О СВОЙСТВАХ ИНЪЕКТОРОВ ВО МНОЖЕСТВАХ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, Т.К. Петрова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории классов Фиттинга конечных групп хорошо известно, что если подгруппа V является $\mathcal{F}$-инъектором группы G, то подгруппа VN/N в общем случае не является $\mathcal{F}$-инъектором группы G/N (см. главу VIII с. 542 [1]). В связи с этим актуальна задача о том, справедливо ли это утверждение для инъекторов во множестве Фиттинга конечной группы. В настоящей работе найдено решение этой задачи.

Цель данной работы – описать строение $\mathcal{F}$-инъектора факторгруппы в её наследственном множестве Фиттинга.

Материал и методы. В работе используется терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов и множеств Фиттинга.

Результаты и их обсуждения. Непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп конечной группы G [1] называется *множеством Фиттинга* группы G, если выполняются следующие условия: i) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; ii) если S, $T \in \mathcal{F}$ и S, $T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; iii) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Подгруппа V группы G называется:

(1) $\mathcal{F}$ -*максимальной*, если она удовлетворяет следующим условиям: i) $V \in \mathcal{F}$; ii) если $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathcal{F}$, то $U = V$;

(2) $\mathcal{F}$ -*инъектором* [1], если $V \cap K$ является $\mathcal{F}$ максимальной подгруппой в K для любой субнормальной подгруппы K группы G.

Множество Фиттинга группы G называется *наследственным*, если из условия $H \leq G$ и $G \in \mathcal{F}$ следует, что $H \in \mathcal{F}$.

В статье [2] было определено понятие произведения множества Фиттинга и класса Фиттинга. Если $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то их произведением будем называть множество подгрупп $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X} = \{ H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X} \}$. В частности, в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X}$ – множество всех подгрупп группы G, факторгруппы которых по их $\mathcal{F}$ -радикалам разрешимы.

Теорема 1. $G \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ – наследственное множество Фиттинга G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Множество подгрупп $\mathcal{F}_{G/N} = \{SN/N$: S – $\mathcal{F}$ -инъектор $SN\}$ группы G/N является множеством Фиттинга G/N;

(2) Если V – $\mathcal{F}$ -инъектор G, тогда VN/N является $\mathcal{F}$- инъектором группы G/N.

Заключение. В данной работе описан метод построения $\mathcal{F}$ -инъектора факторгруппы в её наследственном множестве Фиттинга.

1. Doerk K. Finite soluble groups/ K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-N.Y.: Walter de Cruyter, 1992. – 891 p.
2. Vorob'ev N. T., Nanying Yang, W. Guo. On F- injectors of Fitting set of a Finite groups // Com. in Algebra, 2018, Vol 46. – № 1. – P. 217–229.

О ПОЛУГРУППЕ σ-КЛАССОВ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.Н. Воробьёв
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории классов конечных разрешимых групп известен результат Локетта [1] о том, что произведение любых классов Фишера является классом Фишера. Поскольку операция умножения классов Фишера ассоциативна (см. [2], теорему VIII.3.8), то из указанной теоремы Локетта следует, что множество всех разрешимых классов Фишера является полугруппой. В связи с этим актуальна задача построения полугруппы классов Фишера произвольных конечных групп. Решение ее – основная цель данной работы.

Материал и методы. В работе используется терминология теории групп и теории чисел, а также методы доказательств теории классов групп, в частности, методы разбиений множеств простых чисел.

Результаты и их обсуждение. Пусть **P** – множество всех простых чисел и σ – разбиение множества **P**, т.е. $\sigma=\{\sigma_i: i \in I\}$, причем $\mathbf{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \bigcap \sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$.

Определение. Пусть σ – разбиение множества **P**. Класс Фиттинга **F** назовем *σ–классом Фишера*, если из условия $G\in\mathbf{F}$, $K \triangleleft G$, $K\leq H\leq G$ и $H/K\in\mathbf{E}\sigma_i$ для некоторого $i \in I$ следует $H\in\mathbf{F}$.

Если $\sigma=\sigma^1$ – разбиение множества **P** на одноэлементные множества $\sigma^1=\{\{p_1\},\{p_2\},\ldots\{p_i\},\ldots\}$, то σ^1–класс Фишера является классом Фишера, хотя обратное неверно для каждого разбиения $\sigma\neq\sigma^1$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть σ – разбиение множества* **P**. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* **F** *и* **H** *– σ-классы Фишера, то их произведение является σ-классом Фишера*;

2) *множество всех σ-классов Фишера является полугруппой относительно операции умножения классов Фитинга*.

Следствие (теорема Локетта [1]). *Произведение классов Фишера конечных разрешимых групп является классом Фишера*.

Заключение. В работе при помощи разбиения простых чисел описан метод построения полугруппы классов Фишера конечных групп. В частности, расширен известный результат Локетта о произведении классов Фишера конечных разрешимых групп на случай произвольных конечных групп.

1. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite sovable groups: Ph. D. thesis. University of Warwick / F.P. Lockett – Warwick, 1971. – Pp. 245–246.
2. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

ПОЛУГРУППЫ ЛИ И СИММЕТРИЧНОЕ АФФИННО УПОРЯДОЧЕННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

А.К. Гуц[1], О.В. Храмцов[2]
[1]Омск, ОмГУ имени Ф.М. Достоевского
[2]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Рассмотрим задачу оптимального уравления

$$\int_0^T s(x,u)dt \to inf \qquad (1)$$

при условии, что

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ x(0) = a, \\ x(T) = b \\ x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in U \subset \mathrm{R}^r. \end{cases} \qquad (2)$$

Цель работы: построение множества достижимости $G(x(T,u))$, $u\in U$ для вектора состояния динамической системы (2) на языке теории полугрупп групп Ли.

Материал и методы. Используется теория и методы полугрупп на группах Ли. Задача оптимального управления (1), (2) сводится к задаче задания семества выпуклых касательных конусов на некотором гладком многообразии.