Кафедра геометрии и математического анализа

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова,
С.В. Шерегов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ № 1 ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

для студентов-заочников I курса
математического факультета

2009

УДК 517(075)
ББК 22.16.1я73
С90

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты физико-математических наук **Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова;** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Рецензент:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент *С.А. Шлапаков*

Контрольная работа № 1 по математическому анализу предназначена для студентов I курса специальности «Математика и информатика». Методические рекомендации содержат задания к контрольной работе, решение нулевого варианта, вопросы к экзамену по разделам математического анализа, изучаемым в первом семестре, а также список литературы для самостоятельного изучения.

УДК 517(075)
ББК 22.16.1я73

Введение

В методических рекомендациях приведены задания к контрольной работе № 1 по математическому анализу, которые необходимо выполнить студентам-заочникам первого курса, обучающимся по специальности «Математика. Информатика». Для оказания практической помощи студентам здесь же приведено подробное решение нулевого варианта контрольной работы. В конце учебного издания даны вопросы к экзамену за первый семестр, а также приведен список литературы, которую необходимо изучить для правильного решения контрольной работы и успешной подготовки к экзамену.

Общие требования к оформлению контрольной работы

1. *Выбор варианта задания.*

Вариант задания совпадает с номером, под которым студент числится в журнале преподавателя. Если этот номер больше 20, то нужно выполнять тот вариант, номер которого равен номеру по журналу минус 20 (например, если номер по журналу равен 25, то нужно выполнять вариант №5(25 – 20 = 5)).

2. *Правила оформления контрольной работы.*

Контрольную работу выполняют в отдельной тонкой тетради. На обложке тетради следует написать номер контрольной работы, номер варианта, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. Перед решением каждой задачи полностью переписывают ее условие. В тетради обязательно оставляют поля.

Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы, вычисления проводить в строгом порядке. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, требуемого условием. В конце контрольной работы указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

Студент не допускается к сдаче экзамена без предъявления тетради с зачтенной контрольной работой.

Задания к контрольной работе

1. ***Решить неравенство, исходя из определения модуля действительного числа, и геометрически.***

вариант		вариант	
1.	$\lvert x-2\rvert \le \lvert x\rvert +1;$	11.	$\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert -2;$
2.	$\lvert x^2-3x+2\rvert > x^2-3x+2;$	12.	$\lvert x(x+4)\rvert > 3;$
3.	$\lvert x(x-2)\rvert > 1;$	13.	$\lvert \lvert x\rvert -7\rvert \ge 7;$
4.	$\left\lvert \dfrac{1}{x}\right\rvert \le \dfrac{1}{x^2};$	14.	$\lvert 3x-1\rvert \ge \lvert x-4\rvert;$
5.	$\lvert x+4\rvert \ge \lvert 2x\rvert +1;$	15.	$\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert;$
6.	$\lvert \lvert x\rvert -3\rvert \ge 3;$	16.	$\lvert x(x+4)\rvert > x;$
7.	$\sqrt{x^2+4x+4} > 4-x^2;$	17.	$\lvert \lvert x\rvert +5\rvert \ge 3;$
8.	$x^2-5\lvert x\rvert +6<0;$	18.	$\lvert x+5\rvert \ge \lvert 2x\rvert -1;$
9.	$\lvert x-3\rvert \ge \lvert 2x-1\rvert;$	19.	$\lvert x+6\rvert \ge \lvert 1-2x\rvert;$
10.	$\lvert \lvert x\rvert -2\rvert \le \lvert x\rvert;$	20.	$x^2-3\lvert x\rvert -4<0.$

2. *Найти область определения функции* $y = f(x)$.

вариант		вариант	
1.	$y=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6);$	11.	$y=\arcsin\dfrac{x^2-2x+2}{x-2};$
2.	$y=\sqrt{\log_2(x^2-3)};$	12.	$y=\sqrt{\dfrac{16-16x+4x^2}{1-x}}+(x+4)^{-\frac{1}{6}};$
3.	$y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{4-3x-x^2}};$	13.	$y=\sqrt{\log_{0,5}\dfrac{x}{x^2-1}};$
4.	$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x};$	14.	$y=\lg\sin x+\sqrt{16-x^2};$
5.	$y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{x-2};$	15.	$y=\sqrt{x^2-3x+2}+$ $+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}};$
6.	$y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16));$	16.	$y=\lg_{\sin x}x;$
7.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-x}};$	17.	$y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x};$
8.	$y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2};$	18.	$y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x);$
9.	$y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x-1}};$	19.	$y=\sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x-1}\right)};$
10.	$y=\sqrt{\sin x-1};$	20.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-2\lvert x-1\rvert}}.$

3. ***Используя определение предела последовательности или определение бесконечно большой последовательности, докажите, что*:**

вариант		вариант	
1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2-1}=\dfrac{1}{2}$;	11.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-1}{n^4}=0$;
2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\text{n}}-1}{2^{\text{n}}}=1$;	12.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n-1}=5$;
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+3}=1$;	13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=\infty$;
4.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n+1}=0$;	14.	$\lim\limits_{n\to\infty}(n\ \mathrm{arctg}\ n)=+\infty$;
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;	15.	$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=\infty$;
6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{n}=0$;	16.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n}=\infty$;
7.	$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1\quad(a>1)$;	17.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^m}{2^m}=0$;
8.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1+2n^3}=\dfrac{1}{2}$;	18.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$;
9.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^n}=1$;	19.	$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{1}{n}=-\infty$;
10.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;	20.	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{2^n}=\infty$.

4. ***Найдите указанные пределы.***

вариант	a	b	c
1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-x^4+1}{x^5-1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^4+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-x};$
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(10\tilde{o}+1)^{10}\,(1-10\tilde{o})^{10}}{(\tilde{o}^2+1)^{20}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(10\tilde{o}+1)^{10}\,(1-10\tilde{o})^{10}}{(\tilde{o}^2+1)^{20}}$	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^6-3x^4+3x^2-9};$
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n-1}{x^{\mathrm{m}}+1},\quad n<\mathrm{m};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1};$	$\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1};$
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n-1}{x^{\mathrm{m}}+1},\quad n>\mathrm{m};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^n}{x^n-1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1};$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^5+1)(2x^4+1)}{2x^9+1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^5+1)(2x^4+1)}{2x^{10}+1};$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+8}{x^2-3x+2};$
6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^5+10x+12)^3}{2x^{10}+1};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^5+10x+12)^3}{2x^{15}+1};$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\tilde{o}(\tilde{o}-1)}-\frac{1}{\tilde{o}^2-3\tilde{o}+2}\right);$
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{20}-1}{1+(2x)^{20}};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x^{10}-1}{1-0{,}01x^{11}};$	$\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2\tilde{o}^3+3\tilde{o}^2-1}{8\tilde{o}^3-12\tilde{o}^2+6\tilde{o}-1};$
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\ldots+x^n}{1+x+\ldots+x^m};$ $m<n$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\ldots+x^n}{1-x^n};$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+19x-14}{2x^3-5x^2+2x};$
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-100x^3+1}{100x^2+15x};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-100x^2+1}{100x^3+15x};$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-5x+4}{x^5-4x+3};$
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+1)^2}{(x+1)^3+(x+1)^2};$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+2)^3}{(x+1)^3+(x-2)^3};$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-3x^2+5x-14}{x^2-3x+2};$

11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x-1}}{x+2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\tilde{o}+2}{\tilde{o}^2-5\tilde{o}+4}-\dfrac{\tilde{o}-4}{3\tilde{o}^2-5\tilde{o}+2}\right)$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{x^{20}-10x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}-5x}{(x^2-1)^5}$;	$\lim\limits_{x\to\sqrt[10]{5}}\dfrac{x^{10}-5}{x^{20}-6x^{10}+5}$;
13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tilde{o}^4}{\tilde{o}^3-2\tilde{o}+1}-\dfrac{\tilde{o}^4}{\tilde{o}^3+2\tilde{o}+1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\tilde{o}^4}{\tilde{o}^3-2\tilde{o}+1}+\dfrac{\tilde{o}^4}{\tilde{o}^3+2\tilde{o}+1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$;
14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3-1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x-6}{x^3-8}$;
15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$;	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{2x^4+5x-22}$;
16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{20}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{50}}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{20}}$;
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}-x^{10}+1}{x^{10}(x^{100}+1)}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}-x^{10}+1}{x^{10}(x^{10}+1)^9}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\tilde{o}(\tilde{o}-2)^2}-\dfrac{1}{\tilde{o}^2-3\tilde{o}+2}\right)$;
18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^3+8x^2-1}{6x^3+7x^2-1}$;
19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^n-(x+1)^m}{(x+1)^m}$; $m>n$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^n-(x+1)^m}{(x+1)^m}$; $m<n$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$;
20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{(x^2+1)^{10}}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^{20}+1}{(x^2+1)^{20}}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+4x^2+x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

5. ***Найдите пределы функций.***

вариант	a	b
1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x^2}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;
2	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$;
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha)}}$;
4	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;	$\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;
6	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$;
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)\sqrt{1+\cos 2x}}{x^3}$;
8	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$;
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$;

10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;
11	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;
12	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$;	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;
13	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$;
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$;	$\lim\limits_{\alpha\to \beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$;
15	$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;
16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$;
17	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x+9}-5}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$;
18	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2-\sqrt[3]{x+6}}$;	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$;
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[4]{x^2+x}-x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$;
20	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sin x+1}}{x\sin x}$.

6. ***Найдите пределы, используя второй замечательный предел и следующие равенства***: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\grave{a}^{\tilde{o}}-1}{\tilde{o}}=$ $=\ln a$.

вариант	A	b
1.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{2x}$;
2.	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\sin 3x}$;
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{1-\cos x}$;
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin 3x}$;
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin \pi(x+4)}$;
6.	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5^x-1}$;
7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{\ln x}$;
8.	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+1)-\ln(x-1)]$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-1}$;
9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\sin 2x}$;
11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}$;	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_4(x-2)}{2^x-8}$;
12.	$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$;
13.	$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{\operatorname{tg} 2x}$;
14.	$\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{4x-\pi}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{ch} x}{1-\cos x}$;
15.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^x$;	$\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$;
16.	$\lim\limits_{x\to\infty}3x\,[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$;	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$;
17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x+6}\right)^x$;	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\log_x 2$;
18.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;
19.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin(\pi x+4\pi)}$;	$\lim\limits_{x\to 1}(a^x-a)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$;
20.	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)}}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{3^x-3^{-x}}$.

7. *Исследовать на непрерывность функцию в указанных точках. Определить вид точек разрыва.*

вариант	a	b
1.	$y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$, $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=5$;	$y=\ln\lvert x\rvert$, $x_1=0$, $x_2=-1$;
2.	$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$;	$y=e^{\frac{1}{x}}$, $x_1=0$, $x_2=2$;
3.	$y=\dfrac{1+x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=4$;	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
4.	$y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=1$;	$y=\dfrac{1}{\cos x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$;
5.	$y=\dfrac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}$; $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=-3$;	$y=\dfrac{1}{\sin x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$;
6.	$y=\dfrac{x}{x^2+4x}$; $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=1$;	$y=\operatorname{tg}x$, $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$;
7.	$y=\dfrac{1-x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=4$;	$y=2^{\frac{1}{2-x}}$, $x_1=0$, $x_2=2$;
8.	$y=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$, $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=5$;	$y=\cos\dfrac{1}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{\pi}$;
9.	$y=\dfrac{x-1}{x^2-x}$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$;	$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lvert x\rvert}}$, $x_1=0$, $x_2=1$;
10.	$y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-2$;	$y=\operatorname{ctg}x$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$;
11.	$y=\dfrac{1}{\ln\lvert x\rvert}$, $x_1=0$, $x_2=1$; $x_3=2$;	$y=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$, $x_1=2$, $x_2=5$;
12.	$y=\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$, $x_1=-2$, $x_2=1$; $x_3=2$;	$y=\dfrac{\sin x}{x^2}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

13.	$y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; $x_3 = 1$;	$y = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$;
14.	$y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; $x_3 = 1$;	$y = 2^{\frac{-1}{\lvert x \rvert}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;
15.	$y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; $x_3 = 2$;	$y = \dfrac{1-\cos x}{x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$;
16.	$y = \dfrac{\lvert x \rvert - 2}{(x - 2)(x - 3)}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$;	$y = e^{-\frac{1}{x}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;
17.	$y = \dfrac{x\,(x^2 - 4)}{x^2 + x - 6}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$;	$y = \dfrac{\lvert \sin x \rvert}{x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$;
18.	$y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$;	$y = \operatorname{sgn} x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;
19.	$y = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$;	$y = e^{\frac{1}{1 - x}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;
20.	$y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$;	$y = \dfrac{\arcsin x}{x(x-1)}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

8. ***Исследовать на непрерывность функцию. Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

вариант		вариант	
1.	$y = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ при } x < 1, \\ x - 1, \text{ при } 1 \le x \le \pi, \\ \sin x, \text{ при } x > \pi, \end{cases}$	11.	$y = \begin{cases} 1, \text{ при } x \le -1, \\ \lvert x \rvert, \text{ при } -1 < x < 1, \\ -1, \text{ при } x > 1, \end{cases}$
2.	$y = \begin{cases} \cos x, \text{при } x \le 0, \\ 1 - x, \text{при } 0 < x \le 1, \\ x^2, \text{при } x > 1, \end{cases}$	12.	$y = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ при } x < 0, \\ x, \text{ при } 0 \le x < 1, \\ 0, \text{ при } x = 1, \\ x^2, \text{ при } x > 1, \end{cases}$

3.	$y = x\,[x]$,	13.	$y = \lvert x - 1\rvert + \lvert x - 2\rvert + \lvert 2x - 3\rvert$,
4.	$y = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x, \text{ при } \lvert x\rvert \le 1, \\ \lvert x - 1\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert > 1, \end{cases}$	14.	$y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, \text{при } x \ne 0, \\ 1, \text{при } x = 0, \end{cases}$
5.	$y = \begin{cases} \ln\lvert x\rvert, \text{ïðè } 0 < \lvert x\rvert \le 1, \\ 2 - x, \text{ïðè } \lvert x\rvert > 1, \end{cases}$	15.	$y = \begin{cases} 2\lvert x\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert \le 1, \\ 2 - x^2, \text{ при } \lvert x\rvert > 1 \text{ ,} \end{cases}$
6.	$y = \begin{cases} 1, \text{ïðè } x < 0, \\ \frac{\sin x}{x}, \text{ïðè } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ x + 2, \text{ïðè } x \ge \frac{\pi}{2}, \end{cases}$	16.	$y = \begin{cases} 1, \text{при } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{\mathrm{tg}x}{x}, \text{при } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ 1, \text{при } x > \frac{\pi}{4}, \end{cases}$
7.	$y = \begin{cases} 2x^2, \text{ при } x \le 1, \\ 2 - x, \text{ при } x > 1, \end{cases}$	17.	$y = \frac{\lvert\sin x\rvert}{\sin x}$;
8.	$y = \begin{cases} x^2, \text{при } x < 0, \\ x, \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{при } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$	18.	$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4}, \text{ при } x \ne 2, x \ne -2, \\ 1, \text{ при } x = 2, \\ 0, \text{ при } x = -2, \end{cases}$
9.	$y = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0, \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ при } 0 \le x, x \ne 1, \\ 3, \text{ при } x = 1, \end{cases}$	19.	$y = \begin{cases} x^2, \text{ïðè } \lvert x\rvert \ge 1, \\ \frac{\lvert\tilde{o}\rvert}{\tilde{o}}, \text{ ïðè } 0 < \lvert x\rvert \le 1, \end{cases}$
10.	$y = \begin{cases} x + 1, \text{ при } x < 0, \\ (x - 1)^3, \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 3, \text{ при } x > 1, \end{cases}$	20.	$y = \begin{cases} 1, \text{ при } x < -1, \\ 1 - x^2, \text{ при } -1 \le x \le 1, \\ 0, \text{ при } x > 1, \end{cases}$

Решение нулевого варианта

Задание № 1

Решить неравенство $|2x+1| \le 1+|x-3|$***, исходя из определения модуля действительного числа и геометрически.***

Решение.

Неравенство, содержащее знак модуля, решается, как правило, методом «перебора». Находим те значения x, при которых выражения под знаком модуля равны нулю. $2x + 1 = 0$ при $x = -1/2$, $x - 3 = 0$ при $x = 3$. Точки $-1/2$ и 3 разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля имеют постоянный, легко определяемый знак (рис. 1). Это позволяет на каждом из промежутков раскрыть модули, используя определение модуля.

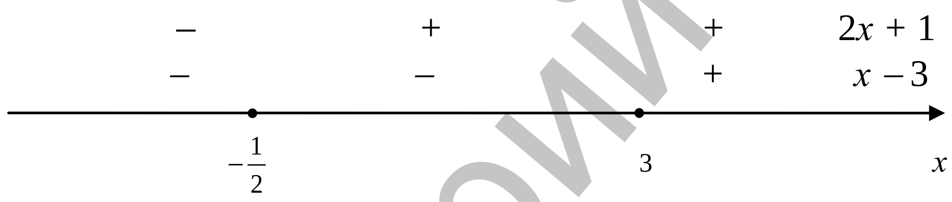

Рис. 1

1. Будем искать решение неравенства на промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Здесь $2x + 1 \le 0$, следовательно, $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$; $x - 3 < 0$, следовательно, $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$. Неравенство примет вид $-2x - 1 \le 1 - x + 3$, откуда $x \ge -5$. Получаем решение, являющееся пересечением промежутков $[-5, +\infty)$ и $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$, т.е. промежуток $\left[-5, -\dfrac{1}{2}\right]$.

2. Пусть $x \in \left(-\dfrac{1}{2},\ 3\right]$. Здесь $2x + 1 > 0$, $x - 3 \le 0$. Неравенство имеет вид $2x + 1 \le 1 - x + 3$, откуда $x \le 1$. Так как $x \in \left(-\dfrac{1}{2},\ 3\right]$, то решением неравенства является пересечение промежутков $\left(-\dfrac{1}{2},\ 3\right]$ и $(-\infty,\ 1]$, т.е. промежуток $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right]$.

3. Пусть $x \in (3, +\infty)$. На этом промежутке $2x + 1 > 0$, $x - 3 > 0$. Имеем неравенство $2x + 1 \le 1 + x - 3$, откуда $x \le -3$. На рассматриваемом промежутке таких значений x нет.

Ответ мы получим, объединяя найденные решения:

$$\left[-5, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2},\ 1\right] = [-5,\ 1].$$

Геометрическое решение неравенства $|2x+1| \le 1 + |x-3|$ получим, построив в одной и той же системе координат графики функций, образующих левую и правую части неравенства:

а) $y = |2x+1|$. График этой функции можно получить из графика функции $y = 2x + 1$, отобразив лежащую под осью OX часть графика симметрично относительно оси OX.

б) $y = 1 + |x-3|$. Строим график функции $y = |x-3|$ подобно тому, как было указано выше, и поднимаем его на единицу вверх.

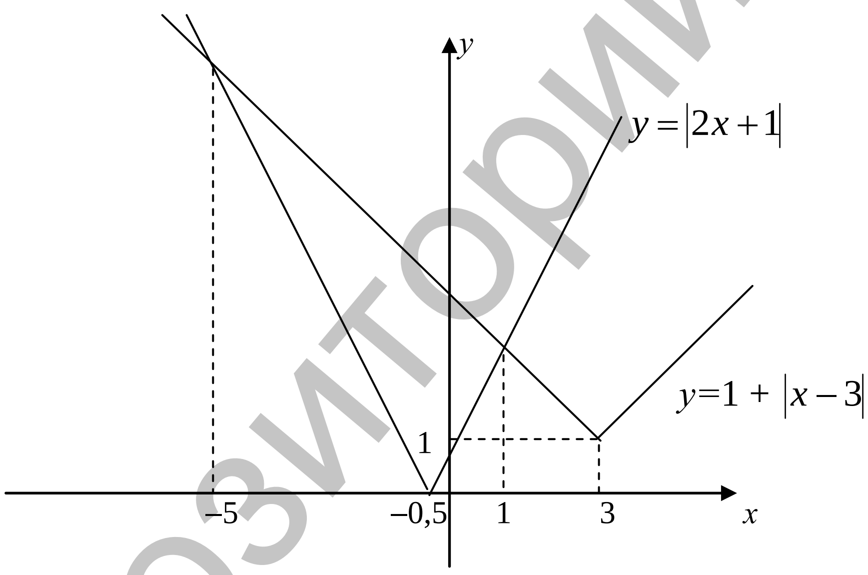

Рис. 2.

Из рисунка 2 видно, что графики пересекаются в точках –5 и 1 и что на интервале (-5, 1) график функции $y = |2x+1|$ расположен ниже графика функции $y = 1 + |x-3|$. Неравенство $|2x+1| \le 1 + |x-3|$ выполняется на отрезке [-5, 1].

Задание № 2

Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$.

Решение.

Область определения функции задается неравенством $\log_2 \sin x \geq 0$. Но так как данное неравенство равносильно неравенству $\sin x \geq 1$, то единственно возможным будет случай $\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Таким образом, областью определения данной функции является множество

$$D(f) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \right\}.$$

Задание № 3

Используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Решение.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив неравенство относительно n, получим $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, тогда для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Следовательно, по определению предела последовательности, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Задание №4

Найдите указанные пределы:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+1}{2x^3-1},\quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}.$$

Решение.

a) При $x\to\infty$ имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия этой неопределённости делим числитель и знаменатель дроби на старшую степень дроби, т.е. на x^3. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+1}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-x^2+1)/x^3}{(2x^3-1)/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

b) При $x=1$ числитель и знаменатель дроби равны нулю. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)(x^3-x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1}=\frac{3}{2}.$$

Задание № 5

Найдите пределы функций:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1},\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Решение.

a) Под знаком предела имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ на выражения

$\sqrt{1-x}+1$ и $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1$. Тогда, используя формулы сокращенного умножения, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{((1-x)-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{((x+1)-1)(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{(\sqrt{1-x}+1)}=-\frac{3}{2}.$$

b) Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так чтобы можно было использовать первый замечательный предел. Учитывая, что $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Задание № **6**

Используя второй замечательный предел, найдите предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Для раскрытия этой неопределённости используется второй замечательный предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x \to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Задание №7

а) Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ ***в точках*** $x = 3$, $x = 5$, $x = -5$,. ***Определить тип точек разрыва.***

Решение.

По определению, функция $y = f\ (x)$ является непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ определена в точке $x = 3$ и $f(3) = -\dfrac{1}{2}$.

Кроме того, $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x+5}{x^2-25} = -\dfrac{1}{2}$. Значит, функция непрерывна в точке $x = 3$.

Замечание. Непрерывность функции $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ в точке $x = 3$ можно доказать также следующим образом.

Найдем область определения функции:

$D\,(f) = (-\infty, -5)\cup(-5, 5)\cup(5, +\infty)$.

Данная функция является дробно-рациональной, следовательно, элементарной. Значит, по свойству элементарных функций, она непрерывна на всей своей области определения. Точка принадлежит области определения функции, следовательно, функция непрерывна в этой точке.

В точках $x = 5$ и $x = -5$ функция не определена, т.е $x = \pm 5$ — точки разрыва функции. Определим вид точек разрыва.

Рассмотрим точку $x = -5$.

$$\lim_{x \to -5}\frac{x+5}{x^2-25} = \lim_{x \to -5}\frac{1}{x-5} = -\frac{1}{10}.$$

Поскольку существует $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$, то точка $x = -5$ является точкой разрыва I рода, а именно, точкой устранимого разрыва.

Для определения характера точки $x = 5$, найдем левый и правый пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{x-5}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{x-5}=+\infty;$$

Значит $x=5$ – точка разрыва II рода.

График данной функции изображен на рисунке 3.

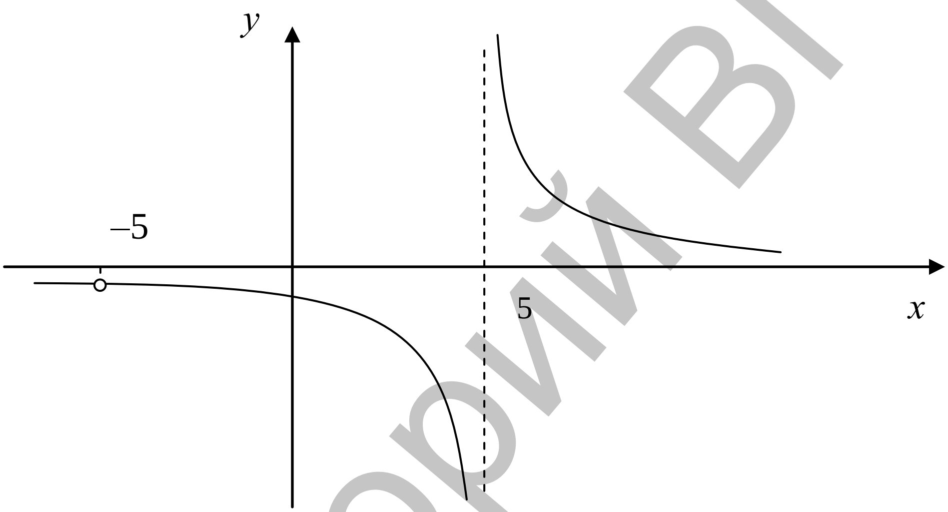

Рис. 3.

б) Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{\frac{1}{2-x}}$ ***в точках*** $x_1=2$, $x_2=3$. ***Определить вид точек разрыва.***

Решение.

Найдем область определения данной функции

$D(f) = (-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$.

Это сложная функция, являющаяся суперпозицией двух элементарных функций: $y = e^t$ и $t=\frac{1}{2-x}$, следовательно функция $y=e^{\frac{1}{2-x}}$ также является элементарной, а, значит, непрерывной на промежутках $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. Так как точка $x = 3$ принадлежит промежутку $(2, +\infty)$, то функция непрерывна в этой точке.

В точке $x=2$ функция не определена, значит это точка разрыва. Определим ее вид, для этого найдем односторонние пределы функции в точке $x=2$. Так как $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{1}{2-x}=+\infty$, и функция $e^t\to+\infty$ при $t\to+\infty$, то $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = +\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$, и функция $e^t \to 0$ при $t \to -\infty$, то $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = 0$, т.е. точка $x = 2$ — точка разрыва II рода.

Задание № 8

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x+1}}, x \in (-\infty,-1) \\ |\mathrm{sgn}(x)|, x \in [-1,+\infty) \end{cases}$. ***Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

Решение.

Преобразуем функцию, избавившись от знаков модуля и sgn:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x+1}}, \quad x \in (-\infty,-1), \\ 1, \quad x \in [-1,0) \cup (0,+\infty), \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

На каждом из промежутков $(-\infty,1),(-1,0),(0,+\infty)$ функция $f(x)$ является элементарной, а, значит, непрерывна как элементарная. Исследуем точки стыка промежутков:

1. x_1 = -1: $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} 2^{-\frac{1}{x+1}} = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim 1 = 1,$ f(-1) = 1. Поэтому в точке -1 функция имеет разрыв второго рода при правосторонней непрерывности.

2. x_2 =0: $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1,$ $f(0) = 0$. Имеем разрыв первого рода, так как оба односторонних предела существуют. А так как. они равны между собой, то этот разрыв устраним путем переопределения функции в точке 0: f(0)=1. После устранения разрыва получим функцию: $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x+1}}, \quad x \in (-\infty,-1), \\ 1, \quad x \in [-1,+\infty). \end{cases}$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 4.

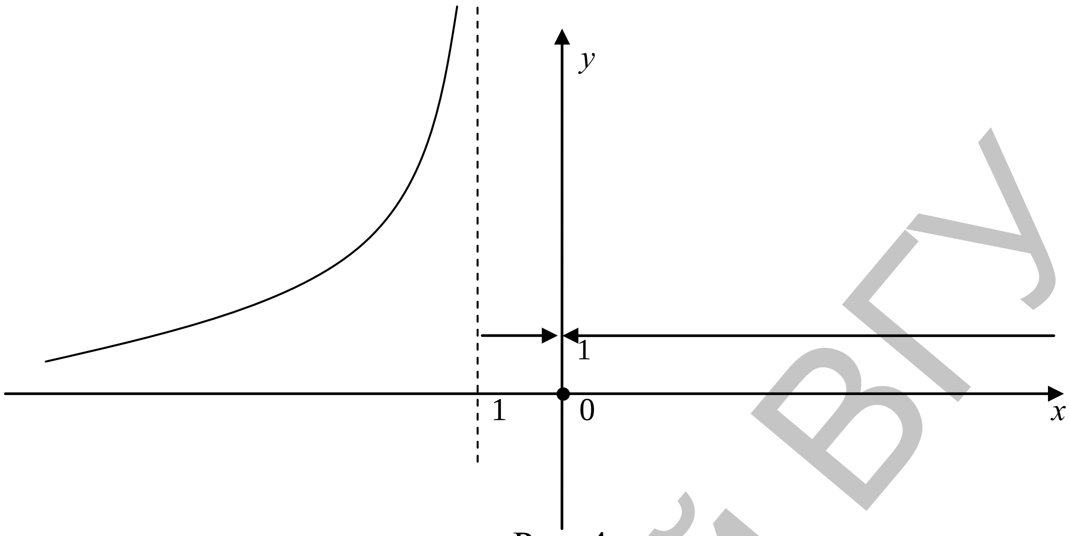

Рис. 4.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Множества, основные операции над множествами.
2. Необходимость расширения множества рациональных чисел.Сечение Дедекинда на множестве рациональных чисел. Определение иррационального числа.
3. Сравнение действительных чисел. Леммы о действительных числах.
4. Представление действительных чисел десятичной дробью. Изображение действительных чисел на числовой прямой
5. Полнота множества действительных чисел.
6. Границы числовых множеств. Теоремы о точных гранях числовых множеств.
7. Числовые последовательности. Ограниченные сверху, ограниченные снизу, ограниченные, неограниченные числовые последовательности.
8. Бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности и их свойства
9. Определение предела последовательности. Его геометрический смысл.
10. Теорема о единственности предела последовательности. Необходимое условие существования предела последовательности.
11. Свойства пределов последовательностей.
12. Монотонные последовательности. Необходимый и достаточный признак сходимости монотонной последовательности (теорема Вейерштрасса). Лемма о вложенных промежутках. Второй замечательный предел. Число е.
13. Ограниченные последовательности и их свойства.
14. Лемма Больцано-Вейерштрасса.
15. Необходимый и достаточный признак сходимости числовой последовательности (Критерий Коши).
16. Функции. Определение; свойства, способы задания; основные элементарные функции, их свойства и графики; элементарнные функции.
17. Определения предела функции.
18. Свойства предела функции.Виды неопределенностей.
19. Бесконечно-большие и бесконечно-малые функции. Их свойства.
20. Первый и второй замечательные пределы.
21. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые.

22. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность сложной функции.
23. Классификация точек разрыва.
24. Предел степенно-показательной функции.
25. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
26. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч. 1.– М.: Наука, 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Т. 1.– М.: Наука. 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1.– М. Наука. 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1.– Физматгиз. 1960.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. – Витебск: Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2008.

Дополнительная литература

1. Гусак А.А., Гусак Г.М, Справочник по высшей математике.– Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
4. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. Ч. 1. – Витебск: Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова» 2005.

Содержание

Введение ………………………………………………………….. 3

Задания к контрольной работе ……………………………….. 4

Решение нулевого варианта ……………………………….. 16

Вопросы к экзамену ………………………………………… 25

Список литературы …………………………………………. 26