МАТЕМАТИКА

- **НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА**
- **СИСТЕМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ**
- **ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА**

Курс лекций

Репозиторий ВГУ

2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М34

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты педагогических наук **А.В. Виноградова, В.В. Устименко;** проректор по учебной работе (ДО), кандидат педагогических наук **В.В. Малиновский**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры дошкольного и начального образования УО «ВГУ им. П.М. Машерова»,
кандидат педагогических наук *З.К. Левчук*

Данное учебное издание подготовлено в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. Излагается необходимый теоретический материал; приводятся разобранные примеры данного курса.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

© УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2010

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, основой начального курса математики являются целые неотрицательные числа и действия над ними, величины и их измерение. Для школьной математики натуральное число является тем же понятием, с которого, как правило, начинается обучение. В начальных классах учащиеся знакомятся с различными функциями натурального числа. Отвечая на вопрос: «Сколько машин изображено на рисунке?» – они имеют дело с числом как количественной характеристикой множества предметов. Производя счет предметов, используют натуральное число как характеристику порядка. В задачах, связанных с измерением величин, число выступает как значение величины при выбранной единице, т.е. как мера величины. Поэтому важной задачей учителя является овладение теми теориями, в которых обосновываются различные подходы к определению натурального числа и действий над натуральными числами.

Не случайно изучение курса математики начинается с рассмотрения этих общих понятий. Предлагаемое учебное издание оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели. В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебных пособий по математике для начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений.

В курс лекций включены такие темы, как «Теоретико-множественный подход к понятию натурального числа», «Аксиоматика целых неотрицательных чисел», «Натуральное число, как результат измерения величины», «Метод математической индукции» и пр.

Структура данного издания такова: материал разбит на темы, темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только не только лучше овладеть необходимыми знаниями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность. Курс лекций содержит примеры задач с обоснованиями по данным темам, которые должны способствовать формированию и закреплению умений и навыков студентов по изученным темам, а также оказать помощь в подготовке к экзаменам и зачетам.

Репозиторий ВГУ

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Числа возникли из потребности счета и измерения и претерпели длительный путь исторического развития. Было время, когда люди не умели считать. Чтобы сравнивать конечные множества, устанавливали взаимно однозначное соответствие между данными множествами или между одним из множеств и подмножеством другого множества, т.е. на этом этапе человек воспринимал численность предметов без их пересчета. Например, столько же предметов, сколько рук у человека. При таком сравнении множества должны быть обозримы.

В результате развития человек пришел к сравнению множеств путем применения множеств посредников: камешков, пальцев, палочек. Эти множества представляли собой зачатки понятия натурального числа, хотя речь шла, например, о пяти камешках, а не о числе «пять» вообще.

После этого человек установил то общее, что существует, например, между пятью пальцами и пятью яблоками, т.е. произошло отвлечение от природы элементов множеств посредников и возникло представление о натуральном числе. Говорили не « одно яблоко», «два яблока»…, а один, два, три и т.д.

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, выполнять различные действия над ними. Запас чисел, которые употребляли, ведя счет, увеличивался постепенно. Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел.

Возникновение понятия натурального числа было важнейшим моментом развития математики. Появилась возможность изучать эти числа независимо от конкретных задач, в связи с которыми они возникли. Теоретическая наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика».

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии и Египте. Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. В средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира, а начиная с XIII века – европейские ученые.

Термин «натуральное число» впервые употребил в V в. Римский ученый А. Боэций, который известен как автор книги «Введение в арифметику», которая до XVI века была образцом для всей европейской математики. Во второй половине XIX в. натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки. В связи с

Репозиторий ВГУ

этим появилась необходимость в строгом логическом обосновании понятия натурального числа, в систематизации того, что с ним связано. Так были разработаны различные построения теории натуральных чисел.

1.ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, НУЛЯ И ОТНОШЕНИЯ «МЕНЬШЕ»

Отрезком N_a натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа а, т.е $N_a = \{x | x \in N$ и $x \leq a\}$. Например, N_7 - это множество натуральных чисел, не превосходящих 7, т.е. $N_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Отметим два важнейших свойства отрезков натурального ряда:

1) Любой отрезок N_a содержит единицу. Это свойство вытекает из определения отрезка натурального ряда.
2) Если число x содержится в отрезке N_a и $x \neq a$, то непосредственно следующее за нми число $x+1$ также содержится в N_a.

Множество A называется ***конечным,*** если оно равномощно некоторому отрезку N_a натурального ряда. Например, множество A вершин треугольника, множество B букв в слове «*мир*» - конечные множества, т.к. они равномощны отрезку $N_3 = \{1,2,3\}$, т.е. $A \sim B \sim N_3$.

Если непустое конечное множество А равномощно отрезку N_a, то натуральное число а называют числом элементов множества А и пишут n(A) = a. Например, если A – множество вершин треугольника, то $n(A) = 3$.

Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда, т.е.каждому конечному множеству A может быть поставлено в соответствие однозначно определенное число a, такое, что множество A взаимно однозначно отображается на отрезок N_a.

Установление взаимно-однозначного соответствия между элементами непустого конечного множества A и отрезком натурального ряда называется ***счетом*** элементов множества A. Так как любому непустому конечному множеству соответствует только одно натуральное число, то вся совокупность конечных множеств разбивается на классы равномощных множеств. В одном классе будут содержаться все одноэлементные множества, в другом – двухэлементные и т.д. И это число можно рассматривать как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Таким образом, с

Репозиторий ВГУ

теоретико-множественной точки зрения, ***натуральное число – это общее свойство класса конечных равномощных множеств.***

Число 0 тоже имеет теоретико-множественное истолкование – оно ставится в соответствие пустому множеству: $n(\varnothing) = 0$.

Итак, натуральное число a как характеристику количества можно рассматривать с двух позиций:

1) как число элементов в множестве A, получаемое при счете;
2) как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Установленная связь между конечными множествами и натуральными числами позволяет дать теоретико-множественное истолкование отношения «меньше».

Если $a = n(A)$, $b = n(B)$, то число a меньше числа b тогда и только тогда, когда множество A равномощно собственному подмножеству множества B, т.е. $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$, $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \varnothing$ (рис.1) . Либо когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка N_b, т.е. $N_a \subset N_b$.

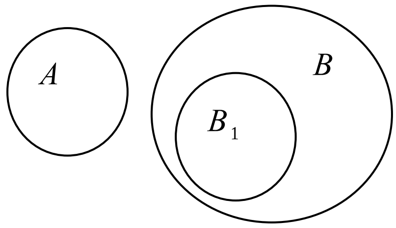


Рис.1

Числа a и b равны, если они определяются равномощными множествами: $a = k \Leftrightarrow A \sim B_1$, где $n(A) = a$, $n(B_1) = k$. Например, 2 = 2, т.к. $n(A) = 2$, $n(B) = 2$, $A = \{a, b\}$, $B = \{z, x\}$, $A \sim B$.

Свойства отношения «меньше» для натуральных чисел также получают теоретико-множественное истолкование: транзитивность и антисимметричность этого отношения связаны с тем, что транзитивно и антисимметрично отношение «быть подмножеством».

Покажем, используя теоретико-множественную трактовку отношения «меньше» для натуральных чисел, что 2<5.

Возьмем множество A, содержащее 2 элемента и множество B, содержащее 5 элементов, т.е. $n(A) = 2$, $n(B) = 5$. Например, $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, f, r\}$. Из множества B можно выделить подмножество B_1, равномощное множеству A: например $B_1 = \{c, d\}$ и $A \sim B_1$. Согласно определению отношения «меньше», 2<5. Справедливость данного неравенства вытекает и из того, что $N_2 < N_5$, т.е. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Данное неравенство можно рассмотреть на рисунке 2. Пусть 2 – это число кружков, а 5 – число

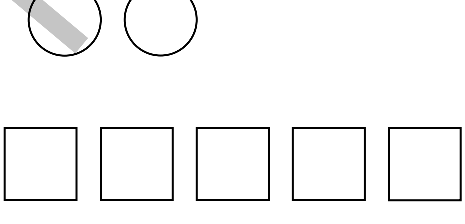


Рис.2

Репозиторий ВГУ

квадратов. Если наложить кружки на квадраты, то увидим, что часть квадратов осталось незакрытыми.

Значит, количество кружков меньше количества квадратов, т.е. 2<5.

Теоретико-множественный смысл неравенства $0<a$, истинного для любого натурального a, связан с тем, что пустое множество является подмножеством отрезка N_a.

Сравнение чисел в начальном курсе математики осуществляется различными способами – оно основано на всех рассмотренных нами подходах к трактовке отношения «меньше».

2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ СУММЫ

Сложение целых неотрицательных чисел связано с объединением конечных непересекающихся множеств. Если $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то ***суммой целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в объединении множеств A и B, т.е.*** $\boldsymbol{a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B)}$.

Докажем сначала, что если a и b - натуральные числа, то существует взаимно однозначное отображение отрезка натурального ряда N_b на множество X таких чисел, что $a + 1 \leq x \leq a + b$. Действительно, если поставить в соответствие числу $c \in N_b$ число $c + a$, то в силу монотонности сложения этим будет задано взаимно однозначное отображение отрезка N_b на множество X. Например, если $a = 3$, $b = 5$, то соответствие между множествами N_5 и $X = \{4,5,6,7,8\}$ может быть установлено так: числу c сопоставим $x = c + 3$, т.е. числу 1 – число 3 + 1 = 4, числу 2 = число 3 + 2 = 5 и т.д.

Пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$. Тогда существует взаимно однозначные отображения A на N_a и B на N_b. Но, согласно доказанному выше, отрезок N_b можно взаимно однозначно отобразить на множество X таких чисел, что $a + 1 \leq x \leq a + b$. Тем самым множество B взаимно однозначно отображается на X. Отображая взаимно однозначно A на N_a и B на X, получаем взаимно однозначное отображение множества $A \cup B$ на отрезок N_{a+b}. Поскольку нет элементов, одновременно принадлежащих A и B, то это отображение определено на всем множестве $A \cup B$. Значит, в множестве $A \cup B$ имеется $a + b$ элементов, что и требовалось доказать.

Действие, при помощи которого находят сумму, называют ***сложением***, а числа, которые складывают, называют слагаемыми.

Используя определение суммы целых неотрицательных чисел, покажем, что 2 + 4 = 6.

Репозиторий ВГУ

Возьмем множество A, содержащее 2 элемента и множество B, содержащее 4 элемента, такие, что $n(A) = 2$, $n(B) = 4$, $A \cap B = \varnothing$. Например, $A = \{a, b\}$, $B = \{k, l, m, h\}$. Найдем объединение множеств A и B: $A \cup B = \{a, b, k, l, m, h\}$. Полученное множество содержит 6 элементов, т.е. $n(A \cup B)=6$. Согласно определению сложения, 2 + 4 = 6.

Выясним теоретико-множественный смысл равенства $a + 0 = a$. Если $a=n(A)$, $0= n(\varnothing)$, то $a + 0 = n(A)+ n(\varnothing)=n(A \cup \varnothing)=n(A)= a$.

Сложение обладает ***коммутативностью и ассоциативностью*** (переместительный и сочетательный законы).

Покажем ***коммутативность***. Для любых множеств A и B выполняется равенство $A \cup B = B \cup A$. Т.к. $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то $a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B) = n(B \cup A) = n(B) + n(A) = a + b$.

Аналогично можно показать ***ассоциативность*** сложения, которая вытекает из равенства $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Действительно, $a=n(A)$, $b = n(B)$,$c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, то $(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = a + (b + c)$.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет обосновать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида. Например, выясним, почему следующая задача решается при помощи сложения: Катя нашла 5 грибов, Даша нашла 3 гриба. Сколько грибов нашли девочки?

В задаче рассматриваются три множества: множество A грибов Кати, множество B – грибов Даши и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Пусть $n(A)=5$, $n(B)=3$, $A \cap B = \varnothing$. $A=\{a, s, d, f, g\}$, $B=\{z, x, c\}$. Тогда $A \cup B= \{a, s, d, f, g, z, x, c\}$, и $n(A \cup B)=8$. Согласно определению суммы в теоретико-множественном подходе, 5 + 3 = 8. Значит, девочки нашли 8 грибов.

Дадим теоретико-множественное истолкование суммы нескольких слагаемых, и, используя полученный вывод, найдем сумму 3 + 4 + 2 + 9.

Пусть сумма двух слагаемых определена и определена сумма k слагаемых. Тогда сумма, состоящая из $k+1$ слагаемого, т.е. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1}$ равна $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + a_{k+1}$.

Значит, чтобы найти сумму 3 + 4 + 2 + 9, согласно этому определению, надо выполнить следующие преобразования: 3 + 4 + 2 + 9 = (3 + 4 + 2) + 9 = ((3 + 4) + 2) + 9 = (7 +2) + 9 = 9 +9 = 18.

Найдем значение выражения и объясните, какие законы сложения были при этом использованы: (16 + 9) + 21 + 14.

Решение. Используем ассоциативность, что позволяет нам опустить скобки: 16 + 9 + 21 + 14. Используя коммутативность, получим 16 + 14 + 9 + + 21. Используя снова ассоциативность,

Репозиторий ВГУ

расставим скобки в нужном нам месте: (16 + 14) + (9 +21). Вычислим значения в скобках: 30 + 30. В итоге получим 60. Значит значение выражения (16 + 9) + 21 + 14 равно 60.

3. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ РАЗНОСТИ

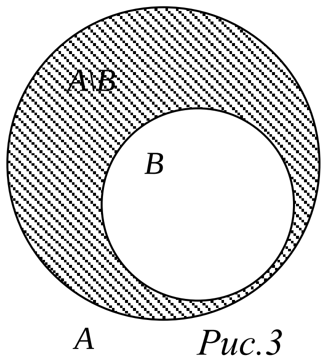


Рис.3

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что n(A)=a, n(B)=b, $B\subset A$, т.е. a - b = n(A\B). Это обуславливается тем, что $A=B\cup(A\backslash B)$, т.е. n(A)=n(B) + n(A\B).

Докажем это. Так как по условию *B* – собственное подмножество множества *A,* то их можно представить так, как на рис. 3.

Вычитание натуральных (целых неотрицательных) чисел определяется как операция, обратная сложению: $a - b = c \Leftrightarrow (\exists c \in N)\ b + c = a$.

Разность *A\B* на этом рисунке заштрихована. Видим, что множества *B* и *A\B* не пресекаются и их объединение равно *A*. Поэтому число элементов в множестве *A* можно найти по формуле *n(A)=n(B) + n(A\B)*, откуда по определению вычитания как операции, обратной сложению, получаем *n(A\B) = a – b*.

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а также вычитание *a* из *a*. Так как $A\backslash\varnothing=A$, $A\backslash A=\varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

Разность *a – b* целых неотрицательных чисел существует тогда и только тогда, когда $b \le a$.

Действие, при помощи которого находят разность *a – b*, называется *вычитанием*, число *a* – уменьшаемым, *b* – вычитаемым.

Используя определения, покажем, что 8 – 5 = 3. Пусть даны два множества такие, что *n(A)* = 8, *n(B)* = 5. И пусть множество *B* является подмножеством множества *A*. Например, *A* = {*a, s, d, f, g, h, j, k*}, *B* = {*a, s, d, f, g*}.

Найдем дополнение множества *B* до множества *A:* *A\B* = {*h, j, k*}. Получаем, что *n(A\B)* = 3.

Следовательно, 8 – 5 = 3.

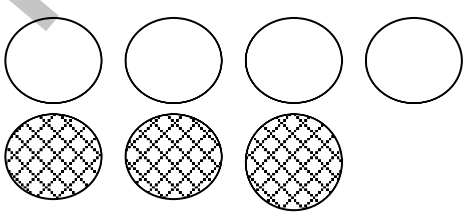


Рис.4

Взаимосвязь вычитания чисел и вычитания множеств позволяет обосновать выбор действия при решении текстовых задач. Выясним, почему следующая задача решается при помощи вычитания, и решите ее: «У школы росло 7 деревьев, из них 3

Репозиторий ВГУ

березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?»

Представим условие задачи наглядно, изобразив каждое дерево, посаженное возле школы кружком (рис. 4). Среди них есть 3 березы – на рисунке выделим их штриховкой. Тогда остальные деревья – не заштрихованные кружки – и есть липы. Т. е. их столько, сколько будет из 7 вычесть 3, т. е. 4.

В задаче рассматриваются три множества: множество A всех деревьев, множество B – берез, которое является подмножеством A, и множество C лип – оно представляет собой дополнение множества B до A. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении.

По условию $n(A) = 7$, $n(B) = 3$ и $B \subset A$. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{a, b, c\}$. Найдем дополнение множества A до B: $A \setminus B = \{d, e, f, g\}$ и $n(A \setminus B) = 4$.

Значит, $n(C) = n(A \setminus B) = n(A) - n(B) = 7 – 3 = 4$.

Следовательно, у школы росло 4 липы.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций различные правила.

Правило вычитания числа из суммы: чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых и к полученному результату прибавить другое слагаемое, т.е. при $a \geq c$ имеем, что $(a+b)-c=(a-c)+b$; при $b \geq c$ имеем, что $(a+b)-c=a+(b-c)$; при $a \geq c$ и $b \geq c$ можно использовать любую из данных формул.

Выясним смысл данного правила: Пусть A, B, C – такие множества, что $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$ (рис.5).

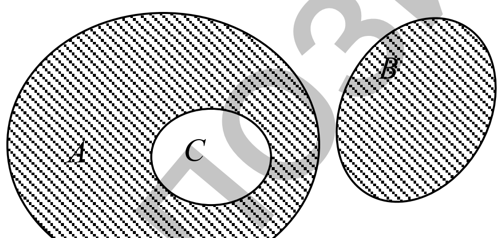


Рис. 5

Нетрудно доказать с помощью кругов Эйлера, что для данных множеств имеет место равенство

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B .$$

Правая часть равенства имеет вид:

$$n((A \cup B) \setminus C = n(A \cup B) - n(C) = (a+b) - c$$

.

Левая часть равенства имеет вид:

$$n((A \setminus C) \cup B = n(A \setminus C) + n(B) = (a-c) + b$$

Следовательно $(a + b) – c = (a– c) + b$,при условии, что $a>c$.

Правило вычитания суммы из числа: чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим, т.е. при условии, что $a \geq b + c$, имеем $a – (b + c) = (a – b) – c$.

Выясним смысл данного правила. Для данных множеств имеет место равенство $(A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Репозиторий ВГУ

Тогда получим, что правая часть равенства имеет вид: $n(A\setminus(B\cup C))=n(A)-n(B\cup C)=a-(b+c)$. Левая часть равенства имеет вид: $n((A\setminus B)\setminus C=n(A\setminus B)-n(C)=(a-b)-c$.

Следовательно *(a + b) – c = (a– c) + b*, при условии, что *a>c*.

Правило вычитания разности из числа: чтобы вычесть из числа *a* разность *b – c*, достаточно к данному числу прибавить вычитаемое *c* и из полученного результата вычесть уменьшаемое *b*; при *a > b* можно вычесть из числа а уменьшаемое b и к полученному результату прибавить вычитаемое с, т.е. *a – (b – c) = (a + c) – b = (a – b) +c*.

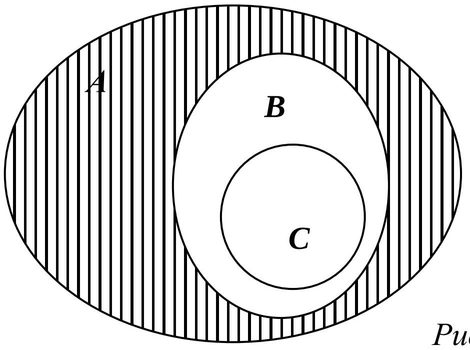


Рис.6

Выясним смысл данного правила: Пусть *A, B, C* - такие множества, что *n(A) = a, n(B) = b, n(C) = c* и $C\subset B$, $B\subset A$ (рис.6). Тогда *a – (b – c)* есть число элементов множества *A\(B\C),* а число *(a + c) – b* есть число элементов множества $(A\cup C)\setminus B$. На рисунке 5 множество *A\(B\C)* изображено штриховкой. Легко убедиться в том, что множество $(A\cup C)\setminus B$ изобразится точно такой же областью.

Значит, *A\(B\C) =* $(A\cup C)\setminus B$.

Следовательно, *n(A\(B\C)) = n(* $(A\cup C)\setminus B$ *)* и *a – (b – c) = (a + c) – b*.

Правило вычитания числа из разности: чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел, т.е. *(a – b) – c = a – (b + c).*Доказывается аналогично правилу вычитания суммы из числа.

Пример. Какими способами можно найти разность: а) 15 – (5 + 6); б) (12 + 6) – 2?

Решение. а) Используем правило вычитания суммы из числа: 15 – (5 + 6) = (15 – 5) – 6 = 10 – 6 = 4.

Или 15 – (5 + 6) = (15 – 6) – 5 = 9 – 4 = 4.

Или 15 – (5 + 6) = 15 – 11= 4.

б) Используем правило вычитания числа из суммы: (12 + 6) – 2 = (12 – 2) + 6 = 10 + 6 = 16.

Или (12 + 6) – 2 = 12 + (6 – 2) = 12 + 4 = 16.

Или (12 + 6) – 2 = 18 – 2 = 16.

Данные правила позволяют упростить вычисления и широко используются в начальном курсе математики.

Репозиторий ВГУ

4. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ НА…» и «МЕНЬШЕ НА…»

Пусть a и b – целые неотрицательные числа, такие, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, и установлено, что $a < b$. Это значит, что в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и множество $B\setminus B_1$ не пусто. Пусть $n(B\setminus B_1) = c$ и $c \neq 0$. Тогда в множестве B элементов столько же, сколько в множестве A, да еще c элементов. В этом случае говорят, что ***число а меньше числа b на с или что число b больше числа а на с.***

Так как $c = n(B\setminus B_1)$, где $B_1 \subset B$, то $c = b - a$.

Следовательно, ***чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.***

Взаимосвязь действий над множествами с действиями над числами, теоретико-множественный смысл отношений «меньше на», «больше на», позволяют обосновать выбор действий при решении задач с этими отношениями.

Рассмотрим, например, задачу: «На верхней полке шкафа 5 книг, а на нижней – на 2 больше. Сколько книг на нижней полке?»

Решим задачу и объясним ее решение.

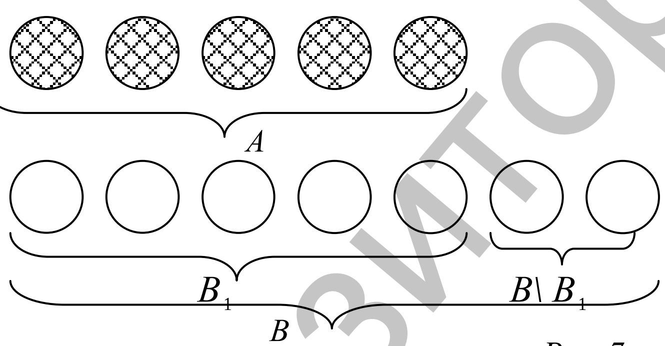


Рис. 7

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве книг на верхней полке (A) и множестве книг на нижней полке (B), т.е. $n(A) = 5$. Число элементов множества требуется найти при условии, что в нем на 2 элемента больше, чем в первом. Наглядно это можно изобразить с помощью кружков (рис.7). Отношение «больше на» означает, что в множестве B столько же элементов, сколько их в A, да еще *2* элемента.

Пусть $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = B_1 \cup (B\setminus B_1)$. Т.к. $B_1 \sim A$, то предположим $B_1 = \{q, w, e, r, t\}$.

Тогда число книг, на которые на нижней полке больше, чем на верхней, обозначим $C = B\setminus B_1 = \{z, x\}$. Найдем множество книг на нижней полке: $B = \{q, w, e, r, t, z, x\}$, $n(B) = 7$.

Это значит, что $n(B) = n(B_1) + n(B\setminus B_1)$. Т.к. $B_1 \sim A$, то $n(B) = n(A) + n(B\setminus A) = 5 + 2 = 7$. Следовательно, на нижней полке 7 книг.

Рассмотрим еще одну задачу. Во дворе гуляли 6 мальчиков, а девочек на 2 меньше. Сколько было девочек?

Репозиторий ВГУ

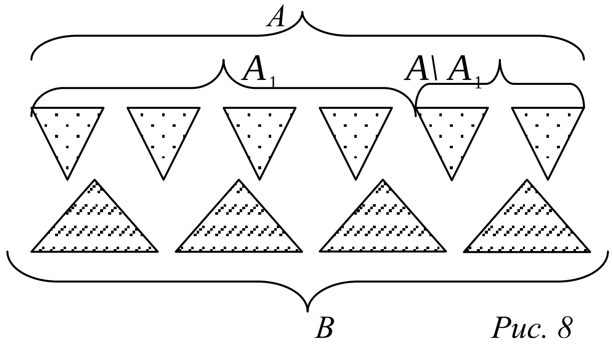


Рис. 8

В задаче речь идет о двух множествах: множестве A мальчиков, множестве B девочек. Известно, что в первом множестве 6 элементов, т.е. $n(A) = 6$. Число элементов во втором множестве надо найти при условии, что в нем на 2 элемента меньше, чем в первом. Отношение «меньше на» означает, что в множестве B элементов столько же, сколько в A, только без двух. Наглядно это можно представить с помощью треугольников (рис.8).

Таким образом, $n(B) = n(A_1) = n(A) – n(A \setminus A_1) = 6 – 2 = 4$.

Следовательно, девочек во дворе было 4.

Объясним решение следующей задачи: «У школы посадили 3 дуба и 7 лип. На сколько больше посадили лип?»

Решение. В задаче рассматриваются два: множество дубов A и множество лип B. Известно, что лип посадили больше. Тогда, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно воспользоваться сформулированным выше правилом и найти ответ при помощи вычитания: 7 – 3 = 4 (липы).

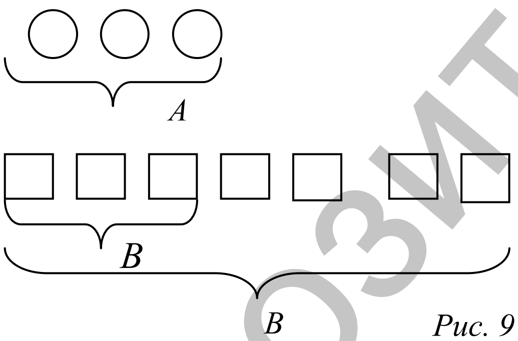


Рис. 9

Однако возникает вопрос: можно ли из количества лип вычитать количество дубов? Дело в том, что в данном случае мы из 7 лип вычитаем 3 липы. Чтобы убедиться в этом, изобразим дубы кружками, а липы квадратами (рис.9).

Чтобы ответить на вопрос задачи, выделим в множестве лип подмножество B_1, равномощное множеству дубов A, т.е. $B_1 \sim A$ и $n(B_1) = 3$. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B_1 = \{a, b, c\}$. Тогда остальные липы образуют множества B: $B \setminus B_1 = \{d, e, f, g\}$, количество элементов в данном множестве $n(B \setminus B_1) = 4$.

Т.о., количество лип, которое необходимо найти, равно разности $n(B \setminus B_1) = n(B) – n(B_1) = 7 – 3 = 4$.

Репозиторий ВГУ

5. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Понятие произведения может быть определено по-разному. Рассмотрим подход, в основе которого лежит понятие суммы.

Если a, b – целые неотрицательные числа, то произведением $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b\ \text{слагаемых}}$, ***если b > 1;***
2) $a \cdot b = a$, ***если b = 1;***
3) $a \cdot b = 0$, ***если b = 0.***

С теоретико-множественных позиций $a \cdot b$ ($b > 1$) представляет число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит по a элементов и никакие два из них не пересекаются.

$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$, если $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b) = a$ и множества $A_1, A_2, \ldots, A_b$ попарно не пересекаются.

Рассмотрим подход, в основе которого лежит понятие декартового произведения множеств.

Пусть даны два множества: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots b_k\}$. Найдем декартово произведение, которое запишем в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{llll}
(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots, & (a_1, b_k), \\
(a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \ldots, & (a_2, b_k), \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
(a_n, b_1), & (a_n, b_2), & \ldots, & (a_n, b_k).
\end{array}$$

В каждой строке таблицы все пары имеют одинаковую первую компоненту, а в каждом столбце одинаковая вторая компонента. При этом никакие две строки не имеют хотя бы одной одинаковой пары.

Отсюда следует, что число элементов в декартовом произведении $A \times B$ равно сумме k слагаемых, каждое из которых равно n, т.е. произведению чисел n и k. Таким образом, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

При $k = 0$ данное равенство также верно, поскольку $B = \varnothing$ и $n(A \times \varnothing) = n(A) \cdot n(\varnothing) = a \cdot 0 = 0$.

С теоретико-множественной точки зрения ***произведение*** $\boldsymbol{a \cdot b}$ целых неотрицательных чисел есть число элементов в декартовом произведении множеств A и B, таких, что $n(A) = a$, $n(B) = b$.

$$\boldsymbol{a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B)}$$

Действие, при помощи которого находят произведение чисел, называют ***умножением***, а числа, которые умножают, называют множителями.

Умножение обладает коммутативностью, ассоциативностью и дистрибутивностью (переместительный, сочетательный и распределительный законы).

Репозиторий ВГУ

Рассмотрим **коммутативность** с точки зрения теоретико-множественного подхода, т.е. $a \cdot b = b \cdot a$.

Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$. Тогда по определению произведения $a \cdot b = n(A \times B)$. Но множества $A \times B = B \times A$ равномощны: каждой паре $(a;b)$ из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие единственную пару $(b;a)$ из множества $B \times A$, и наоборот.

Следовательно, $n(A \times B) = n(B \times A)$. Значит $a \cdot b = b \cdot a$.

Ассоциативность $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ вытекает из того, что множества $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ равномощны, а значит $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$.

Дистрибутивность рассматривают относительно сложения и вычитания. Рассмотрим относительно сложения: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

По определению произведения имеем $(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C)$. Но $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, поэтому $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$, а значит и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Объясним, почему $3 \cdot 2 = 6$?

Решение. Используя первое определение, произведение $3 \cdot 2$ можно записать в виде суммы 3 + 3. Возьмем различные множества K и C такие, что $n(K) = n(C) = 3$. Допустим $K = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$. По определению нам нужно найти количество элементов в объединении $K \cup C$. Т.к. $K \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то $n(K \cup C) = 6$. Значит $3 \cdot 2 = 6$.

Используем второе определение. Пусть $n(A) = 3$, $n(B) = 2$. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{q, w\}$. Найдем декартово произведение данных множеств: $A \times B = \{(a, q), (a, w), (b, q), (b, w), (c, q), (c, w)\}$. Количество пар в декартовом произведении равно 6. Значит $3 \cdot 2 = 6$

Определим ***произведение нескольких множителей.***

Пусть произведение двух множителей определено и определено произведение n множителей. Тогда произведение, состоящее из $n + 1$ множителя, т.е. произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$, равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$.

С помощью определения суммы нескольких множителей, найдем произведение $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$.

Решение. Чтобы найти произведение $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$ согласно этому правилу, надо выполнить последовательно следующие преобразования: $(2 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 9 = ((2 \cdot 7) \cdot 5) \cdot 9 = (14 \cdot 5) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630$.

Обоснуем выбор решения нескольких задач.

Задача 1. На одно пальто пришивают 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 3 таких пальто? Решите задачу и обоснуйте ее решение.

Репозиторий ВГУ

Решение. В задаче идет речь о трех множествах, в каждом из которых по 4 элемента. Требуется узнать число элементов в объединении этих трех множеств.

Если $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$, то $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)$ = 4 + 4 + 4 = $4 \cdot 3$ = 12.

Значит, на три пальто нужно пришить 12 пуговиц.

Задача 2. Школьники посадили в парке 4 ряда деревьев по 5 штук в каждом ряду. Сколько деревьев они посадили? Объясните, почему данная задача решается при помощи умножения.

Решение. Обозначим деревья кружками. Тогда получим 4 ряда кружков по 5 в каждом (рис.10). Всего таких кружков окажется *20*, т.е. $4 \cdot 5$.

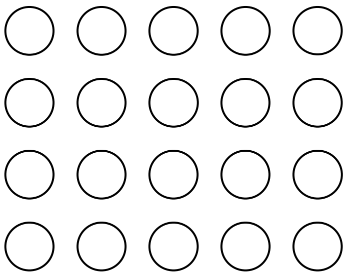


Рис.10

Возьмем множества A и B такие, что $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ и найдем их декартово произведение. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда $A \times B$ = {(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (4, 9)}.

Количество элементов в декартовом произведении $n(A \times B)$ = 20, т.е. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 5 = 20$.

Следовательно, школьники посадили 20 деревьев.

Различные законы умножения позволяют упростить вычисления. Например, используя распределительный закон умножения, найдем $297 \cdot 8$.

Решение. $297 \cdot 8 = (300 - 3) \cdot 8 = 300 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 2400 - 24 = 2376$.

Решим следующую задачу различными способами и обоснуем выбор способа: «В гараже в 3 ряда стояло по 9 машин. Из каждого ряда выехало 8 машин. Сколько машин осталось в гараже?»

Решение (рис. 11).

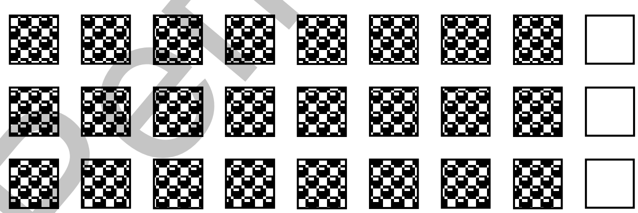


Рис.11

1 *способ*. Если в каждом ряду стояло по 9 машин и из каждого ряда выехало 8 машин, то в каждом ряду осталось по 1 машине. Так как всего 3 ряда, то и осталось $1 \cdot 3$ = 3 машины.

2 *способ*. Найдем общее количество машин: $3 \cdot 9 = 27$. Теперь найдем количество машин, которые выехали из каждого из трех

Репозиторий ВГУ

рядов: $3 \cdot 8 = 24$. Тогда в гараже осталось 27 – 24 = 3 машины. Ответ: осталось 3 машины.

6. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ ЧАСТНОГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Деление целого неотрицательного числа на натуральное число связано с разбиением множества на классы.

Если a – число элементов множества A и множество A разбито на b попарно непересекающихся подмножеств, то частным чисел a и b называется число элементов каждого подмножества разбиения.

Если a – число элементов множества A и множество A разбито на попарно непересекающиеся подмножества, в каждом из которых b элементов, то ***частным чисел a и b*** называется число подмножеств разбиения.

Действие, при помощи которого находят частное, называется *делением*, число a – делимым, число b – делителем.

Познакомимся с некоторыми *свойствами деления* натуральных чисел.

Правило деления суммы на число. Если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c. Частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Данное правило можно истолковать с точки зрения теоретико-множественного подхода. Если частные $a : c$ и $b : c$ существуют, то $(a + b): c= a : c + b : c$. Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$,причем $A \cap B = \varnothing$. Если множества A и B разбить на равночисленные подмножества, состоящие из с элементов, то и объединение этих множеств допускает такое разбиение. Если при этом множество A состоит из $a : c$ подмножеств, а множество B состоит из $b : c$ подмножеств, то $A \cup B$ состоит из $a : c + b : c$. это значит, что $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Рассмотрим данное правило на примере. Пусть $n(A) = 6$, $n(B) = 4$, причем $A \cap B = \varnothing$: $A = \{z, x, c, v, b, n\}$, $B = \{a, s, d, f\}$. И пусть множества A и B можно разбить на равномощные подмножества, состоящие из 2 элементов каждое: $A_1 = \{z, x\}$, $A_2 = \{c, v\}$, $A_3 = \{b, n\}$, $B_1 = \{a, s\}$, $B_2 = \{d, f\}$.

Значит, множество A можно разбить на 3 равномощных подмножества, в каждом из которых по 2 элемента, а множество B можно разбить на 2 таких подмножества и всего таких подмножеств будет 5. Т.е. 6 : 2 = 3, а 4 : 2 = 2 и 3 + 2 = 5.

Теперь найдем объединение множеств A и B: $A \cup B = \{z, x, c, v, b, n, a, s, d, f\}$ и разобьем его на равномощные подмножества,

Репозиторий ВГУ

содержащие по 2 элемента: $X_1 = \{z, x\}$, $X_2 = \{c, v\}$, $X_3 = \{b, n\}$, $X_4 = \{a, s\}$, $X_5 = \{d, f\}$.

Таких подмножеств будет 5. Т.е. 6 + 4 = 10, 10 : 2 = 5.

Т.о., получаем (6 + 4) : 2 = 6 : 2 + 4 : 2.

Данное правило верно в том случае, если каждое слагаемое делится на число, то и сумма делится на это число. Если же сформулировать правило наоборот, т. е., если сумма делится на число и каждое слагаемое делится на число, то утверждение может оказаться неверным. Например, сумма чисел 5 и 3 делится на 2, но каждое слагаемое, т.е. 5 и 3, не делится на 2.

Аналогично проводятся рассуждения и для ниже перечисленных правил.

Правило деления числа на произведение. Если натуральное число а делится на натуральные числа *b* и *c*, то чтобы разделить *a* на произведение чисел *b* и *c*, достаточно разделить число *a* на *b(c)* и полученное частное разделить на *c(b)*: $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Правило умножения числа на частное двух чисел. Чтобы умножить число на частное двух чисел, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель, т.е. $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$.

Правило деления произведения на число. Чтобы разделить произведение нескольких целых неотрицательных чисел на натуральное число, достаточно один из множителей разделить на это число и полученное частное умножить на оставшиеся множители, т.е., если $a : n$, то $(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$.

Дадим теоретико-множественное обоснование равенству 6 : 3 = 2.

Решение. Возьмем множество *A*, в котором 6 элементов, например $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Разобьем множество *A* на 3 попарно непересекающихся равномощных множества, например $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$, $A_3 = \{e, f\}$. В каждом подмножестве по 2 элемента: $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 2$.

Следовательно, 6 : 3 = 2.

Справедливость данного равенства можно объяснить и так. Возьмем данное нам множество *A* и разобьем его на подмножества, в каждом из которых по 3 элемента, например: $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e, f\}$. Таких подмножеств в разбиении будет два. Следовательно, 6 : 3 = 2.

Теоретико-множественное истолкование можно дать и делению с остатком. ***Разделить*** натуральное число *a* на натуральное число *b*

с остатком – это значит найти такие натуральные целые числа q и r, что $a = bq + r$, где $0 \le r < b$.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на множества $A_1, A_2, \ldots, A_q, R$, так, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_q$ равномощны, а множество R содержит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Тогда, если $n(A_1), n(A_2), \ldots, n(A_q) = b$, а $n(R) = r$, то $a = bq + r$, где $0 \le r < b$. Причем число q равномощных множеств является *неполным частным* при делении a на b, а число элементов в R – *остатком* при этом делении.

Разделим на 2 с остатком.

Возьмем множество X, состоящее из 7 элементов. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Разобьем это множество на 2 равномощных подмножества, например $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{4, 5, 6\}$. В эти подмножества не вошел один элемент, он составит некоторое множество $R = \{7\}$.

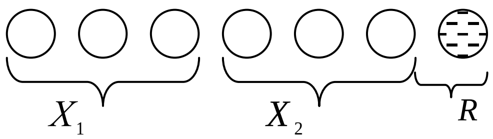


Рис.12

Тогда $n(X_1) = n(X_2) = 3$, $n(R) = 1$. Согласно определению деления с остатком, получим: 7 : 2 = 3 (ост.1) или $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Наглядно это можно представить с помощью рис.12.

Взаимосвязь деления натуральных чисел с разбиением конечных множеств на классы позволяет обосновать выбор действия деления при решении задач. Например,15 тетрадей раздали поровну 5 ученикам. Сколько тетрадей получил каждый? Объясните, почему данная задача решается при помощи деления.

Решение. Множество учеников A из 15 элементов разбивается на 5 равночисленных подмножеств. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве.

Пусть $n(A) = 15$, например, $A = \{z, x, c, v, b, a, s, d, f, g, q, w, e, r, t\}$. Разобьем множество A на 5 попарно непересекающихся равномощных подмножества: $A_1 = \{z, x, c,\}$, $A_2 = \{v, b, a\}$, $A_3 = \{s, d, f\}$, $A_4 = \{g, q, w\}$, $A_5 = \{e, r, t\}$. В каждом таком подмножестве по 3 элемента: $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = 3$. Данные действия соответствуют второму определению деления, значит, ответ на решение задачи можно найти делением: 15 : 5 = 3, и каждый ученик получил по 3 тетради.

Ответ: по 3 тетради.

Рассмотрим другую задачу. В коробке 12 карандашей. Их надо разложить в коробки, по 4 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится? Обоснуйте свой выбор действия при решении задачи.

Репозиторий ВГУ

Решение. Множество карандашей C из 12 элементов разбивается на подмножества, в каждом из которых по 4 элемента. Требуется найти количество таких подмножеств.

Пусть $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Разобьем это множество на непересекающиеся подмножества, в каждом из которых по 4 элемента: $C_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_2 = \{5, 6, 7, 8\}$, $C_3 = \{9, 10, 11, 12\}$. Таких подмножеств получилось 3. Значит, согласно первому определению деления, задачу можно решить при помощи деления: $12 : 4 = 3$.

Следовательно, чтобы разложить 12 карандашей по 4 карандаша в коробку, то понадобится 3 коробки.

Ответ: понадобится 3 коробки.

Задача. Вычислите различными способами: а) $(690 + 23) : 23$; б) $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15$; в) $225 \cdot (75 : 15)$.

Решение. а) $(690 + 23) : 23 = 713 : 23 = 31$. Применим правило деления суммы на число: $(690 + 23) : 23 = 690 : 23 + 23 : 23 = 30 + 1 = 31$.

б) $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = 94500 : 15 = 6300$. Применим правило деления произведения на число: $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = (315 : 15) \cdot 10 \cdot 30 = 21 \cdot 10 \cdot 30 = 630$, $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = (315 \cdot 10) \cdot (30 : 15) = 3150 \cdot 2 = 6300$.

в) $225 \cdot (75 : 15) = 225 \cdot 5 = 1125$. Применим правило умножения числа на частное двух чисел: $225 \cdot (75 : 15) = (225 \cdot 75) : 15 = 16875 : 15 = 1125$, $225 \cdot (75 : 15) = (225 : 15) \cdot 75 = 15 \cdot 75 = 1125$.

7. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ В…» и «МЕНЬШЕ В…»

Пусть дано множество A, в котором 6 элементов, и множество B, содержащее 3 элемента: $n(A) = 6$, $n(B) = 3$: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, s, d\}$.

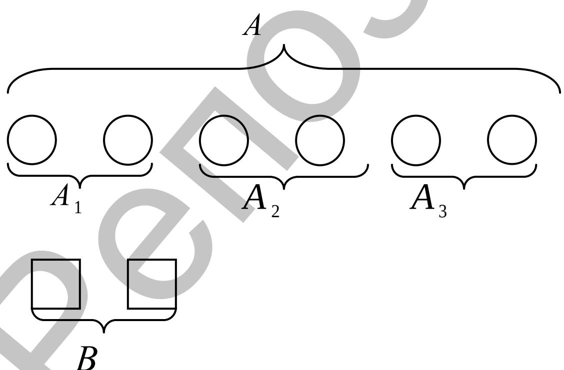


Рис.13

Выделим в множестве A подмножества, равномощные множеству B: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ (рис.13). Их оказывается три.

В этом случае говорят, что число 6 больше числа 2 в 3 раза, а число 2 меньше 6 в 3 раза.

Если даны числа a и b такие, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, $a>b$, и множество A можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству B, то говорят, что ***число а больше числа b в с раз, а число b меньше числа а в с раз.***

Репозиторий ВГУ

Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, необходимо большее число разделить на меньшее.

Объясним смысл предложения « 10 больше 5 в 2 раза». Если предположить, что в множестве C 10 элементов, а в множестве K 5 элементов, и в множестве C можно выделить подмножества, равномощные K, то таких подмножеств окажется 2.

Значит, 10 больше 5 в 2 раза.

Теоретико-множественный смысл отношения «a больше (меньше) b в c раз» можно использовать при обосновании выбора действий при решении задач.

Рассмотрим, например, такую задачу. На участке растут 8 елей. Их в 2 раза больше, чем сосен. Сколько сосен на участке? Решим задачу и обоснуем выбор действий.

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве A елей и C сосен. Известно, что $n(A) = 8$. Требуется найти $n(C)$, зная, что число елей в 2 раза больше сосен, т.е. число сосен в 2 раза меньше числа 8. Исходя из этого условия, можно представить множество A состоящим из двух равномощных подмножеств: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{5, 6, 7, 8\}$. Тогда в множестве C будет столько элементов, сколько в каждом подмножестве множества A: $n(A_1) = n(A_2) = 4$, а это число можно найти делением $8 : 2 = 4$.

Значит $n(C) = 4$, т.е. на участке росло 4 сосны.

Рассмотрим другую задачу. У Нины 3 тетради, а у Коли в 4 раза больше. Сколько тетрадей у Коли? Обоснуем выбор решения.

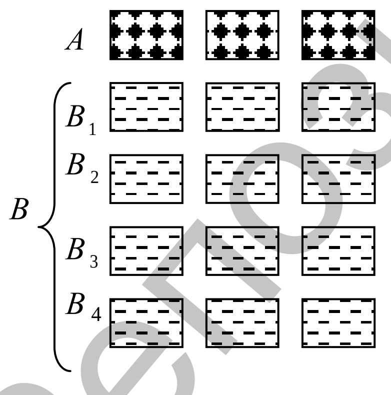


Рис.14

Решение. В задаче рассматриваются два множества: множество A тетрадей Нины и множество B тетрадей Коли (рис.14). Известно, что $n(A) = 3$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число элементов в множестве B в 4 раза больше числа элементов в множестве A. Это значит, что множество B состоит из четырех непересекающихся подмножеств B_1, B_2, B_3, B_4, равномощных множеству A, т.е. $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = n(B_4) = n(A) = 3$.

Но тогда число элементов в множестве B можно найти сложением $n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + n(B_4) = 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$.

Значит, у Коли 12 тетрадей.

Используя теоретико-множественное истолкование отношения «меньше в», «больше в» обоснуем, почему следующая задача

Репозиторий ВГУ

решается делением. Во дворе гуляли 4 утенка и 8 цыплят. Во сколько раз больше цыплят, чем утят? Решите задачу и дайте обоснование решению.

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве A цыплят и множестве B утят. Известно, что $n(A) = 4$, $n(B) = 8$, причем известно, что цыплят больше чем утят.

Пусть $A = \{z, x, c, v\}$, $B = \{a, s, d, f, g, h, j, k\}$.

Выделим в множестве B подмножества, равномощные множеству A: $B_1 = \{a, s, d, f\}$, $B_2 = \{g, h, j, k\}$, т.е. $n(B_1) = n(B_2) = n(A) = 4$. Их оказывается *2*. По определению отношения больше, если множество B можно разбить, например на 2 подмножества, равномощных множеству A, то $n(B)$ больше $n(A)$ в 2 раза.

Ответ: цыплят было больше, чем утят в 2 раза.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

8. ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

При аксиоматическом построении какой-либо математической теории соблюдаются определенные *правила*:

- некоторые понятия теории выбираются в качестве основных и принимаются без определения;
- каждому понятию теории, которое не содержится в списке основных, дается определение;
- формулируются аксиомы – предложения, которые в данной теории принимаются без доказательства; в них раскрываются свойства основных понятий;
- каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, должно быть доказано; такие предложения называют теоремами и доказывают их на основе аксиом и терем.

При аксиоматическом построении теории все утверждения выводятся из аксиом путем доказательства.

Поэтому к системе аксиом предъявляются особые *требования:*

- непротиворечивость (система аксиом называется непротиворечивой, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения);

Репозиторий ВГУ

- независимость (система аксиом называется независимой, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других аксиом).

Множество, с заданным в нем отношением называется моделью данной системы аксиом, если в нем выполняются все аксиомы данной системы.

Построить систему аксиом для множества натуральных чисел можно многими способами. За основное понятие можно принять, например, сумму чисел или отношение порядка. В любом случае нужно задать систему аксиом, описывающие свойства основных понятий.

Дадим систему аксиом, приняв основное понятие операцию сложения.

Непустое множество *N* назовем множеством натуральных чисел, если в нем определена операция $(a; b) \to a + b$, называемая сложением и обладающая свойствами:

1. сложение коммутативно, т.е. $a + b = b + a$.
2. сложение ассоциативно, т.е. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. для $(\forall a, b \in N) a + b \neq b$,
4. в любом множестве *A*, являющемся подмножеством множества *N*, где $A \neq \varnothing$ есть число а такое, что все $x \in A$, равны $a + b$, где $b \in N$.

Аксиом 1 – 4 достаточно, чтобы построить всю арифметику натуральных чисел. Но при таком построении уже нельзя опираться на свойства конечных множеств, не нашедших отражение в этих аксиомах.

Возьмем в качестве основного понятия отношение «непосредственно следовать за…», заданное на непустом множестве *N*. Тогда натуральным рядом чисел будет являться множество N, в котором определено отношение «непосредственно следовать за», а натуральными числами будут называться все элементы N, причем имеют место следующие ***аксиомы Пеано*:**

АКСИОМА 1.

Во множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей, и обозначать символом 1.

АКСИОМА 2.

Для каждого элемента а из N существует единственный элемент a'***, непосредственно следующий за а.***

АКСИОМА 3.

Для каждого элемента а из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует а.

АКСОИМА 4.

Репозиторий ВГУ

Всякое подмножество М множества N совпадает с N, если обладает свойствами: 1) 1 содержится в М; 2) из того, что а содержится в М, следует, что и а′ содержится в М.

Множество *N*, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за…», удовлетворяющее аксиомам 1 – 4, называется ***множеством натуральных чисел***, а его элементы – ***натуральные числами.***

Если в качестве множества *N* выбрать некоторое конкретное множество, на котором задано конкретное отношение «непосредственно следовать за…», удовлетворяющее аксиомам 1 – 4, то получим различные ***интерпретации (модели)*** данной ***системы аксиом.***

Стандартной моделью системы аксиом Пеано является возникший в процессе исторического развития общества ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, …

Моделью аксиом Пеано может быть любое счетное множество.

Например,	I,	II,	III,	IIII, …
	о	оо	ооо	оооо, …
	один	*два*	*три*	*четыре, …*

Рассмотрим последовательность множеств, в которой множество {оо} есть начальный элемент, а каждое последующее множество получается из предыдущего приписыванием еще одного кружка (рис.15).

{оо}, {ооо}, {оооо}, …

Рис.15

Тогда *N* есть множество, состоящее из множеств описанного вида, и оно является моделью системы аксиом Пеано.

Действительно, во множестве *N* существует элемент {оо}, непосредственно не следующий ни за каким элементом данного множества, т.е. выполняется аксиома 1. Для каждого множества *А* рассматриваемой совокупности существует единственное множество, которое получается из *А* добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 2. Для каждого множества *А* существует не более одного множества, из которого образуется множество *А* добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 3. Если $M \subset N$ и известно, что множество *А* содержится в *М,* следует, что и множество, в котором на один кружок больше, чем в множестве *А*, также содержится в *М*, то $M = N$, и значит выполняется аксиома 4.

В определении натурального числа ни одну из аксиом опустить нельзя.

Репозиторий ВГУ

Установим, какие из множеств, приведенных на рис. 16, являются моделью аксиом Пеано.

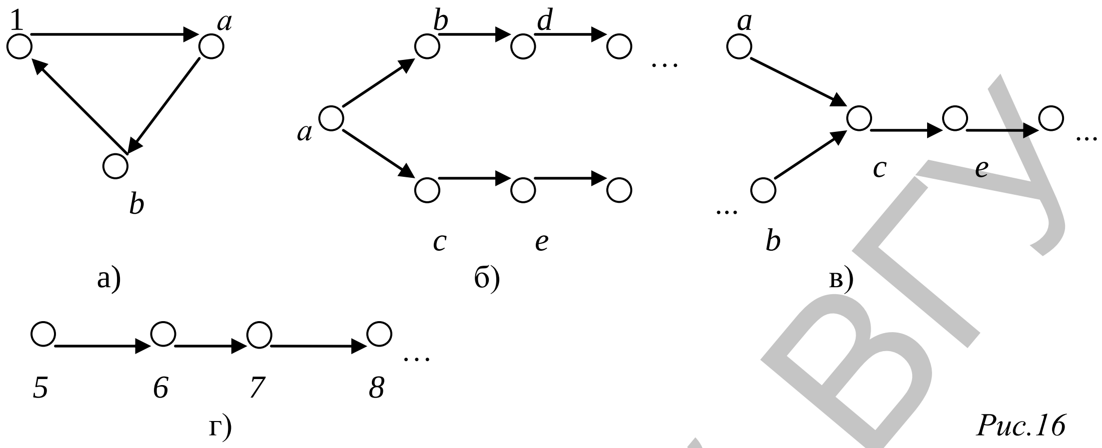


Рис.16

Решение. На рисунке 16 а) изображено множество, в котором выполняются аксиомы 2 и 3. Действительно, для каждого элемента существует единственный, непосредственно следующий за ним, и существует единственный элемент, за которым он следует. Но в этом множестве не выполняется аксиома 1 (аксиома 4 не имеет смысла, т.к. в множестве нет элемента, непосредственно не следующего ни за каким другим). Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рисунке 16 б) показано множество, в котором выполнены аксиомы 1, 3 и 4, но за элементом a непосредственно следуют два элемента, а не один, как требуется в аксиоме 2. Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рис. 16 в) изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 4, но элемент c непосредственно следует сразу за двумя элементами. Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рис. 16 г) изображено множество, удовлетворяющее аксиомам 2, 3, и, если в качестве начального элемента возьмем число 5, то данное множество будет удовлетворять аксиомам 1 и 4. Т.е., в данном множестве для каждого элемента существует единственный, непосредственно следующий за ним, и существует единственный элемент, за которым он следует. Существует и элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества, это 5, т.е. выполняется аксиома 1. Соответственно будет выполняться и аксиома 4. Поэтому данное множество является моделью аксиом Пеано.

Репозиторий ВГУ

Используя аксиомы Пеано, можно доказывать ряд утверждений Например, докажем, что для всех натуральных чисел выполняется неравенство $x \neq x'$.

Доказательство. Обозначим через A множество натуральных чисел, для которых $a \neq a'$. Число 1 принадлежит A, поскольку оно не следует ни за каким числом из N, а значит, не следует само за собой: $1 \neq 1'$. Пусть $a \in A$, тогда $a \neq a'$. Обозначим a' через b. В силу аксиомы 3, $a' \neq b'$, т.е. $b \neq b'$ и $b \in A$.

Итак, множество A содержит 1 и вместе с каждым числом A содержит $b = a'$. Значит, $A = N$. В силу определения A это означает, что для всех $x \in A$ имеем неравенство $x \neq x'$.

9. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая следующими свойствами:

1) $(\forall a \in N) a + 1 = a'$***;*** $(\forall a \in N) a + 0 = a$***;***

2) $(\forall a, b \in N) a + b' = (a + b)'$.

Будем считать, что $0 + 0 = 0$.

Число $a + b$ называется ***суммой*** чисел a и b, а сами числа ***слагаемыми.***

Теорема. Сложение натуральных чисел существует и оно единственно.

Докажем единственность сложения натуральных чисел.

Доказательство. Допустим, что в множестве N существуют две операции сложения, обладающие свойствами 1 и 2. Одну из них обозначим знаком +, а другую – знаком $\oplus$. Для этих операций имеем:

1) $a + 1 = a'$; 1) $a \oplus 1 = a'$;

2) $a + b = (a + b)'$ 2) $a \oplus b' = (a \oplus b)'$.

Докажем, что $(\forall a, b \in N) a + b = a \oplus b$ (1)

Пусть число a выбрано произвольно, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех чисел b, для которых равенство (1) истинно.

Нетрудно убедиться в том, что $1 \in M$. Действительно, из того, что $a + 1 = a' = a \oplus 1$, следует, что $a + 1 = a \oplus 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. если $a + b = a \oplus b$, то $a + b' = a \oplus b'$. Так как $a + b = a \oplus b$, то по аксиоме 2 $(a + b)' = (a \oplus b)'$, и тогда $a + b' = (a + b)' = (a \oplus b)' = a \oplus b'$. Поскольку множество M содержит 1 и вместе с каждым числом b содержит и число b', то по аксиоме 4 множество M совпадает с N, а значит равенство (1) истинно для любого натурального числа b. Так как

Репозиторий ВГУ

число a было выбрано произвольно, то равенство (1) верно при любых натуральных a и b, т.е. операции $+$ и $\oplus$ на множестве N могут отличаться друг от друга только обозначениями.

Докажем существование сложения натуральных чисел.

Доказательство. Покажем, что алгебраическая операция, обладающая свойствами 1 и 2, указанными в определении, существует.

Пусть M – множество тех и только тех чисел а, для которых можно определить $a + b$ так, чтобы выполнялись условия 1 и 2.

Покажем, что $1 \in M$. Для этого при любом b предположим $1 + b = b'$ (2). Тогда:

1) $1 + 1 = 1'$ - по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + 1 = a'$ при $a = 1$.

2) $1 + b' = (b')' = (1 + b)'$ - по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + b' = (a + b)'$ при $a = 1$.

Итак, 1 принадлежит множеству M.

Предположим, что a принадлежит M. Исходя из этого предположения, покажем, что и a' содержится в M, т.е. что можно определить сложение a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Для этого положим:

$a' + b = (a + b)'$.

Так как по предположению число $a + b$ определено, то по аксиоме 2 единственным образом определяется и число $(a + b)'$. Проверим, что при этом выполняются условия 1 и 2:

1) $a' + 1 = (a + 1)' = (a')'$.

2) $a' + b' = (a + b')' = ((a + b)')' = (a' + b)'$.

Итак, показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым число a содержит и число a'. По аксиоме 4 заключаем, что множество M есть множество натуральных чисел.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых натуральных чисел a и b однозначно найти такое натуральное число $a + b$, что выполняются свойства 1 и 2, сформулированные в определении сложения.

Теорема. $(\forall a, b \in N) a + b \neq b$

Доказательство. Пусть a – натуральное число, выбранное произвольно, а b принимает различные значения. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел b, для которых данное утверждение истинно. Тогда 1 содержится в M, т.к. $a + 1 = a'$ (по определению сложения), а 1 не следует ни за каким числом (аксиома 1), то $a + 1 \neq 1$.

Если число b принадлежит M, т.е. $a + b \neq b$, то и b' принадлежит M, т.е. $a + b' \neq b'$. Действительно, по определению сложения $a + b' = (a + b)'$, но поскольку $a + b \neq b$, то $(a + b)' \neq b'$. Значит, $a + b' \neq b'$.

Репозиторий ВГУ

По аксиоме 4 множества M и N совпадают, следовательно, для любых натуральных чисел a и b верно утверждение $a + b \neq b$

Покажем, как из определения сложения и его существования и единственности можно вывести *таблицу сложения однозначных чисел*.

Условимся о следующих обозначениях:

$1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 5$ и т.д.

Составим таблицу в следующей последовательности: сначала к любому однозначному числу прибавляем единицу, затем – число два, потом – три и т.д.

$1 + 1 = 1'$ на основании свойства 1 определения сложения. Но $1' = 2$, следовательно, $1 + 1 = 2$.

Аналогично $2 + 1 = 2' = 3$; $3 + 1 = 3' = 4$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи, связанные с прибавлением к любому однозначному натуральному числу числа 2.

$1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3$.

Аналогично $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = 3' = 4$; $3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = 4' = 5$ и т.д.

Если продолжить этот процесс, то получим всю таблицу сложения однозначных чисел.

Найдем с помощью аксиоматического подхода к построению теории натуральных чисел сумму 6 + 3.

Решение. Такой подход является основой начального обучения математике. Получение чисел путем прибавления 1 тесно связано с принципом построения натурального ряда, а второе свойство сложения используется при вычислениях: $6 + 3 = 6 + 2' = (6 + 2)' = (6 + 1')' = ((6 + 1)')' = (6')')' = (7')' = 8' = 9$.

На языке начального курса математики это выглядит так: $6 + 3 = (6 + 2) + 1 = ((6 + 1) + 1) + 1 = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Сложение обладает свойствами ассоциативности $((a + b) + c = a + (b + c))$ и ***коммутативности*** $(a + b = b + a)$.

Доказать, что для любых чисел a и b выполняется равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех чисел c, для которых равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Докажем сначала, что 1 содержится в M, т.е. убедимся в справедливости равенства $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$. Действительно, по определению сложения $(a + b) + c = (a + b)' = a + b' = a + (b + 1)$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то и $c' \in M$, т.е. из равенства $(a + b) + c = a + (b + c)$ следует равенство $(a + b) + c' = a + (b + c')$.

Репозиторий ВГУ

Действительно, по определению сложения, имеем: $(a + b) + c' = ((a + b) + c)' = (a + (b + c))' = a + (b + c)' = a + (b + c')$.

Таким образом, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что c содержится в M, следует, что и $c' \in M$. Следовательно, согласно аксиоме Пеано 4, $M = N$, т.е. равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ истинно для любого натурального числа c. А поскольку числа a и b выбирались произвольно, то истинно и для любых натуральных чисел a и b, что и требовалось доказать.

Аналогично, можно доказать и коммутативность сложения.

Доказательство. Состоит из двух частей: сначала доказывают, что $(\forall a \in N)\ a + 1 = 1 + a$, затем, что $(\forall a, b \in N) a + b = b + a$.

Рассмотрим первую часть. Пусть М – множеством всех тех и только тех чисел а, для которых $a + 1 = 1 + a$ истинно.

Так как $1 + 1 = 1 + 1$ – истинное равенство, то 1 принадлежит множеству M.

Докажем теперь, что если $a \in M$, то $a' \in M$, т.е. из равенства $a + 1 = 1 + a$ следует равенство $a' + 1 = 1 + a'$. Действительно, $a' + 1 = (a + 1) + 1$ по первому свойству сложения. Далее $(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1$. На основе ассоциативного закона получаем $1 + (a + 1)$. И наконец, по определению сложения, получаем: $1 + (a + 1) = 1 + a'$.

Таким образом, мы показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым числом a содержит число a'.Следовательно, согласно аксиоме 4, $M = N$, т.е. равенство $a + 1 = 1 + a$ истинно для любого натурального a.

Докажем, что $(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$. Пусть a – произвольно выбранное натуральное число, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех натуральных чисел b, для которых равенство $a + b = b + a$ истинно.

Так при $b = 1$ получаем равенство $a + 1 = 1 + a$, истинность которого доказана выше, значит 1 содержится в M.

Докажем теперь, что если b принадлежит M, то и b' также принадлежат М, т.е. из равенства $a + b = b + a$ следует равенство $a + b' = b' + a$.

Действительно, по определению сложения, имеем: $a + b' = (a + b)'$. Так как $a + b = b + a$, то $(a + b)' = (b + a)'$. Отсюда, по определению сложения, имеем $(b + a)' = b + a' = b + (a + 1) = b + (1 + a)$. Применив ассоциативное свойство и определение сложения, выполняем преобразования: $b + (1 + a) = (b + 1) + a = b' + a$

Итак, мы показали, что 1 содержится в множестве M и вместе с каждым числом b множество содержит и число b', непосредственно следующее за b. по аксиоме 4 получаем, что $M = N$, т.е. равенство $a + b = b + a$ истинно для любого натурального числа b, а также для

Репозиторий ВГУ

любого натурального числа *a*, поскольку его выбор был произвольным.

Выполним преобразование выражения, применив свойства сложения: а) 8091 + (2809 + 409); б) 386 + 187 + 1213 + 1564; в) (8073 + 2329) + 1671.

Решение. а) 8091 + (2809 + 409) = [применим ассоциативность и переставим скобки] = (8091 + 2809) + 409 = 10900 + 409 = 11309;

б) 386 + 187 + 1213 + 1564 = [применим коммутативность, что позволит поменять числа местами] = 386 + 1564 +187 + 1213 = [применим ассоциативность, что позволит расставить скобки в нужном месте] = (386 + 1564) + (187 + 1213) = 1950 + 1400 = 3350;

в) (8073 + 2329) + 1671 = [применим ассоциативность и опустим скобки] = 8073 + 2329 + 1671 = [применим снова ассоциативность и поставим скобки в нужном нам месте] = 8073 + (2329 + 1671) = 8073 + 4000 = 12073.

10. УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

По правилам построения аксиоматической теории определить умножение натуральных чисел можно, используя отношение «непосредственно следовать за» и понятия, введенные ранее.

Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1) $(\forall a \in N) a \cdot 1 = a$; $(\forall a \in N) a \cdot 0 = 0$;

2) $(\forall a, b \in N) a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Будем считать, что 0 $\cdot$ 0 = 0.

Число $a \cdot b$ называют произведением чисел *a* и *b*, а сами эти числа – множителями.

Теорема. Если умножение натуральных чисел существует, то оно единственно.

Доказательство. Допустим, что в множестве *N* существуют две операции умножения, обладающие свойствами 1 и 2. Одну из них обозначим знаком $\sqcup$, а другую – знаком $\square$.

Для этих операций имеем:

1) $a \sqcup 1 = a;$ 1) $a \square 1 = a;$

2) $a \sqcup b' = a \sqcup b + a$ 2) $a \square b' = a \square b + a.$

Докажем, что $(\forall a, b \in N) a \cdot b = a \square b$ (1)

Пусть число *a* выбрано произвольно, а *b* принимает различные натуральные значения. Обозначим через *M* множество всех тех и только тех чисел *b*, для которых равенство (1) истинно.

Репозиторий ВГУ

Нетрудно убедиться в том, что $1 \in M$. Действительно, из того, что $a \sqcup 1 = a = a \square 1$ следует, что $a \sqcup 1 = a \square 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. если $a \sqcup b = a \square b$, то $a \sqcup b' = a \square b'$. Так как $a \sqcup b = a \square b$, то по аксиоме 2 $a \sqcup b' = a \sqcup b + a$; и $a \square b' = a \square b + a$. Тогда $a \sqcup b' = a \square b'$. Поскольку множество M содержит 1 и вместе с каждым числом b содержит и число b', то по аксиоме 4 множество M совпадает с N, а значит равенство (1) истинно для любого натурального числа b. Так как число a было выбрано произвольно, то равенство (1) верно при любых натуральных a и b, т.е. операции $\sqcup$ и $\square$ на множестве N могут отличаться друг от друга только обозначениями.

Докажем существование умножения.

Доказательство. Покажем, что алгебраическая операция, обладающая свойствами 1 и 2, указанными в определении, существует.

Пусть M – множество тех и только тех чисел a, для которых можно определить $a \sqcup b$ так, чтобы выполнялись условия 1 и 2.

Покажем, что $1 \in M$. Для этого при любом b предположим $1 \sqcup b = b$ (2). Тогда:

1) $1 \sqcup 1 = 1$ - по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a \sqcup 1 = a$ при $a = 1$.

2) $1 \sqcup b' = 1 \sqcup b + 1 = b + 1$ - по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a \sqcup b' = a \sqcup b + a$ при $a = 1$.

Итак, 1 принадлежит множеству M.

Предположим, что a принадлежит M. Исходя из этого предположения, покажем, что и a' содержится в M, т.е. что можно определить умножение a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Для этого положим:

$a' \sqcup b = a \sqcup b + b$.

Так как по предположению число $a \sqcup b$ определено, то по аксиоме 2, единственным образом определяется и число $a \sqcup b + b$. Проверим, что при этом выполняются условия 1 и 2:

1) $a' \sqcup 1 = (a + 1) \sqcup 1 = a + 1 = a'$, т.е. $a' \sqcup 1 = a'$;

2) $a' \sqcup b' = a \sqcup b' + b' = a \sqcup (b + 1) = (b + 1) = a \sqcup b + a + b + 1 = a \sqcup b + b + a + 1 = (a + 1) \sqcup b + (a + 1) = a' \sqcup b + a'$, т.е. $a' \sqcup b' = a' \sqcup b + a'$.

Итак, показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым число a содержит и число a'. По аксиоме 4, заключаем, что множество M есть множество натуральных чисел.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых натуральных чисел a и b однозначно найти такое натуральное число $a \sqcup b$, что выполняются свойства 1 и 2, сформулированные в определении умножения.

Репозиторий ВГУ

Используя определение умножения, его существование и единственность, можно вывести *таблицу умножения однозначных чисел.*

Делаем это в такой последовательности: сначала рассматриваем умножение на 1, затем на 2, потом на 3 и т.д.

Легко видеть, что умножение на 1 выполняется по свойству 1 в определении умножения: $1\cdot 1 = 1$; $2\cdot 1 = 2$; $3\cdot 1 = 3$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи умножения на 2:

$1\cdot 2 = 1\cdot 1' = 1\cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2.$

Аналогично:

$2 \cdot 2 = 2\cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4;$

$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3\cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6.$

Далее можно рассмотреть процесс умножения на 3:

$1\cdot 3 = 1\cdot 2' = 1\cdot 2 + 1 =1\cdot 1' + 1 = (1\cdot 1 + 1) + 1 = (1 + 1) +1 = 2 +1 = 3;$

$2\cdot 3 = 2\cdot 2' = 2\cdot 2 + 2 =2\cdot 1' + 2 = (2\cdot 1 + 2) + 2 = (2 + 2) +2 = 4 +2 = 6.$

Если продолжить этот процесс, получим всю таблицу умножения однозначных чисел.

Используя определение умножения, найдем значение выражения $3\cdot 4$.

Решение. $3\cdot 4 = 3\cdot 3' = 3\cdot 3 + 3 = 3\cdot 2' + 3 = (3 \cdot 2 + 3) + 3 = (3\cdot 1' + 3) +3 = ((3\cdot 1 + 3) + 3) + 3 = ((3 + 3) + 3) + 3 = (6 + 3) + 3 = 9 + 3 = 12.$

Умножение натуральных чисел обладает следующими свойствами: оно ***коммутативно*** ($a \cdot b = b \cdot a$), ***ассоциативно*** ($(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) и ***дистрибутивно*** относительно сложения $(a + b) \cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

Докажем свойство дистрибутивности умножения относительно сложения.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество таких натуральных чисел c, для которых верно равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Докажем, что $1\in M$, т.е. что равенство $(a + b) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1$ истинно. Согласно свойству 1 из определения умножения имеем: $(a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. что из равенства $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ следует равенство $(a + b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'$. По определению умножения, имеем: $(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot c + (a + b) = (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) =$ [используя ассоциативное и коммутативное свойство сложения, выполним преобразования] $= (a \cdot c + b \cdot c + a) + b = (a \cdot c + a + b \cdot c) + b = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) =$ [по определению умножения] $= a \cdot c' + b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что оно содержит c, следует, что и c' содержится в M. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$. Это значит, что равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ верно для любых натуральных чисел c, а также для любых произвольных a и b.

Докажем коммутативность умножения.

Доказательство. Докажем, что для любого натурального числа a имеет место равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a$. Пусть M множество всех тех чисел a, для которых это равенство истинно. Так как $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ – истинное равенство, то 1 принадлежит множеству M.

Докажем теперь, что если $a \in$ M, то $a' \in$ M, т.е. из равенства $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ следует равенство $a' \cdot 1 = 1 \cdot a'$. Действительно, $a' \cdot 1 = (a + 1) \cdot 1$ = [дистрибутивность умножения] = $a \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = 1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a'$.

Докажем теперь, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Пусть a – произвольное натуральное число, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех чисел b, для которых равенство $a \cdot b = b \cdot a$ истинно.

Так как при $b = 1$ получаем равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, истинность которого доказана, то 1 содержится в M.

Докажем, что если b принадлежит M, то и b' принадлежит M, т.е. из равенства $a \cdot b = b \cdot a$ следует равенство $a \cdot b' = b' \cdot a$. Действительно, $a \cdot b' = a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a = b \cdot a + a = (b + 1) \cdot a = b' \cdot a$.

Итак, мы доказали, что 1 содержится в M и вместе с каждым числом b множество содержит и число b', непосредственно следующее за b. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$, т.е. равенство $a \cdot b = b \cdot a$ истинно для любого натурального числа b, а также для любого произвольного числа a.

Аналогично можно доказать и ассоциативность умножения.

Задача. Найти значение выражения, используя свойства умножения: а) $125 \cdot 15 \cdot 6$; б) $(8 \cdot 379) \cdot 125$; в) $49 \cdot 54 + 36 \cdot 49 + 90 \cdot 51$; г) $47 \cdot 3$.

Решение. а) $125 \cdot 15 \cdot 6$ = [применим ассоциативность умножения] = $125 \cdot (15 \cdot 6) = 125 \cdot 90 = 11200$;

б) $(8 \cdot 379) \cdot 125$ = [применим ассоциативность умножения, что позволит нам расставить скобки, как нам необходимо, и коммутативность умножения, что позволит нам поменять множители местами] = $(8 \cdot 125) \cdot 379 = 1000 \cdot 379 = 379000$;

в) $49 \cdot 54 + 36 \cdot 49 + 90 \cdot 51$ = [применим ассоциативность для второго произведения] = $49 \cdot 54 + 49 \cdot 36 + 90 \cdot 51$ = [применим дистрибутивность относительно первого и второго слагаемого данной суммы] = $49 \cdot (54 + 36) + 90 \cdot 51 = 49 \cdot 90 + 90 \cdot 51$ = [применим

Репозиторий ВГУ

ассоциативность для первого произведения] = 90 $\cdot$ (49 + 51) = 90 $\cdot$100 = 900;

г) 47 $\cdot$ 3 = [представим первый множитель в виде суммы] = (40 + 7) $\cdot$ 3 = [применим дистрибутивность] = 40 $\cdot$ 3 + 7 $\cdot$ 3 = 120 + 21 = 141 .

11. УПОРЯДОЧЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Из аксиом Пеано, определения сложения следует свойство упорядоченности множества натуральных чисел. Для любых $(\forall a,b \in N)$ имеет место один из трех следующих случаев:

1. либо $a = b$,
2. либо существует единственное натуральное число k, удовлетворяющее условию $a = b + k$,
3. либо существует единственное натуральное число p, такое, что $b = a + p$.

После этого вводится определение знаков « < » и « > ». Натуральное число a считают больше натурального числа b $(a > b)$, если выполняется второе условие. Натуральное число а меньше числа b $(a < b)$, если выполняется третье условие.

Отсюда оказываются справедлив еще ряд утверждений:

1. Из того, что $a > b$ для любого k следует, что $a + k > b + k$, из того, что $a = b$ следует, что $a + k = b + k$, а из того, что $a < b$ следует, что $a + k < b + k$.
2. Из того, что $a > b$ для любого k следует, что $a \cdot k > b \cdot k$, из того, что $a = b$ следует, что $a \cdot k = b \cdot k$, а из того, что $a < b$ следует, что $a \cdot k < b \cdot k$.

Итак, множество натуральных чисел можно упорядочить при помощи отношения «меньше».

Число a меньше числа b $(a < b)$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число c, что $a + c = b$.

Отношение «меньше» обладает свойством, транзитивности и антисимметричности.

Так как отношение «меньше» транзитивно и антисимметрично, то оно является отношением линейного порядка, а ***множество натуральных чисел*** является ***упорядоченным*** и 1 – наименьшее среди данных чисел.

Теорема 1. Если $a < b$, $b < c$, то $a < c$, т.е. отношение «меньше» обладает свойством транзитивности.

Доказательство. Так как $a < b$, $b < c$, то по определению отношения «меньше» существуют числа k и l такие, что $b = a + k$, $c = b + l$. Но тогда $c = (a + k) + l$ = [на основании ассоциативности

Репозиторий ВГУ

сложения] = $a + (k + l)$. Поскольку $k + l$ является натуральным числом, то, по определению отношения «меньше», $a < c$.

Теорема 2. Если $a < b$, то неверно, что $b < a$, т.е. отношение «меньше» антисимметрично.

Доказательство. Докажем, что ни для одного натурального числа а не выполняется отношение $a < a$.

Предположим противное, т.е. что $a < a$ имеет место. Тогда по определению отношения «меньше» найдется такое натуральное число c, что $a + c = a$, но это невозможно в силу единственности суммы.

Предположим, что оба неравенства выполнимы: $a < b$ и $b < a$. Тогда по свойству транзитивности отношения «меньше» будем иметь $a < a$, что невозможно.

Теорема 3. Если среди всех натуральных чисел единица является наименьшим числом, т.е. $1 < a$ для любого натурального числа $a \neq 1$.

Доказательство: Пусть a – любое натуральное число. Тогда возможны два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

Если $a \neq 1$, то существует натуральное число b, за которым следует a: $a = b' = b + 1 = 1 + b$, т.е. по определению отношения «меньше», $1 < a$.

Следовательно, любое натуральное число либо равно 1, либо больше 1. Или единица является наименьшим натуральным числом.

Отношение «меньше» связано со сложением и умножением чисел ***свойствами монотонности***: 1) $a = b \Rightarrow a + c = b + c,\ ac = bc;$

2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ ac < bc;$

3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c,\ ac > bc.$

Докажем, например, что $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ ac < bc.$

Доказательство. Если $a < b$, то существует такое натуральное число k, что $a + k = b$. Тогда $b + c = (a + k) + c = a + (k + c) = a + (c + k) = (a + c) + k$. Равенство $b + c = (a + c) + k$ означает, что $a + c < b + c$.

Точно также можно доказать, что если $a < b$, то $ac < bc$.

Располагая элементы данного множества так, чтобы из любых двух чисел сначала шло меньшее, получим ряд целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, 3, 4,… Этот ряд бесконечен и за каждым числом a непосредственно следует число $a + 1$. Причем, ни для одного натурального числа a не существует такого натурального числа x, что $a < x < a + 1$. Это свойство называется *дискретностью* множества натуральных чисел. Числа a и $a + 1$ называют соседними.

Отношение «непосредственно следовать за…» связано со сложением и умножением целых неотрицательных чисел. Действительно, сумму $a + (b + 1)$ легко найти, зная сумму $a + b$: a

Репозиторий ВГУ

$+(b + 1) = (a + b) + 1$, т.е. она равна числу, непосредственно следующему за суммой $a + b$.

Задача. Известно, что $4 + 2 = 6$, $7 \cdot 5 = 35$. Найти сумму $4 + 3$ и произведение $7 \cdot 6$.

Решение. $4 + 3 = 4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$.

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (5 +1) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 =35 + 7 = 42$.

С отношением «меньше» («больше») для натуральных чисел младшие школьники знакомятся в самом начале обучения. И часто, наряду с его теоретико–множественной трактовкой, неявно используется определение, данное нами в рамках аксиоматической теории. Например, учащиеся могут объяснить, что $9 > 7$, так как $9 = 7 + 2$. Нередко и неявное использование свойств монотонности сложения и умножения. Например, дети объясняют, что «$6 + 2 < 6 + 3$, так как $2 < 3$».

12. ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

При аксиоматическом построении теории целых неотрицательных чисел вычитание определяется как операция, обратная сложению.

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется такое натуральное число c, что a = c + b. Это число обозначают a – b. Число a называют уменьшаемым, b – вычитаемым.

Разность целых неотрицательных чисел a и b существует, если $b \leq a$ и она единственна.

Будем считать, что $0 – 0 = 0$ и $a – a = 0$.

Теорема. Если разность целых неотрицательных чисел существует, если $b \leq a$.

Доказательство. Пусть $a = b$. Тогда $a – b = 0$, и следовательно, разность существует. Если $b < a$, то по определению отношения «меньше» существует натуральное число c такое, что $a = b + c$. Тогда по определению разности $c = a – b$, т.е. разность существует и $b + c = a$. Если $c = 0$, то $a = b$; если $c > 0$, то $b < a$ по определению отношения «меньше». Итак, $b \leq a$.

Теорема. Если разность натуральных чисел a и b существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, что существует два различных значения разности чисел a и b: $a – b = c_1$ и $a – b = c_2$. Тогда, по определению разности, имеем: $a = b + c_1$ и $a = b + c_2$. Отсюда следует, что $b + c_1 = b + c_2$ и значит $c_1 = c_2$. Мы пришли к

Репозиторий ВГУ

противоречию с нашим предположением. Следовательно, значение разности чисел a и b единственно.

Дистрибутивность умножения относительно вычитания: при $b < a$ и при любых натуральных c верно равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Докажем, что при $b < a$ и при любых натуральных c верно равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество таких натуральных чисел c, для которых верно равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Докажем, что $1 \in M$, т.е. что равенство $(a - b) \cdot 1 = a \cdot 1 - b \cdot 1$ истинно. Согласно свойству 1 из определения умножения имеем: $(a - b) \cdot 1 = a - b = a \cdot 1 - b \cdot 1$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. что из равенства $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ следует равенство $(a - b) \cdot c' = a \cdot c' - b \cdot c'$.

По определению умножения, имеем: $(a - b) \cdot c' = (a - b) \cdot (c + 1) = (a - b) \cdot c - (a - b) \cdot 1 = (a \cdot c - b \cdot c) + (a - b) = (a \cdot c - b \cdot c + a) - b = (a \cdot c + a) - (b \cdot c + b) = a \cdot (c + 1) - b \cdot (c + 1) = a \cdot c' - b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что оно содержит c, следует, что и c' содержится в M. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$. Это значит, что равенство $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ верно для любых натуральных чисел c, а также для любых произвольных a и b.

Правило вычитания числа из суммы: при $a \geq c$ имеем, что $(a + b) - c = (a - c) + b$; при $b \geq c$ имеем, что $(a + b) - c = a + (b - c)$; при $a \geq c$ и $b \geq c$ можно использовать любую из данных формул.

Докажем, что если $a \geq c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$. *Доказательство.* В первом случае разность существует, т.к. $a > c$. Обозначим ее через x: $a - c = x$, откуда $a = c + x$. Если $(a + b) - c = y$, то по определению разности $a + b = c + y$. Подставим в это равенство вместо a выражение $c + x$: $(c + x) + b = c + y$. Воспользуемся свойством ассоциативности сложения: $c + (x + b) = c + y$. Преобразуем это равенство: $x + b = y$. Заменив в данном равенстве x на выражение $a - c$, будем иметь $(a - c) + b = y$.

Таким образом, мы доказали: если $a \geq c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$.

Правило вычитания суммы из числа: при условии, что $a \geq b + c$, имеем $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Правило вычитания разности из числа: при $a > b$, имеем $a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c$.

Правило вычитания числа из разности: при $a > b$, имеем $(a - b) - c = a - (b + c)$.

Репозиторий ВГУ

В начальном обучении математике определение вычитания как действия, обратного сложению, в общем виде, как правило, не дается, но им постоянно пользуются, начиная с выполнения действий над однозначными числами. Различные правила вычитания являются теоретической основой различных приемов вычислений.

Например, (40 + 16) – 10 = (40 – 10) + 16 = 30 + 16 = 46 или (40 + 16) – 10 = 40 + (16 – 10) = 40 + 6 = 46.

13. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЦЕЛЫМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ

При аксиоматическом построении теории целых неотрицательных чисел деление обычно определяется как операция, обратная умножению.

Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $b \cdot c = a$.

Число $a : b$ называется *частным* чисел a и b, число a – *делимым*, число b – *делителем*.

Теорема. Частное двух чисел существует и оно единственно.

Докажем, что, для того, чтобы частное двух натуральных чисел a и b существовало, необходимо, чтобы $b \le a$.

Доказательство. Пусть частное двух натуральных чисел a и b существует, т.е. есть такое натуральное число c, что $b \cdot c = a$.

Так как для любого натурального числа *1* справедливо неравенство $1 \le c$, то умножив обе его части на натуральное число b, получим $b \le b \cdot c$. Но $b \cdot c = a$, следовательно, $b \le a$.

Докажем, что если частное двух натуральных чисел a и b существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что существует два различных значения частного чисел a и b: $a : b = c_1$ и $a : b = c_2$. Тогда, по определению разности, имеем: $a = b \cdot c_1$ и $a = b \cdot c_2$. Отсюда следует, что $b \cdot c_1 = b \cdot c_2$ и значит $c_1 = c_2$. Мы пришли к противоречию с нашим предположением. Следовательно, значение частного чисел a и b единственно.

Пусть даны целое неотрицательное число a и $b = 0$. Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Предположим, что частное такого числа и нуля существует. Тогда, по определению деления, имеем $a = c \cdot 0$, откуда $a = 0$. Пришли к противоречию. Значит, ***частное чисел $a \neq 0$ и $b = 0$ не существует.***

Репозиторий ВГУ

Пусть $a = 0$. Предположим, что частное чисел $a = 0$ и $b = 0$ существует. Тогда найдется целое неотрицательное число c, что $0 = c \cdot 0$. Т.о., частным чисел $a = 0$ и $b = 0$ может быть любое число, т.е. результат деления определяется не единственным образом. В математике считают, что ***деление нуля на нуль невозможно.***

Исходя из определения частного натуральных чисел и условия его существования, можно обосновать известные правила деления суммы, разности, произведения на число.

Правило деления суммы на число. Для того чтобы разделить сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить. Пусть числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Докажем, что если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c. Частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Доказательство. Так как число a делится на число c, то существует натуральное число $x = a : c$, что $a = c \cdot x$. Аналогично существует натуральное число $y = b : c$, что $b = c \cdot y$. Но тогда $a + b = c \cdot x + c \cdot y = c \cdot (x + y)$. Это значит, что сумма $a + b$ делится на число c, причем частное при делении суммы $a + b$ на число c равно $x + y$, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Правило деления разности на число. Для того чтобы разделить разность на число, достаточно разделить это число на уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе. Пусть числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a - b$ делится на c, т.е. $(a - b) : c = a : c - b : c$.

Правило деления числа на произведение. Для того чтобы разделить число на произведение, достаточно это число разделить на один множитель, а затем полученное частное разделить на другой множитель. Пусть натуральное число a делится на натуральные числа b и c, то $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Правило умножения числа на частное двух чисел. Чтобы умножить число на частное двух чисел, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель, т.е. $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$.

Правило деления произведения на число. 1.Если натуральное число a делится на натуральное число c, то для любого натурального числа b произведение $a \cdot b$ делится на c. При этом частное, получаемое при делении произведения $a \cdot b$ на число c, равно произведению частного, получаемого при делении a на c, и числа b : $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$.

Репозиторий ВГУ

Доказательство. Так как число a делится на число c, то существует натуральное число $x = a : c$, что $a = c \cdot x$. Умножив обе части этого равенства на b, получим $a \cdot b = (c \cdot x) \cdot b$. Поскольку умножение ассоциативно, то $(c \cdot x) \cdot b = c \cdot (x \cdot b)$. Отсюда $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$.

2. Чтобы разделить произведение нескольких целых неотрицательных чисел на натуральное число, достаточно один из множителей разделить на это число и полученное частное умножить на оставшиеся множители, т.е., если $a : n$, то $(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$

Найдите значение выражения рациональным способом:

а) (7 · 63) : 7; б) (3 · 4 · 5) : 15; в) (15 · 18) : (5 · 6); г) (12 · 21) : 14.

Решение. а) (7 · 63) : 7 = [правило деления произведения на число] = (7 : 7) · 63 = 1 · 63 = 63;

б) (3 · 4 · 5) : 15 = [коммутативность и ассоциативность умножения] = ((3 · 5) · 4) : 15 = (15 · 4) : 15 = [правило деления произведения на число] = (15 : 15) · 4 = 1 · 4 = 4;

в) (15 · 18) : (5 · 6) = [правило деления числа на произведение] = ((15 · 18) : 5) : 6 = [правило деления произведения на число] = ((15 : 5) · 18) : 6 = (3 · 18) : 6 = [правило деления произведения на число] = (18 : 6) · 3 = 3 · 3 = 9;

г) (12 · 21) : 14 = (12 · 21) : (2 · 7) = [правило деления числа на произведение] = ((12 · 21) : 2) : 7 = [правило деления произведения на число] = ((12 : 2) · 21) : 7 = (6 · 21) : 7 = [правило деления произведения на число] = (21 : 7) · 6 = 3 · 6 = 18.

Рассматривая деление на множестве целых неотрицательных чисел, мы имеем в виду деление нацело, т.е. при котором частное является также целым неотрицательным числом. Но такое частное существует не всегда. Например, нельзя разделить на 7 число 29. Но существуют числа 4 и 1 такие, что $29 = 7 \cdot 4 + 1$. Говорят, что мы разделили число 29 на 7 с остатком 1, а число 4 называют неполным частным.

Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком – это значит найти такие натуральные целые числа q и r, что $a = b \cdot q + r$, где $0 \le r < b$.

Из этого определения следует, что делить с остатком можно не только большее число на меньшее, но и меньшее на большее. Например, при делении числа 6 на 9 получаем неполное частное, равное 0, а остаток равен 6: $6 = 9 \cdot 0 + 6$. Вообще, если $a < b$, то при делении числа a на b с остатком получаем $q = 0$ и $r = a$.

Теорема. Каковы бы ни были целое число a и целое число $b \neq 0$, всегда возможно, и притом, единственным способом, разделить a на b с остатком.

Репозиторий ВГУ

Доказательство: Пусть $a \geq 0,\ b \geq 0$. Докажем возможность деления с остатком. Рассмотрим множество всех натуральных чисел, которые делятся на b, расположив их в порядке возрастания $b \cdot 0,\ b \cdot 1,\ b \cdot 2\ldots$ В такой последовательности всегда найдется наибольшее, которое делится на b и не превосходит a. Пусть это будет $bq \leq a$. Но $a < b\,(q + 1)$. Получаем, что $bq < a < b\,(q + 1)$. Вычтем из обеих частей неравенства q. Получим $0 < a - bq < b$. Приняв $a - bq = r$, имеем $a = bq + r,\ 0 \leq r < b$. Следовательно, деление с остатком выполнимо.

Докажем единственность. Предположим, что a делится на b на единственным образом, т.е. существуют две пары чисел $(q_1, r_1), (q_2, r_2)$. Это значит $a = bq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b$

$$a = bq_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < b.$$

Следовательно, $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, $bq_1 - bq_2 = r_2 - r_1$, $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ (*). Так как $0 \leq r_1 < b$ и $0 \leq r_2 < b$, то $r_2 - r_1 < b$. Так как $r_2 - r_1$ и b целые неотрицательные числа, равенство (*) возможно, если $r_2 - r_1 = 0$, т.е. $r_2 = r_1$. Следовательно, $q_1 - q_2 = 0$, и $q_1 = q_2$. Значит пара $(q;\ r)$ единственная, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример**.** При делении числа a на b с остатком получили частное q и остаток r. Найдите: а) число a, если $b = 11,\ q = 6,\ r = 3$; б) число b, если $a = 137,\ q = 11,\ r = 5$.

Решение. а) Найдем число a, если $b = 11,\ q = 6,\ r = 3$.

Согласно определению деления с остатком число a имеет вид: $a = 11 \cdot 6 + 3$. Т.е. $a = 66 + 3 = 69$.

б) Найдем число b, если $a = 137,\ q = 11,\ r = 5$.

Тогда число a имеет вид: $137 = b \cdot 11 + 5$. Откуда найдем число b: $b = (137 - 5) : 11 = 132 : 11 = 12$.

В начальном обучении математике определение деления как операции, обратной умножению, в общем виде, как правило, не дается, но им постоянно пользуются, начиная с первых уроков ознакомления с делением.

Задача. При делении на 6 чисел a и b получаются соответственно остатки 3 и 2. Какой остаток при делении на 6 дает сумма $a + b$?

Решение. Пусть число a делится на 6 с остатком 3: $a = 6 \cdot q_1 + 3$, а число b делится на число 6 с остатком 2: $b = 6 \cdot q_2 + 2$. Тогда сумма $a + b = (6 \cdot q_1 + 3) + (6 \cdot q_2 + 2) = (6 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2) + 3 + 2 = 6 \cdot (q_1 + q_2) + 5$. Так как $q_1 + q_2$ есть целое неотрицательное число, то его можно представить как q. Т.е. сумма $a + b = 6 \cdot q + 5$.

Значит, сумма $a + b$ при делении на 6 дает остаток 5.

Репозиторий ВГУ

14. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод доказательства, основанный на аксиоме Пеано 4, используют для доказательства многих математических свойств и различных утверждений. Основой для этого служит следующая теорема.

Теорема. Если утверждение $A(n)$ с натуральной переменной n истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k'$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел, для которых утверждение $A(n)$ истинно. Тогда из условия теоремы имеем: 1) $1 \in M$; 2) $k \in M \Rightarrow k' \in M$. Отсюда, на основании аксиомы 4, заключаем, что $M = N$, т.е. утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Метод доказательства, основанный на этой теореме, называется **методом математической индукции,** а аксиома – аксиомой индукции. Такое доказательство состоит из двух частей:

1) доказывают, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = 1$, т.е. что истинно высказывание $A(1)$;
2) предполагают, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = k$, и, исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение $A(n)$ истинно и для $n = k + 1$, т.е. что истинно высказывание $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

Если $A(1) \wedge A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ – истинное высказывание, то делают вывод о том, что утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции можно начинать не только с подтверждения истинности утверждения для $n = 1$, но и с любого натурального числа m. В этом случае утверждение $A(n)$ будет доказано для всех натуральных чисел $n \geq m$.

Задача. Докажем, что для любого натурального числа истинно равенство $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Решение. Равенство $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$ представляет собой формулу, по которой можно находить сумму первых последовательных нечетных натуральных чисел. Например, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$ (сумма содержит 4 слагаемых), $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$ (сумма содержит 6 слагаемых); если эта сумма содержит 20 слагаемых указанного вида, то она равна $20^2 = 400$ и т.д. Доказав истинность данного равенства, получим возможность находить по формуле сумму любого числа слагаемых указанного вида.

1) Убедимся в истинности данного равенства для $n = 1$. При $n = 1$ левая часть равенства состоит из одного члена, равного 1, правая

Репозиторий ВГУ

часть равна $1^2 = 1$. Так как $1 = 1$, то для $n = 1$ данное равенство истинно.

2) Предположим, что данное равенство истинно для $n = k$, т.е. что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Исходя из этого предположения, докажем, что оно истинно и для $n = k + 1$, т.е. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства.

По предположению, сумма первых k слагаемых равна k^2 и потому $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) =$

$= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$. Выражение $k^2 + 2k + 1$ тождественно равно выражению $(k + 1)^2$.

Следовательно, истинность данного равенства для $n = k + 1$ доказана.

Таким образом, данное равенство истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$.

Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

С помощью метода математической индукции можно доказывать истинность не только равенств, но и неравенств.

Задача. Доказать, что $3^n - 2^n \geq n$, где $n \in N$.

Решение. Проверим истинность неравенства при $n = 1$. Имеем $3^1 - 2^1 \geq 1$ - истинное неравенство.

Предположим, что неравенство верно при $n = k$, т.е. $3^k - 2^k \geq k$ - истинное неравенство. Докажем, исходя из предположения, что оно верно и при $n = k + 1$, т.е. $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq k + 1 (*)$.

Преобразуем левую часть неравенства (*), учитывая, что $3^k \geq 2^k - k$:

$3^{k+1} - 2^{k+1} = 3^k \cdot k - 2^k \cdot 2 = 3 \cdot (2^k + k) - 2^k \cdot 2 = 3 \cdot 2^k + 3k - 2^k \cdot 2 = 3k + 2^k$.

Но $3k + 2^k \geq k + 1$, значит и $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq k + 1$.

Итак, данное неравенство истинно для $n = 1$, и, из того, что неравенство верно для некоторого $n = k$, мы получили, что оно верно и для $n = k + 1$.

Тем самым, используя аксиому 4, мы доказали, что данное неравенство истинно для любого натурального числа.

Методом математической индукции можно доказать и иные утверждения.

Репозиторий ВГУ

Задача. Доказать, что для любого натурального числа истинно утверждение $(6^{2n-1}+1)\vdots 7$.

Решение. Проверим истинность утверждения при n = 1: $(6^{2\cdot 1-1}+1)\vdots 7$ -истинное высказывание.

Предположим, что данное утверждение верно при n = k: $(6^{2k-1}+1)\vdots 7$. Покажем, используя это, истинность утверждения при n = k + 1: $(6^{2(k+1)-1}+1)\vdots 7$.

Преобразуем выражение: $(6^{2(k+1)-1}+1)=(6^{2k+1}+1)$. Найдем разность k и k+1 членов. Если окажется, что полученная разность кратна 7, а по предположению вычитаемое делится на 7, то и уменьшаемое также кратно 7:

$$(6^{2k+1}+1)-(6^{2k-1}+1)=6^{2k}\cdot 6+1-6^{2k}\cdot\frac{1}{6}-1=6^{2k}(6-\frac{1}{6})=6^{2k}\cdot\frac{35}{6}=\frac{6^{2k}}{6}\cdot 35=6^{k}\cdot 35$$

.

Произведение $6^{k}\cdot 35$ кратно 7, следовательно, и $(6^{2k-1}+1)\vdots 7$.

Таким образом, данное утверждение истинно для n = 1 и из истинности его для n = k следует истинность для n = k + 1.

Тем самым доказано, что данное утверждение истинно для любого натурального числа.

Задача. Доказать, что для любого натурального числа $n \geq 2$ истинно утверждение $(7^{2n} - 1)\vdots 24$.

Решение. 1) Проверим истинность утверждения при n = 2: $(8^{1}+6)\vdots 7$ - истинное высказывание.

2) Предположим, что данное нам утверждение истинно при n = k: $(7^{2k} - 1)\vdots 24$.

Докажем, что оно верно и для n = k + 1, т.е. $(7^{2(k+1)} - 1)\vdots 24$. Преобразуем наше утверждение: $(7^{2(k+1)} - 1)\vdots 24$ = $7^{2k+2} - 1$ = $7^{2k}\cdot 49 - 1$ = $7^{2k}(48 + 1) - 1$ = $7^{2k}\cdot 48 + (7^{2k} - 1)$.

Так как $7^{2k}\cdot 48$ делится на 24, а выражение $(7^{2k} - 1)$ делится на 24 по нашему предположению, то по теореме о делимости суммы имеем, что $7^{2k}\cdot 48 + (7^{2k} - 1)$ и $(7^{2(k+1)} - 1)\vdots 24$.

Мы показали, что данное выражение кратно 24 при n = 2, и из того, что оно кратно 24 при n = k, следует, что оно кратно 24 и при n = k + 1.

Значит данное утверждение $(7^{2n} - 1)\vdots 24$ истинно при любом натуральном n.

Репозиторий ВГУ

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК МЕРА ВЕЛИЧИНЫ

15.ПОНЯТИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Величины представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и тоже свойство объектов, называются величинами одного рода или *однородными величинами*. Например, длина стола и длина комнаты, масса яблок и масса зерна, стоимость карандашей и стоимость крупы и т.п.

Такие ***величины обладают рядом свойств***:

1. Любые величины одного рода сравнимы: $a > b$, $a < b$, $a = b$. Например, длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше длины катета.

2. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода: $a + b = c$, например, если a – масса яблок, b – масса груш, то $c = a + b$ – общая масса указанных фруктов.

3. Величины одного и того же рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение: разностью величин a и b называется величина $c = a - b$ такая, что $a = c + b$. Например, если a – масса овощей, из которых огурцы имеют массу b, то масса моркови определится как $a - b = c$.

4. Величину умножают на действительное число, получая в результате величину того же рода: $b = x \cdot a$, величину b называют произведением величины a на число x. Например, если a – время отводимое на один урок, то, умножив a на 3 получим $b = 3a$ – время трех уроков.

5. Величины одного рода делят, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число: частным величин a и b называется положительное действительное число $x = a : b$, что $a = x \cdot b$. Например, если a – длина отрезка АВ, и отрезок АВ состоит из 4 отрезков, равных b, то $a : b = 4$.

Если задана величина a и выбрана единица величины e (того же рода), то измерить величину a – значит найти такое положительное число x, что $a = x \cdot e$. Число x называется ***численным значением величины*** a при единице e или мерой величины а при единице e: $\boldsymbol{x = m_e(a)}$. Например, 7 кг = $7 \cdot 1$ кг.

Используя выше перечисленные свойства, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Репозиторий ВГУ

Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12}\cdot 1$ ч и 1 ч = 60 мин, то $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12}\cdot(60\cdot 1$ мин$) = (\frac{5}{12}\cdot 60)\cdot 1$ мин = 25 мин.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется скалярной. Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

Так, например, если величины a и b измерены при помощи единицы е, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$a = b \Leftrightarrow m(a) = m(b);$

$a < b \Leftrightarrow m(a) < m(b);$

$a > b \Leftrightarrow m(a) > m(b).$

Например, если массы двух тел таковы, что a = 5 кг, b = 3 кг, то можно утверждать, что $a > b$, поскольку 5 > 3.

Далее, выясняя смысл натурального числа как меры величины, все рассуждения будем вести на примере одной величины – длины отрезка.

16. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК ЗНАЧЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА. СМЫСЛ СУММЫ И РАЗНОСТИ.

Считают, что отрезок a состоит из отрезков $a_1, a_2, ..., a_n$, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы.

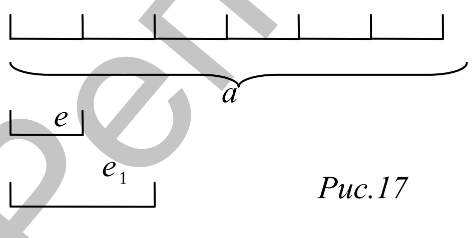


Рис.17

Если отрезок a состоит из n отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то число n называют численным значением длины данного отрезка а при единице e: $a = n\cdot e$. Например, численным значением длины отрезка a, изображенного на рис. 17, при единице e является число 6: $a = 6e$. Если в качестве единицы выбрать другой отрезок, например e_1, то длина отрезка a будет состоять из 3 отрезков e_1: $a = 3e_1$.

Таким образом, ***натуральное число как численное значение длины отрезка*** a показывает, из скольких единичных отрезков e

Репозиторий ВГУ

слагается отрезок *а*. При выбранной единице *е* это число единственное.

В связи с таким подходом к натуральному числу сделаем два замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины заданно отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным. Так, если в качестве единицы длины выбрать длину отрезка e_1 (рис.16), то мера длины отрезка *х* будет равна числу 3. Записать это можно так: $X = 3\ E_1$.

2. Если отрезок *х* состоит из *а* отрезков, равных *е*, а отрезок *у* – из *b* отрезков, равных *е,* то $a = b$ тогда и только тогда, когда отрезки *х* и *у* равны.

Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и в связи с измерением других величин.

Пусть отрезок *а* состоит из отрезков *b* и *с* и $b = me$, $c = ne$, где *m* и *n* – натуральные числа. Тогда отрезок *b* разбивается на *m* частей, каждая из которых равна единичному отрезку *е*, а отрезок *с* – на *n* таких частей. Весь отрезок *а* разбивается на $m + n$ таких частей. Тогда ***сумму натуральных чисел m и n*** можно рассматривать как значение длины отрезка *а*, состоящего из отрезков *b* и *с*, длины которых выражаются натуральными числами *m* и *n*: $a = b + c = m_e(b) + n_e(c) = (m + n)e$.

Например, числа 3 и 8 являются результатами измерения длин отрезков *b* и *с* при помощи единицы е, т.е. $b = 3e$, $c = 8e$, и отрезок *а* состоит из отрезков *b* и *с*. Тогда $a = b + c = 3e + 8e = (3 + 8)e = 11e$.

Если отрезок *а* состоит из отрезков *b* и *с,* и длины отрезков *а* и *b* выражаются натуральными числами *m* и *n* при выбранной единице *е*, то длина отрезка *с* выражается как разность отрезков *а* и *b* и равна разности значений длин этих отрезков $m - n$. Т.е. ***разность натуральных чисел m и n*** можно рассматривать как значение длины отрезка *с*, являющегося разностью отрезков *а* и *b*, длины которых выражены натуральными числами *m* и *n* соответственно: $c = a - b = m_e(a) - n_e(b) = (m - n)e$.

Например, если отрезок $a = 7e$ и состоит из отрезков *b* и *с*, причем $b = 5e$, то $c = a - b = 7e - 5e = (7 - 5)e = 2e$.

Такой подход к сложению и вычитанию натуральных чисел связан не только с измерением длин отрезков, но и с измерением других величин.

Обоснуем выбор действия задачи: « Купили 5 кг картофеля и 2 кг моркови. Сколько килограммов овощей купили?»

Репозиторий ВГУ

Решение. Изобразим массу картофеля в виде отрезка c, а массу моркови – в виде отрезка b. Тогда массу купленных овощей можно изобразить в виде отрезка, состоящего из отрезков b и c (рис.18).

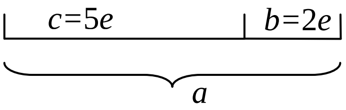


Рис.18

Так как численное значение отрезка a равно сумме численных значений отрезков c и b, то массу купленных овощей можно найти действием сложения: $a = c + b = n_e(c) + m_e(b) = (n + m)e$ = 5кг + 2кг = $5\cdot 1$кг + $2\cdot 1$кг = $(5 + 2)\cdot 1$кг = 7 $\cdot 1$кг = 7кг.

Ответ: купили 7 кг овощей.

Рассмотрим другую задачу. Сестре 7 лет, а брат на 2 года старше сестры. Сколько лет брату? Решите задачу, обосновав выбор действий.

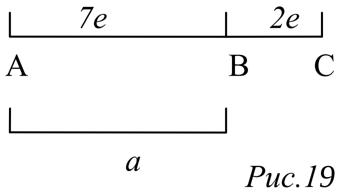


Рис.19

Решение. Изобразим возраст сестры с помощью отрезка a. Тогда возраст брата можно изобразить при помощи отрезка AB, равного a, и отрезка BC, изображающего 2 года (рис.19).

Так как значение длины отрезка c = AC равно сумме значений длин слагаемых отрезков, то возраст брата можно найти сложением: c = AB + BC = 7 лет + 2 года = $7\cdot 1$год + $2\cdot 1$год = $(7 + 2)\cdot 1$год = 9 лет.

Ответ: брату 9 лет.

Пример. Объясним, почему следующая задача решается при помощи вычитания: «Купили 6 кг фруктов, из них 4 кг яблок и остальные груши. Сколько килограммов груш купили?»

Решение. В задаче рассматривается масса фруктов, известно ее численное значение. Эта масса складывается из массы яблок, численное значение которой известно, и массы груш, численное значение которой нужно найти.

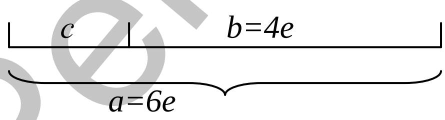


Рис.20

Изобразим массу фруктов при помощи отрезка a, который состоит из отрезков b – массы яблок и c – массы груш (рис. 20). Тогда массу груш можно получить, вычитая из всей массы фруктов массу яблок. Численное значение массы груш тогда находят действием вычитания: $c = a - b = m_e(a) - n_e(b) = (m - n)e$. Т.о. с = 6 кг – 4 кг = $6\cdot 1$ кг - $4\cdot 1$ кг = $(6 - 4)\cdot 1$ кг = 2 кг.

Ответ: купили 2 кг груш.

Репозиторий ВГУ

Рассмотрим другой пример. От ленты отрезали 5 м, а потом еще 3 метра. Сколько метров ленты отрезали? Решите задачу и обоснуйте выбор действия.

Решение. Изобразим первый отрезанный кусок в 5 м с помощью отрезка *a*, а второй кусок в 3 м – при помощи отрезка *b* (рис. 21).

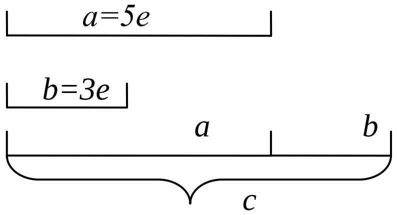


рис.21

Тогда всю длину отрезанной ленты можно изобразить при помощи отрезка $c = a + b$. Численное значение такого отрезка будет равно сумме численных значений длин отрезанных кусков: $m_e(c) = m_e(a) + n_e(b)$. Значит, задача решается сложением: $c = 5\text{м} + 3\ \text{м} = 5\cdot 1\text{м} + 3\cdot 1\text{м} = (5 + 3)\cdot 1\text{м} = 8$ м.

Ответ: отрезали всего 8 м ленты.

17. СМЫСЛ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

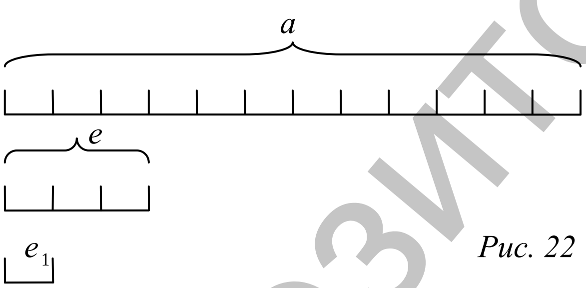


Рис. 22

Если отрезок *a* состоит из *p* отрезков, равных *e* ($a = p\cdot e$), а отрезок *e* состоит из *q* отрезков равных e_1 ($e = q\cdot e_1$), то мера отрезка *a* при единице длины e_1 будет равна $p\cdot q$. Таким образом, ***умножение натуральных чисел*** как мер отрезков отражает переход к новой (более мелкой) единице длины (рис. 22).

Действительно, число частей отрезка *a,* равных отрезку e_1, выражается так: $\underbrace{p + p + p + \dots + p}_{q\ \text{слагаемых}} = p\cdot q$. Значит, $a = (p\cdot q)\cdot e_1$.

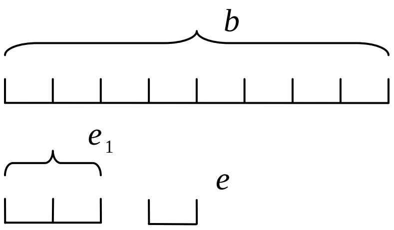


Рис.23

Пусть отрезок *b* состоит из *m* отрезков, равных *e* ($b = me$), а отрезок e_1 состоит из *n* отрезков, равных *e* ($e_1 = ne$). Тогда мера отрезка *b* при единице e_1 будет равна $m : n$. Действительно, если $e = ne$, то

Репозиторий ВГУ

$e = e_1 : n$. Тогда $b = me = m(e_1 : n) = (m : n) \cdot e_1$ (рис. 23).

Таким образом, ***деление натуральных чисел***, рассматриваемых как значения длин отрезков, отражает переход к новой (более крупной) единице длины.

Объясним смысл произведения $4 \cdot 3$, если 4 и 3 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть 4 – мера измерения величины X при единице e, а 3 – мера измерения величины e при единице e_1, т.е. e – первоначальная единица величины, e_1 - новая единица величины. Тогда $4 \cdot 3$ – это численной значение величины X при единице e_1 (рис. 23). Пусть X – длина отрезка a. Если e – первоначальная единица длины данного отрезка, то $X = 4 \cdot e$. Если e_1 - новая единица длины, такая, что $e = 3 \cdot e_1$, то $X = 4 \cdot e = 4 \cdot (3 \cdot e_1) = (4 \cdot 3) \cdot e_1 = 12\, e_1$.

Объясним смысл частного 8 : 2, если 8 и 2 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть 8 – мера измерения величины X при единице e, а 2 – мера измерения величины e_1 при единице e. Тогда 8 : 2 – это численное значение величины X при единице e_1 (рис.24). Пусть X – длина отрезка b. Если e – первоначальная единица длины данного отрезка, то $X = 8 \cdot$ e. Если e_1 - новая единица длины. Такая, что $e_1 = 2 \cdot e$, то $X = 8 \cdot e = 8 \cdot (e_1 : 2) = (8 : 2) \cdot e_1 = 4\, \boldsymbol{e_1}$**.**

Задача. В буфете было 5 банок сока, по 3 л в каждой банке. Сколько всего сока в этих банках? Обоснуем выбор способа действия при решении данной задачи.

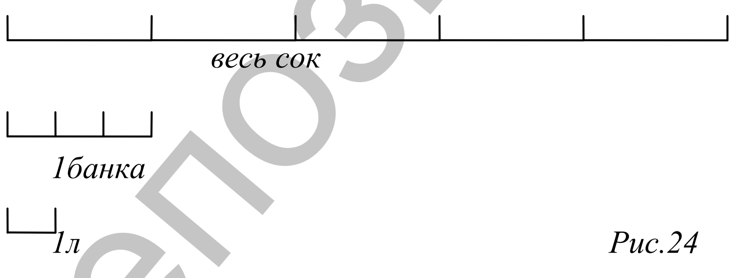


Рис.24

Решение. В задаче идет речь о двух единицах объема, занимаемого соком, - банках и литрах. Сначала он измерен банками, а затем его надо измерить новой единицей – литром, причем известно, что в старой единице (банке) содержится 3 новые единицы (3 литра) (рис. 24). Значит, 5 $\cdot$ 1б = 5 $\cdot$ (3 л) = 5 $\cdot$ (3 $\cdot$ 1 л) = (5 $\cdot$ 3) $\cdot$ 1 л = 15 л.

Таким образом, мы получили измерения объема сока в более мелкой единице – литрах.

Ответ: в буфете было 15 л сока.

Задача. Решим задачу и обоснуем выбор действий: «12 кг варенья надо разложить в банки, по 3 кг в каждую. Сколько банок потребуется?».

Репозиторий ВГУ

Решение. В задаче рассматривается две единицы измерения – килограмм и банка. В условии масса варенья измерена килограммами.

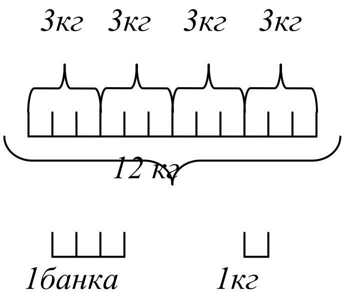


Рис.25

Так как в задаче требуется выразить результат измерения массы варенья в банках, т.е. в новой единице, и известно, что в новой единице содержится три старых (1 банка = 3 кг), то рассуждения, связанные с поиском численного значения массы при единице «банка» можно представить в таком виде: 12 кг $= 12 \cdot 1$ кг $= 12 \cdot \frac{1}{3}$ б. $= 12 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 1$ б.$) = (12 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 1$ б. $=(12 : 3) \cdot 1$ б. $= 4 \cdot 1$ б. $= 4$ банки (рис 25).

Следовательно, задача решается делением, поскольку нужно перейти от одной единицы величины к более крупной другой: 12 кг : 3 кг = 4 банки.

Ответ: потребуется 4 банки.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

18. ПОЗИЦИОННЫЕ И НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла и необходимость в названии и записи чисел.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали, прежде всего, пальцы рук и ног. Издревле употреблялся еще такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Веревочные счеты с узелками употреблялись в России и во многих странах Европы.

Способ «записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, так как для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом, трудно было выполнять и действия над ними. Поэтому возникли иные, более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, счет двадцатками использовали люди

Репозиторий ВГУ

племени майя. «Следы» такого счета сохранились в датском и некоторых других европейских языках. Иногда применялся счет пятками, а также группами по 12 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Например, число 185 представлялось как 3 раза по 60 и еще 5. Записывалось такое число с помощью всего двух знаков, один из которых обозначал, сколько раз взято по 60, а другой - сколько взято единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах.

Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на группировании десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятичная система счисления возникла в Индии, в VI в. Однако вид индийских цифр значительно отличается от современной их записи. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока приняли современную форму.

Первыми заимствовали у индийцев цифры и десятичную систему счисления арабы. Распространению же этого способа записи чисел и правил выполнения арифметических действий над числами способствовала книга среднеазиатского ученого аль-Хорезми «Об индийском счете», созданная им в начале IX в.

Европейцы познакомились с достижениями индо-арабской математики в XI в. Расширение торговли повлекло за собой значительное усложнение счета, появилась потребность в совершенствовании методов счета. Поэтому европейские математики обратились к трудам греческих и арабских ученых, перевели их на латинский язык. С десятичной системой счисления европейцы познакомились через перевод книги аль-Хорезми. В 1202 г. выходит «Книга абака» Л. Фибоначчи, где также вводятся индийские цифры и нуль. С XIII в. начинается внедрение десятичной системы, и к XVI в. она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

Распространению десятичной системы в России способствовала книга первого русского выдающегося педагога-математика Л.Ф.Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 г. на славянском языке. Она являлась энциклопедией математических знаний того времени. Все вычисления в ней проводятся при помощи цифр индийской нумерации. В «Арифметике» выделено особое действие «нумерация, или счисление»: «Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0 (которая цифрой или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей, то увеличивает в десять

Репозиторий ВГУ

раз, как будет показано в дальнейшем». Однозначные числа в книге Л.Ф.Магницкого называются «перстами»; числа, составленные из единиц и нулей, - «суставами»; все остальные числа - «сочинениями». Таблица с названиями круглых чисел доведена Магницким до числа с 24 нулями. В «Арифметике» в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...»

Различают ***позиционные*** и ***непозиционные системы счисления***. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается - I, пять - V, пятьдесят - L, сто - C, пятьсот - D, тысяча - M. Все остальные числа получаются при помощи двух арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV - четыре, XC - девяносто. Запишем несколько чисел в римской нумерации.

193 - это сто (C) плюс девяносто, т.е. сто без десяти (XC), плюс три (III); следовательно, число 193 записывается как CXCШ.

564 - это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс, четыре, т.е. пять без одного (IV). Следовательно, 564 записывается как DLXIV.

2708 - это две тысячи (MM) плюс пятьсот (D) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс пять (V) плюс три (III). Следовательно, число 2708 записывается так: MMDCCVIII.

Если число содержит несколько (немного) тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M. Вообще же числа четырех-, пяти- и шестизначные записывались с помощью буквы m (от лат. слова mille - тысяча), слева от которой записывали тысячи, а справа - сотни, десятки, единицы. Так, запись CXXXIIImDCCCXLII является записью числа 133842.

В России до XVII в. в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа изображались буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставили особый знак - титло.

Репозиторий ВГУ

Естественно, что такие системы записи чисел, как римская или славянская, были удобнее, чем зарубки на бирках, поскольку позволяли записывать большие числа. Однако выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом. Поэтому на смену им пришла десятичная система счисления.

19. ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2+4\cdot 10+5$.

Десятичной записью натурального числа x называется его представление в виде: $\boldsymbol{x = a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0}$***, где коэффициенты*** $\boldsymbol{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0}$ ***принимают значения*** **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** ***и*** $\boldsymbol{a_n \neq 0}$**.**

Сумму $a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$ в краткой форме принято записывать так: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Так как понятие числа и его записи нетождественны, то существование и единственность десятичной записи натурального числа надо доказывать.

Теорема. Любое натуральное число x можно представить в виде:

$$x = a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0 \qquad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и такая запись единственна.

Теорема. Пусть x и y - натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$x = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$;

$y = b_m\cdot 10^m+b_{m-1}\cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1\cdot 10 + b_0$

Тогда число x меньше числа y, если выполнено одно из условий:

а) $n < m$;

б) $n = m$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

в) $n = m$, $a_n = b_n$, …, $a_k = b_k$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Доказательство. В случае а) имеем: так как $n < m$, то $10^{n+1} \leq 10^m$, а поскольку $x < 10^{n+1}$ и $10^m \leq y$, то $x < 10^{n+1} \leq 10^m \leq y$, т.е. $x < y$.

В случае б): если $n = m$, но $a_n < b_n$, то $a_n + 1 \leq b_n$ и поэтому $(a_n + 1) \cdot 10^n \leq b_n \cdot 10^n$. А так как $x < (a_n + 1) \cdot 10^n$ и $b_n \cdot 10^n \leq y$, то $x < (a_n + 1) \cdot 10^n < b_n \cdot 10^n \leq y$, т.е. $x < y$.

Аналогично доказывается теорема и в случае в).

Репозиторий ВГУ

Например, если $x = 345$, а $y = 4678$, то $x < y$, так как первое число трехзначное, а второе - четырехзначное. Если $x = 345$, а $y = 467$, то $x < y$, так как в первом из двух трехзначных чисел меньше сотен. Если $x = 3456$, а $y = 3467$, то $x < y$, так как, несмотря на то что в каждом из четырехзначных чисел число тысяч и сотен одинаковое, десятков в числе x меньше, чем в числе y.

Если натуральное число x представлено в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$, то числа 1, 10, 10^2,..., 10^n называют ***разрядными единицами*** соответственно первого, второго, ..., $n + 1$ разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 - основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом,* или **классом единиц**. В первый класс входят единицы, десятки и сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* - **класс тысяч**. В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем следует *третий класс* - **класс миллионов**, состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т.д. Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе всем числам можно дать название (имя). Это Достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел. Так, числа второго десятка (они представляются в виде $1 \cdot 10 + a_0$) образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова десять («дцать»):

одиннадцать - один на десять,

двенадцать - два на десять и т.д.

Может быть, естественнее было бы говорить «два и десять», но наши предки предпочли говорить «два на десять», что и сохранилось в речи.

Слово «двадцать» обозначает два десятка.

Числа третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получают путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т.д.

Продолжая далее счет, получим название чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. Названия этих чисел образуются так же, как и в пределах третьего де-

Репозиторий ВГУ

сятка, только в трех случаях появляются новые слова: сорок (для обозначения четырех десятков), девяносто (для обозначения девяти десятков) и сто (для обозначения десяти десятков). Названия чисел второй сотни составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков. Таким путем образуются наименования: сто один, сто два, ..., сто двадцать и т.д. Отсчитав новую сотню, будем иметь две сотни, которые для краткости называют «двести». Для получения чисел, больших двухсот, снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем получим особые названия: триста, четыреста, пятьсот и т.д. до тех пор, пока не отсчитаем десять сотен, которые носят название тысяча.

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т.д.), получим две тысячи, три тысячи и т.д. Когда же отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование - миллион. Далее считаем миллионами до тех пор, пока не дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число - тысяча миллионов - носит особое название миллиард, или биллион. В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард - 10^9. По аналогии можно получить записи еще больших чисел: триллион - 10^{12}, квадриллион – 10^{15}ит.д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) образуются из основных.

20. СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ

Сложение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия, но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все суммы, которые получаются при сложении однозначных чисел, записывают в особую таблицу, называемую таблицей сложения однозначных чисел, и запоминают.

Естественно, смысл сложения сохраняется и для многозначных чисел, но практическое выполнение сложения происходит по особым правилам. Сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком. Например,

$$\begin{array}{r} +\ \ 341 \\ \underline{7238} \\ 7579 \end{array}$$

Репозиторий ВГУ

Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические положения лежат в его основе.

Проиллюстрируем теоретические основы алгоритма сложения, вычислив суммы: 532+8347.

Представим слагаемые 532 и 8347 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами:

$$532+8347=(5\cdot 10^2+3\cdot 10+2)+(8\cdot 10^3+3\cdot 10^2+4\cdot 10+7).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами и сгруппируем слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единицами, десятки с десятками и т.д. Все эти преобразования можно выполнить на основании соответствующих свойств сложения. Свойство ассоциативности разрешает записать выражение без скобок:

$$5\cdot 10^2+3\cdot 10+2+8\cdot 10^3+3\cdot 10^2+4\cdot 10+7.$$

На основании свойства коммутативности поменяем местами слагаемые: $8\cdot 10^3+5\cdot 10^2+3\cdot 10^2+3\cdot 10+4\cdot 10+2+7$. Согласно свойству ассоциативности произведем группировку: $8\cdot 10^3+(5\cdot 10^2+3\cdot 10^2)+(3\cdot 10+\ +4\cdot 10)+(2+7)$. Вынесем за скобки в первой выделенной группе число 10^2, а во второй – 10. Это можно сделать в соответствии со свойством дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$8\cdot 10^3+(5+3)\cdot 10^2+(4+3)\cdot 10+(2+7).$$

Итак, сложение данных чисел свелось к сложению однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Эти суммы находим по таблице сложения: $8\cdot 10^3+8\cdot 10^2+7\cdot 10+9$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 8879.

Видим, что в основе алгоритма сложения многозначных чисел лежат следующие теоретические факты:

- способ записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
- дистрибутивность умножения относительно сложения;
- таблица сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что в случае сложения чисел «с переходом через десяток» теоретические основы алгоритма сложения будут теми же.

Рассмотрим, например, суммы: 637+548.

Представим слагаемые в виде суммы степеней десяти с соответствующими коэффициентами: $(6\cdot 10^2+3\cdot 10+7)+(5\cdot 10^2+4\cdot 10+8)$.

Воспользуемся свойствами сложения и дистрибутивностью умножения относительно сложения и преобразуем полученное выражение к такому виду: $(6+5)\cdot 10^2+(3+4)\cdot 10+(7+8)$. Видим,

Репозиторий ВГУ

что в этом случае сложение данных чисел также свелось к сложению однозначных чисел, но суммы 6+5 и 7+8 превышают 10 и поэтому последнее выражение не является десятичной записью числа. Необходимо сделать так, чтобы коэффициенты перед степенями 10 оказались меньше 10. Для этого выполним ряд преобразований. Сначала сумму 7+8 представим в виде $1\cdot10+5$:

$(6+5)\cdot10^2+(3+4)\cdot10+(1\cdot10+5)$.

Затем воспользуемся свойствами сложения и умножения и приведем полученное выражение к виду: $(6+5)\cdot10^2+(3+4+1)\cdot10+5$. Суть последнего преобразования такова: десяток, который получился при сложении единиц, прибавим к десяткам данных чисел. И наконец, записав сумму 6+5 в виде $1\cdot10+1$, получаем $(1\cdot10+1)\cdot10^2+8\cdot10+5=10^3+10^2+8\cdot10+5$. Последнее выражение есть десятичная запись числа 1185. Следовательно, 637+548=1185.

В общем виде **алгоритм сложения натуральных чисел**, записанных в десятичной системе счисления, формулируют так:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находилось друг под другом.

2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше десяти, записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему Разряду (десятков).

3. Если сумма единиц больше или равна десяти, то представляют ее в виде $a_0 + b_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, где c_0 - однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.
4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т.д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов. При этом, если их сумма больше или равна десяти, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение 1 + 0 = 1.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) для краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

21. ВЫЧИТАНИЕ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ ВЫЧИТАНИЯ

Вычитание однозначного числа b из однозначного или двузначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $b+c=a$, и происходит с учетом таблицы сложения однозначных чисел.

Репозиторий ВГУ

Если же числа a и b многозначные и $b < a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и для вычитания в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной: разность многозначных чисел чаще всего находят, производя вычисления столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим разность чисел 586 и 342. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в таком виде: $586–342=(5\cdot10^2+8\cdot10+6)–(3\cdot10^2+4\cdot10+2)$.

Чтобы вычесть из числа $5\cdot10^2+8\cdot10+6$ сумму $3\cdot10^2+4\cdot10+2$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, и тогда: $(5\cdot10^2+8\cdot10+6)–(3\cdot10^2+4\cdot10+2)=(5\cdot10^2+8\cdot10+6)–3\cdot10^2–4\cdot10–2$.

Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-нибудь одного слагаемого (большего или равного этому числу). Поэтому число $3\cdot10^2$ вычитаем из слагаемого $5\cdot10^2$, число $4\cdot10$ – из слагаемого $8\cdot10$, а число 2 – из слагаемого 6, тогда:

$(5\cdot10^2+8\cdot10+6)-3\cdot10^2–4\cdot10–2=(5\cdot10^2–3\cdot10^2)+(8\cdot10–4\cdot10)+(6–2)$.

Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда выражение будет иметь вид:

$(5–3)\cdot10^2+(8–4)\cdot10+(6–2)$. Видим, что вычитание трехзначного числа 342 из трехзначного числа 586 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов в записи заданных трехзначных чисел. Разности 5–3, 8–4 и 6–2 находим по таблице сложения и получаем выражение: $2\cdot10^2+4\cdot10+4$, которое является записью числа 244 в десятичной системе счисления. Таким образом, 586–342=244.

Выражение $(5–3)\cdot10^2+(8–4)\cdot10+(6–2)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} -586 \\ \underline{344} \\ 244 \end{array}$$

Видим, что вычитание многозначного числа из многозначного основывается на:

- способе записи числа в десятичной системе счисления;
- правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- свойстве дистрибутивности умножения относительно вычитания;
- таблице сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что если в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньше числа в том же разряде вычитаемого, то в основе вычитания лежат те же

Репозиторий ВГУ

теоретические факты и .таблица сложения однозначных чисел.

Рассмотрим разность 850–437. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим эту разность в таком виде: $850–437=(8\cdot10^2+5\cdot10+0)–(4\cdot10^2+3\cdot10+7)$. Поскольку из числа 0 нельзя вычесть 7, то выполнить вычитание аналогичное тому, как было сделано в первом случае, невозможно. Поэтому возьмем из числа 850 один десяток и представим его в виде 10 единиц – десятичная система счисления позволяет это сделать – тогда будем иметь выражение:

$$(8\cdot10^2+4\cdot10+10)–(4\cdot10^2+3\cdot10+7).$$

Если теперь воспользоваться правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы, а также дистрибутивностью умножения относительно вычитания, то получим выражение $(8–4)\cdot10^2+(4–3)\cdot10+(10–7)$ или $4\cdot10^2+1\cdot10+3$. Последняя сумма есть запись числа 413 в десятичной системе счисления. Значит, 850–437=413.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде **алгоритм вычитания чисел** в десятичной системе счисления.

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.
3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10 + a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа, далее переходим к следующему разряду.
4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10 + a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.
5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.
6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Репозиторий ВГУ

22. УМНОЖЕНИЕ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ

Умножение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия. Но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все произведения однозначных чисел записывают в особую таблицу, называемую таблицей умножения однозначных чисел, и запоминают.

Сначала рассмотрим умножение многозначного числа на однозначное. Умножим, например, 537 на 4. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления, 537 можно представить в виде $5\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 7$ и тогда $537\cdot 4 = (5\cdot 10^2+3\cdot 10+7)\cdot 4$. На основании дистрибутивности умножения относительно сложения раскроем скобки: $(5\cdot 10^2)\cdot 4+(3\cdot 10)\cdot 4+7\cdot 4$. Далее воспользуемся коммутативностью и ассоциативностью умножения: $(5\cdot 4)\cdot 10^2+$ $+(3\cdot 4)\cdot 10+7\cdot 4$. Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $20\cdot 10^2+12\cdot 10+28$. Коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 20 в виде $2\cdot 10$, число 12 в виде $1\cdot 10 + 2$, а число 28 в виде $2\cdot 10 + 8$. Затем в выражении $2\cdot 10\cdot 10^2+(1\cdot 10+2)\cdot 10+(2\cdot 10+8)$ раскроем скобки: $2\cdot 10^3+1\cdot 10^2+2\cdot 10+2\cdot 10+8$. На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $2\cdot 10$ и $2\cdot 10$ и вынесем 10 за скобки: $2\cdot 10^3+1\cdot 10^2+(2+2)\cdot 10+8$. Сумма 2+2 есть сумма однозначных чисел и может быть найдена по таблице сложения: $2\cdot 10^3+1\cdot 10^2+4\cdot 10+8$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 2148, т.е. $537\cdot 4 = 2148$.

Таким образом, умножение многозначного числа на однозначное основывается на:

- записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойствах сложения и умножения;
- таблицах сложения и умножения однозначных чисел.

Выведем правило умножения многозначного числа на однозначное в общем виде. Пусть требуется умножить

$$x = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$$

на однозначное число y:

$$x\cdot y = (a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0)\cdot y = (a_n\cdot y)\cdot 10^n + (a_{n-1}\cdot y)\cdot 10^{n-1} + {} + \ldots + a_0\cdot y,$$

причем преобразования выполнены на основании свойств умножения. После этого, используя таблицу умножения, заменяем все произведения $a_к\cdot y$, где $0 \le k \le n$, соответствующими значениями $a_k\cdot y = b_k\cdot 10 + c$ и получаем:

Репозиторий ВГУ

$x \cdot y = (b_n \cdot 10 + c_n) \cdot 10^n + (b_{n-1} \cdot 10 + c_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (b_1 \cdot 10 + c_1) \cdot 10 + (b_0 \cdot 10 +$
$+ c_0) = b_n \cdot 10^{n+1} + (c_n + b_{n-1}) \cdot 10^n + \ldots + (c_1 + b_0) \cdot 10 + c_0)$. По таблице сложения заменяем суммы $c_k + b_{k-1}$ где $0 \le \kappa \le n$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, их значениями. Если, например, c_0 однозначно, то последняя цифра произведения равна c_0. Если же $c_0 = 10 + m_0$, то последняя цифра равна m_0, а к скобке $(c_1 + b_0)$ надо прибавить 1. Продолжая этот процесс, получим десятичную запись числа $x \cdot y$.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде **алгоритм умножения многозначного числа** $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ **на однозначное число** y.

1. Записываем второе число под первым.
2. Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
3. Если произведение цифр единиц числа x на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0 - однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 - перенос в следующий разряд.
4. Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пп. 2 и 3.
5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Как известно, умножение числа x на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей. Покажем это. Умножим число $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ на 10^k:
$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot 10^k = a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^k$

Полученное выражение является суммой разрядных слагаемых числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \underbrace{0 \ldots 0}_{k\ \text{нулей}}}$, так как равно $a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^k + + 0 \cdot 10^{k-1} + 0 \cdot 10^{k-2} + \ldots + 0 \cdot 10 + 0$. Например, $347 \cdot 10^3 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7) \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 = 347000$.

Заметим еще, что умножение на число $y \cdot 10^k$, где y – однозначное число, сводится к умножению на однозначное число y и на число 10^k. Например, $52 \cdot 300 = 52 \cdot (3 \cdot 10^2) = (52 \cdot 3) \cdot 10^2 = 156 \cdot 10^2 = 15600$.

Рассмотрим теперь алгоритм умножения многозначного числа на многозначное. Проиллюстрируем алгоритм умножения многозначного числа 437 на многозначное число 254.

Репозиторий ВГУ

Представим число 254 в виде суммы $2\cdot10^2+5\cdot10+4$ и запишем произведение $437\cdot(2\cdot10^2+5\cdot10+4)$. Оно, согласно дистрибутивности умножения относительно сложения, равно $437\cdot(2\cdot10^2)+437\cdot(5\cdot10)+437\cdot4$. Отсюда, применив ассоциативное свойство умножения, получим $(437\cdot2)\cdot10^2+(437\cdot5)\cdot10+437\cdot4$. Видим, что умножение многозначного числа 437 на многозначное число 254 свелось к умножению многозначного числа 437 на однозначные числа 2, 5 и 4, а также на степени 10. Таким образом получаем: 87400+21850+1748. Пользуясь алгоритмом сложения многозначных чисел, имеем:

$$\begin{array}{r} 87400 \\ +21850 \\ 1748 \\ \hline 110998 \end{array}$$

Значит, $437\cdot254=110998$.

Сформулируем в общем виде **алгоритм умножения** числа $x=\overline{a_n a_{n-1}\dots a_1 a_0}$ на число $y=\overline{b_m b_{m-1}\dots b_1 b_0}$.

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.
2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x\cdot b_0$ под числом y.
3. Умножаем число x на следующий разряд b_1, числа y и записываем произведение $x\cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x\cdot b_1$ на 10.
4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x\cdot b_k$.
5. Полученные $k + 1$ произведения складываем.

Изучение алгоритма умножения многозначных чисел в начальном курсе математики, как правило, проходит в соответствии с выделенными этапами.

23. ДЕЛЕНИЕ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ ДЕЛЕНИЯ

Когда речь идет о технике деления чисел, то этот процесс рассматривают как действие деления с остатком: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b - это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + rm$, причем $0 < r < b$.

Выясним сначала, как осуществляется деление на однозначное число. Если на однозначное число делят однозначное или двузначное (не превышающее 89), то используется таблица умножения однозначных чисел.

Например, частным чисел 56 и 8 будет число 7, так как $8\cdot7=56$. Если же надо разделить 52 на 8, то находят ближайшее к нему

Репозиторий ВГУ

меньшее число, которое делится на 8 – это будет число 48, и , следовательно, неполным частным при делении 52 на 8 будет число 6. Чтобы найти остаток, надо из 52 вычесть 48: 52-48=4. Таким образом, 52=8·6+4, т.е. при делении 52 на 8 получается неполное частное 6 и остаток, равный 4.

Записать это можно иначе, при помощи деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -52 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{48} & 6 \\ 4 & \end{array}$$

Проиллюстрируем теоретические основы деления трехзначного числа 377 на однозначное число 4.

Разделить 377 на 4 - это значит найти такое неполное частное q и остаток r, что $377=4q+r$, причем остаток r должен удовлетворять условию $0 \leq r < b$, а неполное частное q – условию $4q \leq 377 < 4\cdot(q+1)$.

Определим, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Однозначным число q быть не может, так как тогда произведение $4q$ может быть максимально равно 36 и, значит, не будут выполняться условия, сформулированные выше для r и q. Если число q двузначное, т.е. если $10<q<100$, то тогда $40 < 4q < 400$ и, следовательно, $40 < 377 < 400$, что верно. Значит, частное чисел 377 и 4 – число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 4 на 20, 30, 40 и т.д. Поскольку $4\cdot90=360$, а $4\cdot100=400$, и $360<377<400$, то неполное частное заключено между числами 90 и 100, т.е. $q=90+q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$$4\cdot(90+q_0)\leq 377 < 360+4\cdot(90+q_0+1), \text{ откуда}$$

$$360+4q_0 \leq 377 < 360+4\cdot(q_0+1) \text{ и } 4q_0 \leq 17 < 4\cdot(q_0+1).$$

Число q_0 (цифра единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором, воспользовавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0=4$ и, следовательно, неполное частное $q=90+4=94$. Остаток находится вычитанием: $377-4\cdot94=1$.

Итак, при делении числа 377 на 4 получается неполное частное 94 и остаток 1: $377=4\cdot94+1$.

Описанный процесс является основой деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -377 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{36} & 94 \\ -17 & \\ \underline{16} & \\ 1 & \end{array}$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на многозначное. Разделим, например, 4316 на 52. Выполнить это деление - значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $4316 = 52q + r$, $0 \leq r < 52$, а неполное частное должно удовлетворять неравенству $52q < 4316 < 52(q + 1)$.

Репозиторий ВГУ

Определим число цифр в частном q. Очевидно, частное заключено между числами 10 и 100 (т.е. q -двузначное число), так как $520 < 4316 < \quad < 5200$. Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 52 на 20, 30, 40, 50 и т.д. Поскольку $52 \cdot 80 = 4160$, а $52 \cdot 90 = \quad = 4680$ и $4160 < 4316 < 4680$, то неполное частное заключено между числами 80 и 90, т.е. $q = 80 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$52\cdot(80 + q_0) \le 4316 < 52\cdot(80 + q_0 + 1)$,

$4160 + 52\, q_0 \le 4316 < 4160 + 52\cdot(q_0 + 1)$,

$52\, q_0 \le 156 < 52\cdot(q_0 + 1)$.

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором: $156 = 52\cdot3$, т.е. имеем случай, когда остаток равен 0. Следовательно, при делении 4316 на 52 получается частное 83.

Приведенные рассуждения лежат в основе деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} \_4316 & 52 \\ \cline{2-2} \underline{416} & 83 \\ \_156 & \\ \underline{156} & \\ 0 & \end{array}$$

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий **алгоритм деления уголком.**

1. Если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.
2. Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a < 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b.
3. Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) Выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b_1 последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

б) Умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

Репозиторий ВГУ

в) Проводим черту под bq_1 и находим разность $r_1 = d_1 - bq_1$.

г) Записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

д) Если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно него поступаем согласно п.1 или п.2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) Если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_2, большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп.1,2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3 < b$, то тогда частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

24. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ ДЕСЯТИЧНОЙ

Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p-ичной. Так, если $p = 2$, то - двоичной, если $p = 8$ - восьмеричной, если $p = 10$ - десятичной.

Для записи чисел в системе с основанием p необходимо p символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: 0, 1, 2,..., p-1. Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов 0, 1, 2, а в пятеричной - при помощи символов 0, 1, 2, 3, 4.

Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде: $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$ (1), где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0,1, 2,..., p-1 и $a_n \neq 0$.

Теорема. Пусть $p \geq 2$ - заданное натуральное число. Тогда любое натуральное число x представимо, и притом единственным образом, в виде (1).

Вместо представления в виде (1) число x записывают кратко: $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Например, если $p = 3$, то число $x = 2\cdot3^3 + 0\cdot3^2 + 1\cdot3 + 2$ можно записать в виде 2012_3, причем читать его следует так: «Два, ноль, один, два в троичной системе счисления».

Сравнение чисел в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняется так же, как и в десятичной системе. Так, $2101_3 < 2102_3$, поскольку при одинаковом числе разрядов и совпадении трех цифр

Репозиторий ВГУ

старших разрядов число единиц в первом числе меньше числа единиц во втором.

Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Надо лишь иметь для системы с основанием p соответствующие таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Составим, например, таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления. Однозначные числа в ней - это 0, 1, 2. Число 3 записывается 10. Число 4 имеет вид 11_3, так как $4 = 1 \cdot 3 + 1 = 11_3$.

Полностью таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно представить в таком виде:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Используя эту таблицу, можно складывать любые числа в троичной системе счисления, причем многозначные числа можно складывать столбиком по правилам, аналогичным правилам сложения чисел в десятичной системе счисления. Например, $1221_3 + 122_3 = 2120_3$, так как

$$\begin{array}{r} 1221 \\ +\ \underline{122} \\ 2120 \end{array}$$

Таблицей сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно пользоваться, выполняя вычитание: $2110_3 - 212_3 = 1121_3$.

Таблица умножения однозначных чисел в троичной системе счисления имеет вид:

·	1	0	2
0	0	0	0
1	1	0	2
2	2	0	11

.122_3

Репозиторий ВГУ

На основе этой таблицы и таблицы сложения выполняют умножение многозначных чисел по правилам, аналогичным правилам умножения чисел в десятичной системе счисления. Найдем, например, произведение $122_3 \cdot 22_3$:

$$\begin{array}{r} \underline{\quad 22_3} \\ {}_{+}1021 \\ \underline{1021\;\,} \\ 12001_3 \end{array}$$

Таким образом, $122_3 \cdot 22_3 = 12001_3$.

Таблицей умножения можно пользоваться, выполняя деление чисел в троичной системе счисления, в частности, деление чисел уголком. Разделим, например, число 10011, на 12_3:

$$\begin{array}{l|l} \_10011 & \underline{12\quad\;} \\ \;\;\underline{12\;\;} & 122 \\ \_\;111 & \\ \;\;\;\underline{101} & \\ \_\;101 & \\ \;\;\;\underline{101} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Значит, $10011_3 : 12_3 = 122_3$.

Чтобы из одной записи получить другую, достаточно научиться переходить от записи в заданной системе к записи в десятичной, и наоборот.

Пусть дана запись числа x в системе счисления с основанием p, т.е. $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$. Найдем запись этого числа в десятичной системе счисления. Так как в записи числа x числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и p представлены в десятичной системе счисления, то, выполнив над ними действия по правилам, принятым в ней, получим десятичную запись числа x.

Найдем, например, десятичную запись числа 453_6. Для этого представим данное число в виде суммы вида: $4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3$. Значение этого выражения в десятичной системе счисления равно 177. Следовательно, $456_6 = 177_{10}$.

Пусть теперь число x записано в десятичной системе. Найдем его запись в системе счисления с основанием p.

Число $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$ можно записать в виде $x = \;= p \cdot (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0$. Так как $0 \le a < p$, то из последней записи числа x видно, что a_0 - остаток, получаемый при делении числа x на p, а $a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_1$ – неполное частное. Точно так же можно найти, что a_1 – остаток, получаемый при делении этого неполного частного на p. Таким образом, запись числа x в p-ичной

Репозиторий ВГУ

системе находят так: число x делят (в десятичной системе) на p; остаток, полученный при делении, даст последнюю цифру a_0 в p-ичной записи числа x; неполное частное снова делим на p, новый остаток даст предпоследнюю цифру p-ичной записи числа x; продолжая деление, найдем все цифры p-ичной записи числа x.

Запишем число 2436 в восьмеричной системе счисления. Разделим 2436 на 8: $2436 = 304 \cdot 8 + 4$. При делении числа 304 на 8 получим: $304 = \quad = 38 \cdot 8 + 0$ и тогда $2436 = (38 \cdot 8 + 0) \cdot 8 + 4$ или $2436 = 38 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$. Делим на 8 число 38: $38 = 4 \cdot 8 + 6$ и тогда $2436 = (4 \cdot 8 + 6) \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$ или $2436 = \quad = 4 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$, т.е. $2436 = 4604_8$. Описанный процесс можно представить и в таком виде:

```
_2436 | 8
  24    |304 | 8
  _36   _24   |38 | 8
   32    _64  _32  (4)
   (4)    64    6
          (0)
```

ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

25. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть даны натуральные числа a и b. Говорят, что число a делится на число b, если существует такое натуральное число q, что a = bq.

В этом случае число b называют **делителем числа** a, а число a – **кратным числа** b.

Например, 24 делится на 8, так как существует такое $q = 3$, что 24 = 8*3. Можно сказать иначе: 8 – это делитель числа 24, а 24 есть кратное числа 8.

В случае, когда a делится на b, пишут: $a \vdots b$. Эту запись часто читают и так: «a кратно b».

Заметим, что понятие «делитель данного число» следует отличать от понятия «делитель», обозначающего то число, на которое делят. Например, если 18 делят на 5, то число 5 – делитель, но 5 не является делителем числа 18. Если 18 делят на 6, то в случае понятия «делитель» и «делитель данного числа» совпадают.

Из определения отношения делимости и равенства $a = 1 * a$, справедливого для любого натурального а, вытекает, 1 является ***делителем*** любого натурального числа.

Выясним, сколько вообще делителем может быть у натурального числа. Сначала рассмотрим следующую теорему.

Репозиторий ВГУ

Теорема. Делитель b данного числа a не превышает этого числа. Если $a \vdots b$, то $b \leq a$.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое $q \in N$, что $a = bq$, значит, $a - b = bq - b = b*(q - 1)$. Поскольку $q \in N$, то $q \geq 1$. Тогда $b*(q-1) \geq 0$ и, следовательно, $b \leq a$.

Из данной теоремы следует, что множество делителей данного числа конечно. Назовем, например, все делители числа 36. Они образуют конечное множество {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}.

Нам известно, что отношение делимости на множестве N обладает рядом свойств, в частности, оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Теперь, имея определение отношения делимости, мы можем доказать эти и другие его свойства.

Теорема. Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое натуральное число делится само на себя.

Доказательство. Для любого натурального a справедливо равенство $a = a \cdot 1$. Так как 1 е N, то, по определению отношения делимости, $a \vdots a$.

Теорема. Отношение делимости антисимметрично, т.е. если $a \vdots b$ и $a \neq b$, то $\overline{b \vdots a}$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $b \vdots a$. Но тогда $a \leq b$, согласно теореме, рассмотренной выше.

По условию $a \vdots b$ и $a \neq b$. Тогда, по той же теореме, $b \leq a$.

Неравенства $a \leq b$ и $b \leq a$ будут справедливы лишь тогда, когда $a = b$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, наше предположение неверное и теорема доказана.

Теорема. Отношение делимости транзитивно, т.е. если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое натуральное число q, что $a = bq$, а так как $b \vdots c$, то существует такое натуральное число p, что $b = cp$. Но тогда имеем: $a = bq = (cp)q = c(pq)$. Число pq – натуральное. Значит, по определению отношения делимости, $a \vdots c$.

Теорема (признак делимости суммы). Если каждое из натуральных чисел a_1, a_2 ..., a_n делится на натуральное число b, то и их сумма $a_1 + a_2 + ... + a_n$ делится на это число.

Доказательство. Так как $a_1 \vdots b$, то существует такое натуральное число q_1 что $a_1 = bq_1$. Так как $a_2 \vdots b$, то существует такое натуральное число q_2,что $a_2 = bq_2$. Продолжая рассуждения, получим, что если $a_n \vdots b$, то существует такое натуральное число q_n, что $a_n = bq_n$. Эти равенства позволяют преобразовать сумму $a_1 + a_2 + ... + a_n$ в сумму вида $bq_1 + bq_2 + ... + bq_n$. Вынесем за скобки общий множитель b, а

Репозиторий ВГУ

получившееся в скобках натуральное число $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ обозначим буквой q. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) = bq$, т.е. сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ оказалась представленной в виде произведения числа b и некоторого натурального числа q. А это значит, что сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на b, что и требовалось доказать.

Например, не производя вычислений, можно сказать, что сумма 175 + 360 + 915 делится на 5, так как на 5 делится каждое слагаемое этой суммы.

Теорема (признак делимости разности). Если числа a_1 и a_2 делятся на b и $a_1 \geq a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на b.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству признака делимости суммы.

Теорема (признак делимости произведения). Если число a делится на b, то произведение вида ax, где $x \in \mathrm{N}$, делится на b.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое натуральное число q, что $a = bq$. Умножим обе части этого равенства на натуральное число x. Тогда $ax = (bq)x$, откуда на основании свойства ассоциативности умножения $(bq)x = b(qx)$ и, значит, $ax = b(qx)$, где qx – натуральное число. Согласно определению отношения делимости, $ax \vdots b$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что *если один из множителей произведения делится на натуральное число* b, *то и все произведение делится на* b.

Например, произведение 24·976·305 делится на 12, так как на 12 делится множитель 24.

Рассмотрим еще три теоремы, связанные с делимостью суммы и произведения, которые часто используются при решении задач на делимость.

Теорема. Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится.

Доказательство. Пусть $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + c$ и известно, что $a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b$, $a_3 \vdots b$, ..., $a_n \vdots b$, но $\overline{c \vdots b}$. Докажем, что тогда $\overline{s \vdots b}$.

Предположим противное, т.е. пусть $s \vdots b$. Преобразуем сумму s к виду $c = s - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Так как $s \vdots b$ по предположению, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \vdots b$ согласно признаку делимости суммы, то по теореме о делимое разности $c \vdots b$. Пришли к противоречию с тем, что дано. Следовательно, $\overline{s \vdots b}$.

Например, сумма 34 + 125 + 376 + 1024 на 2 не делится, так как $34 \vdots 2$, $376 \vdots 2$, $124 \vdots 2$, но $\overline{125 \vdots 2}$.

Теорема. Если в произведении ab множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то ab делится на mn.

Репозиторий ВГУ

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы о делимости произведения.

Теорема. Если произведение *ac* делится на произведение *bc*, причем *c* – натуральное число, то и *a* делится на *b*.

Доказательство. Так как *ac* делится на *bc*, то существует такое натуральное число *q*, что *ac* = *(bc)q*, откуда *ac* = *(bq)c* и, следовательно, *a* = = *bq*, т.е. $a \vdots b$.

26. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Рассмотренные свойства отношения делимости позволяют доказать известные признаки делимости чисел, записанных в десятичной системе счисления, на 2, 3, 4, 5, 9.

Признаки делимости позволяют установить по записи числа, делится ли оно на другое, не выполняя деления.

Теорема (признак делимости на 2). Для того чтобы число *x* делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Доказательство. Пусть число *x* записано в десятичной системе счисления, т.е.

$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ принимают значения 0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a_n \neq 0$ и a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6, 8. Докажем, что тогда $x \vdots 2$.

Так как $10 \vdots 2$, то $10^2 \vdots 2$, $10^3 \vdots 2$, ... , $10^n \vdots 2$ и, значит, $(x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10) \vdots 2$. По условию a_0 тоже делится на 2, и поэтому число *x* можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, число *x* делится на 2.

Докажем обратное: если число *x* делится на 2, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Запишем равенство$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ в таком виде: $a_0 = x - (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10)$. Но тогда, по теореме о делимости разности, $a_0 \vdots 2$, поскольку $x \vdots 2$ и $(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10) \vdots 2$. Чтобы однозначное число a_0 делилось на 2, оно должно принимать значения 0, 2, 4, 6, 8.

Теорема (признак делимости на 5). Для того чтобы число *x* делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2.

Репозиторий ВГУ

Теорема (признак делимости на 4). Для того чтобы число х делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа *x*.

Доказательство. Пусть число *x* записано в десятичной системе счисления, т.е. $x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ и две последние цифры в этой записи образуют число, которое делится на 4. Докажем, что тогда х ⋮ 4.

Так как 100 ⋮ 4, то $(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2)$ ⋮ 4. По условию, $a_1 10 + a_0$ (это и есть запись двузначного числа) также делится на 4. Поэтому число *x* можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, и само число *x* делится на 4.

Докажем обратное, т.е. если число *x* делится на 4, то двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи, тоже делится на 4.

Запишем равенство $x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ в таком виде: $a_1 10 + a_0 = x - (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2)$. Так как х ⋮ 4 и $(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2)$ ⋮ 4, то по теореме о делимости разности $(a_1 10 + a_0)$ ⋮ 4. Но выражение $a_1 10 + a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числах.

Например, число 157872 делится на 4. так как последние две цифры в его записи образуют число 72, которое делится на 4. Число 987641 не делится на 4, так как последние две цифры в его записи образуют число 41, которое не делится на 4.

Теорема (признак делимости на 25). Для того чтобы число *x* делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 00, 25,50 или 75.

Доказательство аналогично признаку делимости на 4.

Теорема (признак делимости на 9). Для того чтобы число *x* делилось на 9. необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Доказательство. Докажем сначала, что числа вида 10^n - 1 делятся на 9. Действительно, $10^n - 1 = (9*10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = (9*10^{n-1} + 9*10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 = (9*10^{n-1} + 9*10^{n-2} + \ldots + 10) - 1 = 9*10^{n-1} + 9*10^{n-2} + \ldots + 9$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на 9, значит, и число 10^n - 1 делится на 9.

Пусть число $x = a_n*10^n + a_{n-1}* 10^{n-1} + \ldots + a_1*10 + a_0$ и $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$ ⋮ *9*. Докажем, что тогда *x* ⋮ *9*.

Преобразуем сумму $a_n*10^n + a_{n-1}* 10^{n-1} + \ldots + a_1*10 + a_0$ прибавив и вычтя из нее выражение $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ и записав результат в таком виде: $x = (a_n* 10^n - a_n) + (a_{n-1}*10^{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + (a_1*10 + a_1) + +$

$(a_0 + a_0) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = a_n (10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1}-1) + ... + a_1(10-1) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0).$

В последней сумме каждое слагаемое делится на 9:

$a_n (10^n - 1) ⋮ 9$, так как $(10^n - 1) ⋮ 9$,

$a_{n-1}(10^{n-1}-1) ⋮ 9$, так как $(10^{n-1}-1) ⋮ 9$ и т.д.

$a_1(10- 1) ⋮ 9$, так как $(10- 1) ⋮ 9$,

$(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) ⋮ 9$ по условию.

Следовательно, $x ⋮ 9$.

Докажем обратное, т.е. если $x ⋮ 9$, то сумма цифр его десятичной записи делится на 9.

Равенство $x = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ запишем в таком виде: $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = x - (a_n (10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1}-1) + ... + a_1(10- 1))$. Так как в правой части этого равенства и уменьшаемое, и вычитаемое кратны 9, то по теореме о делимости разности $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) ⋮ 9$, т.е. сумма цифр десятичной записи числа x- делится на 9, что и требовалось доказать.

Например, число 34578 делится на 9, так как сумма его цифр, равная 27, делится на 9. Число 130542 не делится 9, так как сумма его цифр, равная 15, не делится на 9.

Теорема (признак делимости на 3). Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилось на 3.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству признака делимости на 9.

Мы рассмотрели признаки делимости чисел на 2, 3, 4, 5, 9. Из школьного курса математики известен еще ряд других, например, на 10 и 25. Конечно, этого недостаточно, чтобы решать вопросы делимости. Существует общий признак делимости для чисел, записанных в любой позиционной системе счисления, открытый в XVII веке французским математиком Паскалем. Мы рассмотрим его для случая, когда основанием системы счисления является число 10.

Теорема (признак делимости Паскаля). Число

$$x = a_n*10^n + a_{n-1}* 10^{n-1} + ... + a_1*10 + a_0 \qquad (1)$$

делится на число b тогда и только тогда, когда на b делится сумма $a_n*r_n + a_{n-1}*r_{n-1} + … + a_1*r_1 + a_0$, где $r_1, r_2, …, r_n$ - остатки от деления на b разрядных единиц $10, 10^2, ... 10^n$.

Доказательство. Разделим на b каждую из разрядных единиц числа x, получим: $10 = bq_1 + r_1$, $10^2 = bq_2 + r_2$ .... $10^{n-1} = bq_{n-1} + r_{n-1}$, $10^n = bq_n + r_n$, где $q_1, q_2, …, q_{n-1}, q_n$ - частные, а $r_1, r_2, …, r_{n-1}, r_n$ -остатки.

Подставим в равенство (1) вместо разрядных единиц соответствующие выражения и, используя свойства сложения и умножения, выполним преобразования: $x = a_n(bq_n + r_n) + a_{n-1} (bq_{n-1} + r_{n-1}) + ... + a_1(bq_1 + r_1) + a_0 = (a_nq_n + a_{n-1} q_{n-1} + … + a_1q_1)b + (a_nr_n + a_{n-1} r_{n-1} + ... +$

$a_1r_1+ a_0)$. Если сумму $a_nr_n + a_{n-1} r_{n-1} + ... + a_1r_1+ a_0$ обозначить буквой s, то будем иметь: $x = (a_nq_n + a_{n-1} q_{n-1}+...+ a_1q_1)b + s$. Разделим s на b: $s = bq + r$, где $0 < r < b$. Тогда $x = (a_nq_n + a_{n-1} q_{n-1}+...+ a_1q_1)b +(bq + r) =(a_nq_n + a_{n-1} q_{n-1} +...+ a_1q_1 + q)b + r$. Короче: $x= b*Q + r$, где $Q = a_nq_n + a_{n-1} q_{n-1} +...+ a_1q_1 + q$ и $0 < r < b$. Равенство $x= b*Q$ означает, что r является остатком при делении x на b, причем r - число единственное согласно теореме о единственности частного и остатка при делении натуральных чисел. Таким образом, установлено, что при делении натурального числа $x = a_n*10^n + a_{n-1}* 10^{n-1} + ... + a_1*10 + a_0$ на натуральное число b получается такой же остаток r, как и при делении на число b суммы s. Теорема доказана.

Используя признак делимости Паскаля, можно доказать следующий признак делимости чисел на 11: *для того, чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11*. Обычно при нахождении разности из большего числа вычитают меньшее. Например, число 540309 делится на 11, так как (4+3+9)–(5+0+0)=11, 11: 11. Число 236 не делится на 11, поскольку (2+6)–3=5, но 5 не кратно 11.

Докажем также следующие утверждения:

1. Произведение двух последовательных натуральных чисел n и $n+1$ делится на 2.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n\cdot(n+1)$ делится на 2, надо рассмотреть две возможности:

1) n делится на 2, т.е. $n=2k$. Тогда произведение $n\cdot(n+1)$ будет иметь вид: $2k\cdot(2k+1)$. Это произведение делится на 2, так как первый множитель в нем делится на 2;

2) n не делится на 2, т.е. $n=2k+1$. Тогда произведение $n\cdot(n+1)$ будет иметь вид: $(2k+1)\cdot(2k+2)$. Это произведение делится на 2, так как второй множитель делится на 2.

2. Произведение трех последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на 3.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ делится на 3, надо рассмотреть три возможности:

1) n делится на 3, т.е. $n=3k$. Тогда $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ будет иметь вид: $3k\cdot(3k+1)\cdot(3k+2)$. Это произведение делится на 3, так как первый множитель в нем делится на 3;

2) n при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. $n=3k+1$. Тогда произведение $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ будет иметь вид: $(3k+1)\cdot(3k+2)\cdot(3k+3)$. Это произведение делится на 3, т.к. третий множитель делится на 3;

3) n при делении на 3 дает в остатке 2, т.е. $n=3k+2$. Тогда произведение $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ будет иметь вид: $(3k+2)\cdot(3k+3)\cdot(3k+4)$. Это произведение делится на 3, т.к. второй множитель в нем делится на 3.

Репозиторий ВГУ

На основании задач 20 и 21 можно сформулировать утверждение, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

Рассмотрим задачу. Докажем, что произведение четырех последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ делится на 4.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ делится на 4 надо рассмотреть четыре возможности:

1) n делится на 4, т.е. $n=4k$. Тогда $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ будет иметь вид: $4k\cdot(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)$. Это произведение делится на 4, так как первый множитель в нем делится на 4;

2) n при делении на 4 дает в остатке 1, т.е. $n=4k+1$. Тогда $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ будет иметь вид: $(4k+1)\cdot(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)$. Это произведение делится на 4, так как последний множитель делится на 4;

3) n при делении на 4 дает в остатке 2, т.е. $n=4k+2$. Тогда $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ будет иметь вид: $(4k+2)\cdot(4k+3)\cdot(4k+4)\cdot(4k+5)$. Это произведение делится на 4, так как третий множитель делится на 4;

4) n при делении на 4 дает в остатке 3, т.е. $n=4k+3$. Тогда $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ будет иметь вид: $(4k+3)\cdot(4k+4)\cdot(4k+5)\cdot(4k+6)$. Это произведение делится на 4, так как второй множитель делится на 4.

Так как произведение $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ содержит произведение двух, трех последовательных натуральных чисел, то оно делится на 2 и на 3.

27. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ И НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Рассмотрим известные из школьного курса математики понятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя натуральных чисел, сформулируем их основные свойства, опустив их доказательства.

Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется ***наименьшим общим кратным*** этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b условимся обозначать $K(a,b)$.

Например, два числа 12 и 18 общими кратными являются: 36,72,108,144,180 и т.д. Число 36 – наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать К(12,18)=36.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

Репозиторий ВГУ

1. Наименьшее общее кратное чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из данных чисел, то есть если $a > b$, то $K(a,b) \geq a$.

3. Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Общим делителем натуральных чисел a и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.

Наибольшее общее число из всех общих делителей чисел a и b называется ***наибольшим общим делителем*** данных чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b условимся обозначать $D(a, b)$.

Например, для чисел 12 и 18 общими делителями являются числа: 1, 2, 3, 6. Число 6 – наибольший общий делитель чисел 12 и 18. Можно записать: $D(12, 18)=6$.

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чисел a и b. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то $D(a, b) = 1$, а числа a и b называются ***взаимно простыми.***

Например, числа 14 и 15 - взаимно простые, так как $D(14, 15)= 1$. Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утверждения:

1. Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и является единственным.
2. Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит меньшего из данных чисел, т.е. если $a < b$, то $D(a, b) \leq a$.
3. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b и их наибольший общий делитель взаимосвязаны: произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел a и b равно произведению этих чисел, т.е. $K(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$.

Из этого утверждения вытекают следующие следствия:

а) *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел,* т. е.

$D(a,b)= 1 \quad => \quad K(a,b) = a \cdot b$. Например, чтобы найти наименьшее общее кратное чисел 14 и 15, достаточно их перемножить, так как $D(14, 15) = 1$.

б) Для того чтобы натуральное число а делилось на произведение взаимно простых чисел т и п, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на т, и на п.

Это утверждение представляет собой **признак делимости на числа, которые можно представить в виде произведения взаимно простых чисел.**

Репозиторий ВГУ

Например, так как 6 = 2·3 и $D(2, 3) = 1$, то получаем признак делимости на 6: для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

в) Частные, получаемые при делении двух данных чисел на их наибольший общий делитель, является взаимно простыми числами.

Этим свойством можно пользоваться при проверке правильности найденного наибольшего общего делителя данных чисел. Например – проверим, является ли число 12 наибольшим общим делителем чисел 24 и 36. Для этого, согласно последнему утверждению, разделим 24 и 36 на 12. Получим соответственно числа 2 и 3, которые являются взаимно простыми. Следовательно, D(24, 36) = 12.

28. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают простые и составные числа.

Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.

Например, число 13 – простое, поскольку у него только два делителя: 1 и 13.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Так число 4 составное, у него три делителя: 1, 2 и 4.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом в связи с тем, что оно имеет только один делитель.

Чисел, кратных данному числу, можно назвать как угодно много, - их бесконечное множество. Так, числа, кратные 4, образуют бесконечный ряд: 4, 8, 12, 16, 20, 24, … , и все они могут быть получены по формуле $a = 4q$, где q принимает значения 1, 2, 3, … .

Докажем некоторые ***свойства простых чисел.***

1. Если простое число p делиться на некоторое натуральное число n, отличное от 1, то оно совпадает с n.

Доказательство. Если бы $p \neq n$, то оно имело бы три делителя: 1, n и p, а тогда оно не было бы простым.

2. Если p и q – различные простые числа, то p не делиться на q.

Доказательство. Так как p – простое, то оно делиться на 1 и само на себя. Но по условию q – простое и $p \neq q$. Значит, оно делиться на q, на 1 и отлично от 1. Значит, q не является делителем числа p.

3. Если натуральное число a не делиться на простое число p, то a и p взаимно простые.

Репозиторий ВГУ

Доказательство. Возьмем НОД(a, p) = d. Тогда p⋮d. Но простое число p имеет лишь два делителя: 1 и p . Поэтому либо d=p, либо d=1. Если бы d=p, то a⋮p вопреки условию. Значит, остается лишь случай d=1. А в этом случае a и p взаимно простые.

4. Если произведение двух натуральных чисел a и b делиться на простое число p, то хотя бы одно из них делиться на p.

Доказательство. Предположим, что, a не делиться на p. Тогда по свойству 3 числа a и p взаимно простые. Но так как a·b делится на p, и a и p взаимно простые, то b делиться на p.

5. Если натуральное число больше 1, то оно имеет, хотя бы один простой делитель. (Без доказательства).

6. Наименьший простой делитель составного числа, aа не превосходит $\sqrt{a}$. (Без доказательства).

Это утверждается в теореме, называемой основной теоремой арифметики натуральных чисел.

Теорема. Любое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.

Доказательство. Доказательство существования. Предположим, что существуют составные числа, которые нельзя разложить на простые множители. Тогда в множестве **А** таких чисел есть наименьшее число *a.* Так как в множестве **А** все числа составные, то и *a* – составное число. Поэтому его можно разложить в произведение двух множителей a_1 и a_2, каждый из которых меньше, чем *a*. Но тогда числа a_1 и a_2 не принадлежат множеству **А**. Поэтому они или простые, или разлагаются в произведение простых чисел. Если $a_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $a_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, где $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ – простые числа, то $a = a_1 \cdot a_2 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$. Мы получили разложение *a* на простые множители, а это противоречит предположению.

Доказательство единственности, т.е. того, что два разложения составного числа на простые множители могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей.

Предположим, что существуют натуральные числа, имеющие различные разложения на простые множители. Обозначим множество этих чисел через **А**. В нём есть наименьшее число *a*, которое имеет два различных разложения на простые множители: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Тогда $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Правая часть этого равенства делится на простое число q_1. Из свойства 4 простых чисел следует, что хотя бы один из множителей $p_1, \ldots, p_m$ делится на q_1. Переставляя, если это понадобится, множители, можно считать, что на q_1 делится p_1. Но если простое число p_1 делится на простое число q_1, то эти числа равны (свойство 1). Сократим обе части равенства на p_1. Получим: $c = p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, где $c = a : p_1$. Так как $p_1 > 1$, то $c < a$. Но по предположению *a* – наименьшее из

Репозиторий ВГУ

чисел множества **А**. Значит, число c может иметь лишь одно разложение на простые множители, а это значит, что разложения $c = p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $c = q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$ могут отличаться друг от друга лишь порядком множителей. Но так как $p_1 = q_1$, то разложения $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$ отличаются друг от друга лишь порядком множителей. Это противоречит предположению. **Теорема доказана.**

Например, запись 110 = 2 · 5 · 11 есть представление числа 110 в виде произведения простых множителей или ***разложение его на простые множители.***

Два разложения числа на простые множители считают одинаковыми, если они отличаются друг от друга, лишь порядком множителей. Поэтому представление числа 110 в виде произведения 2 · 5 · 11 или произведения 5 · 2 · 11 есть, по существу, одно и то же разложение числа 110 на простые множители.

Раскладывая числа на простые множители, используют признаки делимости на 2, 3, 5 и др. Напомним один из способов записи разложения чисел на простые множители. Разложим, например, на множители число 90. Число 90 делится на 2. Значит, 2 есть один из простых множителей в разложении числа 90. Разделим 90 на 2. Число 2 запишем справа от знака равенства, а частное 45 − под числом 90. Число 45 делим на простое число 3, получаем 15. Делим 15 на 3, получаем 5. Число 5 − простое, при делении его на 5 получаем 1. Разложение на множители закончено.

90 = 2 · 3 · 3 · 5
45
15
5
1

При разложении числа на простые множители произведение одинаковых множителей представляют в виде степени: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Такое разложение числа на простые множители называют ***каноническим.***

В связи с возможностью представлять любое составное число в виде произведения простых множителей возникает необходимость определять, является данное число простым или составным. Эту задачу умели решать еще древнегреческие математики, которым были известны многие свойства простых чисел. Так, Эратосфеном (III в. до н.э.) был придуман способ получения простых чисел, не превышающих натурального числа a. Воспользуемся им для поиска всех простых чисел до 50.

Выпишем все натуральные числа от 1 до 50 и зачеркнем число 1 − оно не является простым. Число 2 − простое, обведем его кружком.

Репозиторий ВГУ

После этого зачеркиваем каждое второе число, стоящее после 2, т.е. числа 4, 6, 8,...

Первое незачёркнутое число 3 является простым, обведем его кружком. И вычеркнем каждое третье число, стоящее после 3, т.е. числа 9, 15, ... (числа 6, 12 и др. зачеркнуты раньше).

Первое незачёркнутое число 5 является простым, его также обведем кружком. Зачеркнем каждое пятое число после 5 и т.д.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Те числа, которые останутся после четырех вычеркиваний (исключая числа 2, 3, 5 и 7), не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7. В арифметике доказано, что если натуральное число *a,* большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадрат которых не превосходит *a,* то *a* число простое. Поскольку $7^2 = 49$, а $49 < 50$, то все оставшиеся числа − простые.

Итак, простыми числами, не превосходящими 50, являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Описанный способ получения простых чисел называется решетом Эратосфена, так как позволяет отсеивать одно за другим составные числа.

С помощью метода, предложенного Эратосфеном, можно отыскивать все простые числа, не превосходящие заданного числа *a.* Но он не дает ответа на вопрос, конечно или нет множество простых чисел, − ведь могло бы оказаться, что все числа, начиная с некоторого, составные и множество простых чисел конечно. Решением этой проблемы занимался другой греческий математик − Евклид. Он доказал следующую теорему о том, что множество простых чисел бесконечно.

Теорема. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Предположим, что множество простых чисел конечное и исчёрпывается числами 2, 3, 5, 7, …, *p,* где *p* − самое большое простое число. Перемножим все простые числа и их произведение обозначим через *a.* Прибавим к этому числу 1. Каким будет полученное число $a + 1$ − простым или составным?

Простым число $a + 1$ быть не может, потому что оно больше самого большого простого числа, а по предположению таких простых чисел не существует. Но составным оно тоже быть не может: если $a + 1$ составное, то оно должно иметь хотя бы один простой делитель *q*.

Репозиторий ВГУ

Так как число $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p$ также делится на это простое число q, то и разность $(a + 1) - a$, т.е. число 1, делится на q, что невозможно.

Итак, число a не является ни простым, ни составным, но этого тоже не может быть - всякое число, отличное от 1, либо простое, либо составное. Следовательно, наше предположение о том, что множество простых чисел конечное и есть самое большое простое число, неверно и значит, множество простых чисел бесконечное.

29. СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ И НАИМЕНЬШЕГО ОБЩЕГО КРАТНОГО ЧИСЕЛ

Рассмотрим сначала способ, основанный на разложении данных чисел на простые множители.

Пусть даны два числа 3600 и 288. Представим их в каноническом виде: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Найдем наибольший общий делитель данных чисел. В его разложение должны войти все *общие простые множители,* которые содержатся в разложениях чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с *наименьшим показателем,* с каким он входит в оба разложения. Следовательно, $D(3600, 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

Вообще ***чтобы найти наибольший общий делитель*** данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;
2) образуют произведение общих для всех данных чисел простых множителей, каждый с наименьшим показателем, каким он входит во все разложения данных чисел;
3) находят значение этого произведения - оно и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 3600 и 288. В его разложение должны войти все простые множители, которые содержатся *хотя бы в одном из разложений* чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с *наибольшим показателем,* с каким он входит в оба разложения. Следовательно, $D\ (3600, 288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 7200$.

Вообще ***чтобы найти наименьшее общее кратное*** данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;
2) образуют произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных-чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;
3) находят значения этого произведения, оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Репозиторий ВГУ

Найдем наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 60, 252 и 264.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел, образуем произведение общих для всех данных разложений простых множителей, каждый с наименьшим показателем, с каким он входит во все решения данных чисел: $D(60, 252, 264) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Наименьшее общее кратное чисел можно найти, образовав произведение всех простых множителей, находящихся в данных разложениях, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел, т.е. $K(60, 252, 264) = 2^3 \cdot \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$.

Найдем наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 48 и 245.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде: $48 = 2^4 \cdot 3$, $245 = 5 \cdot 7^2$.

Так как разложения данных чисел не содержат общих простых множителей, то $D(48, 245) = 1$, а $K(48, 245) = 48 \cdot 245 = 10760$.

Отыскание наибольшего общего делителя двух натуральных чисел по их каноническому виду требует предварительного разложения чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа не велики, но для многозначных чисел найти их каноническое разложение бывает трудно. Существует способ отыскания наибольшего общего делителя, требующий лишь деления с остатком. Этот способ был предложен Евклидом, и его называют ***алгоритмом Евклида***. Он основан на следующих трех утверждениях:

1. Если a делится на b, то $D(a, b) = b$.

Доказательство: Так как a делится на b и b делится на b, то b общий делитель чисел a и b. Но любой делитель числа b не превосходит этого числа. Поэтому все общие делители a и b не превосходят b. Значит
$b = D(a, b)$.

2. Если $a = bq + r$ и $r < b$, то множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел.

Доказательство: Пусть d – общий делитель b и r. Так как b и r делятся на d, то и $a = bq + r$ делится на d, значит, любой общий делитель чисел b и r является общим делителем чисел b и a. Обратно, если b – общий делитель a и b, то d является и делителем r, так как $r = a – bq$. Значит, любой общий делитель a и b является общим делителем b и r. Таким образом множества совпадают.

3. Если $a = bq + r$ и $r < b$, то $D(a, b) = D(b, r)$.

Доказательство: По утверждению 2 множества общих делителей совпадают. А тогда оба множетва имеют один и тот же

Репозиторий ВГУ

наибольший элемент, т.е. $D(a, b) = D(b, \text{r})$.

Сформулируем теперь **алгоритм Евклида** для нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел a и b.

Пусть $a > b$.

Если a делится на b, то $D\{a, b) = b$.

Если при делении a на b, получается остаток r, то $a = bq + r$ и $D(a, b) = D(b, r)$ и задача свелась к отысканию наибольшего общего Делителя чисел b и r.

Если b делится на r, то $D(b, r) = r$ и тогда $D(a, b) = r$.

Если при делении b на r получается остаток r_1, то $b = rq_1 + r_1$ и поэтому $D(r, r_1) = D(b, r) = D(a, b)$.

Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов получим остаток, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот наименьший, отличный от нуля, остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a *и* b.

Найдем при помощи алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел 2585 и 7975. Процесс последовательного деления будем записывать так:

```
                _7975 |2585
                 7755   3        7975=2585·3+220
           _2585 |220
            220    11            2585=220·11+165
            _385
              220
       _220 |165
        165   1                  220=165·1+55
   _165 |55
    165   3                      165=55·3+0
      0
```

В последнем случае остаток равен нулю. Значит, D(7975, 2585) = 55.

30. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НА СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Теорема (общий признак делимости на составное число): Для того, чтобы натуральное число x делилось на составное число $n = bc$, где числа b и c таковы, что $D(b.c) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на b и на c.

Репозиторий ВГУ

Доказательство: Пусть число х делится на n. Тогда, из того, что x делится на n и n делится на b (по свойству транзитивности отношения делимости) следует, что x делится на b. Из того, что x делится на n и n делится на c (по свойству транзитивности отношения делимости) следует, что x делится на c. Таким образом, мы показали, что для того, чтобы натуральное число x делилось на составное число $n = bc$, необходимо, чтобы оно делилось на b и на c.

Докажем достаточность условия. Так как x делится на b и на c, то x – общее кратное чисел b и c. Но любое общее кратное делится на их наименьшее общее кратно. Значит, x делится на $K(b, c)$. Поскольку $D(b.c) = 1$, то $K(b, c) = x$. Следовательно, х делится на n.

Признак делимости на 6:

Для того, чтобы число x делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Признак делимости на 12:

Для того, чтобы число x делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.

Признак делимости на 15:

Для того, чтобы число x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5.

Доказательство этих признаков вытекает из доказательств общего признака делимости на составное число.

Заметим, что выше данную теорему можно применять многократно. Рассмотрим, например, **признак делимости на 60**. Для того, чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 15. Но в свою очередь, число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5. Поэтому признак делимости на 60 может быть сформулирован иначе: для того, чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, на 3, на 5.

Рассмотрим задачу. Установим, делятся ли числа 1548 и 942 на 18. Вначале сформулируем признак делимости на 18: для того, чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Пользуясь признаками делимости на 2 и на 9, устанавливаем, что 1548 делится на 2 и на 9, следовательно, делится ни на 18. число 942 делится на 2, но не делится на 9. следовательно, число 942 на 18 не делится.

Репозиторий ВГУ

О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Большинство применений математики связано с измерением величин. Однако для этих целей натуральных чисел недостаточно: не всегда единица величины укладывается целое число раз в измеряемой величине. Чтобы в такой ситуации точно выразить результат измерения, необходимо расширить запас чисел, введя числа, отличные от натуральных. К этому выводу люди пришли еще в глубокой древности: измерение длин, площадей, масс и других величин привело сначала к возникновению дробных чисел - получили рациональные числа, а в V в до н.э. математиками школы Пифагора было установлено, что существуют отрезки, длину которых при выбранной единице длины нельзя выразить рациональным числом. Позднее, в связи с решением этой проблемы, появились числа иррациональные. Рациональные и иррациональные числа назвали действительными. Строгое определение действительного числа и обоснование его свойств было дано в XIX в.

Взаимосвязи между различными множествами чисел (N, Z, Q и R) можно изобразить наглядно при помощи кругов Эйлера (рис 26).

Рис. 26

Действительные числа – не последние в ряду различных чисел. Процесс, начавшийся с расширения множества натуральных чисел, продолжается и сегодня – этого требует развитие различных наук и самой математики.

Знакомство учащихся с дробными числами происходит, как правило, в начальных классах. Затем понятие дроби уточняется и расширяется в средней школе. В связи с этим учителю необходимо владеть понятием дроби и рационального числа, знать правила выполнения действий над рациональными числами, свойства этих действий. Все это нужно не только для того, чтобы математически грамотно ввести понятие дроби и обучать младших школьников выполнять с ними действия, но и, что не менее важно, видеть взаимосвязи множеств рациональных и действительных чисел с множеством натуральных чисел. Без их понимания нельзя решить проблему преемственности в обучении математике в начальных и последующих классах школы.

Расширение множества N натуральных чисел будет происходить в такой последовательности: сначала строится множество Q_+ положительных рациональных чисел, затем показывается, как его можно расширить до множества R_+ положительных действительных

Репозиторий ВГУ

чисел, и, наконец, описывается расширение множества R_+ до множества R всех действительных чисел.

31. ПОНЯТИЕ ДРОБИ

Пусть требуется измерить длину отрезка х с помощью единичного отрезка е (рис.27). При измерении оказалось, что отрезок х состоит из трех отрезков, равных е, и отрезка, который короче отрезка е. В этом случае длина отрезка х не может быть выражена натуральным числом.

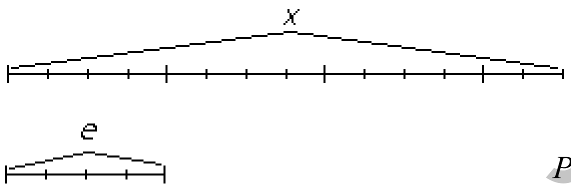


Рис. 27

Однако если отрезок е разбить на 4 равные части, то отрезок х окажется состоящим из 14 отрезков, равных четвертой части отрезка е. И тогда, говоря о длине отрезка х, мы должны указать два числа 4 и 14: четвертая часть отрезка е укладывается в отрезке точно 14 раз. Поэтому условились длину отрезка х записывать в виде $\frac{14}{4} \cdot E$, где Е – длина единичного отрезка е, а символ $\frac{14}{4}$ называть дробью.

В общем виде понятие дроби определяют так.

Пусть даны отрезок х и единичный отрезок е, длина которого Е. Если отрезок х состоит из m отрезков, равных n-ой части отрезка е, то длина отрезка х может быть представлена в виде $\frac{m}{n} \cdot E$***, где символ*** $\frac{m}{n}$ ***называют дробью (и читают “эм энных”).***

В записи дроби $\frac{m}{n}$ числа m и n – натуральные, m называется ***числителем****, n –* ***знаменателем*** дроби.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется правильной, если ее числитель меньше знаменателя, и неправильной, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Ранее показано, что четвертая часть отрезка е уложилась в отрезке *x* точно 14 раз. Очевидно, это не единственный вариант выбора такой части отрезка *е*, которая укладывается в отрезок *х* целое число раз. Можно взять восьмую часть отрезка *е*, тогда отрезок *х*

Репозиторий ВГУ

будет состоять из 28 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{28}{8}$. Можно взять шестнадцатую часть отрезка *e*, тогда отрезок *x* будет состоять из 56 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{56}{16}$.

Вообще длина одного и того же отрезка x при заданном единичном отрезке e может выражаться различными дробями, причем, если длина выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{m \cdot k}{n \cdot k}$, где k – натуральное число.

Теорема. Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $m \cdot q = n \cdot p$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Две дроби $\frac{m}{n}$ ***и*** $\frac{p}{q}$ ***называются равными, если*** $mq = np$.

Если дроби равны, то пишут $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Например, $\frac{17}{3} = \frac{119}{21}$, так как $17 \cdot 21 = 119 \cdot 3 = 357$, а $\frac{17}{19} \neq \frac{23}{27}$, потому что $17 \cdot 27 = 459$, а $19 \cdot 23 = 437$ и $459 \neq 437$.

Из сформулированных выше теоремы и определения следует, что две дроби равны тогда и только тогда, когда они выражают длину одного и того же отрезка.

Нам известно, что отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.

Из определения равных дробей вытекает ***основное свойство дроби.*** Напомним его.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или **разделить на одно и то же число, то получится дробь, равная данной.**

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Сокращение дробей – это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Репозиторий ВГУ

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся только на единицу, то дробь называют *несократимой*. Например, $\frac{5}{17}$ – несократимая дробь, так как её числитель и знаменатель делятся одновременно только на единицу, т.е D(5, 17) = 1.

Приведение дробей к общему знаменателю – это замена данных дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели. Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем – их наименьшее кратное K(n, q).

Приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{4}{35}$.

Решение. Разложим числа 15 и 35 на простые множители: $15 = 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$. Тогда $K(15{,}35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Поскольку $105 = 15 \cdot 7 = 35 \cdot 3$, то $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{56}{105}$, $\frac{4}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \frac{12}{105}$.

32. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Отношение равенства является отношением эквивалентности на множестве дробей, поэтому оно порождает на нём классы эквивалентности. В каждом таком классе содержатся равное между собой дроби. Например, множество дробей $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\}$ – это один класс, множество дробей $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\}$ – это другой класс и т.д.

Дроби одного класса выражают длину одного и того же отрезка. Но длина отрезка должна представляться единственным числом. Поэтому считают, что равные дроби – это различные записи одного и того же положительного рационального числа.

Положительным рациональным числом называется класс дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись (представление) этого числа.

Например, о дроби $\frac{9}{10}$ мы должны говорить, что она является записью некоторого рационального числа. Однако часто для краткости говорят: $\frac{9}{10}$ – это рациональное число.

Репозиторий ВГУ

Множество всех положительных рациональных чисел принято обозначать символом ***Q***+. Определим на это множество отношение равенства.

Если положительное рациональное число a ***представить дробью*** $\frac{m}{n}$***, а положительное рациональное число*** b ***– другой дробью*** $\frac{p}{q}$***, то*** $a = b$ ***тогда и только тогда, когда*** $mq=np$***.***

Из данного определения следует, что равные рациональные числа представляются равными дробями. Среди всех записей любого положительного рационального числа выделяют дробь, которая является несократимой, и доказывают, что любое рациональное число представимо единственным образом несократимой дробью (мы это доказательство опускаем). Для того чтобы рациональное число $\frac{m}{n}$ представить несократимой дробью, достаточно числитель m и знаменатель n разделить на их наибольший общий делитель.

Выяснить теперь, как определяются арифметические действия с положительными рациональными числами.

Пусть при некотором единственном отрезке e длина отрезка x выражается дробью $\frac{m}{n}$, а длина отрезка y – дробью $\frac{p}{n}$, и пусть отрезок z состоит из отрезков x и y. Такая n-ая часть отрезка e укладывается в отрезок z m+p раз, т.е. длина отрезка z выражается дробью $\frac{m+p}{n}$. Поэтому полагают, что $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

Если положительное рациональное число a ***представить дробью*** $\frac{m}{n}$***, а положительное рациональное число*** b ***– дробью*** $\frac{p}{n}$***, то их суммой называется число*** $a+b$***, которое представляется дробью*** $\frac{m+p}{n}$***.***

Таким образом по определению

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}. \qquad (1)$$

Можно доказать, что при замене дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, представляющих числа *a* и *b*, равными им дробями, дробь $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$ заменяется равной ей дробью. Поэтому сумма рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей.

В определении суммы рациональных чисел мы использовали их представления в виде дробей с одинаковыми знаменателями. Если же числа *a* и *b* представлены дробями с различными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применить правило (1).

Сложение положительных рациональных чисел коммутативно и ассоциативно,

$(\forall a,b \in \boldsymbol{Q}_{+})\ \ a + b = b + a;$

$(\forall a,b,c \in \boldsymbol{Q}_{+})\ \ (a + b) + c = a + (b + c).$

Докажем, например, ***коммутативность сложения***. Представим числа a и b дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$. Тогда сумма a+b представляется дробью $\frac{m+p}{n}$, а сумма b+a – дробью $\frac{p+m}{n}$. Так как m, p, n – натуральные числа, то m+p = p+m и, следовательно, a+b = b+a. Таким образом, коммутативность сложения положительных рациональных чисел вытекает из коммутативности сложения натуральных чисел.

Если положительное числа а представлено дробью $\frac{m}{n}$***, а положительное рациональное число b – дробью*** $\frac{p}{q}$ ***, то их произведением называется число ab, которое представляет дробью*** $\frac{mp}{nq}$**.**

Таким образом, по определению,

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что при замене дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, представляющих числа a и b, равными им дробями, дробь $\frac{mp}{nq}$ *заменяется равной ей дробью.* Поэтому произведение чисел *a* и *b* не зависит от выбора представляющих их дробей.

Умножение положительных рациональных чисел *коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения и вычитания.* Доказательство этих свойств основывается на определении умножения и сложения положительных рациональных

Репозиторий ВГУ

чисел, а также на соответствующих свойствах сложения и умножения натуральных чисел.

Определение сложения положительных рациональных чисел дает возможность определить отношение «меньше» на множестве Q_+.

Пусть a и b - положительные рациональные числа. Считают, что число b меньше числа a, если существует такое положительное рациональное число c, что a =b + c.

В этом же случае считают, что число *a* больше числа *b*. Пишут $b < a$,
$a > b$.

Так определенное отношение «меньше» обладает рядом свойств, которые мы приводим без доказательства.

1. Отношение «меньше» на множестве Q_+ антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка, а множество Q_+ упорядоченным множеством.

2. Если рациональные числа *a* и *b* представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ (т.е. дробями, имеющими одинаковые знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $m < p$.

3. Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (т.е. дробями, имеющими разные знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $mq < np$.

4. Во множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа.

5. Между любыми двумя различными числами *a* и *b* из Q_+ заключено бесконечно много чисел этого же множества. Это свойство называют свойством плотности множества Q_+.

6. Во множестве положительных рациональных чисел нет наибольшего числа.

Вычитание положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная сложению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: $a - b = c$ тогда и только тогда, когда $a = b + c$.

Разность $a - b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $b < a$. Если разность $a - b$ существует, то она единственна.

Репозиторий ВГУ

Используя определение и условие существования разности, можно получить правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, где $m < p$:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n} \qquad (3)$$

Деление положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная умножению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $a = bc$.

Из этого определения и правила нахождения произведения положительных рациональных чисел можно получить правило деления положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}. \qquad (4)$$

Из этого правила следует, что частное положительных рациональных чисел всегда существует.

33. МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КАК РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Чтобы множество $\mathbf{Q}_+$ положительных рациональных чисел являлось расширением множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел, необходимо выполнение ряда условий.

Первое условие - это существование между $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Q}_+$ отношения включения. Докажем, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}_+$.

Пусть длина отрезка x при единичном отрезке e выражается натуральным числом m. Разобьем единичный отрезок на n равных частей. Тогда n-ая часть единичного отрезка будет укладываться в отрезке x точно $m \cdot n$ раз, т.е. длина отрезка x будет выражена дробью $\frac{m \cdot n}{n}$. Значит, длина отрезка x выражается и натуральным числом m, и положительным рациональным числом $\frac{m \cdot n}{n}$. Но это должно n быть одно и то же число. Поэтому целесообразно считать, что дроби вида $\frac{m \cdot n}{n}$ являются записями натурального числа m. Следовательно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}_+$.

Репозиторий ВГУ

Так, например, натуральное число 6 можно представить в виде следующих дробей: $\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}, \frac{24}{4}, \frac{30}{5}$, и т. д.

Отношение между множествами **N** и **Q**$_+$ представлено на рисунке 28.

Рис.28

Числа, которые дополняют множество натуральных чисел до множества положительных рациональных, называются ***дробными.***

Второе условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел, - это согласованность операций, т.е. результаты арифметических действий, произведенных по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненных по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел. Нетрудно убедиться в том, что и это условие выполняется.

Пусть a и b - натуральные числа, $a+b$ - их сумма, полученная по правилам сложения в **N**. Вычислим сумму чисел a и b по правилу сложения в **Q**$_+$. Так как $a=\frac{a}{1}$, $b=\frac{b}{1}$, то $a+b=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1}=a+b$.

Убедиться в том, что второе условие выполняется и для других операций, можно аналогично.

Третье условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел - это выполнимость в **Q**$_+$ операции, не всегда осуществимой в **N**. И это условие соблюдено: деление, которое не всегда выполняется в множестве **N**, в множестве **Q**$_+$ выполняется всегда.

Сделаем еще несколько дополнений, раскрывающих взаимосвязи между натуральными и положительными рациональными числами.

1. Черту в записи дроби $\frac{m}{n}$ можно рассматривать как знак деления.

Действительно, возьмем два натуральных числа m и n и найдем их частное по правилу (4) деления положительных рациональных чисел:

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}$$

Обратно, если дана дробь $\frac{m}{n}$, то ее можно рассматривать как частное натуральных чисел m и n: $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n$.

2. Любую неправильную дробь можно представить либо в виде натурального числа, либо в виде смешанной дроби.

Репозиторий ВГУ

Пусть $\frac{m}{n}$ - неправильная дробь. Тогда *m* > *n.* Если *m* кратно *n,* то в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ является записью натурального числа. Если число *m* не кратно *n,* то разделим *m* на *n* с остатком: $m = nq + r$, где $r < n$. Подставим $nq + r$ вместо *m* в запись $\frac{m}{n}$ и применим правило (1) сложения положительных рациональных чисел:

$$\frac{m}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}.$$

Так как $r < n$, то дробь $\frac{r}{n}$ - правильная. Следовательно, неправильная дробь $\frac{m}{n}$ оказалась представленной в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие называется выделением целой части из неправильной дроби. Например, $\frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{5} = \frac{5 \cdot 3}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака сложения: т.е. вместо $3 + \frac{2}{5}$ пишут $3\frac{2}{5}$ и называют такую запись *смешанной дробью.*

Справедливо также утверждение: всякую смешанную дробь можно записать в виде неправильной дроби. Например:

$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}.$$

34. ЗАПИСЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

В практической деятельности широко используются дроби, знаменатели которых являются степенями 10. Их называют ***десятичными.***

Десятичной называется дробь вида $\frac{m}{10^n}$***,*** *где m и n* – ***натуральные числа.***

Репозиторий ВГУ

Десятичные дроби принято записывать без знаменателя. Например, дробь – $\frac{367}{10^2}$ записывают в виде 3,67, а дробь $\frac{7}{10^3}$ – в виде 0,007.

Выясним, как образуется такая запись.

Пусть дана дробь $\frac{m}{10^n}$, где m, $n \in$ N. Представим ее числитель в следующем виде:

$$m = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Тогда, по правилам действий над степенями при $n < k$, получим:

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0}{10^n} =$$

$$= a_k \cdot 10^{k-n} + a_{k-1} \cdot 10^{k-n-1} + \ldots + a_n + \frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}$$

Сумма $a_k \cdot 10^{k-n} + \ldots + a_n$ является записью целого неотрицательного числа (обозначим его буквой A), а сумма $\frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}$ представляет дробную часть числа, ее принято записывать без знаменателя в виде $\overline{a_{n-1} \ldots a_0}$. Таким образом, дробь $\frac{m}{10^n}$ можно представить в следующем виде: $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$, т.е. при записи дроби $\frac{m}{10^n}$ последние n цифр десятичной записи числа m отделяют запятой. Если числитель содержит менее чем n десятичных знаков, то перед ним пишут столько нулей, чтобы получилась $n+1$ цифра, после чего отделяют запятой n знаков, начиная с конца. Например,

$$\frac{47}{10^4} = \frac{00047}{10^4} = 0{,}0047$$

Как известно, сравнение десятичных дробей и арифметические действия над ними легко выполнять, если дроби имеют один и тот же знаменатель.

В основе приведения десятичных дробей к общему знаменателю лежит следующее утверждение: если к десятичной дроби $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной.

Это свойство позволяет приводить десятичные дроби к общему знаменателю следующим образом: если у одной дроби после запятой стоит n цифр, а у другой p цифр, причем $p < n$, то для приведения их к общему знаменателю достаточно к первой дроби приписать справа $p - n$ нулей. Тогда у обеих дробей после запятой будет стоять поровну цифр, а это значит, что они имеют один и тот же знаменатель.

Репозиторий ВГУ

Пользуясь этим правилом, легко выполнять сравнение десятичных дробей, так как оно сводится к сравнению натуральных чисел: чтобы сравнить две десятичные дроби, надо уравнять в них число десятичных знаков после запятой, отбросить запятые и сравнить получившиеся натуральные числа.

Например, $4{,}62517 > 4{,}623$, так как $4{,}623 = 4{,}62300$, а $4{,}62517 > 4{,}62300$, так как $462517 > 462300$.

Как известно, для дробей, имеющих одинаковые знаменатели, сложение и вычитание сводится к соответствующим операциям над их числителями. Это позволяет свести сложение и вычитание десятичных дробей к действиям над натуральными числами.

Например,

$$2{,}54 + 3{,}7126 = 2{,}5400 + 3{,}7126 = \frac{25400}{10000} + \frac{37126}{10000} = \frac{62526}{10000} = 6{,}2526$$

Умножение и деление десятичных дробей не требует приведения их к общему знаменателю, но они также сводятся к соответствующим действиям над натуральными числами.

Среди десятичных дробей выделяют и часто используют дробь $0{,}01$. Ее называют *процентом* и обозначают 1%. Запись $p\%$ обозначает $\frac{p}{100}$. Например, 25% - это дробь $\frac{25}{100}$, или $0{,}25$.

Проценты были введены, когда не существовало десятичных дробей. Чтобы производить расчеты по займам, определяли прирост капитала из расчета 100 денежных единиц. Этот прирост и называли числом процентов (pro centum - на сто).

Простота сравнения и выполнения действий над десятичными дробями приводит к следующему вопросу: любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ *(m, n e* N) можно записать в виде конечной десятичной дроби, т.е. дроби, у которой после запятой стоит конечное число цифр? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна десятичной, необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя *n* на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.

Доказательство. Пусть разложение знаменателя n на простые множители имеет вид $n = 2^r \cdot 5^s$ и пусть $r \geq s$. Тогда $\frac{m}{n} = \frac{m}{2^r \cdot 5^s} = \frac{m \cdot 5^{r-s}}{2^r \cdot 5^s \cdot 5^{r-s}} = \frac{5^{r-s} \cdot m}{2^r \cdot 5^r} = \frac{5^{r-s} \cdot m}{10^r}$.

Репозиторий ВГУ

Это значит, что $\frac{m}{n}=\frac{5^{r-s}\cdot m}{10^r}$.

Обратно. Пусть $\frac{m}{n}=\frac{a}{10^r}$, то есть $10^r\cdot m=a\cdot n$. Если бы в разложении знаменателя n на простые множители входило простое число p, отличное от 2 и 5, то $10^r\cdot m$ делилось бы на р. Но 10^r не делится на p, тогда m делится на p, и дробь $\frac{m}{n}$ можно было бы сократить на p вопреки предположению. Получили противоречие.

Так, например, дробь $\frac{23}{80}$ можно записать в виде десятичной: она несократима и $80=2^4\cdot 5$. Дробь $\frac{11}{15}$ несократима, но $15=3\cdot 5$. Поскольку в разложение знаменателя этой дроби входит множитель, отличный от 2 и 5, то дробь $\frac{11}{15}$ нельзя записать в виде десятичной.

Дробь $\frac{1}{3}$ нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. Но, деля 1 на 3, получаем, что $0{,}3<\frac{1}{3}<0{,}4$. Далее находим, что $0{,}33<\frac{1}{3}<0{,}34$; $0{,}333<\frac{1}{3}<0{,}334$ и т.д. Вообще для любого n имеем: $0{,}33..33<\frac{1}{3}<0{,}33..34$

Вместо того, чтобы писать бесконечное множество неравенств, говорят, что дроби $\frac{1}{3}$ соответствует ***бесконечная десятичная дробь*** $0{,}33..33$. Это означает, что если отбросить в бесконечной дроби все цифры, начиная с некоторой, то будем иметь число, меньшее $\frac{1}{3}$, а если в полученном числе увеличить последнюю цифру на 1, то будет число, большее $\frac{1}{3}$.

Любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной, приписав к ней справа последовательность нулей. Например, дробь 0,25 можно записать так: $0{,}25000..0\ldots$ Здесь для всех цифр, начиная с некоторой, получится число, не превосходящее $0{,}25$. Например, если оставить лишь одну цифру после запятой, то получится $0{,}2$, которое меньшее $0{,}25$, а если оставить три цифры после запятой, то

Репозиторий ВГУ

будет число $0{,}250$, равное $0{,}25$. Если же после отбрасывания увеличить последнюю цифру на 1,то имеем число, большее $0{,}25$ (например, $0{,}3$ или $0{,}251$).

Бесконечные десятичные дроби, которые получаются при записи положительного рационального числа, обладают особенностью - они являются ***периодическими.*** Это значит, что, начиная с некоторой цифры, они образуются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Например, число $\frac{3}{11}$ выражается бесконечной десятичной дробью $0{,}272727...27...$, а число $\frac{8}{55}$ - бесконечной десятичной дробью $0{,}1454545...45...$ Для краткости первую из дробей пишут в виде $0,(27)$, а вторую - в виде $0{,}1(45)$. В скобки заключают повторяющуюся группу цифр, которую называют периодом этой дроби. Отметим, что вместо $0,(27)$ можно было написать и $0{,}2(72)$, но эта запись более длинная.

Приведенные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема. Любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью.

Доказательство. Пусть рациональное число представлено несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Чтобы преобразовать ее в десятичную, надо выполнить деление натурального числа m на натуральное число n. При этом будут остатки, меньшие n, т.е. числа вида 0, 1, 2, ... ***n*-*1***. Если хотя бы один из остатков окажется равным нулю, то после деления получится конечная десятичная дробь (или, что то же самое, бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся последовательностью нулей). Если же все остатки отличны от нуля, то деление будет представлять собой бесконечный процесс, но количество различных остатков конечно, и поэтому, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повторится, что приведет к повторению цифр в частном.

Покажем на примере перевод периодических дробей в обыкновенные.

Пусть дана дробь 0.(28). Обозначим соответствующее ей рациональное число через a, тогда a=0.282828… Домножим обе части равенства на 100. Получим $100a$=28.2828…, $100a$=28+0.2828…, $100a=28+a$, $a=\frac{28}{99}$. Эта дробь несократимая.

Вообще чисто периодическая бесконечная десятичная дробь равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде дроби.

Пусть дана смешанно периодическая дробь 0.8(61) т.е. 0.86161…. Обозначим соответствующее ей рациональное число через *a*, тогда *a*=0.86161…. Умножив обе части этого равенства на 10, получим 10*a*=8.6161... - чисто периодическую дробь. Дальнейшие преобразования проводятся аналогично выполненным выше. Положим *x*=8.6161…. Умножим обе части этого равенства на 100: 100*x*=861.6161…, или 100*x*=861+0.6161…. Прибавим к обеим частям по 8: 100*x*+8=861+8.6161…. Но так как 8.6161…= *x*, получим уравнение 100*x*+8=861+*x*, откуда $x=\frac{861-8}{99}$. Подставим это значение *x* в равенство 10*a*=8.6161…: $10a=\frac{861-8}{99}$, откуда $a=\frac{867-8}{990}=\frac{853}{990}$.

Вообще смешанно периодическая дробь с нулем в целой части равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами, стоящими до начала второго периода, и числом, записанным цифрами, стоящими до начала первого периода, а знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде, и такого числа нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.

35. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Одним из источников появления десятичных дробей является деление натуральных чисел, другим – измерение величин. Выясним, например, как могут получиться десятичные дроби при измерении длины отрезка.

Пусть *x* – отрезок, длину которого надо измерить, *e* – единичный отрезок (рис.29). Длину отрезка *x* обозначим буквой *X*, а длину отрезка *e* – буквой *E*.

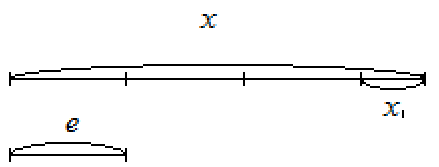


Рис.29

Пусть отрезок *x* состоит из *n* отрезков равных *e*, и отрезка x_1, который короче отрезка *e* (рис.) т.е. $n\cdot E<X<(n+1)\cdot E$. Числа *n* и *n+1* есть приближенные значения длины отрезка *x* при единице длины *E* с недостатком и с избытком с точностью до 1.

Репозиторий ВГУ

Чтобы получить ответ с большей точностью, возьмем отрезок e_1 – десятую часть отрезка *е* и будем укладывать его в отрезке x_1. При этом возможный два случая.

1) Отрезок e_1 уложился в отрезке x_1 точно n раз. Тогда длина n отрезка x выражается конечной десятичной дробью: $X = (n + \frac{n_1}{10}) \cdot E = \overline{n, n_1} \cdot E$. Например, $X = 3{,}4 \cdot E$.

2) Отрезок x_1 оказывается состоящим из *n* отрезков, равных e_1, и отрезка x_2, который короче отрезка e_1. Тогда $\overline{n_1, n} \cdot E < X < \overline{n, n_1, n_1'} \cdot E$, где $\overline{n, n_1}$ и $\overline{n, n_1, n_1'}$ - приближенные значения длины отрезка *х* с недостатком и с избытком с точностью до 0,1.

Ясно, что во втором случае процесс измерения длины отрезка *х* можно продолжать, взяв новый единичный отрезок e_2 - сотую часть *е*.

На практике этот процесс измерения длины отрезка на каком-то этапе закончится. И тогда результат измерения длины отрезка будет либо натуральное число, либо конечная десятичная дробь. Если же представить этот процесс измерения длины отрезка в идеале (как и делают в математике), то возможны два исхода:

1) На *k*-том шагу процесс измерения окончится. Тогда длина отрезка *х* выразится конечной десятичной дробью вида $\overline{n, n_1 n_2 .. n_k}$.

2) Описанный процесс измерения длины отрезка *х* продолжается бесконечно. Тогда отчет о нем можно представить символом $\overline{n, n_1 n_2 .. n_k ...}$, который называют бесконечной десятичной дробью.

Как убедиться в возможности второго исхода? Для этого достаточно произвести измерение длины такого отрезка, для которого известно, что его длина выражена, например, рациональным числом $5\frac{2}{3}$. Если бы оказалось, что в результате измерения длины такого отрезка получается конечная десятичная дробь, то это означало бы, что число $5\frac{2}{3}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби, что невозможно: $5\frac{2}{3} = 5{,}666...$.

Итак, при измерении длин отрезков могут получиться бесконечные десятичные дроби. Но всегда ли эти дроби периодические? Ответ на этот вопрос отрицателен: существуют отрезки, длины которых нельзя выразить бесконечной периодической дробью (т.е. положительным рациональным числом) при выбранной единице длины. Это было важнейшим открытием в математике, из

Репозиторий ВГУ

которого следовало, что рациональных чисел недостаточно для измерения отрезков.

Теорема. Если единицей длины является длина стороны квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом.

Доказательство. Пусть длина стороны квадрата выражается числом 1. Предположим противное тому, что надо доказать, т.е., что длина диагонали *AC* квадрата *ABCD* выражается несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Тогда по теореме Пифагора, выполнялось бы равенство $1^2+1^2=\frac{m^2}{n^2}$. Из него следует, что $m^2=2n^2$. Значит, m^2 - четное число, тогда и число m – четно (квадрат нечетного числа не может быть четным). Итак, $m=2p$. Заменив в равенстве $m^2=2n^2$ число m на $2p$, получаем, что $4p^2=2n^2$, т.е. $2p^2=n^2$. Отсюда следует, что n^2 четно, следовательно, n – четное число. Таким образом, числа m и n четны, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2, что противоречит предположению о ее несократимости. Установленное противоречие доказывает, что если единицей длины является длина стороны квадрата, то длину диагонали этого квадрата нельзя выразить рациональным числом.

Из доказанной теоремы следует, что существуют отрезки, длины которых нельзя выразить положительным числом (при выбранной единице длины), или, другими словами, записать в виде бесконечной периодической дроби. И значит, получаемые при измерении длин отрезков бесконечные десятичные дроби могут быть не периодическими.

Считают, что бесконечные непериодические десятичные дроби являются записью новых чисел – ***положительных иррациональных чисел***. Так как часто понятия числа и его записи отождествляют, то говорят, что бесконечные непериодические десятичные дроби – это и есть положительные иррациональные числа.

Мы пришли к понятию положительного иррационального числа через процесс измерения длин отрезков. Но иррациональные числа можно получить и при извлечение корней из некоторых рациональных чисел. Так, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{24}$ - это иррациональные числа. Иррациональными являются также lg 5, sin 31, числа π=3,14…, e=2,7828… и другие.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают символом $\mathbf{J}_+$.

Репозиторий ВГУ

Объединение двух множеств чисел: положительных рациональных и положительных иррациональных называют множеством положительных действительных чисел и обозначают $\mathbf{R}_+$. Таким образом, $\mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{J}_+ = \mathbf{R}_+$.

Любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью – периодической (если оно является рациональным), либо непериодической (если оно является иррациональным).

Действия над положительными действительными числами сводится к действиям над положительными рациональными числами.

Для этого надо ввести понятие приближенного значения действительного числа по недостатку и по избытку.

Пусть $a=n,\ n_1\ n_2\dots\ n_k\dots$ - некоторое действительное число. Приближенным значением числа а по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число $a_k=n,\ n_1\ n_2\dots\ n_k$ (т.е. приближенное значение числа а по недостатку получается, если взять целую часть и первые k цифр после запятой, а все остальные цифры отбросить).

Приближенным значением числа а$=n,\ n_1\ n_2\dots\ n_k\dots$ по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ называется число $a'_k=n,\ n_1\ n_2\dots\ n_k+\frac{1}{10^k}$ (т.е. приближенное значение числа a по избытку получается, если в записи $n,\ n_1\ n_2\dots\ n_k$ последнюю цифру увеличить на 1).

Для любого действительного числа а справедливо неравенство $a_k\ \ a< a'_k$.

Например, десятичным приближением числа $\sqrt{3}$=1,73205… по недостатку с точностью до 0,001 является число 1,732, а по избытку – число 1,733.

Видим, что десятичные приближения действительного числа являются конечными десятичными дробями. На этом и основываются, определяя действия над положительными действительными числами.

Пусть даны действительные числа a и b, a_k и b_k – их *приближенные значения по недостатку,* a'_k и b'_k - *приближенные значения по избытку.*

Суммой положительных действительных чисел a и b называется такое число a+b, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$a_k + b_k \leq a+b < a'_k + b'_k$.

Найдем, например, сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до 0,001. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,001:

$1{,}4142 \leq \sqrt{2} < 1{,}4143$,

$1{,}7320 \leq \sqrt{3} < 1{,}7321$.

Репозиторий ВГУ

Тогда $3{,}1462 \le \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}1464$, а $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146$ с точностью до 0,001.

Произведением положительных действительных чисел a и b называется число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$a_k \cdot b_k \le ab < a_k' b_k'.$$

Найдем, например, произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ с точностью до 0,1. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,01:

$1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42$,

$1{,}73 \le \sqrt{3} < 1{,}74$.

Тогда $2{,}4393 \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2{,}4708$, а $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2{,}4$ с точностью до 0,01.

Для любых положительных действительных чисел выполняются следующие равенства:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a \cdot b = b \cdot a$;
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
5) $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

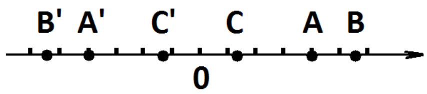
Вычитание положительных действительных чисел определяется как действие, обратное сложению. Для нахождения значения разности по недостатку и по избытку пользуются известными зависимостями между компонентами действий:

$$a_k - b_k' < a - b < a_k' - b_k.$$

Деление положительных действительных чисел определяется как действие, обратное умножению.

36. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Возьмем координатную прямую OX. Все точки, изображающие положительные действительные числа, располагаются справа от точки O. Например, точка A соответствует действительному числу 4, точка B – числу 5,5, точка C – числу $\sqrt{2}$



Отложим единичный отрезок от точки O 4 раза в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке $\overline{A}$ Относительно начала отсчета. Координату точки A' обозначим -4, т.е. A'(-4). Аналогично координатой точки B',

Репозиторий ВГУ

симметричной точке B, считают число -5,5, а координатой точки C’, симметричной точке C, считают число $-\sqrt{2}$. Числа 4 и -4, 5,5 и -5,5, $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ Называют противоположными. Числа, расположенные на координатной прямой в заданном направлении, называют положительными, а числа, расположенные на координатной прямой в направлении, противоположном заданному, - отрицательными. Число 0 не считается ни положительным ни отрицательным.

Объединение множества отрицательных действительных чисел с множеством положительных действительных чисел и нулем есть множество действительных чисел. Его обозначают буквой R.

Множество R действительных чисел и множество точек координатной прямой находятся во взаимном однозначном соответствии: каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу.

Действительные числа сравнивают, определяя отношения «меньше» и «больше» так: число a меньше числа $b (a < b)$, если оно расположено левее на координатной прямой; число a больше числа $b (a > b)$, если оно расположено правее на координатной прямой. Из этого определения вытекает, что любое отрицательное число меньше нуля. Кроме того, исходя из определений «меньше» и «больше» можно получить утверждение: $a < b$ тогда и только тогда, когда разность $a - b$ есть отрицательное число; $a > b$ тогда и только тогда, когда разность $a - b$ есть положительное число.

Для любых заданных действительных чисел a и b истинно одно и только одно из положений: $a < b$, $a > b$, $a = b$.

Расстояние от начала отсчета до точки, координата которой является число x, называется модулем числа и обозначается $|x|$.

Таким образом, $|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$

Приведем без доказательства свойство модуля действительного числа:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$.
5. $|a|^2 = a^2$.

Репозиторий ВГУ

Действия над действительными числами выполняются по следующим правилам.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) сумма двух положительных чисел есть число положительное, и находится по правилам, определенным во множестве положительных действительных чисел;

2) сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное; чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых;

3) сумма двух чисел, имеющих разные знаки, есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший.

Произведением двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) произведение двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определенным в множестве положительных действительных чисел;

2) произведение двух отрицательных чисел есть число положительное; произведение двух чисел, имеющих разные знаки, есть число отрицательное: чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел.

Вычитание и деление действительных чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Вычитание в множестве действительных чисел выполняется всегда, так же как и деление, за исключением случая деления на нуль.

Репозиторий ВГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.

2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.

3. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.

4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1988.

5. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Academa, 1999.

Репозиторий ВГУ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ

Репозиторий ВГУ