dx\, dy = \Phi(z) .$$

Если эта функция в свою очередь интегрируема на отрезке $[e, f]$ то существует интеграл

$$\int\limits_e^f \Phi(z)\, dz = \int\limits_e^f dz \iint\limits_П f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Такой интеграл также называется **повторным.** Тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_e^f dz \iint\limits_П f(x, y, z)\, dx\, dy. \qquad (4)$$

Допустим, что область интегрирования не является параллелепипедом.

Рассмотрим первый вид области, а именно: цилиндрическое тело

Репозиторий ВГУ

(V_1), ограниченное сверху графиком непрерывной функции $z = \psi_2(x, y)$, снизу графиком непрерывной функции $z = \psi_1(x, y)$, с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ. Пусть это тело проектируется в квадрируемую область (G) плоскости XOY (см. рисунок 2.12)

Тогда, фиксируя x и y, мы можем рассматривать интеграл

$$\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz = I(x, y).$$

Если функция $I(x, y)$ интегрируема в области G, то можно рассматривать повторный интеграл $\iint\limits_G dx\, dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$ и, если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области (V_1), то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{V_1} f(x, y, z) dxdydz = \iint\limits_G dx\, dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (5)$$

Если $(G) = \{a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, то

$$\iiint\limits_{V_1} f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} f(x, y, z)\, dz.$$

Замечание. Порядок интегрирования в тройном интеграле может быть изменен. Например, если тело (V_2), ограничено слева графиком непрерывной функции $y = \omega_1(x, z)$, справа графиком непрерывной функции $y = \omega_2(x, z)$, а также цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY. Пусть это тело проектируется в квадрируемую область (D) плоскости XOZ (рис. 2.13).

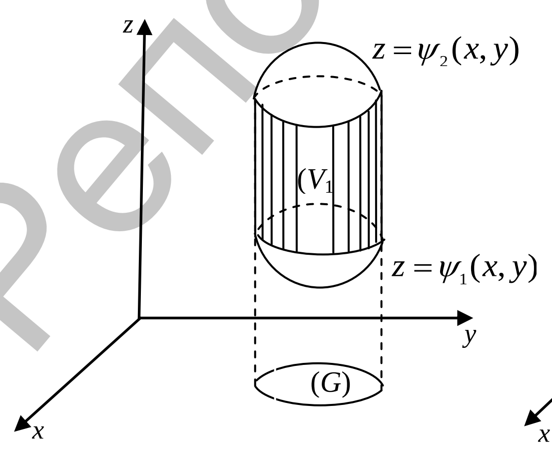


Рис. 2.12.

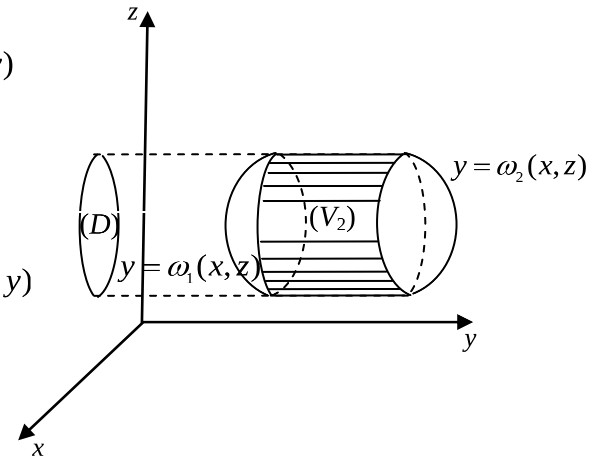


Рис. 2.13.

Репозиторий ВГУ

Тогда

$$\iiint\limits_{V_2} f(x,\, y,\, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dx\,dz \int\limits_{\omega_1(x,y)}^{\omega_2(x,y)} f(x,y,z)\,dy. \qquad (6)$$

Пусть тело (V_3) ограничено графиками непрерывных функций $x=\lambda_1(y,z)$ и $x=\lambda_2(y,z)$, а также цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX. Пусть это тело проектируется в квадрируемую область (Q) плоскости YOZ . Тогда

$$\iiint\limits_{V_3} f(x,\, y,\, z)dxdydz = \iint\limits_{Q} dy\,dz \int\limits_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} f(x,y,z)\,dx. \qquad (7)$$

Пример 1. Найти интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^2 (x+y+z)\,dz$.

Решение.

Это интеграл вида (3), где область интегрирования − прямоугольный параллелепипед (V) = $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$ с ребрами, параллельными координатным осям, одна из вершин которого находится в начале координат.

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^2 (x+y+z)\,dz = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^3 (\int\limits_0^2 (x+y+z)\,dz)dy)dx .$$

Найдем сначала внутренний интеграл

$$\int\limits_0^2 (x+y+z)\,dz = \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=2} = 2x + 2y + 2 = 2(x + y + 1).$$

Находим второй интеграл

$$\int\limits_0^3 2(x+y+1)\,dy = 2\left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=3} = 2(3x + \frac{9}{2} + 3) = 6x + 15 .$$

Находим внешний интеграл

$$\int\limits_0^1 (6x+15)\,dx = \left(\frac{6x^2}{2} + 15x \right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 2(3+15) = 18 .$$

Пример 2. Найти интеграл $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$, где (V) − треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x + y + z = 4$, и координатными плоскостями (рис. 2.14).

Репозиторий ВГУ

Решение.

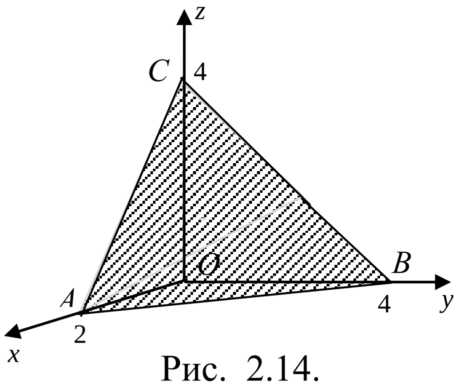


Рис. 2.14.

Расставим пределы интегрирования в этом тройном интеграле. Это тело можно рассматривать, как тело, ограниченное сверху плоскостью $z = 4 - 2x - y$, снизу – плоскостью $z = 0$. Проекция данного тела на плоскость $XOУ$ есть треугольник AOB, ограниченный осями OX и $OУ$, а также прямой $2x + y = 4$, являющейся линией пересечения плоскостей $2x + y + z = 4$ и $z = 0$. Следовательно, тройной интеграл можно найти по формуле (5), где область (G) – это внутренние точки треугольника AOB.

$$\iiint\limits_{V_1} xy\,dxdydz = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_0^{4-2x-y} xy\,dz = \iint\limits_G xyz\Big|_0^{4-2x-y} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_G xy(4 - 2x - y)\,dx\,dy = \iint\limits_G (4xy - 2x^2y - y^2x)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_8^{4-2x} (4xy - 2x^2y - y^2x)\,dy = \int\limits_0^2 \left(2xy^2 - x^2y^2 - x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4-2x} dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^2 (8x - 12x^2 + 6x^3 - x^4)dx = \frac{4}{3}\left(4x^2 - 4x^3 + \frac{3x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\frac{2}{15}.$$

Замечание. Тот же результат можно получить, меняя пределы интегрирования. В частности, проецируя пирамиду на плоскость $УOZ$, сводим интеграл к следующему повторному интегралу

$$\iiint\limits_V xy\,dxdydz = \iint\limits_D dy\,dz \int\limits_0^{(4-y-z)/2} xy\,dx,$$

где область (D) – это внутренние точки треугольника BOC, расположенного в плоскости $УOZ$.

3. Замена переменных в тройном интеграле

Рассмотрим кубируемую область (V) пространства $OXYZ$ и интегрируемую в этой области функцию $f(x, y, z)$. Пусть область (V) с помощью взаимно однозначного отображения, задаваемого дифференцируемыми функциями

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v, w), \\ y = \varphi_2(u, v, w), \\ z = \varphi_3(u, v, w), \end{cases} \tag{8}$$

для которого якобиан

$$I = \frac{D(x,\, y,\, z)}{D(u,\, v,\, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_u & y'_u \\ z'_u & z'_u & z'_u \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

переходит в область (Ω) пространства $OUVW$. Тогда замена переменной в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,\, y,\, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))\,|\,I\,|\,dudvdw. \tag{10}$$

Координаты u, v, w называются **криволинейными координатами.**

Наиболее часто встречающиеся криволинейные координаты в пространстве – это цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты. Эти координаты задаются формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$$
$$(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty), \tag{11}$$

якобиан преобразования $I = \rho$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,\, y,\, z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

Сферические координаты. Эти координаты задаются формулами

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta$$
$$(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi), \tag{12}$$

якобиан преобразования $I = \rho^2\sin\theta$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi dz.$$

Пример 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$,

Репозиторий ВГУ

где область (V) – часть шара $x^2+y^2+z^2\le R^2$, отсекаемая конусом $z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0$.

Решение.

Перейдем к сферическим координатам по формулам (12). Найдем пределы изменения переменных ρ, φ, θ, для этого запишем уравнения поверхностей, ограничивающих область (V) в сферических координатах. Тогда уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ будет иметь вид $\rho=R$, а уравнение конуса: $\cos\theta=\sin\theta$ или $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Для точек области (V) выполняются неравенства $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2,\\ z^2\ge x^2+y^2,\end{cases}$ или в сферических координатах эти неравенства имеют вид $\begin{cases}\rho\le R,\\ \cos\theta\ge\sin\theta.\end{cases}$ Поэтому координаты ρ, φ, θ изменяются в следующих пределах: $0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$. Подставляя сферические координаты в подынтегральную функцию, и, учитывая якобиан преобразования $I=\rho^2\sin\theta$, получим

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^R\rho^4\sin\theta\, d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^4d\rho=\frac{\pi(2-\sqrt{2})R^5}{5}.$$

Пример 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область (V) ограничена частью конуса $x^2+y^2=\dfrac{z^2R^2}{h^2}$ ($z\ge 0$) и плоскостью $z=h$ (h и R – постоянные, $h\ge 0$, $R\ge 0$).

Решение.

Введем цилиндрические координаты по формулам (11). Уравнение конуса принимает вид $\rho^2=\dfrac{z^2R^2}{h^2}$ или $z=\dfrac{\rho h}{R}$, уравнение плоскости $z=h$ останется прежним. Тогда новые переменные в области (V) изменяются следующим образом: $0\le\rho\le R,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ \dfrac{\rho h}{R}\le z\le h$. Полу-

Репозиторий ВГУ

чим

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R d\rho \int\limits_{\frac{\rho h}{R}}^{h} \rho z d\rho = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

4. Приложения тройных интегралов

Из определения тройного интеграла легко видеть, что объем V области (V):

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,. \qquad (13)$$

Рассмотрим некоторое тело (V), в котором распределена масса с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$. Масса данного тела находится по формуле

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\,. \qquad (14)$$

Координаты центра тяжести тела находятся по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz, \qquad (15)$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,z\,dx\,dy\,dz,$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$, $y + z = 1$, $z = 0$.

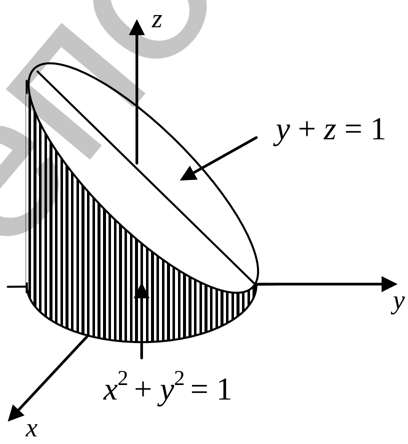


Рис. 2.15.

Решение.

Поверхности, ограничивающие данное тело, это: цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ с образующими, параллельными оси OZ, и плоскость $y + z = 1$, параллельная оси OX. Тело изображено на рисунке 2.15. Объем тела находится по формуле:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам

Репозиторий ВГУ

(11). Для этого запишем уравнение цилиндра и уравнение плоскости в цилиндрических координатах. Тогда уравнение плоскости $z = 1 - \rho\cos\varphi$, уравнение цилиндра $\rho = 1$.

В нашем случае $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 1 - \rho\cos\varphi$

$$V = \iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho\cos\varphi} \rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho z\Big|_0^{1-\rho\cos\varphi} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1 - \rho\cos\varphi) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (3 - 2\cos\varphi) d\varphi = \frac{1}{6}(3\varphi - 2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Репозиторий ВГУ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч. 1.– М.: Наука, 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. Т. 1.– М.: Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1.– М.: Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1.– Физматгиз, 1960.

Дополнительная литература

6. Гусак А.А., Гусак Г.М, Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
8. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
9. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
10. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной прepеменной. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
11. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. Ч. 1. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2005.

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ