Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
## ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ

*Курс лекций*



*2008*

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
М90

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин,** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Рецензент: доцент кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук О.В. Храмцов

Учебное издание подготовлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математический анализ», и предназначено для студентов заочной формы обучения математического факультета.

Излагается теоретический материал и рассматриваются наиболее типичные задачи по излагаемым разделам математического анализа. Предназначено для самостоятельной работы студентов.

**УДК 517(075.8)**
**ББК 22.161.1я73**

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

# ВВЕДЕНИЕ

Курс лекций по математическому анализу предназначен для студентов первого курса заочного отделения математического факультета и содержит теоретический материал, который обычно изучается в первом семестре.

Пособие охватывает такие разделы математического анализа, как основы теории действительных чисел, теория пределов, непрерывность функции, производная. Порядок расположения материала соответствует действующей учебной программе и установившемуся на математическом факультете плану чтения лекций.

Учитывая, что студентам-заочникам приходится много заниматься самостоятельно, авторы попытались изложить материал в простой и доступной форме, не отходя, однако, от систематического и, по возможности, строгого изложения. Все теоретические положения иллюстрируются примерами.

Данное учебное издание может быть полезно также преподавателям и студентам очного отделения математического и физического факультетов.

# I. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

## § 1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

### 1. Множество. Основные операции над множествами

Понятие множества является одним из основных в математике. Оно принадлежит к числу неопределяемых (первичных) понятий.

Под множеством мы будем понимать совокупность объектов, объединенных по какому-либо признаку. Это не определение понятия, а разъяснение его значения, т. к. понятия множество, совокупность, набор являются равносильными.

Примерами множеств являются множество точек плоскости, множество букв в алфавите, множество действительных чисел.

Множество может содержать конечное или бесконечное число объектов какой-либо природы. Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами** или **точками** множества.

Элементы множества обозначаются маленькими латинскими буквами: $a, b, c$; сами множества обычно обозначаются большими латинскими буквами: $A, B, C$.

Принадлежность элемента $a$ множеству $A$ обозначается следующим образом: $a \in A$ ($a$ принадлежит $A$; $a$ – элемент множества $A$).

Если $b$ не принадлежит множеству $A$, это записывается так: $b \notin A$.

Запись $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает, что множество $A$ состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

***Определение* 1.** *Два множества называются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Обозначение: $A = B$.

***Пример*.** Рассмотрим множества $A = \{3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{4, 3, 6, 5\}$. Множества состоят из одних и тех же элементов, следовательно, они равны. Порядок следования элементов в этом случае роли не играет.

***Определение* 2.** *Множество A называется* ***подмножеством*** *множества B, если все элементы множества A являются и элементами множества B.*

Обозначение: $A \subset B$ или $B \supset A$ ($A$ содержится в множестве $B$, $B$ содержит множество $A$, $A$ является подмножеством множества $B$).

Например, если А – множество студентов группы, В – множество студентов курса, то $A \subset B$; если $Z$ – множество целых чисел, $N$ – множество натуральных чисел, то $Z \supset N$.

***Определение* 3.** *Множество, не содержащее в себе ни одного элемента, называется* ***пустым множеством****.*

Обозначение: $\varnothing$

Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 2x + 6 = 0$ является пустым множеством (дискриминант уравнения $D = 4 - 24 = -20 < 0$).

Пустое множество является подмножеством для любого множества.

Пусть $X$ – множество, а $p(x)$ – какое-либо свойство этого множества. Тогда запись $\{x \mid x \in X, p(x)\}$ означает, что рассматриваются все элементы множества $X$, обладающие свойством $p(x)$.

Например, $A = \{x \mid x \in N, x > 3\}$ означает, что множество $A$ состоит из натуральных чисел больших 3.

***Определение* 4. *Объединением*** *двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из двух данных множеств.*

Обозначение: $A \bigcup B = C$.

$C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

Например,

$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 6\}$,

$C = A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

***Определение* 5. *Пересечением*** *двух множеств A и B называется множество D, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих как A так и B.*

Обозначение: $A \bigcap B = D$.

$D = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Например,

$A = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$, $B = \{x \mid x = 3k, k \in N\}$,

$D = A \bigcap B = \{6, 12, 18, 24, \dots\} = \{x \mid x = 6k, k \in N\}$.

***Определение* 6. *Разностью*** *множеств A и B называется множество F, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Обозначение: $F = A \setminus B$.

$F = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Например,

$A = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$, $B = \{x \mid x = 3k, k \in N\}$,

$F = A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\} = \{x \mid x = 2k \text{ и } x \neq 3k, k \in N\}$.

Для графического изображения множеств используют так называемые ***диаграммы Эйлера-Венна.*** Множество изображается кругом на плоскости и мыслится как множество точек круга.

Изобразим штриховкой на диаграммах Эйлера результаты основных операций над множествами.

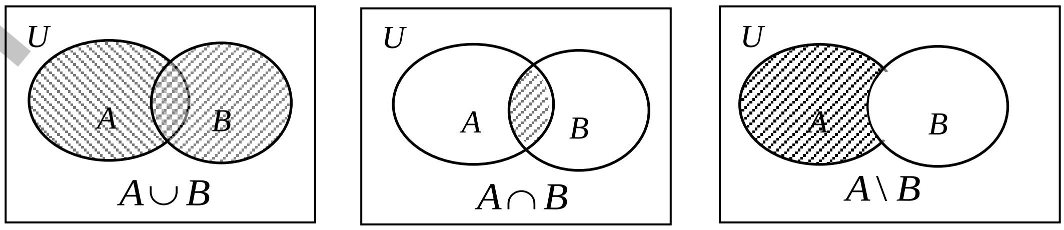


Рис. 1.

## 2. Множества N, Z, Q. Необходимость введения иррациональных чисел

Из школьного курса математики хорошо знакомо понятие рационального числа и свойства рациональных чисел. Напомним, что **рациональными,** называются числа, представимые в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ – целое, $n$ – натуральное числа.

Одно и то же рациональное число может быть представлено различным образом. Например, число $\frac{1}{2}$ можно представить в виде дробей с различным знаменателем: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ .

Для рациональных чисел важную роль играет **правило сравнения**:

два рациональных числа $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$ считаются равными, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$;

для двух неотрицательных рациональных чисел $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$ выполняется неравенство $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, если $m_1 n_2 < m_2 n_1$;

для двух отрицательных рациональных чисел $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$ выполняется неравенство $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, если $\left|\frac{m_1}{n_1}\right| > \left|\frac{m_2}{n_2}\right|$;

любое положительное рациональное число больше любого отрицательного рационального числа.

Для рациональных чисел определены **операции сложения и умножения** рациональных чисел.

Иными словами существует правило, посредством которого двум рациональным числам $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$ ставится в соответствие рациональное число $c$, называемое суммой этих чисел и обозначаемое следующим образом: $c = a + b$. Это правило определяется формулой

$$c = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

и называется **правилом сложения**.

Существует правило, посредством которого двум рациональным числам $a$ и $b$ ставится в соответствие рациональное число $c$, которое называется их **произведением** и обозначается: $c = a \cdot b$.

Это правило определяется формулой: $c = a \cdot b = \dfrac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$ и называется **правилом умножения**.

Перечислим основные свойства, которым подчинены эти правила.

**Правило сравнения рациональных чисел обладает следующим свойством:** если $a \geq b$ и $b \geq c$, то $a \geq c$ (свойство транзитивности сравниваемых чисел).

**Свойства правила сложения рациональных чисел:**

2) $a + b = b + a$ (переместительное свойство);

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное свойство);

4) существует такое рациональное число 0, что для любых рациональных чисел справедливо равенство $a + 0 = a$;

5) для каждого рационального числа $a$, существует противоположенное ему число $a'$, такое что $a + a' = 0$.

**Свойства правила умножения:**

6) $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительное свойство);

7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательное свойство);

8) существует такое рациональное число 1, что для любых рациональных чисел $a$, справедливо равенство $a \cdot 1 = a$;

9) для каждого рационального числа $a$, существует обратное ему число $a'$, такое что $a \cdot a' = 1$;

10) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (распределительное свойство умножения относительно сложения);

11) если $a > b$, то $a + c > b + c$;

12) если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

13) каково бы ни было рациональное число $a$, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет $a$.

Эти 13 свойств называются ***основными свойствами рациональных чисел*** или ***аксиомами множества рациональных чисел***.

***Замечание.*** Свойство 13 называется аксиомой Архимеда.

Все остальные свойства можно вывести из перечисленных свойств.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль) – сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел опять будет рациональным числом. Однако оказывается, что существуют алгебраические и геометрические задачи, которые не имеют решения в множестве рациональных чисел. Так задачей, часто не имеющей решения в множестве рациональных чисел, является извлечение корня из положительного целого числа.

Рассмотрим число $\sqrt{2}$. Докажем, что оно не является рациональным.

Предположим противное: существует такая рациональная дробь $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ – взаимно простые натуральные числа, что $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Возведем обе части данного равенства в квадрат, тогда $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $m^2 = 2n^2$. Значит $m$ – число четное: $m = 2r$ ($r$ – натуральное число). Тогда $n^2 = 2r^2$, следовательно, $n$ – четное число. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Числа, которые нельзя представить в виде рациональной дроби называются **иррациональными**.

В математической практике иррациональные числа начинают появляться еще в средние века, но настоящими числами их не считали. Лишь в XVII веке постепенно начинает созревать идея о равноправии рациональных и иррациональных чисел. Под иррациональными стали понимать величины несоизмеримые с единицей. Развитие математического анализа в конце XVIII и в начале XIX веков сделало необходимым построение строгой теории иррациональных чисел на основе чисто арифметического их определения. Было создано несколько таких теорий. Мы изложим теорию иррациональных чисел следуя Дедекинду.

## § 1.2. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

### 1. Определение иррационального числа. Сечение Дедекинда

Введем понятие иррационального числа, основываясь на теории Дедекинда.

Рассмотрим разбиение множества $Q$ рациональных чисел на два непустых подмножества $A$ и $A'$. Предположим, что:

*а*) каждое рациональное число принадлежит одному и только одному множеству $A$ или $A'$;

*б*) каждое число $a \in A$ меньше каждого числа $a' \in A'$.

Такое разбиение множества рациональных чисел будем называть ***сечением***. Множество $A$ называется ***нижним классом сечения***, множество $A'$ – ***верхним классом сечения***.

Обозначение: $A \mid A'$.

Из определения сечения следует, что каждое рациональное число меньшее числа $a$ нижнего класса, также принадлежит нижнему классу, каждое рациональное число большее числа $a'$ верхнего класса, также принадлежит верхнему классу.

**Примеры.** Рассмотрим примеры сечений множества рациональных чисел.

1) $A = \{a \mid a \in \mathrm{R}, a < 1\}$, $A' = \{a \mid a \in R, a \geq 1\}$.

Легко видеть, что число 1 является наименьшим в верхнем классе сечения $A'$, нижний класс $A$ не имеет наибольшего.

2) $A = \{a \mid a \in A, a \leq 1\}$, $A' = \{a \mid a \in A', a > 1\}$.

Для этого разбиения в верхнем классе нет наименьшего элемента, а в нижнем классе наибольшим элементом является единица.

3) $A = \{a \mid a \in Q, a \leq 0\} \bigcup \{a \mid a \in Q, a > 0, a^2 < 2\}$,

$A' = \{a \mid a \in Q, a > 0, a^2 > 2\}$.

Множество $A$ не имеет наибольшего элемента, а множество $A'$ – наименьшего.

Докажем, что в классе $A$ нет наибольшего элемента. Выберем произвольное положительное число $a \in A$, тогда $a^2 < 2$. Докажем, что существует натуральное число $n$ такое, что выполняется неравенство $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$,

или $a^2 + 2\frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$.

Тогда $2\frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$. Так как $2\frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2\frac{a}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2a+1}{n}$, то достаточно выбрать $n$ так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$,

или $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$. По свойству 13 рациональных чисел (см. п.2, § 1.1) такое число существует. Достаточно взять, например, $n = \left[\frac{2a+1}{2-a^2}\right] + 1$, чтобы число $a + \frac{1}{n}$ удовлетворяло неравенству $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Следовательно, $a + \frac{1}{n}$ принадлежит классу $A$. Но $a + \frac{1}{n} > a$. Поэтому для любого элемента $a$ из класса $A$ найдется элемент $a + \frac{1}{n} > a$, а это значит, что в классе $A$ не существует наибольшего элемента.

Аналогично доказывается, что класс $A'$ не имеет наименьшего элемента.

Очевидно, что не существует сечения, у которого верхний класс имеет наименьший элемент, а нижний класс – наибольший.

Итак, сечения множества рациональных чисел бывают трех типов.

1. В нижнем классе $A$ нет наибольшего элемента, в верхнем классе $A'$ есть наименьший элемент.

2. В нижнем классе $A$ есть наибольший элемент, в верхнем классе $A'$ нет наименьшего элемента.

3. В нижнем классе $A$ нет наибольшего элемента, в верхнем классе $A'$ нет наименьшего элемента.

В первых двух случаях говорят, что сечение производится рациональным числом $r$. В третьем случае говорят, что сечение не определяет никакого рационального числа. Число, определяемое этим сечением, называется **иррациональным**. В примере 3) сечение определяет иррациональное число $\alpha = \sqrt{2}$.

Рациональные и иррациональные числа получили общее название – ***действительные числа.***

Действительные числа обозначаются буквой $R$.

## 2. Сравнение действительных чисел

Рассмотрим, каким образом сравниваются действительные числа.

***Определение* 1**. ***Два иррациональных числа*** *$\alpha$ и $\beta$, определяемые сечениями $A \mid A'$ и $B \mid B'$, называются* ***равными****, если их нижние и верхние классы равны.* (*Достаточно потребовать $A = B$*).

Это же определение можно ввести и для равенства рациональных чисел.

Установим понятие “больше” для действительных чисел. Для рациональных чисел понятие “ больше ” мы уже установили.

***Определение* 2. *Иррациональное число*** *$\alpha$, определяемое сечением $A \mid A'$,* ***больше рационального числа*** *$r$, если $r$ принадлежит нижнему классу $A$ сечения $A \mid A'$; и число $\alpha$* ***меньше рационального числа*** *$r$, если $r$ принадлежит верхнему классу $A'$ сечения $A \mid A'$.*

***Определение* 3. *Иррациональное число*** $\alpha$ $(A \mid A')$ ***больше иррационального числа*** $\beta$ $(B \mid B')$, *если $A \supset B$, $A \neq B$.*

Понятие **“ меньше ”** вводится следующим образом: если $\alpha > \beta$, то говорят, что $\beta < \alpha$.

Из определений 1, 2, 3 следует, что для каждой пары действительных чисел $\alpha$ и $\beta$ имеет место одно и только одно из соотношений

$\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.

Кроме того, из неравенств $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, следует $\alpha > \gamma$.

***Лемма* 1.** *Каковы бы ни были два действительных числа $\alpha$ и $\beta$ ($\alpha > \beta$), всегда найдется такое действительное число $r$, которое лежит между ними, т. е. $\alpha > r > \beta$.*

**Доказательство.** Докажем, что можно найти даже рациональное число, удовлетворяющее данному неравенству.

Пусть $\alpha = A \mid A'$, $\beta = B \mid B'$, причем $\alpha > \beta$. Тогда $A \supset B$ и $A \neq B$, т. е. существует такое рациональное число $r \in A$, которое не принадлежит классу $B$. Следовательно, $r \in B'$. Так как $r \in A$, то $r < \alpha$. Так как $r \in B'$, то $r > \beta$. Тогда, $\beta < r < \alpha$. □

***Лемма* 2.** *Пусть даны два действительных числа* $\alpha$ *и* $\beta$. *Если для любого рационального числа* $\varepsilon > 0$, *числа* $\alpha$ *и* $\beta$ *могут быть заключены между одними и теми же рациональными границами* $s \le \alpha \le S$, $s \le \beta \le S$, *такими, что* $S - s < \varepsilon$, *то* $\alpha = \beta$.

**Доказательство.** Предположим, что $\alpha \neq \beta$, например, $\alpha > \beta$. Тогда по лемме 1 между числами $\alpha$ и $\beta$ можно вставить два таких рациональных числа $r'$ и $r''$ $(r'' > r')$, что выполняется неравенство $\beta < r' < r'' < \alpha$. Тогда для чисел $S$ и $s$ $(S - s < \varepsilon)$ выполняется неравенство $s < r' < r'' < S$, следовательно, $S - s > r'' - r'$. В случае $\varepsilon = r'' - r'$ получаем противоречие с условием леммы, т.е. наше предположение неверно и $\alpha = \beta$. □

## 3. Полнота множества действительных чисел

Рассматривая сечения в множестве рациональных чисел, мы установили, что существуют сечения, которые не имеют пограничного рационального числа, которое производило бы это сечение (т. е. числа, являющегося наименьшим для верхнего класса или наибольшим для нижнего). Именно наличие в множестве рациональных чисел пробелов (неполнота множества) и послужило основанием для введения новых чисел – иррациональных.

Рассмотрим **сечение в множестве действительных чисел**. Под сечением, также как и в множестве рациональных чисел, будем понимать разбиение множества действительных чисел на два непустых подмножества $A$ и $A'$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) любое действительное число попадает в одно и только одно множество $A$ или $A'$;

2) каждое число $\alpha$ множества $A$ меньше каждого числа $\alpha'$ множества $A'$.

Множество $A$ называется нижним классом сечения $A|A'$, множество $A'$ – верхним классом данного сечения.

Возникает вопрос: “ Для всякого ли сечения найдется действительное число, производящее это сечение, или существует сечение, которое не имеет пограничных действительных чисел? ”. Иными словами, существуют ли в множестве действительных чисел пробелы, которые дали бы основание для введения новых чисел?

***Теорема* 1 (*основная теорема Дедекинда*).**

*Для всякого сечения* $A|A'$ *в множестве действительных чисел существует действительное число* $\alpha$ , *которое производит это сечение*.

*Это число будет либо наибольшим в нижнем классе сечения $A$, либо наименьшим в верхнем классе $A'$.*

**Доказательство**. Обозначим через $\bar{A}$ множество рациональных чисел, принадлежащих классу $A$, через $\bar{A}'$ – множество рациональных чисел, принадлежащих классу $A'$. Тогда множества $\bar{A}$ и $\bar{A}'$ образуют сечение в множестве рациональных чисел, которое определяет некоторое действительное число $\alpha$. Число $\alpha$ должно попасть либо в класс $A$ либо в класс $A'$. Пусть $\alpha \in A$. Докажем, что $\alpha$ является наибольшим в этом классе.

Доказательство будем проводить методом от противного: пусть $\alpha$ не является наибольшим в классе $A$, т.е. существует $\alpha_0 \in R$ и $\alpha_0 > \alpha$. Тогда между числами $\alpha_0$ и $\alpha$ найдется рациональное число $r \in A$, а следовательно $r \in \bar{A}$.

Мы получили, что существует рациональное число $r$, принадлежащее нижнему классу $\bar{A}$ сечения $\bar{A}|\bar{A}'$, производимого числом $\alpha$, такое что $r > \alpha$. Но это невозможно, так как число $\alpha$, производящее сечение $\bar{A}|\bar{A}'$, больше всех рациональных чисел, принадлежащих классу $\bar{A}$, а следовательно $\alpha > r$. Значит, наше предположение неверно и $\alpha -$ наибольшее в классе $A$.

Аналогично можно доказать, что если $\alpha \in A'$, то $\alpha$ – наименьшее в этом классе. □

Это свойство действительных чисел называется ***непрерывностью или полнотой множества действительных чисел.***

## 4. Представление действительных чисел десятичной дробью. Изображение действительных чисел на прямой

Рассмотрим такое действительное число $\alpha$, которое не является целым и не представимо в виде конечной десятичной дроби. Пусть число $\alpha$ определяется сечением $A|A'$. Тогда существуют такие целые числа $c$ и $c + 1$, что $c < \alpha < c + 1$. Число $c$ может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Разделим отрезок $[c, c + 1]$ на десять равных частей, получим отрезки: $[c; c{,}1]$, $[c{,}1; c{,}2]$, $[c{,}2; c{,}3]$, … , $[c{,}9; c + 1]$. Длина отрезков разбиения равна $\frac{1}{10}$. Тогда число $\alpha$ принадлежит одному из данных отрезков $[c{,}c_1; c{,}c_1 + \frac{1}{10}]$, и справедливо неравенство $c{,}c_1 < \alpha < c{,}c_1 + \frac{1}{10}$.

Делим выделенный отрезок на 10 частей длиной $\frac{1}{10^2}$ и получим

$$c{,}c_1c_2 < \alpha < c{,}c_1c_2 + \frac{1}{10^2}.$$

На $n$-ом этапе такого деления получим неравенство

$$c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n} < \alpha < c{,}\, c_1c_2 \ldots c_\text{n} + \frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

Продолжая этот процесс бесконечное число раз, мы построим целое число $c$ и бесконечный ряд цифр $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ . Составленную из них бесконечную десятичную дробь, т.е. символ

$$c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n}\ldots \qquad (2)$$

можно рассматривать как представление действительного числа $\alpha$.

В случае, если $\alpha$ является целым или рациональным числом, представимым конечной десятичной дробью, то в какой-то момент число $\alpha$ совпадает с одним из концов промежутка $[c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n};\, c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n} + \frac{1}{10^n}]$, и тогда для $\alpha$ определены более общие чем (1) соотношения

$$c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n} \le \alpha \le c{,}\, c_1c_2 \ldots c_\text{n} + \frac{1}{10^n}. \qquad (3)$$

При этом, начиная с некоторого момента, слева или справа в (3) постоянно будет стоять знак равенства. В зависимости от того, где знак равенства будет стоять, последующие после цифры $c_\text{n}$ цифры в дроби $c{,}c_1c_2 \ldots c_\text{n}\ldots$ окажутся или все нулями, или все девятками. Поэтому в этом случае число $\alpha$ можно представить двумя способами: или с нулем или с девяткой в периоде.

Например, число 2, 718 можно представить следующим образом:

2,718 = 2,718000… или 2,718 = 2,717999…

***Замечание* 1.** Десятичные дроби, стоящие в левой и в правой части неравенств (1) и (3), называются **десятичными приближениями** числа $\alpha$ по недостатку и по избытку. Разность между десятичными приближениями не превосходит $\frac{1}{10^n}$. С возрастанием $n$, эта разность может стать меньшей любого рационального числа $\varepsilon > 0$. Следовательно, по лемме 2 (см. п.2) не существует действительного числа $\beta$ отличного от $\alpha$, которое удовлетворяло бы неравенствам (1) и (3).

Можно доказать так же, что если взять произвольную бесконечную дробь (2), то существует действительное число $\alpha$ которое представляется этой дробью.

***Замечание* 2.** Из школьного курса математики известно, что любое рациональное число представляется конечной или бесконечной периодической дробью, и, наоборот, любая бесконечная периодическая дробь определяет рациональное число. Следовательно, иррациональные числа представимы непериодическими десятичными дробями.

**Перейдем к изображению действительных чисел на прямой.**

Рассмотрим прямую с выбранной на ней произвольной точкой $O$ (началом отсчета). От точки $O$ вправо отложим отрезок $[O, E]$, длину которого примем за единицу.

***Определение 4.*** *Луч прямой, которому принадлежит отрезок ОЕ, назовем* ***положительной полупрямой****. Дополнительный луч –* ***отрицательной полупрямой.***

Точке $O$ поставим в соответствие целое число 0, точке $E$ – число 1.

Каждому натуральному числу $n$ – точку $N$, лежащую на положительной полупрямой, такую что $|O, N| = n\,|O, E|$.

Каждому целому отрицательному числу $-n$ – точку $N'$, лежащую на отрицательной полуоси, такую что $|O, N| = |O, N'| = n\,|O, E|$.

Аналогично, чтобы изобразить рациональное число $\frac{m}{n} > 0$, на положительной полуоси построим точку $P$ такую, что длина отрезка $|O, P| = \frac{m}{n}\,|O, E|$. Для этого построим отрезок $m|O, E|$, а затем разделим этот отрезок на $n$ равных частей. Если $\frac{m}{n} < 0$, то точку $P$ откладываем на отрицательной полуоси.

Остается указать способ сопоставления иррациональных чисел точкам прямой.

Рассмотрим для определенности положительное иррациональное число $\alpha > 0$. Тогда числу $\alpha$ ставятся в соответствие десятичные приближения этого числа: по недостатку:

$a_0 = c,$

$a_1 = c, c_1,$

…

$a_n = c, c_1c_2 \dots c_n,$

и по избытку:

$\overline{a_0} = c + 1,$

$\overline{a_1} = c, c_1 + \frac{1}{10},$

…

$\overline{a_n} = c, c_1c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n},$

Построим бесконечное множество отрезков $[a_0, \overline{a_0}]$, $[a_1, \overline{a_1}]$ … $[a_n, \overline{a_n}]$, … . Эти отрезки будут вложены друг в друга, и длина произвольного отрезка $[a_i, \overline{a_i}]$, равна $\frac{1}{10^i}$. Значит, для любого действительного числа $\varepsilon > 0$, существует отрезок $[a_i, \overline{a_i}]$, длина которого $\frac{1}{10^i} < \varepsilon$. Следовательно, по лемме 2 п.2, множество всех таких отрезков будет иметь только одну общую точку, соответствующую иррациональному числу $\alpha$.

Таким образом, любое действительное число можно изобразить точкой на числовой прямой. Причем из теоремы о полноте множества действительных чисел следует, что любой точке числовой прямой соответствует некоторое действительное число.

## 5. Абсолютная величина (модуль) действительного числа

***Определение* 5. *Абсолютной величиной* (*модулем*)** *действительного числа* $\alpha$ *называется число* $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \ge 0, \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$

Например: $|-2| = 2$, $|2| = 2$ .

Перечислим свойства модуля действительного числа:

1. $|\alpha| = |-\alpha|$,
2. если $|\alpha| \le \beta$, то $-\beta \le \alpha \le \beta$,
3. $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$,
4. $|\alpha + \beta| \ge |\alpha| - |\beta|$,
5. $|\alpha| - |\beta| \le |\alpha - \beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

Докажем, например, свойство 3: $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

Так как $-|\alpha| \le \alpha \le |\alpha|$ и $-|\beta| \le \beta \le |\alpha|$, то $-(|\alpha| + |\beta|) \le \alpha + \beta \le |\alpha| + |\beta|$, следовательно $|\alpha + \beta| \le \big||\alpha| + |\beta|\big|$. Но $\big||\alpha| + |\beta|\big| = |\alpha| + |\beta|$. Тогда $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

## 6. Границы числовых множеств

***Определение* 6.** *Множество, элементами которого являются числа, называется числовым множеством.*

Обозначим его $X = \{X\}$.

***Определение* 7.** *Если для множества* $\{X\}$ *существует такое действительное число M, что для всех элементов x множества* $\{X\}$ *выполняется неравенство x* $\le$ *M, то будем говорить, что множество* $\{X\}$ ***ограничено сверху.*** *Число M называется **верхней границей** множества* $\{X\}$.

Например, множество правильных дробей $X = \{\frac{m}{n}$, где $m, n \in N$, $m < n\}$ ограничено сверху числом 1 или любым числом большим 1.

***Определение* 8.** *Множество* $\{X\}$ *называется **ограниченным снизу**, если существует такое действительное число* $m$, *что всех элементов x множества* $\{X\}$ *выполняется неравенство x* $\ge m$.

Если множество $\{X\}$ неограничено сверху (снизу), то за его верхнюю (нижнюю) границу принимается знак $\infty$ ($-\infty$).

***Пример.*** Множества точек отрезка $[a, b]$, интервалов $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, b)$ ограничены сверху и снизу числами $a$ и $b$. Множество точек полупрямой $a \le x < \infty$ ограничено снизу числом $a$. Множество точек прямой $-\infty < x < \infty$ не ограничено ни снизу, ни сверху.

***Определение* 9.** *Наименьшая из всех верхних границ, ограниченного сверху множества, называется **точной верхней границей**.*

Обозначается: $M^* = sup\ X = sup\ \{X\}$.

***Определение 10.*** *Наибольшая из всех нижних границ ограниченного снизу множества называется **точной нижней границей**.*

Обозначается: $m^* = inf\ X = inf\ \{X\}$.

Можно дать также следующие определения точной нижней и точной верхней границы последовательности.

***Определение* 11.** *Число $m$ называется **точной нижней** границей множества $\{X\}$, если*:

1) *для любого элемента $x \in \{X\}$ выполняется неравенство $x \ge m$.*
2) *для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такой элемент $\bar{x}$ множества $\{X\}$, для которого выполняется неравенство $\bar{x} - \varepsilon \le m$.*

***Определение* 12.** *Число $M^*$ называется **точной верхней** границей множества $\{X\}$, если*:

3) *для любого элемента $x \in \{X\}$ выполняется неравенство $x \le M$.*
4) *для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такой элемент $\bar{x}$ множества $\{X\}$, для которого выполняется неравенство $\bar{x} + \varepsilon \ge M$.*

Имеет место следующая теорема.

***Теорема* 2.** *Если множество $\{X\}$ ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань. Если множество $X = \{X\}$ ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.*

**Доказательство.** Пусть множество $\{X\}$ ограничено сверху.

1. Пусть множество $\{X\}$ имеет наибольший элемент $\bar{x}$, тогда для любого элемента $x \in \{X\}$ выполняется неравенство $x \le \bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ – верхняя грань множества $\{X\}$. В то же время $\bar{x} \in X$. Следовательно, $\bar{x}$ – наименьшая из всех верхних границ данного множества, т.е. $\bar{x}$ – точная верхняя граница множества $\{X\}$.

2. Пусть множество $\{X\}$ не имеет наибольшего элемента. Построим сечение в множестве действительных чисел так, чтобы в верхний класс $A'$ входили все верхние грани множества $\{X\}$, а в нижний класс $A$ – само множество $\{X\}$. Данное сечение производится некоторым действительным числом $\beta$. При этом $\beta \ge x \in X$, следовательно, $\beta$ – является верхней гранью множества $\{X\}$, тогда $\beta \in A'$ и является его наименьшим числом. Значит, $\beta \le M$, где $M$ – произвольная верхняя граница множества $\{X\}$, и $\beta = sup\ \{X\}$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. □

***Теорема* 3.** *Ограниченное сверху (снизу) множество имеет только одну точную верхнюю (точную нижнюю) грань.*

# II. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## § 2.1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 1. Определение числовой последовательности. Ограниченная и неограниченная числовые последовательности

***Определение* 1.** *Если каждому числу* $n \in N$ *ставится в соответствие по определенному закону некоторое действительное число* $x_n$*, то бесконечное множество занумерованных действительных чисел мы будем называть* ***числовой последовательностью***.

*Числа* $x_n$ *называются* ***элементами или членами*** *последовательности.*

Обозначение: $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ .

Основные способы задания числовых последовательностей:

2) с помощью перечисления элементов: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;

3) с помощью задания формулы $n$-го члена: $\{x_n\}$;

4) с помощью описания закона, по которому элементы последовательности подбираются.

Примеры последовательностей:

1) $\{1\} \equiv 1, 1, 1, \ldots$;

2) $\{n\} \equiv 1, 2, 3, \ldots$;

3) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \equiv 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$;

4) $\{(1 + (-1)^n)n\} = 0, 4, 0, 8, \ldots$.

Пусть заданы две произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда ***суммой последовательностей*** $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ называется последовательность $\{x_n + y_n\}$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов данных последовательностей; ***произведением последовательностей*** $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность вида $\{x_n \cdot y_n\}$, ***разностью*** – $\{x_n - y_n\}$, ***частным*** – $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, (в случае частного для элементов последовательности $\{y_n\}$ выполняется неравенство $y_n \neq 0$).

Так как последовательность является бесконечным упорядоченным множеством действительных чисел, то определения ограниченных и неограниченных последовательностей вводится аналогично таким же определениям из теории множеств.

***Определение* 2.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***ограниченной сверху* (*снизу*)**, *если существует такое действительное число* $M$ ($m$), *что для всех элементов* $x_n \in \{x_n\}$, *выполняется неравенство* $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

При этом число $M$ называется **верхней границей последовательности**, число $m$ – **нижней границей**.

Очевидно, что любое действительное число $M' > M$ также является верхней границей последовательности $\{x_n\}$. Любое действительное число $m' < m$ является нижней границей последовательности $\{x_n\}$.

***Определение* 3.** *Число $M^*$ ($m^*$)называется **точной верхней** (**точной нижней**) **гранью последовательности** $\{x_n\}$, если*

1) *для всех элементов $x_n \in \{x_n\}$, выполняется неравенство $x_n \le M^*$* ($x_n \ge m^*$);
2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N$, что для элемента $x_N$ выполняется неравенство $x_N + \varepsilon \ge M^*$ ( $x_N - \varepsilon \le m^*$).*

Обозначение: $M^* = sup\ \{x_n\}$ ( $m^* = inf\ \{x_n\}$).

***Определение* 4.** *Последовательность называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху и снизу.*

Иными словами, последовательность называется ограниченной, если существуют такие действительные числа $m$ и $M$, что для любых элементов $x_n \in \{x_n\}$ выполняется неравенство $m \le x_n \le M$. Можно сказать также, что последовательность называется ограниченной, если существует такое действительное число $A > 0$, что для любых элементов последовательности выполняется неравенство $|x_n| < A$ ($A = max\ \{|m|, |M|\}$).

Для ограниченных последовательностей справедливы теоремы 2 и 3 § 1.2.

***Определение* 5.** *Последовательность называется **неограниченной сверху** (**снизу**), если для любого действительного числа $M$ ($m$), существует элемент последовательности $x_n$, что $x_n > M$ ($x_n < m$).*

Если последовательность неограниченна или сверху или снизу, то она называется **неограниченной**.

***Определение* 6.** *Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый последующий элемент последовательности больше предыдущего, т.е. для всех элементов последовательности выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$; последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если для всех элементов последовательности выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$; последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей** (невозрастающей), если для всех элементов последовательности выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$).*

Последовательности этих четырех типов называются **монотонными.**

Например, последовательность $\{1\}$ является постоянной последовательностью. Эта последовательность ограничена. Точная верхняя и точная нижняя границы этой последовательности совпадают: $inf\ \{1\} = sup\ \{1\} = 1$.

Последовательность $\{n\}$ монотонно возрастающая и ограничена снизу любым числом $m \le 1$, $inf\ \{n\} = 1$. Эта последовательность неограниченна сверху.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена: $inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$, $sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$. Эта последовательность монотонно убывающая.

## 2. Бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности

***Определение* 7.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно малой****, если для любого действительного числа* $\varepsilon > 0$, *можно указать такой номер N, что при всех* $n \geq N$ *выполняется неравенство* $|x_n| < \varepsilon$.

***Определение* 8.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой****, если для любого действительного числа* $A > 0$, *можно указать такой номер N, что для всех элементов* $x_n$ $(n \geq N)$, *выполняется неравенство* $|x_n| > A$.

Очевидно, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной. Однако не все неограниченные последовательности являются бесконечно большими.

**Пример.** Рассмотрим последовательность $\{q^n\} \equiv q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$ . Докажем, что

*а*) при $|q| > 1$ последовательность будет бесконечно большой,

*б*) при $|q| < 1$ последовательность будет бесконечно малой.

**Решение.**

*а*) Пусть $|q| > 1$. Докажем, что последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно большой. Зафиксируем произвольное число $A > 0$ (сколь угодно большое). Покажем, что можно найти такой номер $N$, чтобы выполнялось неравенство

$$|q^N| > A \text{ или } |q|^N > A. \tag{1}$$

Пусть $|q| = 1 + \delta$, тогда воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$|q|^N = (1+\delta)^N = 1 + N\delta + \frac{N(N-1)}{2!}\delta^2 + \ldots + \delta^N > N\delta.$$

Следовательно, неравенство (1) будет выполнятся для всех $N > \frac{A}{\delta}$, например, $N = [A / \delta] + 1$. (Здесь $[x]$ – целая часть числа $x$.)

Возьмем произвольное $n > N$ . Тогда $|q^n| > |q^N| > A$, следовательно, при $|q| > 1$, рассматриваемая последовательность будет бесконечно большой.

*б*) Пусть $|q| < 1$. Докажем, что последовательность $\{q^n\}$ будет бесконечно малой.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует такой номер $N$, для которого выполняется неравенство

$$|q^N| = |q|^N < \varepsilon. \tag{2}$$

Так как $|q| < 1$, то $\frac{1}{q} > 1$ ($|q| \neq 0$). Обозначим $\frac{1}{q} = 1 + \delta$. Следовательно, $\frac{1}{q^N} = \left(\frac{1}{q}\right)^N = (1 + \delta)^N > \delta N$. Тогда $|q|^N < \frac{1}{\delta N}$. Значит для того, чтобы выполнялось неравенство (2), достаточно взять номер $N > \frac{1}{\delta\varepsilon}$, например, $N = \left[\frac{1}{\delta\varepsilon}\right] + 1$.

Так как $|q| < 1$, то для всех $n > N$ выполняется неравенство $|q^n| < |q^N| < \varepsilon$, а из этого следует, что последовательность $\{q^n\}$ бесконечно малая.

Легко доказать, что последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{-1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ также являются бесконечно малыми.

## 3. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших числовых последовательностей

Рассмотрим свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

**1.** *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

**Доказательство.** Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Докажем, что последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер $N_1$, начиная с которого $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и существует номер $N_2$, начиная с которого $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем наибольшее из двух чисел $N_1$ и $N_2$: $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда для выбранного $\varepsilon$ и для всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Значит $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.□

**2.** *Разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Это свойство доказывается аналогично свойству 1.

***Следствие.*** *Сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

**3.** *Бесконечно малая последовательность ограничена.*

**Доказательство.** Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению, существует такой номер $N$, что для любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Возьмем $A = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{N-1}|, \varepsilon\}$, тогда очевидно, что $|\alpha_n| \le A$, а из этого следует, что $\{\alpha_n\}$ – ограниченная последовательность. □

**4.** *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

**Доказательство.** Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Зафиксируем произвольным образом $\varepsilon > 0$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует такое число $A > 0$, что для любых $n$ выполняется неравенство $|x_n| \le A$.

Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то по определению бесконечно малой последовательности следует, что существует такой номер $N$, что для любых $n \ge N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{A}$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$: $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A\dfrac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$, т.е. эта последовательность бесконечно малая. □

***Следствие.*** *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей, есть бесконечно малая последовательность.*

***Замечание* 1.** Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть последовательностью любого типа.

Например,

*а*) если $\{\alpha_n\} \equiv \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\{\beta_n\} \equiv \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, тогда $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} \equiv \{(-1)^n\}$ – ограниченная последовательность;

*б*) если $\{\alpha_n\} \equiv \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{\beta_n\} \equiv \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$, тогда $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} \equiv \{n\}$ – бесконечно большая последовательность, $\left\{\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\right\} \equiv \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

***Замечание* 2.** Произведение бесконечного числа бесконечно малых последовательностей не всегда является бесконечно малой последовательностью. В этом случае имеет место неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$.

**5.** *Если все элементы бесконечно малой последовательности равны одному и тому же числу $c$, то $c = 0$.*

**Доказательство.** Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и любой ее элемент $\alpha_n = c$. Пусть $c \ne 0$. Возьмем $\varepsilon = |c|/2$. По определению бесконечно малой последовательности существует такой номер $N$, что для любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon = c/2$. Но так как $|\alpha_n| = |c|$, то получим, что $|c| < |c|/2$, а это при $c \neq 0$ невозможно. Следовательно, $c = 0$. □

**6.** *Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера n, определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны нулю, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.*

**Доказательство.** Отметим, что у бесконечно большой последовательности лишь конечное число элементов может быть равно нулю.

Будем рассматривать последовательность $\{x_n\}$ с номера $n_1$ большего, чем номера всех нулевых членов последовательности, т.е. будем рассматривать бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$, где $n = n_1, n_1 + 1. n_1 + 2, \ldots$ . Эта последовательность не имеет нулевых элементов.

Докажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению бесконечно большой последовательности, существует такой номер $N$, что для любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, выполняется и неравенство $\left\{\frac{1}{x_n}\right\} < \varepsilon.$ Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. □

Как уже говорилось выше, в результате деления бесконечно малой последовательности на бесконечно малую получится неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Неопределенность получится и в следующих случаях:

*а*) деление бесконечно большой последовательности на бесконечно большую приводит к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$;

*б*) разность двух бесконечно больших последовательностей, элементы которых, начиная с некоторого номера $N$, имеют одинаковые знаки, приводит к неопределенности вида $[\infty - \infty]$;

*в*) произведение бесконечно большой последовательности на бесконечно малую приводит к неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$.

# § 2.2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## 1. Определение предела последовательности

**Окрестностью точки** $c$ будем называть любой интервал, содержащий точку $c$. Обозначение: U ($c$).

Интервал $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$ называется **$\varepsilon$-окрестностью точки** $c$. Обозначение: $U_\varepsilon(c)$.

***Определение* 1.** *Число а называется пределом последовательности* $\{x_n\}$, *если для любого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер N, что для всех элементов* $x_n \in \{x_n\}$, *для которых* $n \geq N$, *выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Если у последовательности существует предел, то последовательность называется **сходящейся**, и говорят, что она сходится к числу $a$ при $n \to \infty$. Последовательность, которая не имеет предела, называется **расходящейся.**

***Замечание.*** В определении предела номер $N$ не может быть указан раз и навсегда, он зависит от выбора числа $\varepsilon$. При уменьшении $\varepsilon$ номер $N$ увеличивается. Из определения предела последовательности также следует, что конечное число элементов последовательности не влияет на сходимость последовательности.

Неравенство (1) равносильно неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, или неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \qquad (2)$$

Если точка $a$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, существует номер $N$, такой что все члены последовательности, начиная с $x_N$ попадут в ε-окрестность точки $a$. Вне этой окрестности может лежать лишь конечное число членов. В этом состоит **геометрический смысл предела последовательности.**

Из определения 1 и определения бесконечно малой последовательности вытекает следующая теорема.

***Теорема* 1.** *Число а является пределом последовательности* $\{x_n\}$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{x_n - a\}$ *является бесконечно малой последовательностью*.

***Следствие* 1.** Всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся последовательностью и имеет предел равный нулю.

***Следствие* 2.** Всякая постоянная последовательность $\{c\}$ является сходящейся последовательностью и $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Бесконечно большая последовательность является **расходящейся последовательностью.** Однако, в этом случае говорят, что она имеет предел равный $\infty$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если элементы бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$.

**Пример 1.** Используя определение предела, доказать, что предел последовательности $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ равен 1.

**Решение.**

Для этого надо доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+1}-1\right\}$ – бесконечно малая.

Рассмотрим $n$-ый член данной последовательности

$$x_n = \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}, \qquad |x_n| = \frac{1}{n+1}.$$

Выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$ и найдем такое натуральное число $N$, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$. Тогда $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Такое натуральное число $N$ существует. Например, $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right] + 1$.

Рассмотрим натуральные $n > N$. Тогда $|x_n| = \left|\dfrac{n}{n+1}-1\right| = \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$, т.е. выполняется определение бесконечно малой последовательности. Следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+1}-1\right\}$ – бесконечно малая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

## 2. Теорема о единственности предела. Необходимое условие существования предела последовательности

***Теорема* 2**. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

**Доказательство.**

Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела $a$ и $b$. Тогда последовательности $\{\alpha_n\} \equiv \{x_n - a\}$ и $\{\beta_n\} \equiv \{x_n - b\}$ – бесконечно малые.

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\} \equiv \{b - a\}$. По свойству 2 бесконечно малых последовательностей (см. п.3 § 2.1), данная последовательность бесконечно малая, тогда $b - a = 0$ (св-во 5, п.3, § 2.1.). Следовательно, $b = a$. □

***Теорема* 3**. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

**Доказательство.**

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда последовательность $\{\alpha_n\} \equiv \{x_n - a\}$ является бесконечно малой, а, следовательно, ограниченной последовательностью. Тогда существует такое число $A$, что для всех элементов последовательности $\{\alpha_n\}$ выполняется неравенство $|x_n - a| \le A$. По свойству модулей $|x_n - a| \ge |x_n| - |a|$, следовательно, $|x_n| - |a| \le |x_n - a| \le A$.

Тогда для всех $x_n \in \{x_n\}$ выполняется неравенство $|x_n| \le A + |a|$, т.е. последовательность ограничена. □

## 3. Арифметические свойства пределов

***Теорема* 4**. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда пределы их суммы, произведения и частного существуют и находятся по формулам*:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0)$.

**Доказательство.**

Так как $a$ и $b$ пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то последовательности $\{\alpha_n\} \equiv \{x_n - a\}$ и $\{\beta_n\} \equiv \{y_n - b\}$ являются бесконечно малыми и $x_n = \alpha_n + a$, $y_n = \beta_n + b$.

Докажем, например, что сходится последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$. Рассмотрим

$$x_n \cdot y_n = (\alpha_n + a)(\beta_n + b) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n,$$

тогда $x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$. Из свойств бесконечно малых последовательностей следует, что последовательность $\{x_n \cdot y_n - ab\}$ – бесконечно малая, значит $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Аналогично доказывается сходимость последовательностей $\{x_n + y_n\}$ $\{x_n - y_n\}$ и $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. □

***Следствие.*** *Если последовательность* $\{x_n\}$ *– сходится и* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, *то последовательность* $\{cx_n\}$ *также является сходящейся последовательностью и* $\lim\limits_{n \to \infty} cx_n = c\lim\limits_{n \to \infty} x_n = ca$.

**Пример 2.** Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2n^3 - n^2 - 3}{3n^3 + 2n^2 + n}$.

**Решение.**

Так как $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{n^3\}$ – бесконечно большие последовательности, то $\{3n^3 + 2n^2 + n\}$ также является бесконечно большой и $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^3 + 2n^2 + n) = \infty$. Так как последовательность $\{2n^3 - n^2\} \equiv \{n^2(2n - 1)\}$ – бесконечно большая, то и последовательность $\{2n^3 - n^2 - 3\}$ – бесконечно большая. Следовательно, под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, для раскрытия которой числитель и знаменатель дроби разделим на $n^3$ и применим теорему 4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n^2 - 6}{3n^3 + 2n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n^3 - n^2 - 6}{n^3}}{\dfrac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^3}}{3 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

## 4. Предельный переход в неравенствах

***Теорема* 5**. *Если все элементы сходящейся последовательности* $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), *начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству* $x_n \le p$ ($x_n \ge p$), *то предел последовательности удовлетворяет неравенству* $a \le p$ ($a \ge p$).

**Доказательство.**

Пусть все элементы $x_n$, начиная с некоторого номера $N_1$, удовлетворяют неравенству $x_n \le p$. Теорему будем доказывать методом от противного.

Предположим, что в этом случае выполняется неравенство $a > p$. Так как $a$ – предел последовательности, то для положительного числа $\varepsilon = a - p$, можно указать такой номер $N > N_1$, что для любых $n \ge N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon = a - p$ или $-(a-p) < x_n - a < a - p$. Используя левое из данных неравенств, получим $-(a-p) < x_n - a$ или $x_n > p$, а это противоречит условию $x_n \le p$. Следовательно, наше предположение неверно и $a < p$.

Случай $x_n \ge p$ доказывается аналогично. □

***Замечание.*** Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют строгому неравенству $x_n < p$ ($x_n > p$), то предел последовательности может быть равен $p$. Например, $x_n = \dfrac{1}{n} > 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. То есть из неравенства $x_n < p$ ($x_n > p$), следует неравенство $a \le p$ ($a \ge p$).

***Следствие* 1**. *Если элементы сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *удовлетворяют неравенству* $x_n \le y_n$, *то их пределы удовлетворяют такому же неравенству* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

***Следствие* 2**. *Если все элементы сходящейся последовательности* $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$) *принадлежат отрезку* $[a; b]$, *то и предел последовательности также принадлежит данному отрезку, т.е.* $a \le c \le b$.

***Теорема* 6**. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *сходящиеся последовательности и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

*Пусть также, начиная с некоторого номера, элементы последовательности* $\{y_n\}$ *удовлетворяют неравенству* $x_n \le y_n \le z_n$. *Тогда последовательность* $\{y_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

# § 2.3. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

## 1. Необходимый и достаточный признак сходимости монотонной последовательности (теорема Вейерштрасса)

Рассмотрим свойства монотонных последовательностей.

***Теорема* (*теорема Вейерштрасса*).** *Для того, чтобы неубывающая (возрастающая) последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху. Для того, чтобы невозрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.*

**Доказательство.**

Для определенности положим, что последовательность $\{x_n\}$ неубывающая.

***Необходимость.*** Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, тогда по теореме 3 **§** 2.2 она ограничена.

***Достаточность.*** Пусть неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, тогда по теореме 2 **§** 1.2 данная последовательность имеет точную верхнюю грань $S = sup\ \{x_n\}$ и выполняются следующие условия (определение 3, § 2.1):

1) для любого элемента последовательности $x_n$ выполняется неравенство

$$x_n \le S, \tag{1}$$

2) для любого положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такой элемент $x_N$, для которого выполняется неравенство

$$S - \varepsilon \le x_N \tag{2}$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, то для всех элементов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство

$$x_N \le x_n. \tag{3}$$

Тогда, в силу неравенств (1), (2) и (3), для любого $n \ge N$ выполняется неравенство $S - \varepsilon < x_N \le x_n \le S < S + \varepsilon$. Следовательно, по определению предела, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = S$.

Аналогично доказывается, что если последовательность невозрастающая, то для того, чтобы она имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу. □

***Следствие* (*лемма о вложенных отрезках*).** *Пусть дана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n < b_n \le b_{n+1} \le \ldots \le b_2 \le b_1$ и пусть длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к 0 при $n \to \infty$, тогда существует единственная точка $c$, принадлежащая всем отрезкам данной последовательности и выполняется неравенство*:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = c.$$

**Замечание.** Сходящаяся последовательность может и не быть монотонной.

Например, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = -1,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$ . Данная последовательность немонотонная, но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

## 2. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$. Докажем, что данная последовательность имеет предел.

Для этого докажем, что эта последовательность возрастающая и ограничена сверху.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогичным образом запишем элемент $x_{n+1}$:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним элементы $x_n$ и $x_{n+1}$. Так как $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ для любого $n$, кроме того, элемент $x_{n+1}$ имеет одно лишнее положительное слагаемое, то $x_n < x_{n+1}$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая.

Докажем, что она ограничена сверху.

Так как $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$, то

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

(Здесь использовалась формула суммы геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

тогда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$).

Таким образом, мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел. Обозначим значение предела числом $e$. Тогда, по определению

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (4)$$

Этот предел называется вторым замечательным пределом и используется для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$.

**Замечание.** Так как все элементы последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ удовлетворяют неравенству $2 < x_n < 3$, то по следствию 2 из теоремы 5 § 2.2, можно сделать вывод, что $2 < e < 3$.

## § 2.4. СВОЙСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

### 1. Подпоследовательности числовых последовательностей и их свойства

Пусть дана некоторая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}, \dots$ . Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Выберем из последовательности $\{x_n\}$ элементы с номерами $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$, тогда последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Например, если дана последовательность: 1, 2, 3, 4, …, то последовательность $x_1 = 1, x_3 = 3, x_5 = 5, x_7 = 7, \dots$ является ее подпоследовательностью (т.к. номера ее членов образуют возрастающую последовательность), но последовательность $x_1 = 1, x_3 = 3, x_5 = 5, x_9 = 9, x_7 = 7, \dots$ не является ее подпоследовательностью (т.к. порядок следования элементов нарушен).

**Свойства подпоследовательностей числовых последовательностей.**

1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} \{x_n\} = a$, то любая ее подпоследовательность сходится и имеет своим пределом число $a$.

Следовательно, любая подпоследовательность бесконечно малой последовательности является бесконечно малой последовательностью.

2. Если все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ сходятся и их пределом будет одно и то же число $a$, то к этому же числу будет сходиться и сама последовательность $\{x_n\}$.

3. Каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой последовательностью.

**Пример.** Последовательность $\left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$ является подпоследовательностью бесконечно малой последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, следовательно, эта последовательность также бесконечно малая и $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$.

**Замечание.** Если последовательность не имеет предела, это не исключает возможности существования у нее сходящейся подпоследовательности.

Последовательность $\{(-1)^{n+1}\} = 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ не имеет предела.

Но ее подпоследовательности $x_1 = 1$, $x_3 = 1$, …, $x_{2n+1} = 1$ и $x_2 = -1$, $x_4 = -1$, …, $x_{2n} = -1$ имеют пределы 1 и $-1$.

***Определение 1.*** *Число $\xi$ называется* ***предельной точкой*** *последовательности $\{x_n\}$, если в любой $\varepsilon$-окрестности этой точки имеется хотя бы одна точка последовательности.*

Очевидно, что в любой окрестности предельной точки имеется бесконечно много точек последовательности.

Можно дать другое определение предельной точки.

***Определение 2.*** *Число $\xi$ называется* ***предельной точкой*** *последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} (x_{n_k}) = \xi$.*

Из свойств подпоследовательностей числовых последовательностей следует, что сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку равную ее пределу.

## 2. Лемма Больцано - Вейерштрасса

***Теорема* 1 *(лемма Больцано - Вейерштрасса).*** *Из любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$ *можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

**Доказательство.**

По условию теоремы последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, значит, найдется отрезок $[a, b]$ такой, что все элементы последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенствам $a \le x_n \le b$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Так как последовательность $\{x_n\}$ состоит из бесконечного числа элементов, то хотя бы один из отрезков деления содержит бесконечное число элементов. Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Его длина равна $\dfrac{b-a}{2}$.

Если оба из отрезков деления содержат бесконечное число элементов последовательности, то через $[a_1, b_1]$ обозначим один из них.

Делим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и через $[a_2, b_2]$ ($|a_2, b_2| = \dfrac{b-a}{2^2}$ ) обозначаем ту половину, в которой содержится бесконечное число элементов.

Продолжаем этот процесс до бесконечности.

Получим систему отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …, каждый из которых содержится в предыдущем. Длина отрезка $[a_n, b_n]$ равна $\dfrac{b-a}{2^n}$.

По лемме о вложенных промежутках (§ 2.3), заключаем, что существует точка $c$ общая для всех отрезков, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$.

Теперь построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом.

В качестве $x_{n_1}$, возьмем любой член последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$. В качестве $x_{n_2}$ возьмем любой член последовательности, принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$ и следующий за $x_{n_2}$ ($n_1 < n_2$), и т.д. В качестве $x_{n_k}$ возьмем любой член последовательности, содержащийся в $[a_k, b_k]$ и следующий за ранее выделенными элементами $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$.

Так как для любого элемента $x_{n_k}$ последовательности $\{x_{n_k}\}$ выполняется неравенство $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$, то по теореме 6, п.4, § 1.3 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c. \ \square$$

***Следствие.*** *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

Наибольшая предельная точка последовательности называется **верхним пределом** последовательности и обозначается: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Наименьшая предельная точка называется **нижним пределом** последовательности и обозначается: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$.

Если $\{x_n\} \to a$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Если последовательность неограничена сверху (снизу), то полагают, что верхний предел равен $+\infty$ (нижний предел равен $-\infty$).

## 3. Необходимое и достаточное условие сходимости числовых последовательностей (критерий Коши)

***Теорема 2(критерий Коши).*** *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N$, что для всех номеров $n \ge N$ и для любого натурального $p$ выполнялось неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{1}$$

**Доказательство.**

***Необходимость.*** Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда, по определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N$, что для всех $n \ge N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, а так как для произвольного натурального числа $p$ и $n \ge N$ выполняется неравенство $n + p > N$, то $|x_{n+p} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a - (x_n - a)| \le |x_{n+p} - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. выполняется неравенство (1).

***Достаточность.*** Докажем, сначала, что последовательность $\{x_n\}$ – ограничена.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N$, что для всех $n \ge N$ и для любого натурального числа $p$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\varepsilon$ и $n = n' \ge N$, тогда для номера $n'$ справедливо неравенство $-\varepsilon < x_{n'+p} - x_{n'} < \varepsilon$ или неравенство

$$x_{n'} - \varepsilon < x_{n'+p} < x_{n'} + \varepsilon. \tag{2}$$

Мы видим, что для всех элементов последовательности с номерами $n' + 1$, $n' + 2$, $n' + 3$, … выполняется неравенство (2), а из этого следует, что эти элементы образуют ограниченную последовательность.

Пусть $A = max\,(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n'}|, |x_{n'} - \varepsilon|, |x_{n'} + \varepsilon|)$. Тогда для всех элементов последовательности $\{x_n\}$ будет выполняться неравенство $|x_n| < A$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной.

Следовательно, по лемме Больцано – Вейерштрасса, из данной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Выберем $n_k$ таким образом, что бы выполнялось неравенство $|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon$. Перейдем в данном неравенстве к пределу при $k \to \infty$.

Получим

$$\lim_{k \to \infty} |x_{n_k} - x_n| = |\lim_{k \to \infty} x_{n_k} - \lim_{k \to \infty} x_n| = |a - x_n| \le \varepsilon.$$

Отсюда, по определению предела последовательности, следует, что предел последовательности $\{x_n\}$ существует и равен $a$.□

***Определение* 5.** *Последовательность, удовлетворяющая условиям критерия Коши, называется* ***фундаментальной***.

# III. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

## § 3.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

### 1. Понятие функции. Способы задания функций

Рассмотрим два произвольных множества действительных чисел $X$ и $У$.

***Определение* 1. *Функцией***, *заданной на множестве $X$ и принимающей значения из множества $У$, называется соответствие $f$, по которому каждому элементу $x \in X$ единственным образом сопоставляется элемент $y \in У$.*

Обозначение: $y = f(x)$.

Множество $X$ называется **областью определения функции** и обозначается $D(f)$. Переменная $x$ называется **независимой переменной** или **аргументом функции**, а переменная $y$ – **зависимой переменной**. Соответствующий конкретному значению $x_0$ аргумента $x \in X$ элемент $y_0$ из множества $У$ называется **значением функции** в точке $x_0$ и обозначают $f(x_0)$.

Множество всех значений функции, которые она принимает в точках $x \in X$, называется **множеством значений функции** и обозначается $E(f)$. Множество значений функции может совпадать с множеством $У$ или быть подмножеством этого множества.

Наиболее широко применяются следующие способы задания функций.

1. **Аналитический способ задания функции.** Функция задается с помощью формулы $y = f(x)$. Если область определения функции не указана, то областью определения функции, заданной аналитически, является множество всех значений $x$, для которых данная формула имеет смысл.

Например, область определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ задается неравенством: $1 - x^2 \geq 0$. Решая это неравенство, получим $D(f)$: $x \in [-1, 1]$.

2. **Табличный способ задания функции.** В этом случае функция задается с помощью таблицы в которой перечисляются некоторые значения аргумента $x$ и соответствующие им значения функции $y$.

На практике значения переменных $x$ и $y$ получаются опытным путем или из наблюдений.

3. **Графический способ задания функции.**

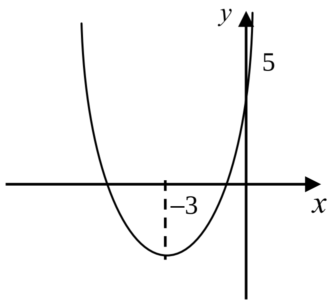


Рис. 1.

В этом случае соответствие между значениями аргумента $x$ и функции $y$ устанавливаются с помощью графика.

***Определение 2. Графиком*** *функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, y)$ числовой плоскости, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е. $\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \mid y = f(x, y)\}$.*

Например, графиком, изображенным на рисунке 1, задается функция $y = x^2 + 6x + 5$.

Графическое задание функции удобно тем, что график функции дает представление об основных свойствах функции. Кроме того, по виду графика функции можно составить общее впечатление о том, как протекает моделируемый процесс.

**4. Программный способ задания функции.** В этом случае дается алгоритм, по которому для каждого значения $x$ вычисляется значение $y = f(x)$.

Предположим, что функция $z = \varphi(y)$ определена в некоторой области $У$, а функция $y = f(x)$ – в области $X$, и множеством значений этой функции является множество $У$. Тогда $z = \varphi(f(x))$ называется сложной функцией, полученной в результате суперпозиции функций $z = \varphi(y)$ и $y = f(x)$.

**Примеры некоторых функций.**

1. Функция $y = x^2 + 6x + 5$.

$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$, $E(f)$: $y \in [-4, \infty)$.

График функции изображен на рисунке 1.

2. Функция Дирихле задается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число}, \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число}. \end{cases}$$

$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$. $E(f) = \{0, 1\}$.

3. Функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x > 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x = 0, \\ -1, & \textit{если} \quad x < 0. \end{cases}$

$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$, $E(f) = \{-1, 0, 1\}$.

График функции изображен на рисунке 2.

4. Функция $y = |x|$.

$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$, $E(f)$: $y \in [0, \infty)$.

График функции $y = |x|$ изображен на рисунке 3.

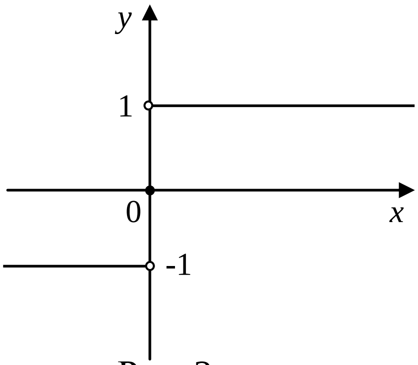

Рис. 2.

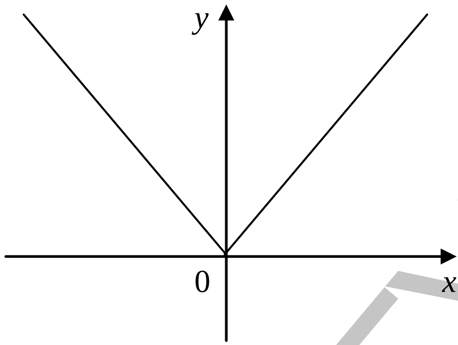

Рис. 3.

## 2. Свойства функций

Одной из основных задач математического анализа является исследование функций. Рассмотрим основные свойства функций.

***Определение* 3.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***четной*** (*нечетной*), *если выполняются следующие условия*:

1) *область ее определения* $D(f)$ *симметрична относительно начала координат*;

2) *для любого* $x \in D(f)$ *выполняется равенство* $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Ось *OY* является осью симметрии для графика любой четной функции, начало координат – точка симметрии для графика любой нечетной функции. Поэтому в случае четной (нечетной) функции достаточно изучить ее свойства только для $x \geq 0$.

Например, функция $y = \operatorname{sgn} x$ является нечетной, так как область определения функции симметрична относительно начала координат, и выполняется равенство $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn} x$. График этой функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = |x|$ – четная функция, так как область определения функции симметрична относительно начала координат, и выполняется равенство $|-x| = |x|$. График этой функции симметричен относительно оси *OУ*.

***Определение* 4.** *Функция f(x) называется* ***периодической***, *если существует такое число* $T \neq 0$, *что выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $x \in D(f)$, *числа* $x - T$ *и* $x + T$ *также принадлежат D(f)*;

2) $f(x) = f(x-T) = f(x+T)$, *для любого* $x \in D(f)$.

Число *T* называется **периодом** функции $f(x)$.

Очевидно, что если число *T* является периодом функции $f(x)$, то числа вида $kT$, $k \in Z$, также будут являться периодами этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то его называют **основным периодом**.

Периодическими являются функции $y = \cos x$, $y = \sin x$ (основной период – $T = 2\pi$), $y = tg\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ (основной период – $T = \pi$). Можно доказать также, что функция Дирихле является периодической и периодом этой функции служит любое рациональное число.

Далее, употребляя термин период функции, будем иметь ввиду основной период. Чтобы построить график любой периодической функции, достаточно построить ее график на одном из отрезков, длина которого равна периоду Т, и затем с помощью параллельного переноса распространить график на всю ось $OX$ .

***Определение* 5.** *Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на множестве $X \subset D(f)$, если большему значению аргумента функции из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции.*

Таким образом, если функция $y = f(x)$ – возрастает на множестве $X$, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$;

если функция $y = f(x)$ – убывает на множестве $X$, то из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Аналогично определяются **неубывающие и невозрастающие функции**:

функция $y = f(x)$ называется неубывающей на множестве $X$, если из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$;

функция $y = f(x)$ называется невозрастающей на множестве $X$, если из неравенства $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$ и $x_2 \in X$), следует неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие на множестве $X$ функции называются **монотонными на** множестве $X$.

***Определение* 6.** *Функция $f(x)$ называется **ограниченной сверху (снизу)** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое действительное число $M$ ($m$), что для всех $x \in X$, выполняется неравенство $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$).*

***Определение* 7.** *Функция называется **ограниченной** на множестве $X$, если она ограничена и сверху и снизу.*

Можно сказать так же, что функция называется ограниченной, если существует такое действительное число $A > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| < A$ ($A = max\,\{|m|, |M|\}$).

## § 3.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

### 1. Определения предела функции

***Определение* 1.** *Точка $a$ называется **предельной точкой** множества $X$, если в любой окрестности этой точки имеются точки множества $X$ отличные от $a$.*

Например, предельными точками интервала $(a, b)$ являются все точки отрезка $[a, b]$. То есть, предельные точки множества $X$ могут, как принадлежать этому множеству (все точки интервала $(a, b)$ являются предельными точками этого интервала), так ему и не принадлежать (предельными точками интервала $(a, b)$ являются также точки $a$ и $b$, которые не принадлежат этому интервалу).

Если точка $a$ – предельная точка множества $X$, то существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества $X$, которая сходится к $a$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ определенную на множестве $X$ и точку $a$ – предельную точку множества $X$.

***Определение* 2 (*по Гейне*).** *Число b называется* ***предельным значением*** **(*пределом*)** *функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ (при $x \to a$), если для любой сходящейся к $a$ последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x$ ($x_n \neq a$), соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ($f(x) \to b$, при $x \to a$).

Отметим, что функция $y = f(x)$ может иметь в точке $a$ только одно предельное значение.

**Пример 1.** Показать, что

*а*) если $f(x) = c$, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$;

*б*) если $f(x) = x$, то $\lim\limits_{x \to a} x = a$ для любой точки $a$.

**Решение.**

*а*) Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента функции $\{x_n\} \equiv x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ , сходящуюся к $a$. Найдем значение функции в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ : $f(x_1) = c, f(x_2) = c, \ldots, f(x_n) = c, \ldots$ . Получим постоянную последовательность $\{f(x_n)\} \equiv \{c\}$, предел которой равен $c$. Следовательно $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

*б*) Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

***Определение* 3.** *Число b называется* ***пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$,*** *если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента функции, соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

***Определение* 4.** *Число b называется* ***пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)****, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента функции, члены которой начиная с некоторого номера положительны (отрицательны), соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

***Определение* 5.** *Говорят, что* ***предел функции f (x) равен ∞*** *при $x \to a$, если для любой сходящейся к $a$ последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x$ ($x_n \neq a$), соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью.*

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Аналогично можно ввести определение того, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

Понятие предела функции по Гейне довольно часто используется при доказательстве теорем. Однако наряду с ним используется второе определение предела функции, которое называется **определением по Коши или определением на языке «$\varepsilon - \delta$».**

***Определение* 6 (*по Коши*).** *Число $b$ называется* ***пределом функции f (x)*** *в точке $a$ (или при $x \to a$), если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое действительное число $\delta > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

**Пример 2.** Используя определение 6 предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

**Решение.**

Воспользуемся неравенством $|\sin x| \leq |x|$, которое справедливо для всех действительных $x$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta = \varepsilon$, что если $|x| < \delta$, то выполняется неравенство $|\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. Это означает, что (согласно определению предела функции по Коши), что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

## 2. Свойства пределов

Рассмотрим основные свойства предела функции.

***Теорема* 1.** *Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$, то он единственный.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения предела функции по Гейне (определение 2) и теоремы 2 § 2.2.

***Теорема* 2.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $a$, за исключением может быть самой точки $a$, и существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то существуют пределы их суммы (разности), произведения и частного (в этом случае $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$) и имеют место равенства*

$a$) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c$;

*б*) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \cdot c$;

*в*) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$; $(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0)$.

**Доказательство.**

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ – произвольная сходящаяся к $a$ последовательность значений аргументов функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ и $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$ значений этих функций имеют пределы $b$ и $c$. Значит, в силу теоремы 4 § 2.2, последовательности $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$, $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ имеют пределы, соответственно равные $b \pm c$, $b \cdot c$, $\dfrac{b}{c}$. Следовательно, по определению 2 предела функции, выполняются равенства $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$; $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$. □

***Следствие.*** *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *то*

*а*) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x) = c\, b$;

*б*) $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n = b^n$;

т.е. постоянный множитель можно выносить из-под знака предела; предел степени равен степени предела.

Аналогично теореме 2 доказываются следующие теоремы.

***Теорема* 3.** *Пусть в некоторой окрестности точки a, кроме может быть самой точки a, задана функция* $f(x)$, *такая, что* $f(x) \geq p$ $(f(x) \leq p)$ *и* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *тогда* $b \geq p$ $(b \leq p)$.

***Теорема* 4.** *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ *и в некоторой окрестности точки a* (*за исключением может быть самой точки a*) *имеет место неравенство* $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$.

Справедлива также теорема.

***Теорема* 5.** *Пусть* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, *тогда в некоторой выколотой окрестности точки a функция* $f(x)$ *будет ограниченной и ее значения имеют тот же знак, что и число* $b$.

**Доказательство.**

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $b \neq 0$. По определению предела функции по Коши (определение 6), для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$. Тогда

$$b - \frac{|b|}{2} < f(x) < b + \frac{|b|}{2}.$$

Это означает, что функция $f(x)$ ограничена (определение 7, § 3.1).

Кроме того, если $b > 0$, то из левой части данного неравенства следует, что $f(x) > \dfrac{b}{2} > 0$ для всех $x$ из выколотой $\delta$- окрестности точки $a$. Если $b < 0$, то из правой части неравенства следует, что $f(x) < \dfrac{b}{2} < 0$ для всех $x$ из выколотой $\delta$- окрестности точки $a$. □

***Следствие.*** *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, *тогда существуют такое действительное число* $q > 0$, *что в некоторой выколотой окрестности точки a выполняется неравенство* $0 < q < |f(x)|$.

### 3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

***Определение* 7.** *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой*** *при* $x \to a$ (*в точке a*), *если* $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Примером бесконечно малых функций служат функции

*а*) $x$, при $x \to 0$;

*б*) $x^2$, при $x \to 0$;

*в*) $\sin x$, при $x \to k\pi$, в частности, при $x \to 0$.

Обычно бесконечно малые функции обозначаются маленькими греческими буквами: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д.

Очевидно, что если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то функция $\alpha(x) = f(x) - b$ является бесконечно малой в точке $a$. Тогда функцию, имеющую предел равный $b$ в точке $x = a$, можно представить в виде

$$f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0, \text{ при } x \to a. \qquad (1)$$

***Определение* 8.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой*** *при* $x \to a$ (*в точке a*), *если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Исходя из определений бесконечно малой и бесконечно большой в точке $a$ функций, а также теорем о пределах, можно сформулировать следующие свойства бесконечно малых и бесконечно больших в точке $a$ функций.

***Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.***

1. Сумма, разность, произведение конечного числа бесконечно малых в точке $a$ функций есть функция бесконечно малая в этой точке.
2. Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке $a$ функция, а функция $g(x)$ – ограничена в некоторой окрестности точки $a$. Тогда произведение $\alpha(x)\cdot g(x)$ есть бесконечно малая в точке $a$ функция.
3. Если функция $y = \alpha(x)$ является бесконечно малой в точке $a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой выколотой окрестности точки $a$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой в точке $a$ функцией.
4. Произведение любого числа бесконечно больших в точке $a$ функций есть бесконечно большая функция.
5. Если в некоторой выколотой окрестности точки $a$ функция $f_1(x)$ такова, что $0 < q \leq |f_1(x)|$, а функция $f_2(x)$ бесконечно большая в точке $a$, то функция $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$ – бесконечно большая функция в точке $a$.
6. Если функция $y = f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Например, так как $x$ и $\sin x$ – бесконечно малые функции при $x \to 0$, то $x\cdot\sin x$, $x + \sin x$ – также бесконечно малые функции при $x \to 0$, Функция $\dfrac{1}{x}$ – бесконечно большая функция при $x \to 0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке $a$ функции. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Говорят, что в этом случае имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы найти данный предел, необходимо преобразовать выражение, стоящее под знаком предела так, что бы эта неопределенность исчезла.

Существуют и другие типы неопределенностей: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(\infty\cdot 0)$, $(1^{\infty})$, $(\infty^{0})$, $(0^{0})$.

***Замечание.*** Все сказанное о бесконечно малых и бесконечно больших при $x \to a$ функциях справедливо и в том случае, когда $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

## 4. Замечательные пределы

Для раскрытия неопределенностей используются специальные приемы, зависящие от типа неопределенностей и от вида функции, стоящей под знаком предела. Кроме того, часто применяются пределы, называемые замечательными пределами.

1. **Первый замечательный предел** – это предел вида

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1. \qquad (2)$$

Первый замечательный предел раскрывает неопределенность типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и применяется, если под знаком предела стоит тригонометрическое выражение.

Докажем формулу (2).

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

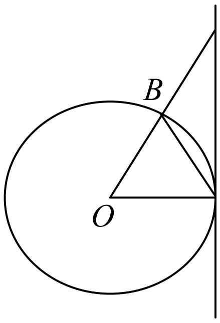


Рис. 1.

Рассмотрим окружность единичного радиуса. Построим острый угол $AOB$ ($\angle AOB = x$), хорду $AB$ и касательную $AC$ к окружности в точке $A$ (см. рисунок 1).

Рассмотрим площади треугольников $AOB$, $AOC$ и сектора $AOB$.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\sin x;\ \ S_{\text{сек}\,AOB}=\frac{1}{2}x;$$

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Очевидно, что $S_{\Delta AOB} < S_{\text{сек}\,AOB} < S_{\Delta AOC}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Так как $\sin x < x$ и $x > 0$, то $\frac{\sin x}{x} < 1$. Из неравенства $x < \operatorname{tg} x$ следует, что $\frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1$ или $\frac{\sin x}{x\cdot\cos x} > 1$. Тогда $\frac{\sin x}{x} > \cos x$. Следовательно,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (3)$$

Нетрудно убедится, что это неравенство выполняется и для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Если $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, то $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$, тогда выполняется неравенство

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{(-x)} < 1.$$

Но, так как $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$, то для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ выполняется неравенство (3).

Следовательно, неравенство (3) выполняется для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \bigcup (0, \frac{\pi}{2})$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Для этого рассмотрим функцию $1 - \cos x$. Так как $0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$, то по теореме 4 получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Тогда в неравенстве (3) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, значит, по теореме 4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2. **Второй замечательный предел** – это предел вида

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e \approx 2{,}7. \qquad (4)$$

Второй замечательный предел можно также записать следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = e. \qquad (5)$$

Этот предел используется при раскрытии неопределенностей типа $(1^\infty)$.

## 5. Приемы нахождения пределов

Приведем некоторые приемы вычисления пределов функций, излагая их на конкретных примерах.

1) Найти $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$.

Используя пример 1, теорему 2 и следствие из этой теоремы, получим

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x\to 2}(5x^3) + \lim_{x\to 2}(2x^2) - \lim_{x\to 2}(3x) + \lim_{x\to 2} 7 =$$

$$= 5\lim_{x\to 2} x^3 + 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7 = 5(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2(\lim_{x\to 2} x)^2 - 3(\lim_{x\to 2} x) + \lim_{x\to 2} 7 =$$

$$= 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 49.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$.

Знаменатель дроби $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$, то для нахождения предела можно применить теорему 2:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^3 - 2\lim\limits_{x\to 3} x - 3}{\lim\limits_{x\to 3} x^2 + 3\lim\limits_{x\to 3} x + 3} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}$.

Числитель дроби $f(x) = x^3 - 2x - 3$, знаменатель дроби $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 2x - 3) = 1 \neq 0$, то по теореме 5 функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки $x = 2$, и существует такое действительное число $q > 0$, что $0 < q < |f(x)|$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 3x + 2 = 0$, следовательно, функция $\dfrac{1}{g(x)}$ – бесконечно большая в точке $a$ функция, и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ является бесконечно большой в точке $a$ (п. 3, свойства 3 и 5 бесконечно малых и бесконечно больших функций). Значит,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2} = \infty.$$

4) Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Так как $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 4 = 0$, то имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби и сократим дробь на общий множитель

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

5) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $\sqrt{1+x}+1$, и применим формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\,(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

6) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-3}{3x^3+2x^2+x}$.

Неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень $x$, т.е. на $x^3$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3-x^2-6}{x^3}}{\dfrac{3x^3+2x^2+x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, получим что $2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}\to 2$ и

$3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\to 3$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x}=\frac{2}{3}.$$

7) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})$.

Так как функция $y=x$ – бесконечно малая в точке $x=0$ функция, а функция $y=\sin\dfrac{1}{x}$ – ограничена на всей числовой прямой (при $x\neq 0$,

$-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$; при $x = 0$ – функция не определена), то по свойству 2 бесконечно малых и бесконечно больших функций (см. п. 3) функция $x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой в точке $x = 0$ функцией. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

8) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Раскроем ее с помощью первого замечательного предела (формула 2).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x} = |\,7x = t,\ t\to 0| = \lim_{t\to 0}\frac{7\sin t}{t} = 7\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 7.$$

9) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Здесь использовался первый замечательный предел и следствие из теоремы 2.

10) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Так как $1 + 2x \to 1$, $\dfrac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$, то под знаком предела имеет место неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$. Раскроем эту неопределенность, используя второй замечательный предел (см. формулу 5).

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2} = \left(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2 = e^2.$$

## 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые в точке $a$ функции и

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l. \qquad (6)$$

1) Если $l = 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка** в точке $a$ чем $\beta(x)$ и обозначается следующим образом: $\alpha = o(\beta)$ (читается: $\alpha$ равно $o$ малое от $\beta$).

Таким образом, символ $o(\beta)$ означает любую бесконечно малую в точке $a$ функцию $\alpha(x)$, для которой справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

2) Если $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости** в точке $a$.

3) Если $l = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми** в точке $a$ и обозначаются следующим образом: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **несравнимыми бесконечно малыми.**

***Замечание.*** Точка $a$ может быть как конечным числом, так и $\pm\infty$.

**Пример 3.** Функция $\alpha(x) = x$ является бесконечно малой в точке $x = 0$.

1) Функция $\beta(x) = \sqrt{1+x} - 1$ является бесконечно малой одного порядка малости с функцией $\alpha(x)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ (см. пример 5, п.4).

2) Функцией, эквивалентной функции $\alpha(x)$, будет, например, функция $\beta(x) = \sin x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

3) Примером бесконечно малых высшего порядка по сравнению с функцией $\alpha(x)$ могут служить функции:

*а*) $\beta(x) = x^p$, где $p > 1$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^p}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{p-1} = 0$;

*б*) $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 1\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \left( \frac{1 - \cos x}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x} = 0.$$

Докажем простую, но очень важную для нахождения пределов теорему.

***Теорема* 6.** *Пусть* $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ *и* $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ *в точке* $a$, *тогда из существования предела* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$ *следует существование предела* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, *и справедливо равенство* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$.

**Доказательство.**

Так как $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ в точке $a$, то по определению эквивалентных бесконечно малых функций $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)} = 1$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\overline{\beta}(x)} = 1$, тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x) \cdot \overline{\alpha}(x)}{\overline{\alpha}(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)} \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\beta(x)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x) \cdot \overline{\beta}(x)}{\overline{\beta}(x) \cdot \beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\overline{\beta}(x)}{\beta(x)} \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}. \square$$

Из теоремы 6 следует, что если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые в точке $a$ функции и $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$, то $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overline{\alpha}(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\overline{\beta}(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$. (При отыскании предела отношения двух бесконечно малых в точке $a$ функций, каждая их этих функций может быть заменена на эквивалентную ей функцию.)

**Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x}$.

**Решение.**

Так как $\sqrt{1 + x + x^2} - 1 \sim \dfrac{1}{2}(x + x^2)$, $\sin 2x \sim 2x$ (см. пример 1), то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x + x^2)}{2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2}{x} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} (1 + x) = \frac{1}{4}.$$

## § 3.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### 1. Определение непрерывности функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ определенную на интервале $X$ и точку $x_0 \in X$ такую, что в этой точке функция имеет значение $f(x_0)$.

***Определение* 1.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, *если предел функции в точке* $x_0$ *равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Учитывая определение предела функции «на языке $\varepsilon$-$\delta$» (п.1, § 3.2), определение 1 можно сформулировать следующим образом.

***Определение* (1′).** *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, *если для любого действительного* $\varepsilon > 0$ *существует такое действительное число* $\delta > 0$, *что для всех* $x$, *удовлетворяющих условию* $|x - x_0| < \delta$, *имеет место неравенство* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

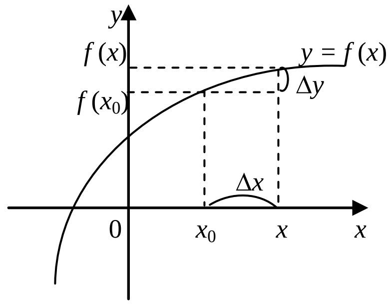

Рис. 1.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента функции в точке** $x_0$, а разность $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – **приращением функции** $f(x)$ **в точке** $x_0$ (рис. 1).

При $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$. Кроме того, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Отсюда следует второе определение непрерывности функции.

***Определение* 2.** *Функция* $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x_0$, *если бесконечно малому приращению аргумента функции в точке* $x_0$ *соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, т.е.* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

***Определение* 3.** *Функция, непрерывная в каждой точке интервала* $X$, *называется* ***непрерывной на*** *этом* ***интервале.***

Будем называть **левой окрестностью** точки $a$ произвольный полуинтервал $(c, a]$, **правой окрестностью** точки $a$ – произвольный полуинтервал $[a, d)$, где $c < a < d$.

***Определение* 4.** *Число* b *называется* ***правым пределом*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$ (*или пределом функции при* $x \to x_0$ *справа*), *если функция* $f(x)$ *определена в некоторой правой окрестности точки* $x_0$, *за исключением, может быть, самой точки* $x_0$, *и для любой сходящейся к* $x_0$ *последова-*

*тельности* $\{x_n\}$ *из этой окрестности* $(x_n > x_0)$, *соответствующая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *сходится к* $b$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ или $f(x_0 + 0) = b$.

Аналогично вводится понятие **левого предела** функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ или $f(x_0 - 0) = b$.

Очевидно, что для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали левый и правый пределы функции в этой точке и $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

**Пример 1.** Найти: $\lim\limits_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}}$ $(a > 1)$. Существует ли предел $\lim\limits_{x \to 0} a^{\frac{1}{x}}$?

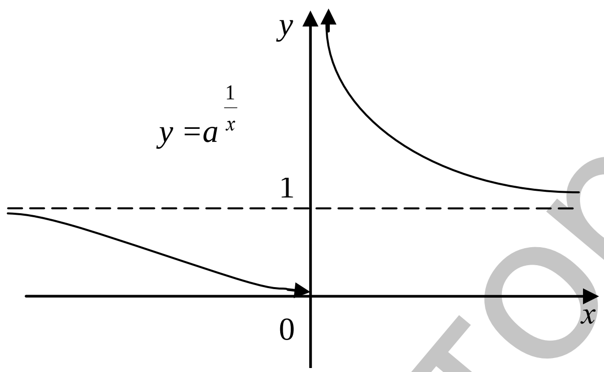


Рис. 2.

**Решение.**

Так как $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$, то

$$\lim_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}} = = \lim_{t \to +\infty} a^t = +\infty.$$

Так как $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, то

$$\lim_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}} = = \lim_{t \to -\infty} a^t = 0.$$

Так как $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$, то предел функции $a^{\frac{1}{x}}$ в точке $x = 0$ не существует. График функции $y = a^{\frac{1}{x}}$ изображен на рисунке 2.

Односторонние пределы имеют большое значение при рассмотрении непрерывности функции $f(x)$ в точке.

***Определение* 5.** *Функция* $f(x)$ *называется непрерывной в точке* $x_0$ *справа* (*слева*), *если существует правый* (*левый*) *предел функции в точке* $x_0$ *и*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \ \ (f(x_0 + 0) = f(x_0)).$$

***Определение* 6.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, *если она непрерывна в каждой точке интервала* $(a, b)$, *непрерывна слева в точке* $a$ *и справа в точке* $b$.

Сформулируем некоторые важные теоремы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

***Теорема* 1.** *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на одном и том же множестве* $X$ *и обе функции непрерывны в точке* $x_0$, *то в той же точке* *будут непрерывны и функции* $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) / g(x)$ (*в случае частного функция* $g(x_0) \neq 0$).

**Доказательство.** Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то выполняются равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Тогда, по теореме 2, § 3.2 имеем

*а*) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = f(x_0) \pm g(x_0)$;

*б*) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0)$;

*в*) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) / g(x)) = f(x_0) / g(x_0)$.

Тогда, по определению непрерывности функции в точке, функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) / g(x)$ непрерывны в точке $x_0$. □

***Теорема 2.*** *Пусть функция* $t = \varphi(x)$ *задана на множестве* $X$, *а функция* $y = f(t)$ *задана на множестве* $T$, *где* $T$ – *это множество значений функции* $t = \varphi(x)$. *Пусть функция* $t = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$, *а функция* $y = f(t)$ *непрерывна в точке* $t_0 = \varphi(x_0) \in T$, *тогда сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* $x_0$.

***Теорема 3.*** *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена, монотонно возрастает* (*убывает*) *и непрерывна на интервале* $X$. *Тогда на соответствующем интервале* $У$ *значений этой функции существует однозначная обратная функция* $x = g(y)$, *которая также монотонно возрастает* (*убывает*) *и непрерывна на интервале* $У$.

Обратную функцию еще обозначают $x = f^{-1}(y)$ или $y = f^{-1}(x)$.

***Теорема 4.*** *Основные элементарные функции непрерывны на любом интервале, на котором они определены.*

## 2. Нахождение некоторых пределов. Степенно-показательные выражения

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то по определению непрерывности функции в точке, выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x), \qquad (2)$$

т.е., если функция непрерывна в точке $x_0$, то знак функции и знак предела можно менять местами.

Это свойство непрерывных функций часто используется для нахождения пределов.

**Пример 2.** Найти $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}$.

**Решение.**

Так как логарифмическая функция является непрерывной и $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ (второй замечательный предел), то

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a (1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log_a (\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}) = \log_a e.$$

Рассмотрим выражение $u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0$ в некоторой окрестности точки $x_0$), которое называется **степенно-показательным**.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке $x_0$. Выражение $u(x)^{v(x)}$ можно представить в виде $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$. Поскольку $\ln(u(x))$ непрерывная в точке $x_0$ функция (теорема 2), то функция $v(x)\cdot\ln(u(x))$ также непрерывна в точке $x_0$ (теорема 1), тогда и функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$ непрерывна в точке $x_0$. В этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = u(x_0)^{v(x_0)}$.

Выясним вопрос о пределе степенно-показательных выражений $u(x)^{v(x)}$ при $x \to x_0$.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a$ ($a \neq 0$), $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$. Требуется найти предел выражения $u(x)^{v(x)}$. Представим его в виде $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$. Функции $v(x)$ и $\ln u(x)$ имеют пределы

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = b, \quad \lim_{x \to x_0} \ln u(x) = \ln a$$

(здесь использована непрерывность логарифмической функции). Тогда

$$\lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = b \ln a.$$

Отсюда, используя непрерывность показательной функции, получим

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{v(x)\cdot\ln(u(x))} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{v(x)\cdot\ln(u(x))}} = e^{b \ln a} = a^b.$$

Значит в этом случае

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b. \qquad (3)$$

Аналогично находится предел выражения $u(x)^{v(x)}$ в случае $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = \pm\infty$. При этом, если $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = +\infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = 0$ (см. пример 1 п.1).

Рассмотрим случаи, при которых нахождение предельного значения выражения $u(x)^{v(x)}$ требует дополнительного исследования.

1. Неопределенность вида $1^{\infty}$:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 1, \quad \lim_{x \to x_0} v(x) = \infty.$$

2. Неопределенность вида $0^0$:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = 0.$$

3. Неопределенность вида $\infty^0$:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = 0.$$

**Пример 3.** Найти пределы:

*а*) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/(1-\sqrt{x})}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1+x)}$.

**Решение.**

*а*) Найдем предел: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/(1-\sqrt{x})}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x}{2+x} = \dfrac{2}{3}$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 2,$$

то по формуле (2) имеем: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/(1-\sqrt{x})} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

*б*) Найдем предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1+x)}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{2+x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x) = \infty$, то имеем неопределенность $[1^\infty]$. Для раскрытия этой неопределенности используем второй замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1+x)} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{2+x}\right)\right)^{(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{2+x}\right)\right)^{-(2+x)\cdot\frac{1+x}{-(2+x)}} = .$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{2+x}\right)\right)^{-(2+x)}\right)^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x}{2+x}} = \left|\begin{array}{c}\alpha = -\dfrac{1}{2+x}\\ \alpha\to 0 \text{ при } x\to\infty\end{array}\right| =$$

$$= \left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x}{2+x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

## 3. Классификация точек разрыва функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, может быть, самой точки $x_0$.

***Определение 7.*** *Точка, в которой функция $y = f(x)$ не определена или определена, но не является непрерывной, называется **точкой разрыва** функции.*

Рассмотрим возможные типы точек разрыва функции.

Точка $x_0$ называется ***точкой разрыва I рода*** для функции $f(x)$, если существуют и являются конечными оба односторонних предела этой функции в данной точке.

Возможны следующие случаи точек разрыва I рода:

1. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, но функция не определена в точке $x_0$ («выколотая точка») или $f(x_0) \neq A$. В этом случае точка $x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва***.

2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Данный разрыв называют «конечным скачком».

Например, функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но так как существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел), то

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следовательно, точка $x = 0$ – точка устранимого разрыва. На графике функции точка (0, 1) является выколотой (рисунок 3).

В этом случае функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$ можно доопределить:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0, \\ 1 & при \quad x = 0. \end{cases}$$

Заданная таким образом функция будет непрерывна в точке $x = 0$.

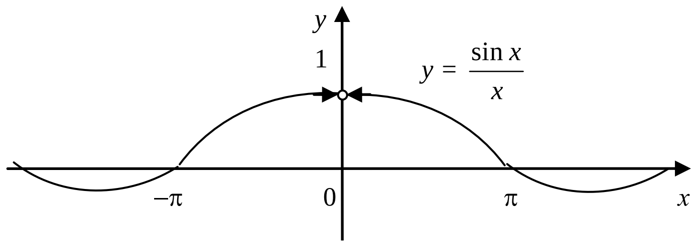


Рис. 3.

Функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & если \quad x>0, \\ 0, & если \quad x=0, \\ -1, & если \quad x<0 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ скачок, так как $\lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to -0} (-1) = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$. График функции $y = \operatorname{sgn} x$ изображен на рисунке 2 § 3.1.

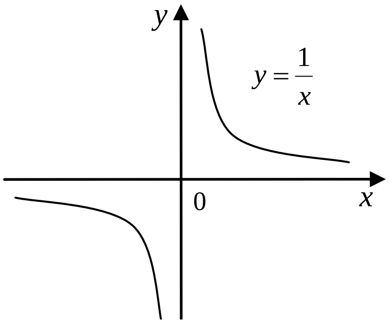

Рис. 4.

Точка $x_0$ **называется точкой разрыва II рода**, если хотя бы один из односторонних пределов функции не существует или равен бесконечности.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. При этом

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Оба односторонних предела равны бесконечности. Следовательно, точка $x = 0$ – точка разрыва второго рода. Графиком функции является гипербола, изображенная на рисунке 4.

## 4. Теоремы о непрерывных функциях

**Доказательство. *Теорема* 5 (*первая теорема Больцано-Коши*).** *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль*: $f(c) = 0$ *при* $a < c < b$.

Пусть $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на две равные части. Если значение функции $f(x)$ в точке деления равно нулю, то теорема доказана и точка $c = \frac{a+b}{2}$.

Пусть $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Тогда обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из полученных отрезков, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Тогда $f(a_1) > 0$, $f(b_1) < 0$. Длина отрезка $[a_1, b_1]$ равна $\frac{b-a}{2}$.

Разобьем отрезок $[a_1, b_1]$ на две равные части. Если значение функции $f(x)$ в точке деления равно нулю, то теорема доказана, если нет, то обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из полученных отрезков, на концах которого функция принимает значения разных знаков ($f(a_2) > 0$, $f(b_2) < 0$). Длина отрезка $[a_2, b_2]$ равна $\frac{b-a}{2^2}$.

Продолжим этот процесс. Тогда либо на $n$-ном шаге деления значение функции $f(x)$ в точке деления станет равным нулю, либо этого не произойдет, и мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков. Длина отрезка $[a_n, b_n]$ равна $\dfrac{b-a}{2^n}$ $(f(a_n) > 0,\ f(b_n) < 0)$. Полученная последовательность удовлетворяет лемме о вложенных промежутках. Следовательно, последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ стремятся к общему пределу: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} b_n = c$, где $c \in (a, b)$ (п.1, § 2.3). Тогда, так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и выполняются неравенства $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$, то по теореме 3, §3.2, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} f(a_n) = f(c) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(b_n) = f(c) \leq 0$. Следовательно, $f(c) = 0$. □

***Теорема* 6 (*вторая теорема Больцано-Коши*).** *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на некотором отрезке* $[a, b]$, *и на концах этого отрезка принимает неравные значения* $f(a) = A$, $f(b) = B$. *Тогда для любого числа* $C$, *лежащего между числами* $A$ *и* $B$, *существует точка* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f(c) = C$.

**Доказательство.**

Пусть $A < B$ и $A < C < B$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. При этом

$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$.

Тогда по теореме 5, существует точка $c$, $a < c < b$, такая что $\varphi(c) = 0$. Значит $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, следовательно, $f(c) = C$. □

***Теорема* 7 (*первая теорема Вейерштрасса*).** *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она ограничена на этом отрезке.*

**Доказательство.**

Доказательство будем проводить методом от противного.

Если функция $y = f(x)$ ограничена, то она ограничена сверху и снизу.

Пусть функция $y = f(x)$ неограничена, например, сверху на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого натурального числа $n$ найдется такая точка $x = x_n$, $x_n \in [a, b]$, что выполняется неравенство $f(x_n) \geq n$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ – ограничена. Следовательно, по лемме Больцано-Вейерштрасса (теорема 1, § 2.4) у данной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, тогда $x_0 \in [a, b]$ (следствие 2 из теоремы 5, §2.2). Но так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, а по предположению

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Получили противоречие, следовательно, предположение неверно и функция $y = f(x)$ ограничена сверху.

Аналогично можно доказать, что функция $y = f(x)$ ограничена снизу. Значит, функция ограничена на отрезке $[a, b]$. □

***Теорема* 8 (*вторая теорема Вейерштрасса*).** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ найдутся такие значения $x_1$ и $x_2$, что $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут наибольшим и наименьшим значением функции $f(x)$.*

**Доказательство.**

Пусть функция $y = f(x)$ не достигает на отрезке $[a, b]$ своего наибольшего значения.

По теореме 7 функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, следовательно, она ограничена сверху. Значит, существует точная верхняя граница $M$ функции на этом отрезке, и так как $f(x)$ не достигает своего наибольшего значения на отрезке $[a, b]$, то $f(x) < M$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Данная функция непрерывна и ограничена на отрезке $[a, b]$. Следовательно, существует такое число $B$, что $F(x) \le B$ или $\dfrac{1}{M - f(x)} \le B$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда $f(x) \le M - \dfrac{1}{B}$, а это противоречит тому, что $M$ – точная верхняя граница функции.

Следовательно, $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a, b]$ своего наибольшего значения.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a, b]$ своего наименьшего значения. □

## 5. Равномерная непрерывность функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ непрерывную на промежутке $X$. Следовательно, для любой точки $x_0$, по заданному $\varepsilon > 0$, можно построить такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Причем $\delta$ зависит от положения точки $x_0$ на промежутке $X$.

Иногда важно выяснить, можно ли по заданному $\varepsilon > 0$ найти такое значение $\delta > 0$, не зависящее от положения точки $x_0$ на промежутке $X$, для которого из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Если такое $\delta$ существует, то функция называется **равномерно непрерывной** на промежутке $X$.

***Определение 8.*** *Функция* $f(x)$ *называется* ***равномерно непрерывной*** *на промежутке X, если для любого действительного числа* $\varepsilon > 0$, *существует такое действительное число* $\delta > 0$ *(зависящее только от* $\varepsilon$*), что для любых двух точек* $x'$ *и* $x''$ *из промежутка X, удовлетворяющих условию* $|x' - x''| < \delta$ *выполняется неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Из непрерывности функции в каждой точке промежутка *X* еще не следует равномерной непрерывности функции в промежутке *X*.

***Теорема 9 (теорема Кантора).*** *Если функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$*, то она равномерно непрерывна на этом промежутке.*

***Определение 9.*** *Колебанием функции* $f(x)$ *на интервале X называется число* $\omega = M - m$, *где M – точная верхняя грань функции,* $m$ – *точная нижняя грань функции.*

Если функция непрерывна в замкнутом промежутке *X*, то, как следует из второй теоремы Вейерштрасса, колебание функции есть разность между наибольшим и наименьшим значением функции $f(x)$ на интервале *X*.

***Следствие из теоремы Кантора.***

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $\delta > 0$, что на каждом отрезке $[c, d] \in [a, b]$, длина которого меньше $\delta$, колебание $\omega$ функции $f(x)$ будет меньше $\varepsilon$.

# IV. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

## §4.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

### 1. Задачи, приводящие к понятию производной

***Мгновенная скорость.*** Пусть $y = s(t)$ – закон движения материальной точки по координатной прямой. В момент времени $t$ точка находится на расстоянии $s(t)$ от начала отсчета, а в момент времени $t + \Delta t$ – на расстоянии $s(t + \Delta t)$. Тогда путь, пройденный точкой за время $\Delta t$, равен $\Delta y = s(t + \Delta t) - s(t)$. Средняя скорость материальной точки за время $\Delta t$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

**Мгновенной скоростью** $v$ материальной точки в момент времени $t$ называется предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$. Следовательно,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (2)$$

***Касательная к кривой.*** Рассмотрим кривую $K$ и на ней точку $M_0$. Возьмем произвольную точку $M \in K$ и рассмотрим прямую $M_0M$. Она называется **секущей** к кривой $K$, проведенной в точке $M_0$. Будем перемещать точку $M$ таким образом, чтобы она приближалась к $M_0$, тогда положение секущей также будет меняться.

***Определение*** 1. ***Касательной*** *к кривой К проведенной в точке $M_0$ называется предельное положение секущей $M_0M$, если $M \to M_0$.*

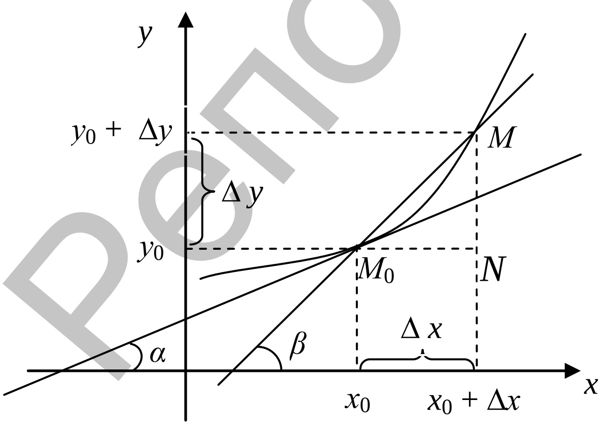

Рис. 1.

Рассмотрим кривую $K$ – график непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in K$. Проведем касательную к графику данной функции в точке $M_0$. Ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$. Рассмотрим произвольную точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in K$ и проведем секущую $M_0M$. Ее угловой коэффициент $k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \beta$ (рисунок 1).

Проведем прямую $MN$ параллельную оси $OY$ и прямую $M_0N$ параллельную оси $OX$. Треугольник $NMM_0$ – прямоугольный ($NM = \Delta y$, $NM_0 = \Delta x$, $\angle NM_0M = \beta$, $\operatorname{tg} \angle NM_0M = \operatorname{tg} \beta$).

Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{MN}{M_0N} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, значит угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0$ находится по формуле

$$k = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Две задачи из разных областей знания привели к рассмотрению одной и той же операции: нахождению предела отношения приращения функции к приращению аргумента функции, если приращение аргумента стремится к нулю.

## 2. Определение производной функции. Ее физический и геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $X$. Рассмотрим точку $x_0 \in X$. Придадим ей приращение $\Delta x$ так, чтобы $x_0 + \Delta x \in X$ и рассмотрим приращение функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

***Определение* 2**. ***Производной*** *функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел, к которому стремится дробь $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует*.

Производная функции $f(x)$ в точке $x_0$ обозначается следующим образом: $f'(x_0)$ или $\dfrac{d f(x_0)}{dx}$.

Значит, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $X$, то ее производная на данном интервале представляет собой функцию, зависящую от переменной $x$ и обозначается $f'(x)$ или $\dfrac{d f(x)}{dx}$.

Сравнивая (1), (2), (3) можно сформулировать физический и геометрический смысл производной.

**Физический смысл производной**: производная функции $f(x)$ равна мгновенной скорости материальной точки в момент времени $x$, если материальная точка движется по прямой, а закон движения задается формулой $y = f(x)$, где $x$ – время, $y$ – перемещение.

**Геометрический смысл производной**: производная функции $f(x)$ в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику данной функции в точке с абсциссой $x_0$.

Уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (4)$$

**Пример 1.** Используя определение производной, найти производную функции $y = c$.

**Решение.**

Рассмотрим произвольную точку $x$ числовой прямой и придадим ей приращение $\Delta x$. Найдем приращение функции

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Тогда, по определению производной,

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

## 3. Связь между существованием производной функции и непрерывностью

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$. По определению производной, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Тогда, по свойству предела функции, $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$ (формула 1 § 3.2). Умножим обе части равенства на $\Delta x$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x. \qquad (5)$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0$, то $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta x$, значит, $\alpha(\Delta x)\,\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда формула для нахождения приращения функции в точке $x_0$ имеет следующий вид

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x). \qquad (6)$$

***Теорема* 1.** *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, то она непрерывна в этой точке.*

**Доказательство**. Так как функция имеет производную в точке $x_0$, то ее приращение представимо в виде (5). Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)) = 0.$$

Следовательно, по определению 2 непрерывности функции (см. § 3.3), функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. □

**Замечание**. Обратное утверждение неверно, т.е. непрерывная функция в точке $x_0$ не всегда имеет производную в этой точке.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию $y = |x|$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, но в точке $x = 0$ производная функции не существует.

Докажем это. Учитывая, что $x_0 = 0$, по определению производной функции $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Но так как $|\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{при } \Delta x > 0, \\ -\Delta x, & \text{при } \Delta x < 0, \end{cases}$

то $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Видим, что левый предел функции не равен правому пределу, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует. Значит, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

## 4. Правила нахождения производных функции

Установим правила, с помощью которых можно находить производные суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих производные в точке $x$.

***Теорема* 2.** *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке $x$, тогда функции $c\cdot u(x)$, $u(x) \pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x) \neq 0)$ также имеют производную в точке $x$, и в данной точке справедливы следующие равенства*:

*a*) $(c\cdot u)' = c\cdot u'$;

*b*) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

*c*) $(u\cdot v)' = u'v + uv'$;

*d*) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Доказательство.** Докажем одно из правил, например, равенство (*c*).

Рассмотрим некоторую точку $x$ в которой существуют производные функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, и придадим ей приращение $\Delta x$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$, получат соответственно приращения $\Delta u$ и $\Delta v$, где

$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$.

Пусть $u(x) = u$, $v(x) = v$, Тогда $u(x + \Delta x) = u + \Delta u$, $v(x + \Delta x) = v + \Delta v$.

Рассмотрим приращение функции $u(x)\cdot v(x)$ в точке $x$

$$\Delta(u\cdot v) = u(x + \Delta x)\, v(x + \Delta x) - u(x)\, v(x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv =$$
$$= uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

По определению производной

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ и, в силу непрерывности функции $u(x)$ (теорема 1), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, то

$$(u\cdot v)' = vu' + uv' + 0\cdot v' = vu' + uv'.$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются и остальные утверждения теоремы. □

## § 4.2. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ

### 1. Нахождение производных простейших элементарных функций

Найдем производные основных элементарных функций.

1. Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ $(n\in N)$.

Зафиксируем произвольную точку $x$ числовой прямой и найдем производную функции $y = x^n$ в этой точке. По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + n\,x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = n\,x^{n-1}.$$

Таким образом, производная функции $y = x^n$, $n\in N$ в точке $x$ находится по формуле $(x^n)' = n\,x^{n-1}$.

Так как точка $x$ выбрана произвольно, то формула верна для любых значений переменных $x$.

2. Найдем производную функции $y = \sin x$.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Значит $(\sin x)' = \cos x$.

Формула справедлива для любых значений $x$.

3. Аналогично можно найти производную функции $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

4. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Учитывая, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, воспользуемся формулой для нахождения производной частного (теорема 2 § 4.1)

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Производная определена для всех $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ .

5. Аналогично находим производную функции $y = \operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \ (x \neq \pi n,\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

6. Рассмотрим функцию $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. Возьмем в качестве $x$ произвольную точку положительной полупрямой $(x > 0)$.

$$y' = (\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Следовательно, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ (для всех $x > 0$). При $a = e$ получим $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

## 2. Производная обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ непрерывна и строго монотонна. Тогда существует обратная функция $x = \varphi(y)$, определенная в некоторой окрестности точки $y_0$ (теорема 3 §3.3), и справедлива следующая теорема.

***Теорема* 1.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки* $x_0$, *имеет в точке* $x_0$ *производную и* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = \varphi(y)$ *имеет производную в точке* $x_0$, *которая находится по формуле*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (1)$$

**Доказательство.**

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и обратную ей функцию $x = \varphi(y)$. Придадим аргументу $y$ функции $x = \varphi(y)$ приращение $\Delta y \neq 0$, тогда этому приращению соответствует приращение функции $\Delta x$. Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y}.$$

Так как $\Delta y \neq 0$, то в силу строгой монотонности функции $x = \varphi(y)$ следует, что $\Delta x \neq 0$. Кроме того, так как функция $y = f(x)$ непрерывна то из того, что $\Delta y \to 0$ следует, что $\Delta x \to 0$. Значит

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Так как $f'(x_0) \neq 0$, то предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ существует и равен $\varphi'(y_0)$. Следовательно, выполняется равенство (1). □

***Замечание.***

Данная теорема имеет простой геометрический смысл. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, то в этой точке к графику можно провести касательную, угловой коэффициент $k_1$ которой равен тангенсу угла наклона образованного данной касательной с положительным направлением оси $0x$. (см. рис. 2). Если функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0$, то в этой точке к графику функции также можно провести касательную с угловым коэффициентом $k_2$. При этом обе касательные совпадают. Тогда $f'(x_0) = k_1 = \operatorname{tg}\alpha$,

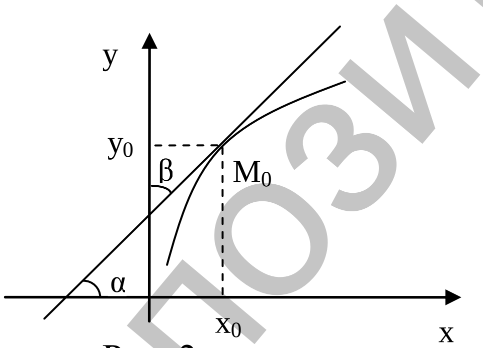

Рис. 2.

$$\varphi'(y_0) = k_2 = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Используя теорему 1 и теорему о существовании обратной функции (теорема 3 § 3.3), найдем производные функций $y = a^x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

1. Рассмотрим функцию $y = a^x$. Эта функция непрерывна и монотонно возрастает на всей числовой прямой. Множеством значений данной функции является интервал $(0, +\infty)$. Следовательно, она имеет обратную

функцию, непрерывную и монотонно возрастающую на полуоси $y > 0$. Этой функцией является функция $x = \log_a y$. $(\log_a y)' = \dfrac{1}{y \ln a} > 0$, при $y > 0$. Тогда по формуле (1) имеем

$$y' = (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Следовательно, производная функции $y = a^x$ находится по формуле

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Формула справедлива для любых действительных $x$. При $a = e$ получаем $(e^x)' = e^x$.

2. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$ $(-1 \le x \le 1)$. Множеством значений этой функции является отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ имеет обратную функцию $x = \sin y$, которая имеет для $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ положительную производную $(\sin y)' = \cos y$. Тогда по формуле (1)

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Аналогично находятся производные функций $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

### 3. Производная сложной функции

***Теорема* 2.** *Пусть функция $t = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке $x_0$ производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = f(t)$ имеет в соответствующей точке $t_0 = \varphi(x_0)$ производную $f'(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет в точке $x_0$ производную*

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0). \qquad (2)$$

**Доказательство**.

Рассмотрим точку $x_0$ и придадим ей приращение $\Delta x$ ($\Delta x \neq 0$). Пусть $\Delta t$ соответствующее приращение функции $\varphi(x)$ в точке $x_0$, $\Delta y$ – соответствующее приращение функции $f(t)$ в точке $t_0$, вызванное $\Delta t$.

Воспользуемся формулой (5) §4.1 и найдем приращение функции $y = f(t)$ в точке $t_0$:

$$\Delta y = f'(t_0)\,\Delta t + \alpha(\Delta t)\,\Delta t.$$

Разделим левую и правую часть равенства на $\Delta x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(t_0)\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Так как функция $t = \varphi(x)$ имеет производную в точке $x_0$, то она непрерывна в этой точке (теорема 1 §4.1), тогда по определению 2 непрерывной в точке $x_0$ функции (см. § 3.3), следует, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta t \to 0$ и $\alpha(\Delta t) \to 0$.

Найдем производную функции $y = f(\varphi(x))$ в точке $x_0$, учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} = \varphi'(x_0)$ и $\alpha(\Delta t) \to 0$ при $\Delta x \to 0$:

$$[f(\varphi(x_0))]' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f'(t_0)\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) =$$

$$= f'(t_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta t)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x} = f'(t_0)\,\varphi'(x_0).$$

Значит, производная функции $f(\varphi(x))$ в точке $x_0$ существует и находится по формуле (2). □

**Пример 1** . Найти производную функции $y = \cos(x^2 + 1)$.

**Решение.**

Функция $y = \cos(x^2 + 1)$ – сложная функция вида $y = \cos t$, где $t = x^2 + 1$. Для нахождения производной этой функции воспользуемся формулой (2)

$$y' = (\cos(x^2 + 1))' = (\cos t)'(x^2 + 1))' =$$

$$= -\sin t \cdot 2x = -2x \cdot \sin(x^2 + 1).$$

На практике при нахождении производных можно отдельно не выписывать функции, составляющие сложную функцию.

**Пример 2**. Найти производную функции $y = \sqrt{4x^2 + 2x - 1}$ .

**Решение.**

$$y' = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}(4x^2 + 2x - 1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}(8x + 2) = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}.$$

Правило нахождения производных сложной функции распространяется и на случай функции, являющейся суперпозицией трех и больше функций.

**Пример 3**. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{arctg} x^2}$.

**Решение.**

$$y' = \left(e^{\operatorname{arctg} x^2}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x^2}(\operatorname{arctg} x^2)' = e^{\operatorname{arctg} x^2}\,\frac{1}{1+x^4}(x^2)' =$$

$$= e^{\operatorname{arctg} x^2}\,\frac{2x}{1+x^4}.$$

### 4. Логарифмическая производная и ее применение

Пусть функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема в точке $x$. Тогда в этой точке существует $\ln y = \ln f(x)$. Рассмотрим $\ln y$ как сложную функцию аргумента $x$. Найдем производную этой функции в данной точке $x$:

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))'. \qquad (3)$$

Величина, определяемая формулой (3), называется **логарифмической производной** функции $y = f(x)$ в данной точке $x$.

Логарифмическая производная применяется для нахождения производных некоторых функций.

**Производная степенно-показательной функции.** Найдем производную степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$. В п.2 §3.3. было доказано, что эта функция определена и непрерывна для всех $x$, для которых функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и $u(x) > 0$. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы для таких значений $x$. Рассмотрим $\ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v(x)\ln u(x)$ и найдем логарифмическую производную функции $y = u(x)^{v(x)}$:

$$\frac{y'}{y} = (v(x)\ln u(x))' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Из этого равенства можно выразить производную функции $y = u(x)^{v(x)}$ следующим образом:

$$y' = y\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right] = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

**Производная степенной функции с произвольным показателем.** Найдем производную функции $y = x^{\alpha}$, где $\alpha$ – любое действительное число, $x > 0$. При $x > 0$ функция $y = x^{\alpha}$ положительна, следовательно, можно рассмотреть $\ln y = \ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$. Найдем логарифмическую производную функции $y = x^{\alpha}$:

$$\frac{y'}{y} = (\alpha \ln x)' = \frac{\alpha}{x}.$$

Учитывая, что $y = x^{\alpha}$, получим формулу для нахождения производной степенной функции

$$y' = y\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Эта производная определена для всех $x > 0$.

## 5. Таблица производных.

***Таблица производных простейших элементарных функций.***

1. $(c)' = 0$.

2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. В частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$).

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \ldots$).

7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

9. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

11. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$. В частности, $e^x = e^x$.

12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0,\ 0 < a \neq 1)$. В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Указанная таблица вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения и частного (теорема 2 §4.1), правилом дифференцирования сложной функции (теорема 2 данного параграфа) позволяют находить производные любых элементарных функций.

## 6. Производная параметрически заданной функции. Производная функции, заданной неявно

**Понятие функции, заданной параметрически.** Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены на некотором интервале $T$ – промежутке изменения переменной $t$, которую называют параметром. Пусть функция $x = \varphi(t)$ является строго монотонной на этом промежутке. Тогда, существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, подставляя которую в уравнение $y = \psi(t)$, получим

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x).$$

Таким образом, переменная $y$ является сложной функцией переменной $x$. Задание функции $y = f(x)$ с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{4}$$

где $t \in T$, называется **параметрическим.**

***Замечание.*** Уравнения (4) можно рассматривать, как зависимость координат точки, движущейся на плоскости $(x, y)$, от времени $t$. При такой интерпретации график функции представляет собой траекторию точки.

Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t) \neq 0$ и $\psi'(t)$, то функция $y = f(x)$ также имеет производную. Найдем производную функции $y = f(x)$ как производную сложной функции $y = \psi(t)$, где $t = \varphi^{-1}(x)$, тогда $y' = \psi'(t)\,(\varphi^{-1}(x))'$. Так как $t = \varphi^{-1}(x)$ – функция обратная функции $x = \varphi(t)$, то производная этой функции находится по формуле $t' = (\varphi^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$ (формула (1)). Тогда $y' = \psi'(t)\dfrac{1}{\varphi'(t)}$ или

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5}$$

**Пример 4.** Доказать, что уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ задают параметрически некоторую функцию $y = f(x)$. Найти производную этой функции.

**Решение.**

Функция $x = \cos t$ является убывающей на отрезке $0 \le t \le \pi$ и имеет обратную функцию $t = \arccos x$. Подставим функцию $t = \arccos x$ в уравнение $y = \sin t$, получим

$$y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \le x \le 1).$$

Найдем производную данной функции двумя способами.

1.Используя явное выражение функции $y = \sqrt{1-x^2}$ ,

2. Используя формулу (5) для производной функции, заданной параметрически.

1. Найдем производную функции $f(x)$ как функции, заданной явной формулой $y = \sqrt{1-x^2}$ . Имеем

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

2. Найдем производную функции $f(x)$ как функции, заданной параметрически

$$y' = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = -\frac{\cos t}{\sin t} \quad (t \neq 0, \quad t \neq \pi).$$

Так как $\cos t = x$, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ при $0 \leq t \leq \pi$, то получаем $y' = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

**Понятие функции, заданной неявно.** Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{6}$$

Пусть для любого $x$ из некоторого множества $X$ это уравнение имеет единственное решение относительно $y$. Тем самым каждому $x \in X$ ставится в соответствие определенное число – решение уравнения (6). Это означает, что на множестве $X$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции $y = f(x)$ называется **неявным,** а сама функция $y = f(x)$ – **неявной функцией**. Итак, неявная функция $y = f(x)$ – это решение уравнения (1) относительно $y$.

***Замечание.*** Одним и то же уравнением может неявно задаваться несколько функций.

Для того чтобы найти производную функции, заданной неявно, можно поступить следующим образом: предполагая, что в уравнении (6) переменная $y$ является функцией от $x$, найдем производную от левой и правой частей данного равенства, затем выразим $y'$.

**Пример 5.** Найти производную $f'(0)$ неявной функции $y = f(x)$, заданной уравнением

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$$

и, удовлетворяющей условию $f(0) = 1$.

**Решение.**

Предполагая, что $y = f(x)$, найдем производную от левой и правой частей данного равенства:

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0.$$

Выразим из полученного уравнения $y'$:

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{4y - x - 1}.$$

Найдем $f'(0)$, подставив $x = 0$, $y = 1$. Тогда

$$f'(0) = \frac{1 - 2 \cdot 0 - 1}{4 \cdot 1 - 0 - 1} = -\frac{2}{3}.$$

## § 4.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

### 1. Понятие дифференцируемости функций. Связь между дифференцируемостью функции и существованием производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $X$. Пусть эта функция непрерывна в точке $x_0$ данного интервала. Придадим точке $x_0$ приращение $\Delta x$, такое, что $x + \Delta x \in X$. Это вызовет приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

***Определение* 1.** *Функция $y = f(x)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке $x_0$, если ее приращение в этой точке представимо в виде*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{1}$$

*где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция, $A$ – некоторое число, не зависящее от $\Delta x$.*

Так как произведение двух бесконечно малых в точке $\Delta x = 0$ функций $\alpha(\Delta x)$ и $\Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка чем $\Delta x$: $\alpha\,\Delta x = o(\Delta x)$, то приращение дифференцируемой в точке $x_0$ функции можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{2}$$

Элемент $A\Delta x$ при $A \neq 0$ является главной частью приращения функции $y = f(x)$ и называется дифференциалом функции.

Обозначение: $dy$ или $df(x_0)$.

Следовательно, дифференциал функции находится по формуле

$$dy = A\Delta x. \tag{3}$$

Если $A = 0$, то в формулах (1) и (2) первое слагаемое $A\Delta x$ не является главной частью приращения $\Delta y$, так как $\alpha\,\Delta x$ вообще говоря отлично от нуля. Но и в этом случае дифференциалом называют величину, определяемую формулой (3), и считают его равным нулю.

Дифференциал функции имеет следующие свойства:

1) это линейная функция от $\Delta x$;

2) дифференциал функции отличается от приращения функции на величину, которая является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$.

**Пример**. Найти дифференциал функции $y = x^2$ в точке $x_0$.

**Решение.**

Придадим точке $x_0$ приращение $\Delta x$ и рассмотрим приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Учитывая, что $\Delta x^2 = o(\Delta x)$, получим $dy = 2x_0\,\Delta x$.

***Теорема* 1**. *Для того, чтобы функция* $y = f(x)$ *была дифференцируема в точке* $x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.*

**Доказательство**.

**Необходимость**. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда ее приращение представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ (формула (2)). Найдем производную функции в этой точке

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A.$$

Значит производная функции $f(x)$ существует и равна $A$.

**Достаточность**. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, тогда ее приращение представимо в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

(формула (5) § 4.1), где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Это представление совпадает с представлением (1) данного параграфа. Значит, по определению, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. □

***Следствие.*** *Из данной теоремы и теоремы* 3 § 4.1 *следует, что если функция дифференцируема в точке* $x_0$, *то она непрерывна в этой точке*.

**Замечание1**. Из теоремы 1 следует, что число $A$ в формулах (1), (2) и (3) равно производной функции $f(x)$ в точке $x_0$, кроме того, легко видеть, что дифференциал независимой переменной $x$ равен приращению этой переменной, т.е. $\Delta x = dx$. Значит, формула для дифференциала в точке $x_0$ может быть записана в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \qquad (4)$$

Отсюда получим второе обозначение производной функции

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx},$$

т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной.

**Замечание 2**. Теорема 1 позволяет отождествлять понятие существования производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ с понятием дифференцируемости функции в этой точке. Поэтому в дальнейшем операцию нахождения производной будем называть **дифференцированием.**

## 2. Геометрический смысл дифференциала функции

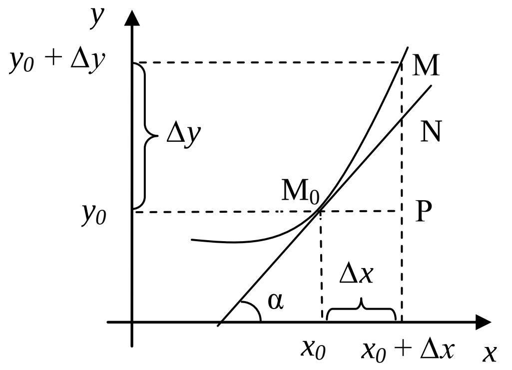


Рис. 3.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке (3). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ (т.е. существует производная функции в точке $x_0$). Следовательно, к графику данной функции в точке $M_0$ $(x_0, y_0)$ можно провести касательную $M_0N$. Придадим точке $x_0$ приращение $\Delta x$ и получим точку $x = x_0 + \Delta x$, которой соответствует значение функции $y = y_0 + \Delta y$. Отметим на графике функции $y = f(x)$ точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Пусть $M_0P \parallel Ox$, $MP \parallel Oy$, $N$ – точка пересечения прямой $MP$ и касательной $M_0N$. Тогда $MP = \Delta y$, $M_0P = \Delta x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $NM_0P$.

$$\operatorname{tg} \angle NM_0P = \frac{NP}{M_0P} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Значит,

$$NP = \operatorname{tg} \alpha \cdot M_0P = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx = df(x_0).$$

Следовательно, дифференциал функции $f(x)$ в точке $x_0$ равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Видим, что приращение функции $\Delta y$ в точке $x_0$ отличается от дифференциала функции в этой точке.

## 3. Правила нахождения дифференциала функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Из формулы (4) и теоремы 2 § 4.1 непосредственно вытекают следующие правила для нахождения дифференциала суммы, разности, произведения и частного:

1) $d(u + c) = du$;
2) $d(cu) = c\,dx$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$;
5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

***Инвариантность формы дифференциала***. Рассмотрим сложную функцию $y = f(\varphi(t))$, где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая в точке $t$, $y = f(x)$ – функция, дифференцируемая в точке $x = \varphi(t)$. Тогда функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке $t$ и ее производная находится по формуле $y' = f'(x)\ \varphi'(t)$ (теорема 2 § 4.2). Найдем дифференциал функции $y = f(\varphi(t))$. По формуле (4) данного параграфа имеем

$$dy = d[f(\varphi(t))] = [f(\varphi(t_0))]'\ dt = f'(x)\cdot\varphi'(t)\ dt =$$

$$= \left|\ \varphi'(t)\,dt = d(\varphi(t)) = dx\ \right| = f'(x)\ dx.$$

Значит дифференциал функции $f(\varphi(t))$ можно найти по формуле (4)

$$dy = f'(x)\ dx,$$

но только теперь $dx$ является не приращением аргумента $x$ (как в случае, когда $x$ является независимой переменной), а дифференциалом функции $x = \varphi(t)$ в точке $t$, т.е. $dx = \varphi'(t)\ dt.$ Это свойство называется свойством **инвариантности формы дифференциала**.

### 4. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Рассмотрим формулу (2) для записи приращения дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $x_0$

$$\Delta y = f'(x_0)dx + o(\Delta x).$$

Следовательно, с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$, справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x_0)dx.$$

Учитывая, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $dx = \Delta x$ получим формулу для нахождения приближенного значения функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (6)$$

При этом погрешность при замене $f(x_0 + \Delta x)$ правой частью формулы (6) тем меньше, чем меньше $\Delta x$, и при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$.

**Пример**. Найти $\sqrt{0{,}999}$ .

**Решение.**

Пусть $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}001$, тогда $x_0 + \Delta x = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ . Так как $f(1) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, тогда по формуле (6) получаем

$$\sqrt{0{,}999} = f(0{,}999) \approx f(1) + f'(1)\,(1 - 0{,}001) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(0{,}999 - 1) = 0{,}9995.$$

# § 4.4 ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

## 1. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда $f'(x)$ представляет собой функцию, определенную в этой же окрестности. Пусть функция $y = f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда производную функции $f'(x)$ называют **второй производной (производной второго порядка)** функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

Обозначение: $f''(x_0)$, $y''(x_0)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

**Третья производная** определяется как производная от второй производной и обозначается следующим образом: $f'''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет $(n-1)$-ю производную в окрестности точки $x_0$, которая дифференцируема в точке $x_0$, то производная от $(n-1)$-ой производной функции $y = f(x)$ называется ***n*-ой производной** данной функции и обозначается одним из следующих символов: $f^{(n)}(x_0)$, $y^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Таким образом, производные высших порядков определяются по формуле

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

Функция, имеющая $n$-ую производную в точке $x_0$, называется ***n* раз дифференцируемой** в этой точке. Функция, имеющая в точке $x_0$ производные всех порядков, называется **бесконечно дифференцируемой** в этой точке.

**Пример 1**. Найти производную второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

**Решение.**

Найдем первую производную функции $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

$$(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}))' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}))'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

**Пример 2**. Найти производную функции $y = a^x$ $n$-ого порядка.

**Решение.**

Последовательно дифференцируя функцию $y = a^x$ , получим

$y' = a^x \ln a$;

$y'' = (a^x \ln a)' = \ln a\, a^x \ln a = a^x \ln^2 a$;

………………………….

$y^{(n)} = a^x \ln^n a.$

В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Установленные в § 4.1 правила нахождения производных суммы или разности двух функций легко переносятся на случай производной $n$-ого порядка: $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.

Для вычисления $n$-ой производной произведения двух функций часто удобно пользоваться правилом, которое носит название формулы Лейбница и имеет следующий вид:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1\, u^{(n-1)} v' + C_n^2\, u^{(n-2)} v'' + C_n^3\, u^{(n-3)} v''' + \ldots + uv^{(n)},$$

где $C_j^i = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$. (1)

**Пример 2**. Найти $y^{(n)}$, если $y = x^2 e^{3x}$.

**Решение.**

Воспользуемся формулой (1), где $u = e^{3x}$, $v = x^2$. Получим

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 (e^{3x})^{(10)} + C_{10}^1 (x^2)'(e^{3x})^{(9)} + C_{10}^2 (x^2)''(e^{3x})^{(8)} + \\ + \ldots + (x^2)^{(10)} e^{3x}.$$

Так как $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)''' = 0$, …, $(x^2)^{(10)} = 0$, т.е. все производные функции $v = x^2$ кроме первой и второй равны нулю, то ненулевыми слагаемыми в формуле Лейбница для функции $y = x^2 e^{3x}$ будут только первые три слагаемых. Найдем

$$(e^{3x})^{(10)} = 3^{10} e^{3x},\ (e^{3x})^{(9)} = 3^9 e^{3x},\ (e^{3x})^{(8)} = 3^8 e^{3x},$$

$$C_{10}^1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{9!} = 10,\ C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = 45,$$

и подставим в формулу. Получим

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 e^{3x} 3^{10} + 10 \cdot 2x^2 e^{3x} 3^9 + 45 \cdot 2 e^{3x} 3^8 = 3^9 e^{3x}(3x^2 + 20x + 30).$$

## 2. Дифференциалы высших порядков

Пусть $x$ – независимая переменная и функция $y = f(x)$ – дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда первый дифференциал функции $dy = f'(x)\, dx$, в свою очередь, является функцией двух переменных $x$ и $dx$. Предположим, что функция $f'(x)$ также дифференцируема в точке $x_0$ и что величина $dx$ имеет одно и то же фиксированное значение для всех точек рассматриваемой окрестности. Тогда существует дифференциал функции $dy = f\,'(x)\,dx$ в точке $x_0$, который, учитывая, что $dx$ считается постоянной величиной, можно найти следующим образом:

$$d(df(x_0)) = d(f\,'(x_0)\,dx) = d(f\,'(x_0)) \cdot dx = f\,''(x_0)\,dx\,dx = f\,''(x_0)\,dx^2.$$

Дифференциал от дифференциала функции $f(x)$ в точке $x_0$, найденный таким образом, называется **вторым дифференциалом** функции.

Обозначение: $d^2 f(x_0)$, $d^2 y$.

Второй дифференциал функции находится по формуле

$$d^2 f(x_0) = f\,''(x_0)\,dx^2.$$

Аналогично находится дифференциал третьего порядка функции в точке $x_0$:

$$d^3 f(x_0) = f\,'''(x_0)\,dx^3.$$

Предположим, что производная порядка $(n–1)$ функции $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, тогда можно определить **дифференциал *n*-го порядка** $d^n y$ функции $y = f(x)$ как дифференциал $d(d^{n-1}y)$ взятый при условии, что $dx$ постоянная величина. Получим

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n. \qquad (2)$$

***Замечание.*** Дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


## Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Основы математического анализа. – Ч. 1. – М.: Наука, 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. – Т. 1. – М.: Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Т. 1. – М.: Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т.1. – М.: Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т. 1. – Физматгиз, 1960.

## Дополнительная литература

1. Гусак А.А., Гусак Г.М, Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
4. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. – Ч. 1. – Витебск: Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2005.

**Ж.В. Иванова**
**Т.Л. Сурин**
**С.В. Шерегов**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ А Н А Л И З

## • ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ
## • ПРОИЗВОДНАЯ



**Витебск 2008**