Результаты и их обсуждение. Предлагаемый для полнофункциональной организации обработки строковых литералов предлагается подход, который заключается в построении для него специального типа, который для непустой строки является экземпляром шаблона класса `CharSeq`. Этот шаблон имеет два параметра: первый символ литерала и тип описывающий литерал без первого символа. Для обозначения пустой строки используется класс `CharSeqEmpty`.

Для построения такого типа используется шаблоны классов `Parse` и `Parse::inner`.

```
template<char x, class T>
struct CharSeq {
  static const char cur = x;
  typedef T next;
};

struct CharSeqEmpty {};

template <const char *str>
struct Parse {

  template <size_t pos, char cur>
  struct inner {
    typedef CharSeq<cur,typename inner<pos+1, str[pos+1]>::type>
type;
  };

  template <size_t pos>
  struct inner<pos, '\0'> {
    typedef CharSeqEmpty type;
  };

  typedef typename inner<0, str[0]>::type seq;
};
```

Разработанный набор шаблонов классов позволяет организовать обработку строковых литералов во время компиляции через построение специального типа, описывающего данный литерал с дальнейшим применением средств обобщенного программирования языка C++.

Заключение. Был разработан набор шаблонов классов, который позволяет по заданному строковому литералу построить описывающий его тип. Получаемый тип в дальнейшем можно обрабатывать средствами обобщенного программирования в языке C++.

1. Фридл, Дж. Регулярные выражения / Дж. Фридл. – СПб.: «Питер», 2001. – 352 с.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Известно, что в некоторых приложениях возникают трехчленные (или триномиальные) алгебраические уравнения вида

$$x^n + px^m + q = 0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами p и q. Подробное изучение таких алгебраических уравнений произвольной степени осуществлено в монографии [1]. В этой работе расположение корней уравнения (1) определяется поведением некоторых функций, зависящих только от m и n.

По мнению авторов доклада, существует более простой метод построения таких функций, который в ряде случаев дает возможность представления корней уравнения (1) в аналитическом виде.

Цель исследования – разработать метод локализации и приближенного аналитического нахождения корней трёхчленного уравнения пятой степени.

Материал и методы. Материалом исследования являются трехчленные алгебраические уравнения пятой степени с действительными коэффициентами. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим уравнение

$$x^5 + px + q = 0. \tag{2}$$

с действительными коэффициентами p и q. Подстановка $x = kq / p$ приводит уравнение (2) к виду

$$k^5 \frac{q^5}{p^5} + kq + q = 0,$$

что позволяет выразить функцию $k = k(p,q)$ через коэффициенты уравнения (2):

$$\frac{k^5}{k+1} = -\frac{p^5}{q^4}.$$

Таким образом, количество действительных корней уравнения (2) и их локализация зависит от поведения функции

$$f(k) = \frac{k^5}{k+1}. \tag{3}$$

Так как производная этой функции имеет вид

$$f'(k) = \frac{k^4(4k+5)}{(k+1)^2},$$

то её локальный минимум достигается при $k_* = -5/4$ и равен $3125/256$, а прямая $k = -1$ является вертикальной асимптотой. Такое поведение функции (3) позволяет установить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $p \neq 0$, $q \neq 0$. *Необходимым и достаточным условием существования трех различных действительных корней уравнения* (2) *является неравенство*

$$-p^5 / q^4 > 3125/256;$$

необходимым и достаточным условием существования действительного корня кратности 2 и другого простого действительного корня является равенство

$$-p^5 / q^4 = 3125/256;$$

необходимым и достаточным условием существования одного простого действительного корня является неравенство

$$-p^5 / q^4 < 3125/256.$$

Далее мы можем разложить функцию $k(t)$, где

$$\frac{k^5(t)}{k(t)+1} = t,$$

в ряд Тейлора, беря в качестве начальной точки точку в окрестности значения $-p^5 / q^4$. Например, при $t = 1/2$ получаем $k(1/2) = 1$. Приведем выражение отрезка ряда при таких начальных значениях

$$\frac{7}{9} + \frac{4t}{9} + \frac{248}{729}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23696}{59049}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Рассмотрим уравнение $x^5 - 2{,}1x + 3 = 0$. Для этого уравнения $t = -p^5 / q^4 = 0{,}5042100000$. Подставляя это значение в выражение для отрезка ряда, получаем $k = 1{,}001877171$ и, учитывая подстановку $x = kq / p,$ находим значение корня $x = -1{,}4312531019$. Подстановка этого значения в уравнение $x^5 - 2{,}1x + 3 = 0$ приводит к невязке $-0{,}000325295$.

Далее рассмотрим уравнение

$$x^5 + px^2 + q = 0. \tag{4}$$

Для этого уравнения можно выделить два подслучая: 1) $p, q -$ одного знака; 2) $p, q -$ разных знаков. Если p,q одного знака, то применяется подстановка $x = k\left(q / p\right)^{1/2}$, которая приводит к равенству

$$\frac{k^5}{k^2+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{5/2}.$$

Так как $\left(\dfrac{k^5}{k^2+1}\right)' = \dfrac{k^4\left(3k^2+5\right)}{\left(k^2+1\right)^2}$, то функция $\dfrac{k^5}{k^2+1}$ является строго монотонной и, следовательно, при любом значении параметра $-q\left(p / q\right)^{5/2}$ уравнение (4) имеет единственный действительный корень.

Если p,q разных знаков, то подстановка $x = k\left(-q / p\right)^{1/2}$ приводит к равенству $\dfrac{k^5}{k^2-1} = q\left(-\dfrac{p}{q}\right)^{5/2}$. Так как $\left(\dfrac{k^5}{k^2-1}\right)' = \dfrac{k^4\left(3k^2-5\right)}{\left(k-1\right)^2\left(k+1\right)^2}$, то точками, в которых достигаются локальные экстремумы функции $k^5 / \left(k^2-1\right)$ являются точки $k_1 = \sqrt{5/3},\quad k_2 = -\sqrt{5/3}$. При этом, $\dfrac{k_1^5}{k_1^2-1} = \dfrac{25\sqrt{15}}{18};\quad \dfrac{k_2^5}{k_2^2-1} = -\dfrac{25\sqrt{15}}{18}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *При выполнении неравенства* $q\left(-p / q\right)^{5/2} > 25\sqrt{15} / 18$ *уравнение* (4) *имеет три действительных решения. Аналогично, если выполнено неравенство* $q\left(-p / q\right)^{5/2} < -25\sqrt{15} / 18$, *то уравнение* (4) *имеет три действительных решения.*

При выполнении одного из равенств $q\left(-p / q\right)^{5/2} = 25\sqrt{15} / 18$, $q\left(-p / q\right)^{5/2} = -25\sqrt{15} / 18$ *уравнение* (4) *имеет кратный действительный корень кратности два и один простой действительный корень. Наконец, если выполнено неравенство*

$$-\frac{25\sqrt{15}}{18} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{5/2} < \frac{25\sqrt{15}}{18},$$

то уравнение (4) *имеет ровно один действительный корень.*

Например, для уравнения $x^5+5x^2-3\cdot 2^{2/3}=0$ выполняется условие $q(-p/q)^{5/2}=-25\sqrt{15}/18$. Непосредственно убеждаемся, что его действительными корнями являются числа

$$\frac{1}{3}\left(5^{2/3}-2^{2/3}\cdot 5^{1/3}+2\cdot 2^{1/3}\right),\quad -2^{1/3},\quad -2^{1/3}.$$

Заключение. Таким образом, в ходе выполнения работы разработан метод локализации и приближенного аналитического нахождения корней для различных типов трёхчленного уравнения пятой степени. Рассмотренные числовые примеры подтверждают эффективность полученных алгоритмов.

1. Кутищев, Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени / Г.П. Кутищев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2019. – 232 с.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храмцов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассматриваются линейные вполне интегрируемые системы дифференциальных уравнений Пфаффа с матрицами, элементы которых являются аналитическими функциями.

Цель исследования – изучение свойство полной управляемости системы в окрестности регулярной точки. Получено достаточное условие наличия у системы Пфаффа этого свойства. Обладание системой Пфаффа свойством полной управляемости определяется ранговым равенством от некоторой матрицы, построенной по известным матрицам исходной системы Пфаффа.

Материал и методы. Материалом исследования являются линейные вполне интегрируемые системы дифференциальных уравнений Пфаффа с матрицами, элементы которых являются аналитическими функциями. Используются методы матричного анализа и методы теории автоматического управления.

Результаты и обсуждение. Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной нестационарной системой Пфаффа Θ:

$$dx=(A_1(t_1,t_2)x+B_1(t_1,t_2)u(t_1,t_2))dt_1+(A_2(t_1,t_2)x+B_2(t_1,t_2)u(t_1,t_2))dt_2, \qquad (1)$$

где $t=(t_1,t_2)\in D\subset R^2$ – векторный аргумент, D – связная односвязная выпуклая область, $x\in R^n$ выход, состояние системы, $u\in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r\le 2n,\quad A_1(t),A_2(t),B_1(t),B_2(t),\quad t\in D,$ вещественные матрицы соответствующих размерностей с аналитическими элементами.

Условия же полной интегрируемости неоднородной системы (1) состоит условий

$$\frac{\partial A_1(t)}{\partial t_2}+A_1(t)A_2(t)\equiv\frac{\partial A_2(t)}{\partial t_1}+A_2(t)A_1(t),\quad t\in D. \qquad (2)$$

$$B_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}-B_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}=P(t)u,\quad t\in D, \qquad (3)$$

где $P(t)\equiv A_2(t)B_1(t)-A_1(t)B_2(t)+\dfrac{\partial B_2(t)}{\partial t_1}-\dfrac{\partial B_1(t)}{\partial t_2}$.

Требования (2) и (3) должны выполнятся тождественно, поэтому в качестве допустимых управлений u рассматриваются решения системы (3). Для разрешимости системы (3) необходимо и достаточно выполнение рангового условия [1, с. 91], [2]: существует постоянный вещественный вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ такой, что имеет место равенство рангов матриц