должна быть не только способом подготовки лучших учеников к продвинутым математическим курсам университета, но она может открывать также горизонты для всех учеников».

1. Science, Technology, Engineering and Mathematics Education Policies in Europe. Scientix Observatory report. October 2018, European Schoolnet, Brussels [Электронный ресурс] https://ru.scribd.com/document/398968087/Scientix-Texas-Instruments-STEM-policies-October-2018-pdf.
2. Современное образование: радикальные изменения. Онлайн-курс. В. Мацкевич, Т. Водолажская [Электронный ресурс] https://www.youtube.com/playlist?list=PLBAnu4YEjPOLuzFYuo01zwshLHB7nZLEH.
3. Научно-практическое образование, исследовательское обучение, STEAM-образование: Сборник докладов. Публикация Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» // Под ред. А.С. Обухова. – М: МОД «Исследователь»; Журнал «Исследователь/Researcher», 2018. – 260 с.
4. Звонарев, С.В. Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 112 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОТЫ В ТЕРМОЭЛЕМЕНТЕ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Ю.И. Бохан, А.А. Варнава
Витебский филиал УО «Белорусская государственная академия связи»

Моделирование термоэлементов имеет значительное научное и практическое применение [1]. Это актуально для неоднородных материалов, использующихся в производстве [2-3].

В тоже время слабо развито моделирование временных зависимостей распространения температуры вдоль образца в сравнении с экспериментальными результатами. В этой связи представляется актуальной задача моделирования эксперимента для сравнения результатов различных моделей и выбора наиболее адекватной.

В стандартном подходе моделирования распространения теплоты в термоэлементе [4] как правило используются классические уравнения баланса переноса теплоты:

$$q = ajT - \frac{j^2 rL}{2}, \qquad (1)$$

где q – удельная теплопроизводительность, T – температура теплоотдающей среды, α, r – термоэ.д.с. и удельное сопротивление термоматериала, j – плотность тока, L – длина термоветви.

Характерной особенностью модели (1) является отсутствие временной зависимости q и температурной ρ. В случае использования в качестве ветви термоэлемента материала с ОТКС [5]., зависимость от температуры существенна и требует учета при моделировании параметров термоэлемента. Ранее [6] было показано, что последовательный учет релаксационных процессов может приводить к возникновению волн теплоты и существенно меняет характер распространения тепла на начальной стадии процесса.

Другой особенностью моделирования является сравнение результатов модели с экспериментом. Экспериментально используется достаточно сложная схема возбуждения и измерений температуры. Наиболее привлекательной выглядит схема с использованием в качестве источника теплоты и заряда импульса тока (Рис. 1).

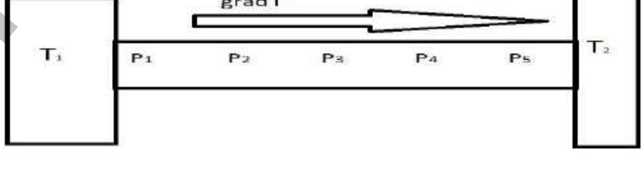


Рисунок 1 – Схема моделирования термоветви.

В этом случае, измеряя температуры в точках Pi, при возбуждении импульсом тока (точка T_1) можно реализовать прямую схему распространения теплоты вдоль ветви термоэлемента.

Исходная система уравнений может быть записана в виде [6]

$$q + \tau_T \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \nabla T + q_0(t, x) \qquad (2)$$

$$\tau_e \frac{\partial i}{\partial t} = -(i - \sigma E^{'}) \qquad (3)$$

где: $q_0(t,x)$ – источник теплоты, $E^{'} = E - T\nabla(T^{-1}\mu_e)$, τ_e – время релаксации заряда, σ – проводимость, μ_e – химпотенциал, λ – коэффициент теплопроводности, E – напряженность электрического поля, T – температура.

Преобразуем (3) с учетом связи коэффициентов взаимности Онзагера с феноменологическими соотношениями [7]:

$$\nabla T^{-1} = \frac{1}{\lambda T^2} q - \frac{\mu_e - \alpha T}{\lambda T^2} i \qquad (4)$$

$$E - \nabla \mu_e = \frac{\alpha}{\lambda} q - (\alpha \frac{\mu_e - aT}{\lambda} - r) i \qquad (5)$$

Здесь использовано соотношение Томсона α*T* = -*P*, где *P* – коэффициент Пельтье. В результате (3) переходит в

$$\frac{\tau_T}{\tau_e}\frac{\partial i}{\partial \tau} = -\frac{\mu_e - \alpha T}{r\lambda T} q + \frac{(\mu_e - \alpha T)^2}{r\lambda T} i \qquad (6)$$

Шкалу времени в (6) выберем относительно времен релаксации [6]. Здесь в выражении (6) произведена замена $\frac{t}{\tau_e} = \frac{\tau_T}{\tau_e}\tau; \tau = \frac{t}{\tau_T}$. Таким образом шкала временной зависимости определяется отношением времен релаксации теплоты и заряда [6].

Аналогичным образом преобразуем уравнения (3) и (6). Используем соотношение (4) и представив $\lambda \nabla T = -\lambda T^2(\nabla T^{-1})$ получим:

$$\tau_T \frac{\partial q}{\partial t} = -(\mu_e - \alpha T) i + q_0(t,x) \qquad (7)$$

$$\frac{\tau_T \partial i}{\tau_e \partial \tau} = \frac{\mu_e - \alpha T}{r}\frac{\nabla T}{T} \qquad (8)$$

Далее используем закон сохранения энергии и (7). В результате имеем:

$$\frac{1}{\tau_T}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = -\frac{\alpha}{c_v \rho} i \nabla T + \frac{1}{c_v \rho}\frac{\partial}{\partial \tau} q_0(\tau, x), \qquad (9)$$

где ρ – плотность материала, c_v - удельная теплоемкость.

Таким образом уравнения (8) и (9) описывают распространение заряда и распределение температуры в термоэлементе под действием импульса тока.

Источник теплоты выберем в виде:

$$q_0(t,x) = ri^2 \qquad (10)$$

Т.е. источником является джоулево тепло. При этом считаем, что ток не зависит от координаты и определяется только зависимостью от τ. Выполняя дифференцирование по τ и используя (8), получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \frac{\frac{\tau_e}{c_v\ \rho \left[\mu_e - \left(1 + \frac{\tau_T}{\tau_e}\right)\alpha T\right] i} \nabla T}{T} \qquad (11)$$

Система уравнений (8) и (11) описывает модель распределения температуры вдоль образца при возбуждении импульсом тока. Характерной особенностью модели является наличие в (11) слагаемых, пропорциональных временам релаксации тепла и заряда. Это указывает на тот факт, что в процессе распространения теплоты, в начальный момент времени, происходит нагрев за счет тока, как наиболее быстрый, а затем перенос тепла за счет теплопроводности. Наличие коэффициентов, пропорциональных термоэдс, указывает на определяющую роль термоэффекта.

Начальные и граничные условия для системы выберем в виде:

$$i(0) = I; \tag{12}$$

$$T(0,0) = T_2; T(0,L) = T_2; \frac{\partial T}{\partial \tau}(0,0) = 0. \tag{13}$$

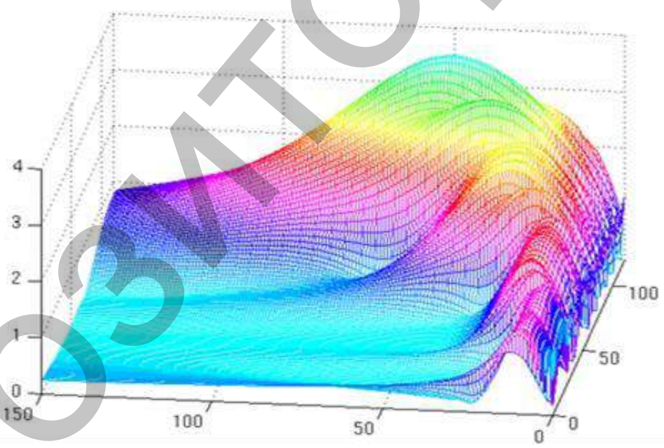
Преобладающей моделью проводимости термисторов с ОТКС является модель прыжковой проводимости в приближении «неадиабатического» полярона малого радиуса приводящая к существенной температурной зависимости проводимости [6]:

$$\rho = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{e^2 l^2 j^2 E^{-\frac{1}{2}}}{h(kT)^2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \tag{14}$$

где: l –эффективная длина прыжка, J – параметр рассеяния, E – энергия активации прыжка, T – температура. Такая нелинейная температурная зависимость электропроводности приводит к существенно неравновесному процессу переноса теплоты и заряда в ветвях термоэлемента.

Приведя систему (9) – (14) к безразмерному виду получим модель распространения температуры в образце при импульсном нагреве.

На рисунке 2 представлено распределение приведенной (к T_1) температуры по длине образца и приведенного (ко времени релаксации теплоты) времени распространения при отношении времен релаксации теплоты и заряда 10^4.



Из результатов моделирования следует, что в случае термоэлектрического эффекта процесс носит и нелокальный, по координате и времени, характер.

Рисунок 2 – Распределение температуры по образцу.

1. Анатычук Л.И. Термоэлектричество. – Т.2. Термоэлектрические преобразователи энергии. – Киев. Черновцы.: Институт термоэлектричества. 2003. – 386 с.
2. Вихор Л.Н. Функционально-градиентные материалы и термоэлементы на их основе // Термоэлектричество. – 2007. – № 1. – С. 7–22.
3. Дмитриев А.В., Звягин И.П. Современные тенденции развития физики термоэлектрических материалов // УФН. 2010. – Т. 180. – № 8. – С. 821–838.
4. Мельников А.А., Пири А.М., Тарасова И.В., Батрамеев Н.В. Моделирование режима Q_{max} термоэлектрического охладителя с учетом тепловых сопротивлений на холодной и горячей стороне. ЖТФ. – 2017. – Т. 51. – Вып. 7. – С. 896–899.
5. Feature A. Negative Temperature Coefficient Resistance (NTSR) Ceramic Thermistors: An Industrial Perspective. J. Am. Ceram. Soc. – 2009. – vol. 92. – № 5. – P. 967–983.
6. Бохан Ю.И., Варнава А.А. Термоэлектрический керамический элемент с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления // Проблемы инфокоммуникаций. – 2018. – № 1(7). – С. 71–76.
7. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
8. Veljko Zlatic, Rene Monnier Modern Theory of Thermoelectricity. Oxford. University Press, 2014. – 289 p.