Несложно убедиться в том, что попарное умножение представленных корней дает один и тот же результат, а именно, числа:

$$q_1 = 12; \quad q_2 = 2; \quad q_3 = -8; \quad q_4 = -6; \quad q_5 = -4; \quad q_6 = -3.$$

Путем подстановки полученных чисел в (1) убеждаемся, что все они являются корнями исходного полинома.

Заключение. Таким образом, в ходе исследования установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней при существовании нелинейной связи конкретного типа между корнями данных полиномов.

1. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.
2. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является операция модифицированного дробного интегрирования Адамара [4], называемая дробным интегралом типа Адамара. Естественным образом возникает проблема обращения такой операции, что в свою очередь используется при решении уравнений интегральных преобразований. Настоящая работа посвящена этому аспекту.

Цель данного исследования состоит в обращении дробного интеграла типа Адамара в весовом пространстве суммируемых функций.

Материал и методы. Материалом исследования является операция дробного интегрирования типа Адамара. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Будем рассматривать функцию $f(x)$, представимую дробным интегралом типа Адамара от функции $\varphi(t) \in X_c^p(\Omega)$. Описание класса функций $X_c^p(\Omega)$ приведено в [2]:

$$X_c^p(a,b) = \left\{ h(t) : \int_a^b \left| t^c h(t) \right|^p \frac{dt}{t} < +\infty,\ 0 \le a < b \le \infty,\ c \in R, 1 \le p < \infty \right\},$$

$$\|h\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b \left| t^c h(t) \right|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

В [4] рассматривались дробные производные типа Маршо–Адамара $\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f$:

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^{\alpha} f(x), \ \ \mu \in R, \ \ 0 < \alpha < 1,$$

которые являются модификациями дробных производных Маршо–Адамара [3]. Конструкцию вида

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^{\alpha} f(x), \ \ \varepsilon > 0, 0 < \alpha < 1, \mu \in R$$

(1)

будем называть усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара. Поэтому, рассматривая функцию $f(x) \in X_c^p(R_+)$, где $R_+ = (0, +\infty)$, будем по определению полагать

$$\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f(x), \qquad (2)$$

при этом интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt$$

предполагается сходящимся, а сходимость в (2) понимается по норме пространства $X_c^p(\Omega)$, $\Omega = R_+$.

Далее в [4] было показано, что усечённая дробная производная типа Маршо–Адамара (1) может быть представлена в форме:

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \int_0^{\infty} K(t)\varphi\left(xe^{-\varepsilon t}\right)dt, \qquad (3)$$

где ядро $K(t) \in L_1(R_+)$ является усредняющим: $\int_0^{\infty} K(t)dt = 1, \quad K(t) > 0$ при $t>0$.

Это и позволило сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Если функция $f(x)$ представима дробным интегралом типа Адамара

$$f(x) = \left(\mathfrak{I}_{0+,\mu}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t)\frac{dt}{t} \quad (x>0),$$

$$\varphi \in X_c^p(R_+), 0<\alpha<1, 1\le p<\infty, \mu \ge 0, c \in R, \mu > c,$$

то

$$\varphi(x) = \mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f(x), \qquad (4)$$

где правая часть (4) определяется соотношением (2).

Доказательство. Так как правая часть (4) является пределом, то будем оценивать норму разности переменной величины и её предела:

$$\left\|\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f(x) - \varphi(x)\right\|_{X_c^p} = \left\|x^{c-1/p}[\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f(x) - \varphi(x)]\right\|_{L_p} =$$

$$= \left\|x^{c-1/p}[\int_0^{\infty} K(t)\varphi(xe^{-\varepsilon t})dt - \int_0^{\infty} K(t)\varphi(x)dt\right\|_{L_p} = \left\|\int_0^{\infty} K(t)x^{c-1/p}[\varphi(xe^{-\varepsilon t}) - \varphi(x)]dt\right\|_{L_p}.$$

Далее, применив обобщённое неравенство Минковского [1], будем иметь

$$\left\|\int_0^{\infty} K(t)x^{c-1/p}[\varphi\left(xe^{-\varepsilon t}\right) - \varphi(x)]dt\right\|_{L^p} \le \int_0^{\infty} K(t)\left\|x^{c-1/p}[\varphi\left(xe^{-\varepsilon t}\right) - \varphi(x)]\right\|_{L_p} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} K(t)\left\|[\varphi\left(xe^{-\varepsilon t}\right) - \varphi(x)]\right\|_{X_c^p} dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Заключение. Важность исследования свойств операторов дробного интегро-дифференцирования обусловлена их применением при отыскании ответов на разнообразные вопросы физики и механики в теории колебаний, теории теплопроводности, теории упругости. В работе получено обращение дробного интеграла типа Адамара на основании понятия усечённой дробной производной типа Маршо-Адамара.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік ВДУ. – 2009. – Т. 53, № 3. – С. 132–135.
3. Шлапаков, С.А. Производные Маршо-Адамара дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XX (67) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 12–13 марта 2015 г. – Витебск, 2015. – Т. 1. – С. 27–28.
4. Шлапаков, С.А. Усеченная дробная производная типа Маршо–Адамара / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII (69) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, 9–10 февраля 2017 г. – Витебск, 2017. – Т. 1. – С. 43–44.