следует, что множество всех разрешимых классов Фишера является полугруппой. В связи с этим актуальна задача построения полугруппы классов Фишера произвольных конечных групп. Решение ее – основная цель данной работы.

Материал и методы. В работе используется терминология теории групп и теории чисел, а также методы доказательств теории классов групп, в частности, методы разбиений множеств простых чисел.

Результаты и их обсуждение. Пусть **P** – множество всех простых чисел и σ – разбиение множества **P**, т.е. $\sigma=\{\sigma_i: i \in I\}$, причем $\mathbf{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i\bigcap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$.

Определение. Пусть σ – разбиение множества **P**. Класс Фиттинга **F** назовем *σ–классом Фишера*, если из условия $G\in\mathbf{F}$, $K \triangleleft G$, $K\leq H\leq G$ и $H/K\in\mathbf{E}\sigma_i$ для некоторого $i \in I$ следует $H\in\mathbf{F}$.

Если $\sigma=\sigma^1$ – разбиение множества **P** на одноэлементные множества $\sigma^1=\{\{p_1\},\{p_2\},\dots\{p_i\},\dots\}$, то σ^1–класс Фишера является классом Фишера, хотя обратное неверно для каждого разбиения $\sigma\neq\sigma^1$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть σ – разбиение множества* **P**. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* **F** *и* **H** *– σ-классы Фишера, то их произведение является σ-классом Фишера*;

2) *множество всех σ-классов Фишера является полугруппой относительно операции умножения классов Фитинга*.

Следствие (теорема Локетта [1]). *Произведение классов Фишера конечных разрешимых групп является классом Фишера*.

Заключение. В работе при помощи разбиения простых чисел описан метод построения полугруппы классов Фишера конечных групп. В частности, расширен известный результат Локетта о произведении классов Фишера конечных разрешимых групп на случай произвольных конечных групп.

1. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite sovable groups: Ph. D. thesis. University of Warwick / F.P. Lockett – Warwick, 1971. – Pp. 245–246.
2. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

ПОЛУГРУППЫ ЛИ И СИММЕТРИЧНОЕ АФФИННО УПОРЯДОЧЕННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

А.К. Гуц[1], О.В. Храмцов[2]
[1]Омск, ОмГУ имени Ф.М. Достоевского
[2]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассмотрим задачу оптимального уравления

$$\int_0^T s(x,u)dt \to inf \tag{1}$$

при условии, что

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ x(0) = a, \\ x(T) = b \\ x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in U \subset \mathrm{R}^r. \end{cases} \tag{2}$$

Цель работы: построение множества достижимости $G(x(T,u))$, $u\in U$ для вектора состояния динамической системы (2) на языке теории полугрупп групп Ли.

Материал и методы. Используется теория и методы полугрупп на группах Ли. Задача оптимального управления (1), (2) сводится к задаче задания семества выпуклых касательных конусов на некотором гладком многообразии.

Известно, что задача оптимального управления (1), (2) в случае, когда функции s, f линейны относительно u, т.е. $s(x,u) = S(x) + Au + a$, $f(x,u) = F(x) + Bu + b$ и множество U является выпуклым многогранником (или выпуклым компактом), сводится к следующей:

$$J[x(\cdot)] = \int_{x(\cdot)} \omega \to inf \tag{3}$$

при условии, что

$$\dot{x} \in K_{x(t)}, \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

$$x(0) = a, \quad x(1) = b, \tag{5}$$

где ω – дифференциальная 1-форма на n-мерном гладком многообразии $X \approx \mathrm{R}^n$, K_x выпуклый конус в каждой точке $x \in X$ и лежащий в касательном пространстве $T_x X$. Иначе говоря, управление $u \in U$ в виде (1), (2) сводится к управлению в форме задания семейства выпуклых конусов $\boldsymbol{K} = \{K_x \subset T_x X : x \in X\}$.

Результаты и их обсуждение. Поставленная задача решается в предположении о наличии симметрии, которой подчиняется динамическая система (2), или управление в форме (4). Это позволяет свести решаемые задачи к теории полугрупп Ли групп Ли. Более того, мы получаем возможность использовать теорию лоренцевых многообразий с группами движений, классификация которых дана в [1].

Группа Ли G действует на многообразии X, если каждому $g \in G$ соответствует диффеоморфизм $\alpha(g): X \to X$ такой, что произведению gh отвечает композиция $\alpha(g) \circ \alpha(h)$ диффеоморфизмов, а единице $e \in G$ – тождественное отображение $id_X: X \to X$. Иначе говоря, действие G на X – это гомоморфизм $\alpha: G \to Diff(X)$.

Управление динамической системой (3)–(5) называется *симметричным* относительно действия группы G, если для любого $g \in G$

$$d\alpha(g)_x[K_x] = K_{[\alpha(g)](x)} \quad \text{и} \quad \alpha^*(g)[\omega_{[\alpha(g)](x)}] = \omega_x.$$

Здесь $d\alpha(g)_x$ – дифференциал диффеоморфизма $\alpha(g)$ в точке $x \in X$, а $\alpha^*(g)_x: T^*_{[\alpha(g)](x)} X \to T^*_x X$ соответствующий кодифференциал.

Пусть семейство подмножеств $\boldsymbol{P} = \{P_x \subset X : x \in X\}$ задает порядок в X, т.е. выполняются условия: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если $y \neq x$, то $P_y \neq P_x$.

Мы будем предполагать далее, что $X = \mathrm{R}^n$ и группа Ли G действует просто транзитивно на X. Зафиксируем точку $a \in X$. Тогда имеем диффеоморфизм

$$\varphi: G \cong \mathrm{R}^n, \qquad \varphi(g) = [\alpha(g)](a), \quad \varphi(e) = [\alpha(e)](a) = a.$$

Порядок P инвариантен относительно действия группы G (G-инвариантный порядок), если для любой точки $x \in X$ и $\alpha(g)[P_x] = P_{[\alpha(g)](x)}$ любого $g \in G$.

Нетрудно убедиться, что если P G-инвариантный порядок на X, то $S = \varphi^{-1}(P_a)$ – подполугруппа группы G.

Касательный объект к S – это множество вида $L(S) = \{\xi \in al(G) : \xi = \lim\limits_{n\to\infty} n\xi_n, \exp\xi_n \in S\}$, где $al(G)$ – алгебра Ли группы Ли G.

Контингенция множества P_x в точке x – это совокупность векторов, касательных в точке x к гладким кривым, исходящим из точки x и лежащим в P_x. Для контингенции используем обозначение: $cont(\boldsymbol{P}, x)$. Известно, что $K_x = cont(\boldsymbol{P}, x)$ – замкнутый выпуклый конус, лежащий в $T_x X$. Ясно,

$$d\varphi_e[L(S)] = K_a \quad u \quad d\varphi_g[d(l_g)_e[L(S)]] = d\alpha(g)_a[K_a] = K_x, \; x = \alpha(g)(a),$$

где $l_g: G \to G$ левый сдвиг на g.

Известно, что если подполугруппа S порождает G, то $L(S) = \{\xi \in al(G) : \exp(\mathrm{R}^+)\xi \subset \overline{S}\}$, т.е. $\exp[L(S)] \subset \overline{S}$.

Будем использовать семейство $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P}) = \{K_x : x \in X\}, K_x = cont(\boldsymbol{P}, x)$ в качестве управления для динамической системы (3)–(4).

Управление $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P})$ называется *упорядоченным*, если $\boldsymbol{P}$ задает порядок на многообразии X.

Предложение 1. Если порядок $\boldsymbol{P}$ инвариантен относительно группы G, то очевидно, что $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P})$-управляемая система симметрична относительно действия группы G.

Предложение 2. *Если порядок $\boldsymbol{P}, P_a \neq \emptyset$, инвариантен относительно группы G, то $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P})$-управляемая система* (3)–(5) *не выходит за пределы множества $\overline{P_a}$. Вне $\overline{P_a}$ лежат недостижимые точки*.

Пусть действие группы Ли G на $X = \mathrm{R}^n$ является *аффинным*, т.е. $\alpha : G \to Aff(R^n)$. Просто транзитивное аффинное действие α порождает полную левоинвариантную аффинную структуру A на самой группе Ли G. Действительно, диффеоморфизм

$$\phi : G \cong \mathrm{R}^n, \quad \varphi(g) = [\alpha(g)](0, \ldots, 0) = (x^1, \ldots, x^n) = x \in \mathrm{R}^n,$$
$$\phi(e) = a = (0, \ldots, 0)$$

можно использовать для задания глобальной аффинной системы координат на G, в которых левые сдвиги $l_h : G \to G,\ l_h(g) = hg$ имеет вид

$$[l_h]^k(g) = [l_h]^k(\phi^{-1}(x^1, \ldots, x^n)) = \sum_{i=1}^{n} L_i^k x^i + L^i \quad (k = 1, \ldots, \mathrm{n}).$$

Предположим, что порядок P в R^n является *коническим*, т.е. состоит из замкнутых выпуклых конусов. Тогда можно отождествить $P_x = K_x$.

Теорема. *Если порядок $\boldsymbol{P}$ инвариантен относительно просто транзитивного аффинного действия группы Ли G, то $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P})$-управляемая система* (3)–(5) *не выходит за пределы конуса K_a*.

Заключение. Таким образом, ответы на поставленные в начале статьи вопросы частично находятся, если дано описание всех конусов K_a в R^n, за которые не выходит $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{P})$-управляемая система, эволюционирующая в R^n. Данная задача сводится к задаче классификации и описанию всех G-инвариантных конических порядков в пространстве R^n относительно разрешимых односвязных n-мерных групп Ли, действующих аффинно и просто транзитивно на R^n. В случае 3-мерных групп Ли такое описание было найдено в [2,3]. Результат, касающийся *n*-мерных групп Ли ($n \geq 4$) не может быть приведен здесь из-за недостатка места.

1. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 496 с.
2. Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Грибанова И.А. Описание аффинных конических порядков на трехмерных разрешимых группах Ли // Ученый совет мат. фак. – ОмГУ. Деп. в ВИНИТИ 15.06.94, N 1467–В94. – 35 с.
3. Гуц А.К. Симметричное управление, не выводящее динамическую систему за пределы конуса // Математические структуры и моделирование. 2002. – Вып.9. – С. 5–9.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО МОНИТОРИНГА ФИЗКУЛЬТУРНО-ОЗДОРОВИТЕЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ И РЕЖИМА ПИТАНИЯ ШКОЛЬНИКОВ

С.А. Ермоченко, Д.Э. Шкирьянов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В рамках данного исследования разрабатывался комплекс программного обеспечения, который позволяет проводить мониторинг физкультурно-оздоровительных занятий и режима питания школьников. Данное программное обеспечение внедрено в практику работы детского реабилитационно-оздоровительного центра «Жемчужина» и ориентировано на школьников среднего школьного возраста, которые имеют риск набора лишнего веса, или уже имеют лишний вес.

В настоящее время существует достаточно большое количество приложений, которые позволяют отслеживать физическую активность и режим питания. Но все они имеют ряд недостатков. В рамках данного исследования разрабатывался комплекс программного обеспечения,