Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА:
системы счисления, делимость чисел, расширение понятия о числе

Методические рекомендации

2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М54

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук **А.В. Виноградова**; доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук **В.В. Устименко**

Рецензент:
доцент кафедры дошкольного и начального образования УО «ВГУ им. П.М. Машерова»,
кандидат педагогических наук *З.К. Левчук*

Методические рекомендации написаны в соответствии с действующей программой по математике и предназначены для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. В настоящем учебном издании кратко излагается необходимый теоретический материал, приводятся подробно разобранные примеры и аналогичные задания для самостоятельного решения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

В результате усвоения данного курса студенты должны изучить основы построения позиционных и непозиционных систем счисления, алгоритмы действий в десятичной системе счисления, уметь рационально выполнять и обосновывать устные и письменные вычисления с целыми неотрицательными числами; знать определение и свойства отношения делимости, уметь применять их на практике, находить НОД и НОК чисел, устанавливать делимость суммы, разности, произведения на данное число; знать определение рационального, иррационального и действительного числа и операций над ними, законы сложения, умножения, свойства множества рациональных и действительных чисел, уметь выполнять вычисления с этими числами.

В данное издание включены такие темы, как «Системы счисления», «Делимость чисел», «Расширение понятия о числе». В нем содержится более 60 задач с решениями и обоснованиями по вышеуказанным темам, упражнения для самостоятельной работы, способствующие развитию культуры мышления студентов и умению пользоваться языком математики.

Структура данного издания такова: материал разбит на темы, темы – на пункты. Выделение пунктов, небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только лучше овладеть необходимыми знаниями и умениями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность.

I. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. ПОЗИЦИОННЫЕ И НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления.

Различают позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается – I, пять – V, пятьдесят – L, сто – C, пятьсот – D, тысяча – M. Все остальные числа получаются при помощи двух арифметических действий: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV – четыре, XC – девяносто.

Задача 1. Записать числа 192, 564, 3807 в римской нумерации.

Решение. 192 – это сто (C) плюс девяносто, т.е. сто без десяти (XC), плюс два (II); следовательно, число 192 записывается как CXCII.

564 – это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс четыре, т.е. пять без одного (IV). Следовательно, 564 записывается как DLXIV.

3807 – это три тысячи (MMM) плюс пятьсот (D) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс пять (V) плюс два (II). Следовательно, число 3807 записывается так: MMMDCCCVII.

Если число содержит несколько (немного) тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M. Вообще же числа четырех-, пяти-, и шестизначные записывались с помощью буквы m (от лат. слова mille – тысяча), слева от которой записывали тысячи, а справа – сотни, десятки, единицы. Так запись CXXXIIImDCCCXLII является записью числа 133842.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите в римской системе счисления: 34, 128, 476, 1944, 2895, 3699.

2. Запишите в десятичной системе счисления: XXXVII, XLIV, LXXIII, XCVIII, CDXXXV, DCCLXV, MCDVIII, MCDXIX, MDCCLXXI.

2. ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Десятичной записью натурального числа х называется его представление в виде: $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$***, где коэффициенты*** $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ***принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и*** $a_n \neq 0$.

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ в краткой форме принято записывать так: $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$.

Так как понятие числа и его записи нетождественны, то существование и единственность десятичной записи натуральной записи надо доказывать.

Десятичная запись числа позволяет просто решать вопрос о том, какое из них меньше.

Пусть х и у – натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0,$$
$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + ... + b_1 \cdot 10 + b_0.$$

Тогда число х меньше числа у, если выполнено одно из условий:

а) $n<m$; ***б)*** $n = m$, ***но*** $a_n<b_n$; ***в)*** $n = m$, $a_n= b_n$, ..., $a_k = b_k$, ***но*** $a_{k-1}<b_{k-1}$.

Например, если $x = 345$, а $y = 4678$, то $x<y$, так как первое число трехзначное, а второе – четырехзначное. Если $x = 345$, а $y = 467$, то $x<y$, так как в первом из двух значений трехзначных чисел меньше сотен. Если $x = 3456$, а $y = 3467$, то $x<y$, так как, несмотря на то что в каждом из четырехзначных чисел число тысяч и сотен одинаковое, десятков в числе *х* меньше, чем в числе *у*.

Если натуральное число *х* представлено в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$, то числа 1, 10, 10^2, ..., 10^n называют разрядными единицами соответственно первого, второго, ..., $n+1$ разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 – основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют одну группу и называют *первым классом*, или **классом единиц**. В первый класс входят единицы, десятки и сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* – **класс тысяч**.

Затем следует *третий класс* – **класс миллионов**, состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т.д. выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

Задача 2. Запишите числа 4836, 2250, 10344 в виде суммы разрядных слагаемых.

Решение. $4836 = 4\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6$,

$2250 = 2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 0$, $10344 = 1\cdot 10^4 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 4$.

Задача 3. Какие числа представлены следующими суммами:

а) $5\cdot 10^3 + 4\cdot 10 + 7$; б) $3\cdot 10^3 + 7\cdot 10$; в) $9\cdot 10^4 + 10^2 + 2\cdot 10 + 1$.

Решение. а) $5\cdot 10^3 + 4\cdot 10 + 7 = 5047$; б) $3\cdot 10^3 + 7\cdot 10 = 3070$;

в) $9\cdot 10^4 + 10^2 + 2\cdot 10 + 1 = 90121$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите числа в виде суммы разрядных слагаемых:
   а) 5635; б) 3307; в) 10041.
2. Какие числа представлены следующими суммами:
   а) $3\cdot 10^3 + 4\cdot 10 + 6$; б) $6\cdot 10^3 + 2\cdot 10$;
   в) $5\cdot 10^4 + 10^3 + 7\cdot 10 + 9$; г) $10^5 + 10$?
3. Напишите четырехзначное и десятизначное числа, в которых все цифры различны.
4. Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.
5. Каждая цифра шестизначного числа на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30. Какое это число?

3. АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ

В основе алгоритма сложения многозначных чисел лежат следующие теоретические факты:

- способ записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
- дистрибутивность умножения относительно сложения;
- таблица сложения однозначных чисел.

Задача 4. Проиллюстрировать теоретические основы алгоритма сложения, вычислив суммы:

а) 532 + 8347; б) 637 + 548.

Решение. а) Представим слагаемые 532 и 8347 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами:

$$532 + 8347 = (5\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 2) + (8\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 7).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами и сгруппируем слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единицами, десятки с десятками и т.д. Все эти преобразования можно выполнить на основании соответствующих свойств сложения. Свойство ассоциативности разрешает записать выражение без скобок:

$$5\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 2 + 8\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 7.$$

На основании свойства коммутативности поменяем местами слагаемые: $8\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 4\cdot 10 + 2 + 7$. Согласно свойству ассоциативности произведем группировку: $8\cdot 10^3 + (5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^2) + (3\cdot 10 + \ + 4\cdot 10) + (2 + 7)$. Вынесем за скобки в первой выделенной группе число 10^2, а во второй – 10. Это можно сделать в соответствии со свойством дистрибутивности умножения относительно сложения: $8\cdot 10^3 + (5+3)\cdot 10^2 + (4+3)\cdot 10 + (2+7)$.

Итак, сложение данных чисел свелось к сложению однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов. Эти суммы находим по таблице сложения: $8\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 8879.

б) Представим слагаемые в виде суммы степеней десяти с соответствующими коэффициентами: $(6\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 7) + (5\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8)$.

Воспользуемся свойствами сложения и дистрибутивностью умножения относительно сложения и преобразуем полученное выражение к такому виду: $(6+5)\cdot 10^2 + (3+4)\cdot 10 + (7+8)$. Видим, что в этом случае сложение данных чисел также свелось к сложению однозначных чисел, но суммы 6+5 и 7+8 превышают 10 и поэтому последнее выражение не является десятичной записью числа. Необходимо сделать так, чтобы коэффициенты перед степенями числа 10 оказались меньше 10. Для этого выполним ряд преобразований. Сначала сумму 7+8 представим в виде $1\cdot 10 + 5$: $(6 + 5)\cdot 10^2 + (3 + 4)\cdot 10 + (1\cdot 10 + 5)$.

Затем воспользуемся свойствами сложения и умножения и приведем полученное выражение к виду: $(6 + 5)\cdot 10^2 + (3 + 4 + 1)\cdot 10 + 5$. Суть последнего преобразования такова: десяток, который получился при сложении единиц, прибавим к десяткам данных чисел. И наконец, записав сумму 6 + 5 в виде $1\cdot 10 + 1$, получаем $(1\cdot 10 + 1)\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 5 =$ $= 10^3 + 10^2 + 8\cdot 10 + 5$. Последнее выражение есть десятичная запись числа 1185. Следовательно, 637 + 548 = 1185.

Сумму многозначных чисел находят, выполняя сложение столбиком.

В общем виде алгоритм сложения натуральных чисел, записанных в десятичной системе счисления, формулируют так:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше десяти, записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков).
3. Если сумма единиц больше или равна десяти, то представляют ее в виде $a_0 + b_0 = 10 + c_0$, где c_0 – однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.

4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т.д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов. При этом, если их сумма больше или равна десяти, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение 1 + 0 = 1.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) для краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

Упражнения для самостоятельной работы

1. Проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма сложения, вычислив суммы: а) 657 + 342; б) 758 + 437.
2. Вычислите рациональным способом значение выражения; используемый прием обоснуйте: а) 2746 + 7254 + 9876; б) 7238 + 8979 + 2762; в) (4729 + 8473) + 5271; г) 4232 + 7419 + 5768+2591; д) (357 + 768 + 589) + (332 + 211 + 643).

4. АЛГОРИТМ ВЫЧИТАНИЯ

В основе алгоритма вычитания многозначного числа из многозначного лежат следующие теоретические факты:

- способ записи числа в десятичной системе счисления;
- правила вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- свойство дистрибутивности умножения относительно вычитания;
- таблица сложения однозначных чисел.

Задача 5. Проиллюстрировать теоретические основы алгоритма вычитания, вычислив разности: а) 586 – 342; б) 850 – 437.

Решение. а) Рассмотрим разность чисел 586 и 342. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в таком виде: $586–342 = (5\cdot10^2 + 8\cdot10 + 6)–(3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2)$.

Чтобы вычесть из числа $5\cdot10^2 + 8\cdot10 + 6$ сумму $3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, и тогда: $(5\cdot10^2 + 8\cdot10 + 6) – (3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2) = (5\cdot10^2 + 8\cdot10 + 6) – 3\cdot10^2 – 4\cdot10 – 2$.

Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-нибудь одного слагаемого (большего или равного этому числу). Поэтому число $3\cdot10^2$ вычитаем из слагаемого $5\cdot10^2$, число $4\cdot10$ – из слагаемого $8\cdot10$, а число 2 – из слагаемого 6, тогда:
$(5\cdot10^2 + 8\cdot10 + 6) – 3\cdot10^2 – 4\cdot10 – 2 = (5\cdot10^2 – 3\cdot10^2) + (8\cdot10 – 4\cdot10) + (6 – 2)$.

Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда выражение будет иметь вид: $(5 – 3)\cdot10^2 + (8 – 4)\cdot10 + (6 – 2)$. Видим, что вычитание трехзначного числа 342 из трехзначного числа 586 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов в записи заданных трехзначных чисел. Разности 5 – 3, 8 – 4 и 6 – 2 находим по таблице сложения и получаем выражение: $2\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4$, которое является записью числа 244 в десятичной системе счисления. Таким образом, 586 – 342 = 244. Выражение $(5 - 3)\cdot10^2 + (8 - 4)\cdot10 + \quad + (6 - 2)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} _{-}586 \\ \underline{342} \\ 244 \end{array}$$

б) Рассмотрим разность 850 – 437. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим эту разность в таком виде: $850 - 437 = (8\cdot10^2 + 5\cdot10 + 0)–(4\cdot10^2 + 3\cdot10 + 7)$. Поскольку из числа 0 нельзя вычесть 7, то выполнить вычитание аналогичное тому, как было сделано в первом случае, невозможно. Поэтому возьмем из числа 850 один десяток и представим его в виде 10 единиц – десятичная система счисления позволяет это сделать – тогда будем иметь выражение:

$$(8\cdot10^2 + 4\cdot10 + 10) - (4\cdot10^2 + 3\cdot10 + 7).$$

Если теперь воспользоваться правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы, а также дистрибутивностью умножения относительно вычитания, то получим выражение $(8 - 4)\cdot10^2 + (4 - 3)\cdot10 + (10 - 7)$ или $4\cdot10^2 + 1\cdot10 + 3$. Последняя сумма есть запись числа 413 в десятичной системе счисления. Значит, 850 – 437 = 413.

Разность многозначных чисел обычно находят выполняя вычитание столбиком.

В общем виде алгоритм вычитания многозначных чисел, записанных в десятичной системе счисления, формулируется так:

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.
3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0>a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10 + a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа, далее переходим к следующему разряду.
4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц умень-

шаемого, а цифры, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10 + a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.

5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.
6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма вычитания, вычислив разности: а) 578 – 345; б) 646 – 207.
2. Выполните вычитание, объясняя каждый шаг алгоритма:
   а) 84072 – 63894; б) 940235 – 32849;
   в) 935204 – 326435; г) 653481 – 233694.
3. Вычислите значение выражений, используя правила вычитания суммы из числа и числа и суммы: а) 2362 – (839 + 1362); б) (1241 + 576) – 841.
4. Вычислите значение выражения, используя правило прибавления к числу разности: а) 6420 + (3580 – 1736); б) 5480 + (6290 – 3480).
5. Вычислите значение выражения, используя правило вычитания разности из числа: а) 3720 – (1742 – 2678); б) 2354 – (965 – 1246).
6. Вычислите значение выражения, используя правило вычитания числа из разности: а) (4317 – 1928) – 317; б) (5243 – 1354) – 1643.

5. АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ

Чтобы выполнять умножение многозначного числа на многозначное, необходимо уметь:

- умножать многозначное число на однозначное и на степень десяти;
- складывать многозначные числа.

В основе алгоритма умножения многозначного числа на однозначное лежат следующие теоретические факты:

- запись чисел в десятичной системе счисления;
- свойства сложения и умножения;
- таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Задача 6. Проиллюстрировать теоретические основы алгоритма умножения, вычислив произведение $537\cdot 4$.

Решение. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления, 537 можно представить в виде $5\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 7$ и тогда $537\cdot 4 = (5\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 7)\cdot 4$. На основании дистрибутивности умножения относительно сложения раскроем скобки: $(5\cdot 10^2)\cdot 4 + (3\cdot 10)\cdot 4 +$

7·4. Далее воспользуемся коммутативностью и ассоциативностью умножения: $(5\cdot4)\cdot10^2 + (3\cdot4)\cdot10 + (7\cdot4)$. Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $20\cdot10^2 + 12\cdot10 + 28$. Видим, что умножение многозначного числа на однозначное свелось к умножению однозначных чисел. Но чтобы получить окончательный результат, надо преобразовать выражение $20\cdot10^2 + 12\cdot10 + 28$ – коэффициенты перед степенями числа 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 20 в виде $2\cdot10$, число 12 в виде $1\cdot10 + 2$, а число 28 в виде $2\cdot10 + 8$. затем в выражении $(2\cdot10)\cdot10^2 + (1\cdot10 + 2)\cdot10 + \quad + (2\cdot10 + 8)$ раскроем скобки: $2\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 2\cdot10 + 8$.

На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $2\cdot10$ и $2\cdot10$ и вынесем 10 за скобки: $2\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + (2 + 2)\cdot10 + 8$. Сумма $2 + 2$ есть сумма однозначных чисел и может быть найдена по таблице сложения: $2\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 4\cdot10 + 8$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 2148, т.е. $537\cdot4 = 2148$.

В общем виде алгоритм умножения многозначного числа $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ на однозначное число y в столбик формулируется так:

1. Записываем второе число под первым.
2. Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
3. Если произведение цифр единиц числа x на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0 – однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 – перенос в следующий разряд.
4. Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пункты 2 и 3.
5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Как известно, умножение числа x на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей. Покажем это. Умножим число $x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0$ на 10^k: $(a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0)\cdot10^k = a_n\cdot10^{n+k} + a_{n-1}\cdot10^{n+k-1} + \ldots + a_0\cdot10^k$. Полученное выражение является суммой разрядных слагаемых числа $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0 \underbrace{0\ldots0}_{k\ \text{нулей}}}$, так как равно

$$a_n\cdot10^{n+k} + a_{n-1}\cdot10^{n+k-1} + \ldots + a_0\cdot10^k + 0\cdot10^{k-1} + 0\cdot10^{k-2} + \ldots + 0\cdot10 + 0.$$

Например, $635\cdot10^3 = (6\cdot10^2 + 3\cdot10 + 5)\cdot10^3 = 6\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 5\cdot10^3 = = 6\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 5\cdot10^3 + 0\cdot10^2 + 0\cdot10 + 0 = 635000$.

Заметим еще, что умножение на число $y \cdot 10^k$, где y – однозначное число, сводится к умножению на однозначное число y и на число 10^k. Например, $43 \cdot 500 = 43 \cdot (5 \cdot 10^2) = (43 \cdot 5) \cdot 10^2 = 215 \cdot 10^2 = 21500$.

Задача 7. Проиллюстрировать алгоритм умножения многозначного числа 437 на многозначное число 254.

Решение. Представим число 254 в виде суммы $2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 1\ 0 + 4$ и запишем произведение $437 \cdot (2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4)$. Оно, согласно дистрибутивности умножения относительно сложения, равно $437 \cdot (2 \cdot 10^2) + 437 \cdot (5 \cdot 10) + 437 \cdot 4$. Отсюда, применив ассоциативное свойство умножения, получим $(437 \cdot 2) \cdot 10^2 + (437 \cdot 5) \cdot 10 + 437 \cdot 4$. Видим, что умножение многозначного числа 437 на многозначное число 254 свелось к умножению многозначного числа 437 на однозначные числа 2, 5 и 4, а также на степени 10. Таким образом получаем: 87400 + 21850 + 1748. Пользуясь алгоритмом сложения многозначных чисел, имеем:

$$\begin{array}{r} 87400 \\ +21850 \\ 1748 \\ \hline 110998 \end{array}$$

Значит, $437 \cdot 254 = 110998$.

Сформулируем в общем виде алгоритм умножения числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на число $y = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$.

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.

2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x \cdot b_0$ под числом y.

3. Умножаем число x на следующий разряд b_1, числа y и записываем произведение $x \cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot b_1$ на 10.

4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$.

5. Полученные $k + 1$ произведения складываем.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма умножения многозначного числа на однозначное, вычислив произведение $468 \cdot 3$.
2. Проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма умножения многозначного числа на многозначное, вычислив произведение $362 \cdot 175$.
3. Выполните умножение чисел, используя запись столбиком, и объясняя каждый шаг алгоритма: а) $873 \cdot 36$; в) $6030 \cdot 345$; б) $7365 \cdot 64$; г) $5478 \cdot 346$.
4. Используя свойства умножения, найдите наиболее рациональный способ вычисления значения выражения:
а) $8 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 25$; б) $24 \cdot (27 \cdot 125)$; в) $(88 + 48) \cdot 125$; г) $124 \cdot 4 + 116 \cdot 4$;
д) $(3750 – 125) \cdot 8$; е) $1779 \cdot 1243 – 779 \cdot 1243$.
5. Вычислите рациональным способом значение выражения:
а) $(420 – 394) \cdot 405 – 25 \cdot 405$; б) $105 \cdot 209 + (964 – 859) \cdot 209 \cdot 400$.

6. АЛГОРИТМ ДЕЛЕНИЯ

Деление чисел рассматривают как действие деления с остатком: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a = b{\cdot}q + r$, причем $0 \leq r < b$.

Если на однозначное число делят однозначное или двузначное (не превышающее 89), то используется таблица умножения однозначных чисел. Например, частным чисел 56 и 8 будет число 7, так как $8{\cdot}7 = 56$. Если же надо разделить 52 на 8, то находят ближайшее к нему меньшее число, которое делится на 8 – это будет число 48, и, следовательно, неполным частным при делении 52 на 8 будет число 6. Чтобы найти остаток, надо из 52 вычесть 48: $52 – 48 = 4$. Таким образом, $52 = 8{\cdot}6 + 4$, т.е. при делении 52 на 8 получается неполное частное 6 и остаток, равный 4.

Записать это можно иначе, при помощи деления уголком:

```
_52 |_8__
 48    6
 --
  4
```

Задача 8. Проиллюстрировать теоретические основы деления трехзначного числа 377 на однозначное число 4.

Решение. Разделить 377 на 4 – это значит найти такое неполное частное q и остаток r, что $377 = 4q + r$, причем остаток r должен удовлетворять условию $0 \leq r < b$, а неполное частное q – условию $4\,q \leq 377 < 4{\cdot}(q + 1)$.

Определим, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Однозначным число q быть не может, так как тогда произведение $4q$ может быть максимально равно 36 и, значит, не будут выполняться условия, сформулированные выше для r и q. Если число q двузначное, т.е. если $10 < q < 100$, то тогда $40 < 4q < 400$ и, следовательно, $40 < 377 < 400$, что верно. Значит, частное чисел 377 и 4 – число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 4 на 20, 30, 40 и т.д. Поскольку $4{\cdot}90 = 360$, а $4{\cdot}100 = 400$, и $360 < 377 < 400$, то неполное частное заключено между числами 90 и 100, т.е. $q = 90 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$$4{\cdot}(90 + q_0) \leq 377 < 360 + 4{\cdot}(90 + q_0 + 1),\ \text{откуда}$$

$$360 + 4q_0 \leq 377 < 360 + 4{\cdot}(q_0 + 1)\ \text{и}\ 4q_0 \leq 17 < 4{\cdot}(q_0 + 1).$$

Число q_0 (цифра единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором, воспользовавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0 = 4$ и, следовательно, неполное частное

$q = 90 + 4 = 94$. Остаток находится вычитанием: $377 - 4\cdot 94 = 1$.

Итак, при делении числа 377 на 4 получается неполное частное 94 и остаток 1: $377=4\cdot 94+1$.

Описанный процесс является основой деления уголком:

```
_377 |_4__
 36    94
 _17
  16
   1
```

Задача 9. Проиллюстрировать теоретические основы деления многозначного числа 4316 на многозначное число 52.

Решение. Разделить 4316 на 52 – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $4316 = 52\,q + r$, $0 \le r < 52$, а неполное частное должно удовлетворять неравенству $52q \le 4316 < 52(q + 1)$.

Определим число цифр в частном q. Очевидно, частное заключено между числами 10 и 100 (т.е. q – двузначное число), так как $520 < 4316 < 5200$. Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовательно делитель 52 на 20, 30, 40, 50 и т.д. Поскольку $52\cdot 80 = 4160$, а $52\cdot 90 = 4680$ и $4160 < 4316 < 4680$, то неполное частное заключено между числами 80 и 90, т.е. $q = 80 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$$52\cdot(80 + q_0) \le 4316 < 52\cdot(80 + q_0 + 1),$$
$$4160 + 52\,q_0 \le 4316 < 4160 + 52\cdot(q_0 + 1),$$
$$52\,q_0 \le 153 < 52\cdot(q_0 + 1).$$

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором: $156 = 52\cdot 3$, т.е. имеем случай, когда остаток равен 0. Следовательно, при делении 4316 на 52 получается частное 83.

Приведенные рассуждения лежат в основе деления уголком:

```
_4316 |_52__
 416    83
 _156
  156
    0
```

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий алгоритм деления уголком.

1. Если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.

2. Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a < 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b.

3. Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1 больше или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b);

б) умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1;

в) проводим черту под bq_1 и находим разность $r_1 = d_1 - bq_1$;

г) записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

д) если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно него поступаем согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1;

е) если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3, большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пункты 1, 2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3 < b$, то тогда частное чисел d_3 и b равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Не выполняя деления, определите число цифр частного чисел:
а) 475 и 7; б) 6134 и 226; в) 5683 и 25; г) 43127 и 536.
2. Проиллюстрируйте теоретические основы деления трехзначного числа 868 на однозначное число 3.
3. Найдите двумя способами значение выражения:
а) (297 + 405 + 567):27; в) 56·(378:14);
б) (240·23):48; г) 15120:(14·5·8).
4. Найдите значение выражения:
а) 8919:9 + 114240:21; б) 1190 – 35360 : 34 + 271; в) 8631 – (99 + 44352:63);
г) 48600·(5045 – 2040) : 243 – (8604 3 :43 + 504)·200.

7. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ОТЛИЧНЫЕ ОТ ДЕСЯТИЧНОЙ

Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p-ичной. Так, если $p = 2$, то – двоичной, если $p = 8$ – восьмеричной, если $p = 10$ – десятичной.

Для записи чисел в системе с основанием p необходимо p символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: 0, 1, 2, ..., $p - 1$. Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов 0, 1, 2, а в пятеричной – при помощи символов 0, 1, 2, 3, 4.

Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде: $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$ (1), где коэффициенты a_n , a_{n-1}, ... , a_1 ,a_0 принимают значения 0, 1, 2, …, p-1 и $a_n \neq 0$.

Вместо представления (1) число x записывают кратко $x = \overline{a_n a_{n-1} .. a_1 a_0}_p$. Например, если p = 4, то число $x = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$ можно записать в виде 2031_4, причем читать его следует так: «два, ноль, три, один в четверичной системе счисления».

Сравнение чисел в системе счисления с основанием p $(p \neq 10)$ выполняется так же, как и в десятичной системе. Так, $2101_3 < 2102_3$, поскольку при одинаковом числе разрядов и совпадении трех цифр старших разрядов число единиц в первом числе меньше числа единиц во втором.

Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p $(p \neq 10)$ выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Надо лишь иметь для системы с основанием p соответствующие таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Задача 10. Составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в троичной системе счисления.

Решение. Однозначные числа в ней – это 0, 1, 2. Число 3 записывается 10. Число 4 имеет вид 11_3, так как $4 = 1 \cdot 3 + 1 = 11_3$.

Полностью таблицы сложения и умножения однозначных чисел в троичной системе счисления можно представить в таком виде:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Задача 11. Выполнить действия над числами:

а) $1221_3 + 122_3$; в) $122_3 \cdot 22_3$;

б) $2110_3 - 212_3$; г) $10011_3 : 12_3$.

Решение. а)
```
+1221₃
  122₃
 ------
 2120₃
```
б)
```
_2110₃
  212₃
 ------
 1121₃
```
в)
```
 .122₃
   22₃
 -------
 +1021
 1021
 -------
 12001₃
```
г)
```
_10011₃ |12₃
 12     |-----
 --      122₃
 _111
  101
  ---
  _101
   101
   ---
     0
```

Значит, а) $1221_3 + 122_3 = 2120_3$; б) $2110_3 - 212_3 = 1121_3$;
в) $122_3 \cdot 22_3 = 12001_3$; г) $10011_3 : 12_3 = 122_3$.

Задача 12. Составить таблицы сложения и умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления.

Решение. Однозначные числа в ней – это 0, 1, 2, 3, 4. Число 5 записывается 10. Число 6 имеет вид 11_5, так как $6 = 1 \cdot 5 + 1 = 11_5$. Число 7 имеет вид 12_5, так как $7 = 1 \cdot 5 + 2 = 12_5$. Число 8 имеет вид 13_5, так как $8 = 1 \cdot 5 + 3 = 13_5$. Число 9 имеет вид 14_5, так как $9 = 1 \cdot 5 + 4 = 14_5$. Число 12 имеет вид 22_5, так как $12=2 \cdot 5+2=22_5$. Число 16 имеет вид 31_5, так как $16 = 3 \cdot 5 + 1 = 31_5$.

Полностью таблицы сложения и умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления можно представить в таком виде:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Задача 13. Выполнить действия над числами:

а) $221_5 + 104_5$; б) $324_5 - 132_5$; в) $34_5 \cdot 42_5$; г) $2134_5 : 12_5$.

Решение. а)
```
+221₅
 104₅
 -----
 330₅
```
б)
```
_324₅
 132₅
 -----
 142₅
```

в)
$$\begin{array}{r}
\times\, 34_5 \\
42_5 \\
\hline
+\,123 \\
301 \\
\hline
3133_5
\end{array}$$

г)
$$\begin{array}{l|l}
-2134_5 & 12_5 \\ \cline{2-2}
\underline{12} & 132_5 \\
\ \ -\underline{43} & \\
\ \ \ \ \ 41 & \\
\ \ \ \ -\underline{24} & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{24} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}$$

Чтобы из одной записи получить другую, достаточно научиться переходить от записи в заданной системе к записи в десятичной, и наоборот.

Пусть дана запись числа x в системе счисления с основанием p, т.е. $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$. Найдем запись этого числа в десятичной системе счисления. Так как в записи числа p числа a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 и p представлены в десятичной системе счисления, то, выполнив над ними действия по правилам, принятым в ней, получим десятичную запись числа x.

Задача 14. Найти десятичную запись числа 453_6.

Решение. Для этого представим данное число в виде суммы: $4\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 3$. Значение этого выражения в десятичной системе счисления равно 177. Следовательно, $456_6 = 177_{10}$.

Пусть теперь число x записано в десятичной системе. Найдем его запись в системе счисления с основанием p.

Число $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$ можно записать в виде

$x = p\cdot(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + ... + a_1) + a_0$. Так как $0 \le a < p$, то из последней записи числа x видно, что a_0 – остаток, получаемый при делении числа x на p, а $a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + ... + a_1$ – неполное частное. Точно так же можно найти, что a_1 – остаток, получаемый при делении этого неполного частного на p. Таким образом, запись числа x в p-ичной системе находят так: число x делят (в десятичной системе) на p; остаток, полученный при делении, даст последнюю цифру a_0 в p-ичной записи числа x; неполное частное снова делим на p, новый остаток даст предпоследнюю цифру p-ичной записи числа x; продолжая деление, найдем все цифры p-ичной записи числа x.

Задача 15. Записать число 2436 в восьмеричной системе счисления.

Решение. Разделим 2436 на 8: $2436 = 304\cdot 8 + 4$. При делении числа 304 на 8 получим: $304 = 38\cdot 8 + 0$ и тогда $2436 = (38\cdot 8 + 0)\cdot 8 + 4$ или $2436 = 38\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4$. Делим на 8 число 38 и получим $38 = 4\cdot 8 + 6$ и тогда $2436 = (4\cdot 8 + 6)\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4$ или $2436 = 4\cdot 8^3 + 6\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4$, т.е. $2436 = 4604_8$. Описанный процесс можно представить и в таком виде:

```
_2436│ 8
 24   ─────────
 ──  _304│8
 _36  24  ───────
  32  ──  _38│8
  ──  _64  32 [4]
  [4]  64  ──
       ──  [6]
       [0]
```

Таким образом, $2436=4064_8$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите число в виде суммы степеней основания с соответствующими коэффициентами: а) 2304_5; б) 6170_8; в) 10111_2; г) 2102_3.
2. Замените сумму краткой записью числа:
   а) $4\cdot10+3$; б) $3\cdot8^2+7\cdot8+4$; в) $2\cdot3^4+1\cdot3^3+2\cdot3+1$; г) $1\cdot2^5+1\cdot2^2+1$.
3. Запишите в десятичной системе счисления числа: 21_3, 133_5, 201_9, 1011_2.
4. Запишите в двоичной системе счисления числа: 27, 125, 306.
5. Выполните действия над числами:
   а) $432_5 + 114_5$; б) $4412_5 – 314_5$; в) $2141_5 \cdot 24_5$; г) $2134_5 : 12_5$.
6. Выполните действия в троичной системе счисления:
   а) $21_3\cdot12_3 + 11_3$; б) $504_8 + 210_5 – 11001_2$.

II. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть даны натуральные числа a и b. Говорят, что число a делится на число b, если существует такое натуральное число q, что a = b·q.

В этом случае число b называют делителем числа a, а число a – кратным числа b.

Например, 27 делится на 9, так как существует такое $q = 3$, что $27 = 9\cdot3$. Можно сказать иначе: 9 – это делитель числа 27, а 27 есть кратное числа 9.

В том случае, когда a делится на b, пишут $a\,\vdots\,b$. Эту запись часто читают и так: «a кратно b».

Из определения отношения делимости и равенства $a = 1\cdot a$, справедливого для любого натурального числа a, вытекает, что 1 является делителем любого натурального числа.

Отношение делимости на множестве **N** обладает рядом свойств, в частности, оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Задача 16. Пользуясь определением отношения делимости, доказать, что если $a\,\vdots\,b$ и $b\,\vdots\,c$, то $a\,\vdots\,c$.

Решение. Так как $a\,\vdots\,b$, то существует такое натуральное число q, что $a = b \cdot q$, а так как $b \vdots c$, то существует такое натуральное число p, что $b = c \cdot p$. Но тогда имеем: $a = b \cdot q = (c \cdot p) \cdot q = c \cdot (p \cdot q)$. Число $p \cdot q$ – натуральное. Значит, по определению отношения делимости, $a \vdots c$.

Задача 17. Известно, что при делении на 3 числа a и b дают в остатке соответственно 1 и 2. Доказать, что сумма чисел a и b делится на 3.

Решение. Данные числа a и b имеют вид: $a = 3q + 1$, $b = 3p + 2$. Найдем их сумму: $a + b = (3q + 1) + (3p + 2) = 3q + 3p + 3 = 3 \cdot (q + p + 1)$. Так как $q + p + 1$ есть натуральное число, то сумма $a+b$ оказалась представленной в виде произведения числа 3 и некоторого натурального числа. Отсюда, согласно определению отношения делимости, сумма данных чисел a и b делится на 3.

Задача 18. Известно, что число 24 – делитель числа 96, а число 96 – делитель числа 672. Докажите, что число 24 – делитель числа 672, не выполняя деления.

Решение. Так как $672 \vdots 96$ и $96 \vdots 24$, то по свойству транзитивности $672 \vdots 24$, т.е. число 24 является делителем числа 672.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Известно, что при делении на 5 числа a и b дают в остатке соответственно 2 и 3. Доказать, что сумма чисел a и b делится на 5.
2. Известно, что число 37 – делитель числа 148, а число 148 – делитель числа 592. Докажите, что число 37, делитель числа 592, не выполняя деления.
3. Постройте граф отношения «быть делителем данного числа», заданного на множестве X = {2, 6, 12, 18, 24}. Как отражены на этом графе свойства данного отношения?
4. Докажите, что: а) сумма двух четных чисел есть число четное; б) сумма двух нечетных чисел есть число четное; в) сумма четного числа и нечетного есть число нечетное.

2. ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится на натуральное число b, то их сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ делится на это число.

Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится.

Если числа a_1 и a_2 делятся на b и $a_1 \geq a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на b.

Если число a делится на b, то произведение вида $a \cdot x$, где $x \in \mathrm{N}$, делится на b.

Если в произведении $a \cdot b$ множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то $a \cdot b$ делится на $m \cdot n$.

Если произведение $a \cdot c$ делится на произведение $b \cdot c$, причем c – натуральное число, то и a делится на b.

Задача 19. Не производя вычислений, установите, делятся ли на 4 выражения: а) 132 + 360 + 536; б) 540 – 332; в) $2512 \cdot 127$.

Решение. а) так как на 4 делится каждое слагаемое, то сумма

132 + 360 + 536 делится на 4; б) так как уменьшаемое 540 делится на 4 и вычитаемое 332 делится на 4, то и разность 540 – 332 делится на 4; в) так как число 2512 делится на 4, то и произведение $2512 \cdot 127$ делится на 4.

Задача 20. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел n и $n + 1$ делится на 2.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n \cdot (n + 1)$ делится на 2, надо рассмотреть две возможности:

1) n делится на 2, т.е. $n = 2k$. Тогда произведение $n \cdot (n + 1)$ будет иметь вид: $2k \cdot (2k + 1)$. Это произведение делится на 2, так как первый множитель в нем делится на 2;

2) n не делится на 2, т.е. $n = 2k + 1$. Тогда произведение $n \cdot (n + 1)$ будет иметь вид: $(2k + 1) \cdot (2k + 2)$. Это произведение делится на 2, так как второй множитель делится на 2.

Задача 21. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел $n, n + 1, n + 2$ делится на 3.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ делится на 3, надо рассмотреть три возможности:

1) n делится на 3, т.е. $n = 3k$. Тогда $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ будет иметь вид: $3k \cdot (3k + 1) \cdot (3k + 2)$. Это произведение делится на 3, так как первый множитель в нем делится на 3;

2) n при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. $n = 3k + 1$. Тогда произведение $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ будет иметь вид: $(3k + 1) \cdot (3k + 2) \cdot (3k + 3)$. Это произведение делится на 3, т.к. третий множитель делится на 3;

3) n при делении на 3 дает в остатке 2, т.е. $n = 3k + 2$. Тогда произведение $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ будет иметь вид: $(3k + 2) \cdot (3k + 3) \cdot (3k + 4)$. Это произведение делится на 3, т.к. второй множитель в нем делится на 3.

На основании задач 20 и 21 можно сформулировать утверждение, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

Задача 22. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел $n, n + 1, n + 2, n + 3$ делится на 4.

Решение. Чтобы показать, что произведение $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ делится на 4 надо рассмотреть четыре возможности:

1) n делится на 4, т.е. $n = 4k$. Тогда $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ будет иметь вид: $4k \cdot (4k + 1) \cdot (4k + 2) \cdot (4k + 3)$. Это произведение делится на 4, так как первый множитель в нем делится на 4;

2) n при делении на 4 дает в остатке 1, т.е. $n = 4k + 1$. Тогда $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ будет иметь вид: $(4k + 1) \cdot (4k + 2) \cdot (4k + 3) \cdot (4k + 4)$. Это произведение делится на 4, так как последний множитель делится на 4;

3) n при делении на 4 дает в остатке 2, т.е. $n = 4k + 2$. Тогда $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ будет иметь вид: $(4k + 2) \cdot (4k + 3) \cdot (4 k+ 4) \cdot (4k + 5)$. Это произведение делится на 4, так как третий множитель делится на 4;

4) n при делении на 4 дает в остатке 3, т.е. $n= 4k + 3$. Тогда

$n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)$ будет иметь вид: $(4k + 3)\cdot(4k + 4)\cdot(4k + 5)\cdot(4k + 6)$. Это произведение делится на 4, так как второй множитель делится на 4.

Поскольку произведение $n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)\cdot(n + 3)$ содержит произведение двух, трех последовательных натуральных чисел, то оно делится на 2 и на 3.

Задача 23. Доказать, что $(2n-1)^3-(2n-1)\vdots 24$ при любом натуральном значении n.

Решение. Преобразуем данное выражение: $(2n - 1)^3 - (2n - 1)=$ $= (2n - 1)\cdot(4n^2 - 4n + 1 - 1) = 4n\cdot(n - 1)\cdot(2n - 1)$. Это произведение делится на 4. Кроме того, произведение двух последовательных натуральных чисел $n\cdot(n - 1)$ делится на 2. Таким образом, произведение $4n\cdot(n - 1)\cdot(2n - 1)$ делится на 8. Осталось показать, что это произведение делится на 3. Для этого рассмотрим три возможности:

1) n делится на 3, т.е. $n = 3k$. Тогда произведение $4n\cdot(n - 1)\cdot(2n - 1)$ будет иметь вид: $4\cdot 3k\cdot(3k - 1)\cdot(6k - 1)$. Это произведение делится на 3;

2) n при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. $n = 3k + 1$. Тогда произведение $4n\cdot(n - 1)\cdot(2n - 1)$ будет иметь вид: $4\cdot(3k + 1)\cdot 3k\cdot(6k + 1)$. Это произведение делится на 3;

3) n при делении на 3 дает в остатке 2, т.е. $n = 3k + 2$. Тогда произведение $4n\cdot(n - 1)\cdot(2n - 1)$ будет иметь вид: $4\cdot(3k + 2)\cdot(3k + 2 - 1)\cdot\ (6k + 4 - 1)= 4\cdot(3k + 2)\cdot(3k +1)\cdot(6k+3)$. Это произведение делится на 3, т.к. последний множитель в нем делится на 3.

Так как 8 и 3 – взаимно простые числа, то $4n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)\vdots(8\cdot 3)$, т.е. на 24, что и требовалось доказать.

Задача 24. Доказать, что разность любого трехзначного числа и трехзначного, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке делится на 9.

Решение. Представим любое трехзначное число в виде $\overline{abc}=100a+10b+c$. Нам надо доказать, что $(\overline{abc}-\overline{cba})\vdots 9$. Преобразуем выражение $\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=100a+10b+c-$ $-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c)$. Это произведение делится на 9, т.к. первый множитель делится на 9.

Задача 25. Доказать, что четырехзначное число вида $\overline{7aa7}$ делится на 11.

Решение. Представим данное число в виде $\overline{7aa7}=7\cdot 1000+100a+10a+7=7007a+110a$. Эта сумма делится на 11, т.к. $7007\vdots 11$ и $110a\vdots 11$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.
2. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится на 6.
3. Доказать, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ делится на 24.
4. Доказать, что разность любого четырехзначного числа и четырехзначного чис-

ла, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.
5. Доказать, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

3. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Признаком делимости на число b называется правило, позволяющее по записи числа a узнать, делится ли оно на b, не выполняя непосредственно деления числа a на b.

Признак делимости на 2. Для того чтобы число X делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Признак делимости на 5. Для того чтобы число X делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Признак делимости на 4. Для того чтобы число X делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа X.

Признак делимости на 9. Для того чтобы число X делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Признак делимости на 3. Для того чтобы число X делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

Признак делимости на 25. Для того чтобы число X делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась на 00, 25, 50, 75.

Признак делимости Паскаля.

Число $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (1) делится на число b тогда и только тогда, когда на b делится сумма $a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – остатки от деления на b разрядных единиц $10, 10^2, \ldots, 10^n$.

Доказательство. Разделим на b каждую из разрядных единиц числа x, получим: $10 = bq_1 + r_1$, $10^2 = bq_2 + r_2$, … , $10^{n-1} = bq_{n-1} + r_{n-1}$, $10^n = bq_n + r_n$, где $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ – частные, а $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ – остатки.

Подставим в равенство (1) вместо разрядных единиц соответствующие выражения и, используя свойства сложения и умножения, выполним преобразования: $x = a_n \cdot (b \cdot q_n + r_n) + a_{n-1} \cdot (b \cdot q_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + a_1 \cdot (b \cdot q_1 + r_1) + a_0 = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + (a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0)$. Если сумму $a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0$ обозначить буквой s, то будем иметь: $x = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + s$. Разделим s на b: $s=bq + r$, где $0 \le r < b$. Тогда $x = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + b \cdot q + r = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1 + q) \cdot b + r$. Короче: $x=b \cdot Q+r$, где

$Q = a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1 + q$ и $0 \le r < b$. Равенство $x = b \cdot Q + r$ означает, что r является остатком при делении x на b, причем r – число единственное согласно теореме о единственности частного и остатка при делении натуральных чисел. Таким образом, установлено, что при делении натурального числа $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ на натуральное число b получается такой же остаток r, как и при делении на число b суммы s. Теорема доказана.

Используя признак делимости Паскаля, можно доказать следующий признак делимости чисел на 11: для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Задача 26. Доказать, что число 540309 делится на 11, не выполняя деления.

Решение. Найдем разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах.

$(4+3+9)-(5+0+0)=11$. Т.к. $11 \vdots 11$, то число $540309 \vdots 11$.

Задача 27. Доказать признак делимости на 5.

Решение. Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е. $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где коэффициенты a_n, a_{n-1}, …, a_1 принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a_n \neq 0$ и a_0 принимает значения 0, 5. Докажем, что тогда $x \vdots 5$.

Так как $10 \vdots 5$, то $10^2 \vdots 5$, $10^3 \vdots 5$, … , $10^3 \vdots 5$ и, значит

$$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10) \vdots 5.$$

По условию a_0 тоже делится на 5, и поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 5. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, число $x \vdots 5$.

Докажем обратное: если число x делится на 5, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 5.

Запишем равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ в таком виде: $a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10)$.

Но тогда, по теореме о делимости разности, $a_0 \vdots 5$, поскольку $x \vdots 5$ и $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10) \vdots 5$. Чтобы однозначное число a_0 делилось на 5, оно должно принимать значения 0, 5.

Задача 28. Доказать признак делимости на 3.

Решение. Докажем сначала, что числа вида $10^n - 1$ делятся на 3. Действительно, $10^n - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 =$ $= (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 10) - 1 = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на 3, значит, и число $10^n - 1$ делится на 3.

Пусть число $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ и $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \vdots 3$. Докажем, что тогда $x \vdots 3$.

Преобразуем сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$, прибавив и вычтя из нее выражение $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ и записав результат в таком виде: $x = (a_n \cdot 10^n - a_n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}) + ... + (a_1 \cdot 10 - a_1) + (a_0 - a_0) + + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + ... + a_1 \cdot (10 - 1) + + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0)$.

В последней сумме каждое слагаемое делится на 3:

$a_n \cdot (10^n - 1) \vdots 3$, так как $(10^n - 1) \vdots 3$,

$a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) \vdots 3$, так как $(10^{n-1} - 1) \vdots 3$ и т.д.,

$a_1 \cdot (10 - 1) \vdots 3$, так как $(10 - 1) \vdots 3$,

$(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \vdots 3$ по условию.

Следовательно, $x \vdots 3$.

Докажем обратное: т.е. если $x \vdots 3$, то сумма цифр его десятичной записи делится на 3.

Равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ запишем в таком виде: $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = x - (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + ... + a_1 \cdot (10 - 1))$. Так как в правой части этого равенства и уменьшаемое, и вычитаемое кратны 3, то по теореме о делимости разности $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) \vdots 3$, т.е. сумма цифр десятичной записи числа *x* делится на 3, что и требовалось доказать.

Задача 29. Не находя суммы чисел, установить, делится ли она на 3: 222111+25308+28056+13722.

Решение. Найдем сумму цифр каждого слагаемого: 2 + 2 + 2 + 1 + + 1 + 1 = 9; 2 + 5 + 3 + 0 + 8 = 18; 2 + 8 + 0 + 5 + 6 = 21; 1 +3 + 7 + 2 + 2 = 15. Так как $9 \vdots 3$, то $222111 \vdots 3$; $18 \vdots 3$, то $25308 \vdots 3$; $21 \vdots 3$, то $28056 \vdots 3$; $15 \vdots 3$, то $13722 \vdots 3$. Тогда по теореме о делимости суммы $(222111 + 25308 + 28056 + 13722) \vdots 3$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите признак делимости на 25.
2. Выпишите из ряда чисел 132, 1050, 1114, 364, 1200 те, которые:
   а) делятся на 2; б) делятся на 4;
   в) делятся на 2 и не делятся на 4; г) делятся на 2 и на 4.
3. Выпишите из ряда чисел 72, 312, 522, 483, 1197 те, которые:
   а) делятся на 3; в) делятся на 3 и не делятся на 9;
   б) делятся на 9; г) делятся на 3 и на 9.
4. Не находя суммы чисел, установите, делится ли она 4:
   а) 284+1140+113; в) 284+1441+113;
   б) 284+1140+792224; г) 284+1141+113+164.
5. Не находя разности чисел, установите, делится ли она на 9:
   а) 360-144; б) 946-540; в) 30240-97.

6. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Число 1 не является ни простым ни составным числом в связи с тем, что оно имеет только один делитель.

Простые числа играют большую роль в математике – по существу они являются «кирпичиками», из которых строятся составные числа. Это утверждается в теореме, называемой основной теоремой арифметики натуральных чисел: ***любое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.***

Например, запись $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$ есть представление числа 330 в виде произведения простых множителей или разложение его на простые множители.

Два разложения числа на простые множители считают одинаковыми, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей. Поэтому представление числа 330 в виде произведения $2\cdot3\cdot5\cdot11$ или произведения $3\cdot5\cdot11\cdot2$ есть, по существу, одно и то же разложение числа 330 на простые множители.

Раскладывая числа на простые множители, используют признаки делимости на 2, 3, 5 и др., а повторяющиеся простые множители представляют в виде степени. Например, $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5=2^4\cdot3\cdot5$. Такое разложение числа на простые множители называют каноническим.

Задача 30. Разложить число 180 на простые множители.

Решение. Число 180 делится на 2. Значит, 2 есть один из простых множителей в разложении числа 180. Разделим 180 на 2. Число 2 запишем справа от знака равенства, а частное 90 – под числом 180. Число 90 делим на простое число 2, получаем 45. Число 45 на простое число 3, получаем 15. Делим 15 на 3, получаем 5. Число 5 – простое, при делении его на 5 получаем 1. Разложение на множители закончено.

```
180 =2 ·2 ·3 ·3 ·5
 90
 45
 15
  5
  1
```

Таким образом, $180=2^2\cdot3^2\cdot5$.

В связи с возможностью представлять любое составное число в виде произведения простых множителей возникает необходимость определять, является данное число простым или составным. Эту задачу умели решать еще древнегреческие математики, которым были известны многие свойства простых чисел. Так, Эратосфеном (III в. до н.э.) был придуман способ получения простых чисел, не превышающих натурального числа *a.* Воспользуемся им для поиска всех простых чисел от 1 до 50.

Выпишем все натуральные числа от 1 до 50 и зачеркнем число 1 – оно не является простым. Число 2 – простое, обведем его кружком. После этого зачеркиваем каждое второе число, стоящее после 2, т.е. числа 4, 6, 8,...

Первое незачеркнутое число 3 является простым, обведем его кружком. И вычеркнем каждое третье число, стоящее после 3, т.е. числа 9, 15,... (числа 6, 12 и др. зачеркнуты раньше).

Первое незачеркнутое число 5 является простым, его также обведем кружком. Зачеркнем каждое пятое число после 5 и т.д.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Те числа, которые останутся после четырех вычеркиваний (исключая числа 2, 3, 5 и 7), не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7. В арифметике доказано, что если натуральное число *a,* большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадрат которых не превосходит *a,* то *a* число простое. Поскольку $7^2 = 49$, а $49 < 50$, то все оставшиеся числа – простые.

Итак, простыми числами, не превосходящими 50, являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Описанный способ получения простых чисел называется решетом Эратосфена, так как позволяет отсеивать одно за другим составные числа.

С помощью метода, предложенного Эратосфеном, можно отыскивать все простые числа, не превосходящие заданного числа *a.* Но он не дает ответа на вопрос, конечно или нет множество простых чисел, – ведь могло бы оказаться, что все числа, начиная с некоторого, – составные и множество простых чисел конечно. Решением этой проблемы занимался другой греческий математик – Евклид. Он доказал, что множество простых чисел бесконечно.

Задача 31. Методом решета Эрастофена найти все простые числа, заключенные между числами 51 и 149.

Решение. Выпишем все натуральные числа от 51 до 149.

~~51~~	~~52~~	$\boxed{53}$	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	$\boxed{59}$	~~60~~
$\boxed{61}$	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
$\boxed{71}$	~~72~~	$\boxed{73}$	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	$\boxed{79}$	~~80~~
~~81~~	~~82~~	$\boxed{83}$	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	$\boxed{89}$	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	$\boxed{97}$	~~98~~	~~99~~	~~100~~
$\boxed{101}$	~~102~~	$\boxed{103}$	~~104~~	~~105~~	~~106~~	$\boxed{107}$	~~108~~	$\boxed{109}$	~~110~~
~~111~~	~~112~~	$\boxed{113}$	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	$\boxed{127}$	~~128~~	~~129~~	~~130~~
$\boxed{131}$	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	$\boxed{137}$	~~138~~	$\boxed{139}$	~~140~~
~~141~~	~~142~~	$\boxed{143}$	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	$\boxed{149}$	

Найдем в этом ряду первое слева число, которое делится на простое число, и зачеркнем его. Это число 52. После этого зачеркнем каждое второе число, стоящее после 52, т.е. 54, 56, 58, … Далее найдем первое слева число, которое делится на простое число 3, и зачеркнем его. Это число 51. После этого зачеркнем каждое третье число, стоящее после 51, т.е. 54, 57,… Затем проделаем аналогичные действия с простыми числами 5, 7 и 11. Простое число 13 брать не надо т.к. $13^2=169>149$. Оставшиеся незачеркнутые числа обведем и выпишем: 53, 59, 61, 71, 73, 79, 89, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 143, 149 – простые числа.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Из множества 11, 17, 26, 29, 51, 67 выпишите простые числа, а составные разложите на простые множители.
2. Докажите, что числа 819 и 221 являются простыми числами.
3. Разложите на простые множители числа 168, 588, 972, 2526, 3780.
4. Методом решета Эрастофена найти все простые числа, заключенные между числами 170 и 269.

5. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ И НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется *наименьшим общим кратным этих чисел*.

Наименьшее общее кратное чисел a и b условимся обозначать

К(a, b).

Например, два числа 12 и 18 общими кратными являются: 36, 72, 108, 144, 180 и т.д. Число 36 – наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать: К(12, 18) = 36.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из данных чисел, т.е. если $a > b$, то К(a, b) $\geq a$.

3. Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Общим делителем натуральных чисел a и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.

Наибольшее число из всех общих делителей чисел a и b называется наибольшим общим делителем данных чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b условимся обозначать D(a, b).

Например, для чисел 12 и 18 общими делителями являются числа: 1, 2, 3, 6. Число 6 – наибольший общий делитель чисел 12 и 18. Можно записать: D(12, 18) = 6.

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чисел a и b. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то D(a, b) = 1, а числа a и b называются *взаимно простыми*.

Например, числа 14 и 15 – взаимно простые, так как D(14, 15) = 1.

Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утверждения:

1. Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит меньшего из данных чисел, т.е. если $a< b$, то D (a, b) $\leq a$.

3. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

Наибольшее общее кратное чисел a и b и их наибольший общий делитель взаимосвязаны: произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел a и b равно произведению этих чисел, т.е. К(a, b)·D(a, b) = $a \cdot b$.

Из этого утверждения вытекают следствия:

а) Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел, т.е. D(a, b) = 1 => К(a, b) = $a \cdot b$;

Например, чтобы найти наименьшее общее кратное чисел 14 и 15, достаточно из перемножить, так как D(14, 15) = 1.

б) Для того чтобы натуральное число a делилось на произведение взаимно простых чисел m и n, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на m, и на n.

Это утверждение представляет собой признак делимости на числа, которые можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел.

в) Частные, получаемые при делении двух данных чисел на их наибольший общий делитель, являются взаимно простыми числами.

Этим свойством можно пользоваться при проверке правильности найденного наибольшего общего делителя данных чисел. Например, проверим, является ли число 12 наибольшим общим делителем чисел 24 и 36. Для этого, согласно последнему утверждению, разделим 24 и 36 на 12. Получим соответственно числа 2 и 3, которые являются взаимно простыми. Следовательно, D(24, 36)=12.

Задача 32. Сформулировать и доказать признак делимости на 6.

Решение. Для того чтобы натуральное число x делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Пусть число x делится на 6. Тогда из того, что $x \vdots 6$ и $6 \vdots 2$, следует, что $x \vdots 2$. А из того, что $x \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, следует что $x \vdots 3$. Мы доказали, что, для того чтобы число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Покажем достаточность этого условия. Так как $x \vdots 2$ и $x \vdots 3$, то x – общее кратное чисел 2 и 3. Любое общее кратное чисел делится на их наименьшее кратное, значит $x \vdots$ K(2;3).

Поскольку D(2, 3)=1, то K(2, 3)=2·3=6. Следовательно, $x \vdots 6$.

Задача 33. Сформулировать признаки делимости на 12, 15 и 60.

Решение. Для того чтобы натуральное число x делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.

Для того чтобы натуральное число x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5.

Для того чтобы натуральное число x делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, на 3 и на 5.

Задача 34. Найти числа a и b, если K(a, b)=75, $a \cdot b$=375.

Решение. Используя формулу K(a,b)·D(a,b)=$a \cdot b$, находим наибольший общий делитель искомых чисел a и b:

$$\mathrm{D}(a, b) = \frac{a \cdot b}{K(a,b)} = \frac{375}{75} = 5.$$

Тогда искомые числа можно представить в виде $a = 5p$, $b = 5q$, где p и q – взаимно простые числа. Подставим выражения $5p$ и $5q$ в равенство $a \cdot b$=275. Получим $5p \cdot 5q$=375 или $p \cdot q$=15. Полученное уравнение с двумя переменными решаем подбором: находим пары взаимно простых чисел, произведение которых равно 15. Таких пар две: (3, 5) и (1, 15). Следовательно, искомые числа a и b таковы: 15 и 25 или 5 и 75.

Задача 35. Найти числа a и b, если известно, что D(a, b) = 7 и $a \cdot b$= 1470.

Решение. Так как D(a, b) = 7, то искомые числа можно представить в виде $a = 7p$, $b = 7q$, где p и q – взаимно простые числа. Подставим выражения $5p$ и $5q$ в равенство $a \cdot b = 1470$. Тогда $7p \cdot 7q = 1470$ или $p \cdot q = 30$. Полученное уравнение с двумя переменными решаем подбором: находим пары взаимно простых чисел, произведение которых равно 30. Таких пар четыре: (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6). Следовательно, искомые числа a и b таковы: 7 и 210, 14 и 105, 21 и 70, 35 и 42.

Задача 36. Найти числа a и b, если известно, что D(a, b) = 3 и a:b = 17:14.

Решение. Так как a:b = 17:14, то $a = 17p$ и $b = 14p$, где p – наибольший общий делитель чисел a и b. Следовательно, $a = 17 \cdot 3 = 51$, $b = 14 \cdot 3 = 42$.

Задача 37. Найти числа a и b, если известно, что K(a, b) = 180, a:b = 4:5.

Решение. Так как a: b=4: 5, то a=4p и b=5p, где p – наибольший общий делитель чисел a и b. Тогда $p \cdot 180 = 4p \cdot 5p$. Откуда p=9. Следовательно, a=36 и b=45.

Задача 38. Найти числа a и b, если известно, что D(a,b)=5, K(a,b)=105.

Решение. Так как D(a, b) · K(a, b) = $a \cdot b$, то $a \cdot b = 5 \cdot 105 = 525$. Кроме того, искомые числа можно представить в виде $a = 5p$ и $b = 5q$, где p и q – взаимно простые числа. Подставим выражения $5p$ и $5q$ в равенство $a \cdot b = 525$. Тогда $5p \cdot 5q$=525 или $p \cdot q$=21. Находим пары взаимно простых чисел, произведение которых равно 21. Таких пар две: (1, 21) и (3, 7). Следовательно, искомые числа a и b таковы: 5 и 105, 15 и 35.

Задача 39. Докажите, что число $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 6 при любом натуральном n.

Решение. Число 6 составное, его можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел: $6 = 2 \cdot 3$. Если мы докажем, что данное число делится на 2 и на 3, то на основании признака делимости на составное число можно будет заключить, что оно делится на 6.

Чтобы доказать, что число $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 2, надо рассмотреть две возможности:

1) n делится на 2, т.е. $n = 2k$. Тогда произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ будет иметь вид: $2k(4k + 1)(14k + 1)$. Это произведение делится на 2, т.к. первый множитель делится на 2;

2) n не делится на 2, т.е. $n = 2k + 1$. Тогда произведение $n (2n + 1)(7n + 1)$ будет иметь вид: $(2k + 1)(4k + 3)(14k + 8)$. Это произведение делится на 2, т.к. последний множитель делится на 2.

Чтобы доказать, что произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 3, надо рассмотреть три возможности:

1) n делится на 3, т.е. $n = 3k$. Тогда произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ будет иметь вид: $3k(6k + 1)(21k + 1)$. Это произведение делится на 3, т.к. первый множитель делится на 3;

2) n при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. $n = 3k + 1$. Тогда произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ будет иметь вид: $(3k + 1)(6k + 3)(21k + 8)$. Это произведение делится на 3, т.к. второй множитель делится на 3;

3) n при делении на 3 дает в остатке 2, т.е. $n = 3k + 2$. Тогда произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ будет иметь вид: $(3k + 2)(6k + 5)(21k + 15)$. Это произведение делится на 3, т.к. последний множитель делится на 3.

Итак, доказано, что произведение $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 2 и на 3. Значит, оно делится на 6.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Даны два числа: 50 и 75. Запишите множество:
   а) делителей числа 50; б) делителей числа 75; в) общих делителей данных чисел. Каков наибольший общий делитель чисел 50 и 75?
2. Является ли число 375 общим кратным чисел: а) 125 и 75; б) 85 и 15?
3. Найти числа a и b, если известно, что $K(a, b) = 105$, $a \cdot b = 525$.
4. Найти числа a и b, если известно, что $D(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.
5. Найти числа a и b, если известно, что $D(a, b) = 5$, $a:b = 13:8$.
6. Найти числа a и b, если известно, что $K(a, b) = 224$, $a:b = 7:8$.
7. Найти числа a и b, если известно, что $D(a, b) = 3$, $K(a; b) = 915$.
8. Докажите признак делимости на 15.
9. Из множества чисел 1032, 2964, 5604, 8910, 7008 выпишите те, которые делятся на 12.
10. Сформулируйте признаки делимости на 18, 36, 45, 75.

6. СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ И НАИМЕНЬШЕГО ОБЩЕГО КРАТНОГО

Рассмотрим сначала способ, основанный на разложении данных чисел на простые множители.

Пусть даны два числа 3600 и 288. Представим их в каноническом виде: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Найдем наибольший общий делитель данных чисел. В его разложение должны войти все общие простые множители, которые содержатся в разложениях чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с наименьшим показателем, с каким он входит в оба разложения. Следовательно, $D(3600, 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

Вообще чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение общих для всех данных чисел простых множителей, взяв каждый с наименьшим показателем, из разложения данных чисел;

3) находят значение этого произведения – оно и будет наи-

большим общим делителем данных чисел.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 3600 и 288. В его разложение должны войти все простые множители, которые содержаться хотя бы в одном из разложений чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с наибольшим показателем, с каким он входит в оба разложения. Следовательно, K(3600, 288) = $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ = 7200.

Вообще чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находят значения этого произведения, оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Задача 40. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 60, 252 и 264.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел, образуем произведение общих для всех данных разложений простых множителей, каждый с наименьшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел: D(60, 252, 264)=$2^2 \cdot 3$=12.

Наименьшее общее кратное чисел можно найти, образовав произведение всех простых множителей, находящихся в данных разложениях, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел, т. е. K(60;252;264)=$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$=27720.

Задача 41. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное 48 и 245.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде $48 = 2^4 \cdot 3$, $245 = 5 \cdot 7^2$.

Так как разложения данных чисел не содержат общих простых множителей, то D(48, 245) = 1, а K(48, 245) = 48·245 = 10760.

Отыскание наибольшего общего делителя двух натуральных чисел по их каноническому виду требует предварительного разложения чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа не велики, но для многозначных чисел найти их каноническое разложение бывает трудно. Существует способ отыскания наибольшего общего делителя, требующий лишь деления с остатком. Этот способ был предложен Евклидом, и его называют алгоритмом Евклида. Он основан на следующих трех утверждениях:

1. Если a делится на b, то D(a, b) = b.

2. Если $a = bq+r$ и $r<b$, то множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей b и r.

3. Если $a = bq+r$ и $r < b$, то D(a, b) = D(b, r).

Сформулируем теперь алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел a и b.

Пусть $a > b$.

Если a делится на b, то $D(a, b) = b$.

Если при делении a на b, получается остаток r, то $a = bq + r$ и $D(a, b) = D(b, r)$. Задача свелась к отысканию наибольшего общего делителя чисел b и r.

Если b делится на r, то $D(b, r) = r$ и тогда $D(a, b) = r$.

Если при делении b на r получается остаток r_1, то $b = rq_1 + r_1$ и поэтому $D(r, r_1) = D(b, r) = D(a, b)$.

Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов получим остаток, на который будет делится предыдущий остаток. Этот наименьший, отличный от нуля, остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

Задача 42. Найти при помощи алгоритма Евклида наибольший общий делитель чисел 2585 и 7975.

Решение. Процесс последовательного деления будем записывать так:

```
            _7975 |2585
             7755  3         7975=2585·3+220
        _2585 |220
         220   11            2585=220·11+165
         _385
          220
     _220 |165
      165  1                 220=165·1+55
 _165 |55
  165  3                     165=55·3+0
    0
```

В последнем случае остаток равен нулю. Значит, D(7575, 2585) = 55.

Задача 43. Мимо станции железной дороги проходят один за другим три поезда: в первом – 418 пассажиров, во втором – 494 и в третьем – 456. Сколько пассажирских вагонов в каждом поезде, если известно, что в каждом вагоне находится одинаковое количество пассажиров и их число наибольшее из всех возможных?

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо узнать, сколько пассажиров в каждом вагоне. Из условия задачи известно, что в каждом вагоне находится одинаковое количество пассажиров и их число наибольшее из возможных. Поэтому это число является наибольшим общим делителем чисел 494, 418, 456. Представим каждое число в каноническом виде: $494 = 2\cdot13\cdot19$, $418 = 2\cdot11\cdot19$, $456 = 2^3\cdot3\cdot19$. Поэтому $D(418, 494, 456) = 2\cdot19 = 38$. Значит, в каждом вагоне находится по 38 пассажиров. Тогда в первом поезде – 418 : 38 = 11 вагонов, во втором – 494 : 38 = 13 вагонов, в третьем – 456: 38 = 12 вагонов.

Задача 44. Каждой наименьшей длины должны быть доски, чтобы их можно было разрезать поперек на куски длиной по 40 см, по 60 см, по 45 см, и чтобы при этом не получалось обрезков?

Решение. Длина каждой доски есть наименьшее общее кратное чисел 40, 60 и 45, так как она должна быть наименьшей и «делится без остатка» на куски длиной по 40 см, по 60 см, по 45 см. Представим каждое из чисел в каноническом виде: $40 = 2^3 \cdot 5$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$. Поэтому $K(40, 60, 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Значит, длина каждой доски должна быть 360 сантиметров.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное данных чисел, представив их в каноническом виде:

а) 21120, 144, 1760; б) 1960, 588, 1430

2. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 3825 и 43560; б) 15283 и 10013; в) 21120 и 30720.

3. Верно ли что:

а) $D(448, 656) = 16$; б) $K(578, 8670) = 8670$?

4. Докажите, что числа 432 и 385 взаимно простые.

5. Туристы прошли в первый день 36 километров, во второй – 32 километра и в третий – 24 километра, причем каждый день они были в пути целое число часов. Сколько часов они были в пути, если их скорость выражалась целым числом километров в час, была постоянной и наибольшей из возможных?

6. На столе лежат книги, не более 100. Определить их число, если известно, что их можно связывать в пачки по 3 книги, по 4 книги и даже по 5 книг.

III. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Расширение множества N натуральных чисел происходит в такой последовательности: сначала строится множество Q_+ положительных рациональных чисел, затем показывается, как его можно расширить до множества R_+ положительных действительных чисел, и, наконец, описывается расширение множества R_+ до множества R всех действительных чисел.

1. ПОНЯТИЕ ДРОБИ

В общем виде понятие дроби определяют так.

Пусть даны отрезок x и единичный отрезок e, длина которого E. Если отрезок x состоит из m отрезков, равных n-ой части отрезка e, то длина отрезка x может быть представлена в виде $\frac{m}{n} \cdot E$*, где символ* $\frac{m}{n}$ *называют дробью (и читают «эм энных»).*

В записи дроби $\frac{m}{n}$ числа m и n – натуральные, m называется числителем, n – знаменателем дроби.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Вообще длина одного и того же отрезка x при заданном единичном отрезке e может выражаться различными дробями, причем, если длина выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{mk}{nk}$, где k – натуральное число.

Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $mq = np$.

Две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называются равными, если $mq = np$.

Если дроби равны, то пишут $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Задача 45. Установить, равны ли дроби: а) $\frac{17}{3}$ и $\frac{119}{21}$; б) $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$.

Решение. а) $\frac{17}{3} = \frac{119}{21}$, так как $17 \cdot 21 = 119 \cdot 3 = 357$;

б) $\frac{17}{19} \neq \frac{23}{27}$, так как $17 \cdot 27 = 459$, $19 \cdot 23 = 437$ и $459 \neq 437$.

Из определения равных дробей вытекает *основное свойство дроби.* Напомним его.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Сокращение дробей – это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся только на единицу, то дробь называют *несократимой.*

Задача 46. Установить, является ли несократимой дробь:

а) $\frac{15}{34}$; б) $\frac{24}{36}$.

Решение. а) $\frac{15}{34}$ – несократимая дробь, так как ее числитель и знаменатель делятся одновременно только на единицу, т.е. D(15; 34) = 1;

б) $\frac{24}{36}$ – сократимая дробь, так как ее числитель и знаменатель делятся одновременно на 12 = D(24; 36).

Приведение дроби к общему знаменателю – это замена данных дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели. Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем – их наименьшее кратное $K(n,q)$.

Задача 47. Привести дроби к наименьшему общему знаменателю.

Решение. Разложим числа 15 и 35 на простые множители: 15 = 3 · 5, 35 = 5 · 7. Тогда K(15; 35) = 3 · 5 · 7 = 105. Поскольку 105 = 15 · 7 = 35 · 3, то $\frac{18}{5}=\frac{8\cdot 7}{15\cdot 7}=\frac{56}{105}$, $\frac{4}{35}=\frac{4\cdot 3}{35\cdot 3}=\frac{12}{105}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Как установить, равны ли дроби: а) $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{72}{108}$?

2. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{102}$; б) $\frac{7}{16}$ и $\frac{5}{844}$; в) $\frac{15}{171}$ и $\frac{23}{270}$.

3. Найдите несократимую дробь, равную следующей:

а) $\frac{108}{144}$; б) $\frac{402}{455}$; в) $\frac{780}{2730}$; г) $\frac{45\cdot 56+45\cdot 14}{70\cdot 72}$; д) $\frac{38\cdot 53-38\cdot 25}{19\cdot 42}$.

2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Положительным рациональным числом называется класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись (представление) этого числа.

Например, о дроби $\frac{9}{10}$ мы должны говорить, что она является записью некоторого рационального числа. Однако часто для краткости говорят: $\frac{9}{10}$ – это рациональное число.

Множество всех положительных рациональных чисел принято обозначать символом $\mathbf{Q}_+$. Определим на этом множестве отношение равенства.

Если положительное рациональное число а представлено

дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – другой дробью $\frac{p}{q}$, то a=b тогда и только тогда, когда mq=np.

Из данного определения следует, что равные рациональные числа представляются равными дробями.

Задача 48. Рациональное число представлено дробью $\frac{15}{21}$. Может ли оно быть представлено дробью $\frac{105}{147}$?

Решение. Может, так как 15 · 147 = 21 · 105 = 2205, т.е. $\frac{15}{21} = \frac{105}{147}$.

Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{q}$, то их суммой называется число a + b, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$.

Таким образом, по определению, $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$.

В определении суммы рациональных чисел использованы их представления в виде дробей с одинаковыми знаменателями. Если же числа a и b представлены дробями с различными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применить указанное выше правило.

Сложение положительных рациональных чисел коммутативно и ассоциативно.

Задача 49. Доказать коммутативность сложения $a + b = b + a$.

Решение. Представим a и b дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$. Тогда сумма $a + b$ представляется дробью $\frac{m+p}{n}$, а сумма $b + a$ – дробью $\frac{p+m}{n}$. Так как m, p, n – натуральные числа, то $m + p = p + m$ и, следовательно, $a + b = b + a$.

Задача 50. Выполнить сложение: а) $\frac{7}{30} + \frac{29}{30}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$.

Решение. а) $\frac{7}{30} + \frac{29}{30} = \frac{7+29}{30} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} = \frac{15}{18} + \frac{14}{18} = \frac{15+14}{18} = \frac{29}{18}$.

Определение сложения положительных рациональных чисел дает возможность определить отношение «меньше» на множестве $\mathbf{Q}_{+}$.

Пусть a и b – положительные рациональные числа. Считают, что число b меньше числа a, если существует такое положительное рациональное число c, что a = b + c.

В этом же случае считают, что число a больше числа b. Пишут $b < a, a > b$.

Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ (т.е. дробями, имеющими одинаковые знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $m < p$.

Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (т.е. дробями, имеющими разные знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $mq < np$.

Задача 51. Сравнить числа: а) $\frac{5}{13}$ и $\frac{7}{13}$; б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$.

Решение. а) $\frac{5}{13} < \frac{7}{13}$, так как $5 < 7$; б) $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, так как $2 \cdot 5 > 3 \cdot 3$.

Вычитание положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная сложению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: $a - b = c$ тогда и только тогда, когда $a = b + c$.

Разность $a - b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $b < a$. Если разность $a - b$ существует, то она единственна.

Используя определение и условие существования разности, можно получить правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, где $m < p$: $\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$.

Задача 52. Найти разность чисел: а) $\frac{9}{14} - \frac{3}{14}$; б) $\frac{2}{3} - \frac{5}{8}$.

Решение. а) $\frac{9}{14} - \frac{3}{14} = \frac{9-3}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$; б) $\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{16-15}{24} = \frac{1}{24}$.

Если положительное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$***, а положительное рациональное число b – дробь*** $\frac{p}{q}$***, то их произведением называется число ab, которое представляется дробью*** $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$***.***

Таким образом, по определению, $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$.

Умножение положительных рациональных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

Задача 53. Найти произведение чисел: а) $\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{3}$.

Решение. а) $\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{14\cdot 3}{3\cdot 8}=\frac{7}{4}$; б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot 7\cdot 5}{5\cdot 2\cdot 3}=\frac{7}{2}$.

Задача 54. Найдите значение выражения $\frac{17}{25}\cdot\frac{5}{8}-\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{8}$.

Решение. $\frac{17}{25}\cdot\frac{5}{8}-\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{8}=\left(\frac{17}{25}-\frac{9}{25}\right)\cdot\frac{5}{8}=\frac{8}{25}\cdot\frac{5}{8}=\frac{8\cdot 5}{25\cdot 8}=\frac{1}{5}$.

Деление положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная умножению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $a = bc$.

Из этого определения и правила нахождения произведения положительных рациональных чисел можно получить правило деления положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}.$$

Задача 55. Найти значения выражений: а) $\frac{2}{5}:\frac{8}{25}$; б) $\frac{9}{2}\cdot\frac{17}{3}:\frac{27}{4}$.

Решение. а) $\frac{2}{5}:\frac{8}{25}=\frac{2\cdot 25}{5\cdot 8}=\frac{5}{4}$; б) $\frac{9}{2}\cdot\frac{17}{3}:\frac{27}{4}=\frac{9\cdot 17\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 27}=\frac{34}{9}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислите значения следующих выражений:

а) $\frac{7}{10}+\frac{2}{15}+\frac{11}{30}$; б) $\frac{31}{80}+\left(\frac{3}{16}+\frac{39}{80}\right)$; в) $\frac{17}{13}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{26}{51}$; г) $\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{13}$;

д) $\frac{73}{15}-\left(\frac{11}{15}+\frac{1}{5}\right)$; е) $\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}-\frac{19}{21}\cdot\frac{7}{38}$; ж) $\frac{3}{5}:\left(\frac{9}{10}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{9}\right)$.

2. Сравните числа:

а) $\frac{7}{15}$ и $\frac{11}{15}$; б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{8}{11}$; в) $\frac{9}{40}$ и $\frac{7}{30}$; г) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{36}$.

3. Решите задачу арифметическим способом.

Прямоугольник разделили на 8 равных частей. Сначала закрасили $\frac{1}{2}$ прямоугольника, потом $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{8}$. Весь ли прямоугольник закрасили?

4. Докажите ассоциативность умножения рациональных чисел.

3. ЗАПИСЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

В практической деятельности широко используют дроби, знаменатели которых являются степенями 10. Их называют *десятичными*.

Десятичной называется дробь вида $\frac{m}{10^n}$, где m и n – натуральные числа.

Десятичные дроби принято записывать без знаменателя. Например, дробь $\frac{367}{10^2}$ записывают 3,67, а дробь $\frac{7}{10^3}$ – в виде 0,007.

Как известно, сравнение десятичных дробей и арифметические действия над ними легко выполнять, если дроби имеют один и тот же знаменатель.

В основе приведения десятичных дробей к общему знаменателю лежит следующее утверждение: если к десятичной дроби $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной.

Это свойство позволяет приводить десятичные дроби к общему знаменателю следующим образом: если у одной дроби после запятой стоит n цифр, а у другой p цифр, причем $n < p$, то для приведения их к общему знаменателю достаточно к первой дроби приписать справа $p - n$ нулей. Тогда у обеих дробей после запятой будет стоять поровну цифр, а это значит, что они имеют один и тот же знаменатель.

Пользуясь этим правилом, легко выполнять сравнение десятичных дробей, так как оно сводится к сравнению натуральных чисел: чтобы сравнить две десятичные дроби, надо уравнять в них число десятичных знаков после запятой, отбросить запятые и сравнить получившиеся натуральные числа.

Задача 56. Сравнить числа 4,62517 и 4,623.

Решение. 4,62517 > 4,623, так как 4,623 = 4,62300, а 4,62517 > 4,62300, так как 462517 > 462300.

Как известно, для дробей, имеющих одинаковые знаменатели, сложение и вычитание сводится к соответствующим операциям над их числителями. Это позволяет свести сложение и вычитание десятичных дробей к действиям над натуральными числами.

Задача 57. Выполнить действия: а) 2,54 + 3,7126; б) 3,7126 – 2,54.

Решение. а) $2,54 + 3,7126 = 2,5400 + 3,7126 = \frac{25400}{10000} + \frac{37126}{10000} =$

$= \dfrac{625526}{10000} = 6{,}2526;$

б) $3{,}7126 - 2{,}54 = 3{,}7126 - 2{,}5400 = \dfrac{37126}{10000} - \dfrac{25400}{10000} = \dfrac{11726}{10000} =$ $1{,}1726$.

Умножение и деление десятичных дробей не требует приведения их к общему знаменателю, но они также сводятся к соответствующим действиям над натуральными числами.

Для того чтобы несократимая дробь $\dfrac{m}{n}$ была равна десятичной, необходимо и достаточно, чтобы в разложении ее знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.

Задача 58. Можно ли записать в виде десятичной дроби $\dfrac{23}{80}$ и $\dfrac{11}{15}$?

Решение. Дробь $\dfrac{23}{80}$ можно записать в виде десятичной: она несократима и $80 = 2^4 \cdot 5$.

Дробь $\dfrac{11}{15}$ несократима, но $15 = 3 \cdot 5$. Поскольку в разложение знаменателя этой дроби входит множитель, отличный от 2 и 5, то дробь $\dfrac{11}{15}$ нельзя записать в виде десятичной.

Любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной, приписав к ней справа последовательность нулей.

Бесконечные десятичные дроби, которые получаются при записи положительного рационального числа, обладают особенностью – они являются *периодическими*. Это значит, что, начиная с некоторой цифры, они образуются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Например, число $\dfrac{3}{11}$ выражается бесконечной десятичной дробью 0,272727…27…, а число $\dfrac{8}{55}$ – бесконечной десятичной дробью 0,1454545…45… Для краткости первую из дробей пишут в виде 0,(27), а вторую – в виде 0,1(45). В скобки заключают повторяющуюся группу цифр, которую называют периодом этой дроби. Отметим, что вместо 0,(27) можно было писать 0,2(72), но эта запись более длинная.

Любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью.

Задача 59. Представить число b в виде несократимых обыкновенных дробей: а) 0,072; б) 0,(27); в) 0,5(8).

Решение. а) $0{,}072 = \frac{72}{1000} = \frac{9}{125}$;

б) дробь 0,(27) – чисто периодическая дробь. Чтобы найти соответствующую ей обыкновенную дробь, надо в числителе записать период, а в знаменателе столько девяток, сколько цифр в периоде дроби:

$0{,}(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$;

в) дробь 0,5(8) – смешанная периодическая десятичная дробь. Чтобы найти соответствующую ей обыкновенную дробь, надо в числителе записать разность между числом, стоящим после запятой до начала второго периода и числом, стоящим до начала первого периода, а в знаменателе написать столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр до начала первого периода: $0{,}5(8) = \frac{58-5}{90} = \frac{53}{90}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите дроби $\frac{1234}{10}$, $\frac{6969}{10}$, $\frac{37}{10}$ в виде десятичных.
2. Запишите числа 7,11; 0,45; 13,745 в виде несократимых обыкновенных дробей.
3. Сформулируйте правила сложения и вычитания десятичных дробей; выполните действия:
а) 8,23 + 3,568; б) 7,395 – 6,27; в) 12,364 + 17,729; г) 15,36 – 9,68.
4. Сформулируйте правило умножения десятичных дробей; проиллюстрируйте его на примере умножения чисел 1,32 и 0,4.
5. Сформулируйте правило деления десятичных дробей; проиллюстрируйте его на примере деления числа 4,62 на 0,2.
6. Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей: а) $\frac{7}{352}$; б) $\frac{12}{56}$; в) $\frac{21}{75}$; г) $\frac{12}{96}$?
7. Следующие обыкновенные дроби запишите в виде десятичных:
а) $\frac{4}{35}$; б) $\frac{7}{24}$; в) $\frac{123}{82}$; г) $\frac{48}{15}$.
8. Следующие числа представьте в виде несократимых обыкновенных дробей:
а) 0,03; б) 10,0018; в) 0,(23); г) 2,14(3); д) 6,041(27).

4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

При изменении длин отрезков могут получаться бесконечные десятичные дроби. Но всегда ли эти дроби периодические? Ответ на этот вопрос отрицателен: существуют отрезки, длины которых нельзя выразить бесконечной периодической дробью (т.е. положительным рациональным числом) при выбранной единице длины. Это было важнейшим открытием в математике, из которого следовало, что рациональных чисел недостаточно для измерения длин отрезков.

Если единицей длины является длина стороны квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом.

Из данного утверждения следует, что существуют отрезки, длины которых нельзя выразить положительным числом (при выбранной единице длины), или, другими словами, записать в виде бесконечной периодической дроби. И значит, получаемые при измерении длин отрезков бесконечные десятичные дроби могут быть непериодическими.

Считают, что бесконечные непериодические десятичные дроби являются записью новых чисел – *положительных иррациональных чисел.* Так как часто понятия числа и его записи отождествляют, то говорят, что бесконечные периодические десятичные дроби – это и есть положительные иррациональные числа.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают символом J_+.

Объединение двух множеств чисел: положительных рациональных и положительных иррациональных называют множеством положительных действительных чисел и обозначают символом R_+.

Любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью – периодической (если оно является рациональным) либо непериодической (если оно является иррациональным).

Действия над положительными действительными числами сводятся к действиям над положительными рациональными числами. В связи с этим для каждого положительного действительного числа вводят его приближенные значения по недостатку и по избытку.

Пусть даны два положительных действительных числа a и b, a_n и b_n – соответственно их приближения по недостатку, a'_n и b'_n – их приближения по избытку.

Суммой действительных чисел a и b называется такое действительное число $a + b$, которое при любом натуральном n удовлетворяет неравенству $a_n + b_n \leq a + b < a'_n + b'_n$.

Произведением действительных чисел a и b называется такое действительное число $a \cdot b$, которое при любом натуральном n удовлетворяет неравенству $a_n \cdot b_n \leq a\,b < a'_n \cdot b'_n$.

Разностью положительных действительных чисел a и b называется такое действительное число c, что $a = b + c$.

Частным положительных действительных чисел a и b называется такое действительное число c, что $a = b \cdot c$.

Объединение множества положительных действительных чисел с множеством отрицательных действительных чисел и нулем есть множество R всех действительных чисел.

Сравнение действительных чисел и действия над ними выполняются по правилам, известным из школьного курса математики.

Задача 60. Найти три первых десятичных знака суммы 0,333… + 1,57079…

Решение. Возьмем десятичные приближения слагаемых с четырьмя десятичными знаками:

0,3333 < 0,3333… < 0,3334

1,5707 < 1,57079… < 1,5708.

Складываем: 1,9040 ≤ 0,333… + 1,57079… < 1,9042.

Следовательно, 0,333… + 1,57079…= 1,904…

Задача 61. Найти два первых десятичных знака произведения $a \cdot b$, если a = 1,703604… и b = 2,04537…

Решение. Берем десятичные приближения данных чисел с тремя десятичными знаками:

1,703 < a <1,704 и 2,045 < b < 2,046. По определению произведения действительных чисел имеем:

1,703 · 2,045 ≤ $a \cdot b$ < 1,704 · 2,046 или 3,483 ≤ ab < 3,486.

Таким образом, $a \cdot b$ = 3,48…

Упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите десятичные приближения иррационального числа π = 3,1415… по недостатку и по избытку с точностью до:

а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.

2. Найдите первые три десятичных знака суммы $a + b$, если:

а) a = 2,34871…, b = 5,63724…; б) $a = \frac{2}{3}$, $b = \pi$; в) $a = \sqrt{2}$; $b = \frac{5}{6}$; г) $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3}$.

3. Найдите два первых десятичных знака произведения $a \cdot b$, если:

а) a = 1,703504…, b = 2,04537...; б) $a = \frac{2}{3}$, $b = \sqrt{2}$; в) $a = \sqrt{2}$; $b = \frac{5}{6}$; г) $a = \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин, Н.Я. Математика / Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало, В.Б. Рождественская, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977.
2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
3. Лаврова, Н.Н. Задачник-практикум по математике / Н.Н. Лаврова. – М.: Просвещение, 1985.
4. Стойлова, Л.П. Основы начального курса математики / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988.
5. Стойлова, Л.П. Математика / Л.П. Стойлова. – М.: Academia, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ