$$rank[\alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t)] = rank[B_1(t), B_2(t)] = rank[B_1(t), B_2(t), P(t)] = m\,,$$
$$t \in D, \quad m \le n.$$

Определение 1. *Система (1) называется вполне управляемой в окрестности* D_0 *регулярной точки* t^0, *если для произвольных состояний* $x^0, x^1 \in R^n$ *существуют непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(t, x^0, x^1)$, $t \in D_0$, *и точка* $t^1 = (t_1^1, t_2^1),\ 0 < t_1^1, t_2^1 < \infty$, *такие, что система (1) вполне интегрируема и для некоторого частного решения системы (1) выполняются равенства*

$$x(t^0) = x^0, \qquad x(t^1) = x^1.$$

Решение задачи управляемости. Имеет место

Теорема 1. *Линейная нестационарная вполне интегрируемая система Пфаффа (1) с аналитическими элементами матриц вполне управляема в окрестности* D_0 *регулярной точки* t^0 *если существует вектор* $\alpha \in R^2$ *такой, что выполняется условие* $rank Q(\alpha, 0) = n$,

где $Q(\alpha, s) \equiv [Q_0(\alpha, s), Q_1(\alpha, s), \ldots, Q_{n-1}(\alpha, s)]$,

$$Q_0(\alpha, s) \equiv B(\alpha, s),\ \ Q_1(\alpha, s) \equiv A(\alpha, s)B(\alpha, s) - \frac{d}{ds}\ B(\alpha, s)\,,$$

$$Q_{\beta+1}(\alpha, s) \equiv A(\alpha, s)Q_\beta(\alpha, s) - \frac{d}{ds}\ Q_\beta(\alpha, s)\,,$$

$$A(\alpha, s) \equiv \alpha_1 A_1(\alpha_1 s + t_1^0, \alpha_2 s + t_2^0) + \alpha_2 A_2(\alpha_1 s + t_1^0, \alpha_2 s + t_2^0)\,,$$

$$B(\alpha, s) \equiv \alpha_1 B_1(\alpha_1 s + t_1^0, \alpha_2 s + t_2^0) + \alpha_2 B_2(\alpha_1 s + t_1^0, \alpha_2 s + t_2^0)\,.$$

Заключение. Для линейных вполне интегрируемых систем дифференциальных уравнений Пфаффа с матрицами, элементы которых являются аналитическими функциями получено достаточное условие обладания такими системами свойства полной управляемости. Это условие имеет вид рангового равенства от некоторой постоянной матрицы, построенной по известным матрицам исходной системы. Исследование носит фундаментальный характер.

1. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.–Л.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
2. Храмцов О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа // “Дифференц. Уравнения”, 1985. – Т. 21. – № 11. – С. 1933–1939.

ОБ ОДНОМ ТИПЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ КОРНЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ШЕСТОЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНЕЙ

М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Известным фактом является то, что существуют классы алгебраических уравнений высоких степеней, которые допускают разрешения в радикалах (некоторые композиционные, возвратные и другие) [1; 2]. Для таких классов уравнений актуально получение решений в символьном виде, что удобно делать с помощью систем компьютерной алгебры.

Цель исследования – установить необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (1)

$$P(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \tag{4}$$

с коэффициентами семейства полиномов четвертой степени вида (2)

$$Q_{4,i}(z) = z^4 + a_{1i} z^3 + a_{2i} z^2 + a_{3i} z + a_{4i} \tag{5}$$

при наличии определенного вида связи между корнями этих полиномов.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические уравнения шестой степени, разрешимые в радикалах. Методы исследования – методы алгебры и математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Обозначим корни i-го полинома из семейства (2) через p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i} и, кроме того, обозначим попарно их произведения

$$q_1 = p_{1i}p_{2i},\quad q_2 = p_{1i}p_{3i},\quad q_3 = p_{1i}p_{4i},\quad q_4 = p_{2i}p_{3i},\quad q_5 = p_{2i}p_{4i},\quad q_6 = p_{3i}p_{4i}.$$

Теорема. *Числа* $q_j \ (j=1,2,\ldots,6)$ *являются корнями полинома* (1) *тогда и только тогда, когда разрешима относительно* $a_k \ (k=1,2,3,4)$ *система уравнений*

$$c_1 = -a_2, \tag{6}$$

$$a_1a_3 - a_4 - c_2 = 0, \tag{7}$$

$$2a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_3^2 - c_3 = 0, \tag{8}$$

$$a_1a_3a_4 - a_4^2 - c_4 = 0, \tag{9}$$

$$c_5 = -a_2a_4^2, \tag{10}$$

$$c_6 = a_4^3. \tag{11}$$

В свою очередь, необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (3) – (8) *относительно* $a_k \ (k=1,2,3,4)$ *являются соотношения*

$$c_5 = c_4^2c_1/c_2^2, \tag{12}$$

$$c_6 = c_4^3/c_2^3. \tag{13}$$

При этом, решениями системы (3) – (8) *являются ровно* 4 *различных набора чисел* a_k $(k=1,2,3,4)$, *в которых все* a_2 *и* a_4 *определены единообразно* $a_2=-c_1$, $a_4 = c_4/c_2$, *а элементы* $a_{1,k}$ *и* $a_{3,k}$ $(k=1,2,3,4)$ *связаны соотношениями:*

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2}\sqrt{\left(c_4c_2\left(-2c_1c_2c_4 - c_2^2c_3 + \sqrt{c_2\left(4c_1^2c_2c_4^2 + 4c_1c_2^2c_3c_4 - 4c_2^4c_4 + c_2^3c_3^2 - 8c_2^2c_4^2 - 4c_4^3\right)}\right)\right)},$$

$$a_{3,1} = \left(c_2^2 + c_4\right)/\left(a_{1,1}c_2\right); \quad a_{1,2} = -a_{1,1}, \quad a_{3,2} = -a_{3,1};$$

$$a_{1,3} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2}\sqrt{\left(-c_4c_2\left(2c_1c_2c_4 + c_2^2c_3 + \sqrt{c_2\left(4c_1^2c_2c_4^2 + 4c_1c_2^2c_3c_4 - 4c_2^4c_4 + c_2^3c_3^2 - 8c_2^2c_4^2 - 4c_4^3\right)}\right)\right)},$$

$$a_{3,3} = \left(c_2^2 + c_4\right)/\left(a_{1,3}c_2\right); \quad a_{1,4} = -a_{1,3}, \quad a_{3,4} = -a_{3,3}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа $q_j \ (j=1,2,\ldots,6)$ являются корнями полинома (1), тогда при любом фиксированном i коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right);$$

$$c_2 = 3p_1p_2p_3p_4 + \left(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + \right.$$
$$\left. + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2\right);$$

$$c_3 = -\left(p_1^3p_2p_3p_4 + p_1p_2^3p_3p_4 + p_1p_2p_3^3p_4 + p_1p_2p_3p_4^3\right) - \left(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2 + \right.$$
$$\left. + p_1^2p_3^2p_4^2\right) - 2\left(p_1^2p_2^2p_3p_4 + p_1^2p_2p_3^2p_4 + p_1^2p_2p_3p_4^2 + p_1p_2^2p_3^2p_4 + p_1p_2^2p_3p_4^2 + p_1p_2p_3^2p_4^2\right);$$

$$c_4 = p_1p_2p_3p_4\Big(3p_1p_2p_3p_4 + \big(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 +$$
$$+p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2\big)\Big);$$
$$c_5 = -p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2\left(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4\right); \quad c_6 = p_1^3p_2^3p_3^3p_4^4.$$

Равенства (3), (7) и (8) следуют непосредственно из формул Виета для полинома четвертой степени. Суммы, стоящие в скобках для выражений c_2, c_3, c_4, представляют собой симметричные полиномы от переменных $p_j \ (j = 1, 2, 3, 4)$ и, согласно известной теореме о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (2) [3, с. 322]. Проделав нужные преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (4) – (6).

Проведем анализ этой системы. Из первого уравнения системы выражаем a_2 и подставляем его в оставшиеся уравнения. На втором шаге из уравнения (4.27) выражаем $a_3 = \left(a_4 + c_2\right)/a_1$. Подставим его в уравнение (6) и получим однозначное выражение $a_4 = c_4 / c_2$, из которого сразу вытекают равенства (9) и (10). Теперь осталось выражение $a_3 = \left(a_4 + c_2\right)/a_1 = \ = \left(c_4 + c_2^2\right)/\left(a_1c_2\right)$ подставить в уравнение (5), которое превратится в биквадратное по переменной a_1. Решая его, получаем в точности формулы, приведенные в формулировке теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (9) и (10) и коэффициенты уравнения (1) выражаются через $a_k \ (k = 1, 2, 3, 4)$ в соответствии с системой (3) – (8). Полагая

$a_1 = -\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right)$, $a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4$,

$a_3 = -\left(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4\right)$, $a_4 = p_1p_2p_3p_4$,

получаем, что коэффициенты полинома (1) выражаются так:

$$c_1 = -\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_6\right), \quad c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \ldots + q_5q_6, \quad \ldots \quad c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т.е. в силу теоремы Виета числа q_1, q_2, …, q_6 являются его корнями.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^6 + 7x^5 - 112x^4 - 1204x^3 - 2688x^2 + 4032x + 13824 = 0. \tag{14}$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (9) и (10). По формулам для $a_k \ (k = 1, 2, 3, 4)$ вычислим значения коэффициентов интересующих нас четырёх полиномов четвертой степени:

$$Q_{4,1}(x) = x^4 + \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 - 8\sqrt{6}\,x + 24; \quad Q_{4,2}(x) = x^4 - \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 + 8\sqrt{6}\,x + 24; \tag{15}$$

$$Q_{4,3}(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24; \qquad Q_{4,4}(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24. \tag{16}$$

Ниже приведены значения корней полиномов (12) – (13) соответственно:

$$\left\{-2\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{2\sqrt{6}}{3}; \sqrt{6}\right\}, \quad \left\{-2\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{2\sqrt{6}}{3}; -\sqrt{6}\right\}, \quad \{1; 2; -3; -4\}, \quad \{-1; -2; 3; 4\}.$$

Несложно убедиться в том, что попарное умножение представленных корней дает один и тот же результат, а именно, числа:

$$q_1 = 12; \quad q_2 = 2; \quad q_3 = -8; \quad q_4 = -6; \quad q_5 = -4; \quad q_6 = -3 .$$

Путем подстановки полученных чисел в (1) убеждаемся, что все они являются корнями исходного полинома.

Заключение. Таким образом, в ходе исследования установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты алгебраических полиномов шестой и четвертой степеней при существовании нелинейной связи конкретного типа между корнями данных полиномов.

1. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Доклады ТУСУРа. – 2015. – № 4(38). – С. 102–107.
2. Астапов, И.С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2017. – Т. 8, № 9. – С. 422–432.
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является операция модифицированного дробного интегрирования Адамара [4], называемая дробным интегралом типа Адамара. Естественным образом возникает проблема обращения такой операции, что в свою очередь используется при решении уравнений интегральных преобразований. Настоящая работа посвящена этому аспекту.

Цель данного исследования состоит в обращении дробного интеграла типа Адамара в весовом пространстве суммируемых функций.

Материал и методы. Материалом исследования является операция дробного интегрирования типа Адамара. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Будем рассматривать функцию $f(x)$, представимую дробным интегралом типа Адамара от функции $\varphi(t) \in X_c^p(\Omega)$. Описание класса функций $X_c^p(\Omega)$ приведено в [2]:

$$X_c^p(a,b) = \left\{ h(t) : \int_a^b \left| t^c h(t) \right|^p \frac{dt}{t} < +\infty,\ 0 \le a < b \le \infty,\ c \in R,\ 1 \le p < \infty \right\},$$

$$\|h\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b \left| t^c h(t) \right|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

В [4] рассматривались дробные производные типа Маршо–Адамара $\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f$:

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^\alpha f(x),\ \ \mu \in R,\ \ 0 < \alpha < 1,$$

которые являются модификациями дробных производных Маршо–Адамара [3]. Конструкцию вида

$$\left(\mathbf{D}_{0+,\mu,\varepsilon}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty e^{-\mu t} \frac{f(x) - f(xe^{-t})}{t^{\alpha+1}} dt + \mu^\alpha f(x),\ \ \varepsilon > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \mu \in R$$

(1)

будем называть усечённой дробной производной типа Маршо–Адамара. Поэтому, рассматривая функцию $f(x) \in X_c^p(R_+)$, где $R_+ = (0, +\infty)$, будем по определению полагать