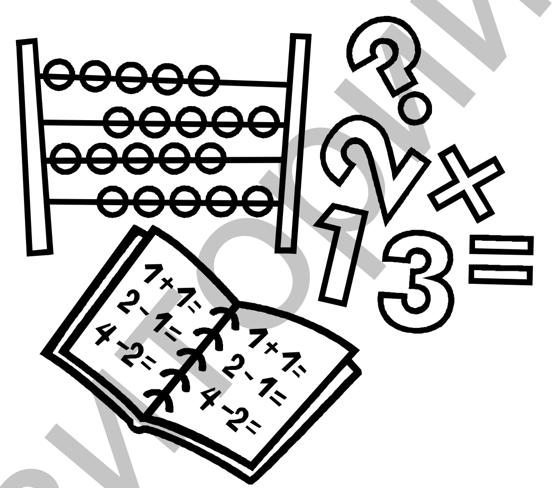
МАТЕМАТИКА:

различные подходы к построению целых неотрицательных чисел



Витебск 2007

МАТЕМАТИКА:
различные подходы к построению целых неотрицательных чисел

Учебно-методическое пособие

2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М34

Составители: доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук **А.В. Виноградова;** доцент кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук **В.В. Устименко**

Рецензент: доцент кафедры дошкольного и начального образования УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук З.К. Левчук

Данное учебно-методическое пособие написано в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. В настоящем издании кратко излагается необходимый теоретический материал, затем приводятся подробно разобранные примеры и, наконец, даются примерные задания контрольной работы для самостоятельного решения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, стержнем начального курса математики являются целые неотрицательные числа и действия над ними, величины и их измерение. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа и величины требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «множество», «отношение», «умозаключение» и др. Поэтому неслучайно изучение курса математики начинается с рассмотрения этих общих понятий.

Овладеть курсом математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемое пособие призвано оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В учебно-методическое пособие включены такие темы, как «Теоретико-множественный подход к понятию натурального числа», «Аксиоматика целых неотрицательных чисел», «Натуральное число как результат измерения величины», «Метод математической индукции», «Понятие величины и ее измерения» и пр.

Пособие содержит более 80 задач с решениями и обоснованиями по данным темам, примерные задания контрольных работ. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

Структура данного пособия такова: материал разбит на темы, темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему теоретического материала и задач – должно помочь студентам не только лучше овладеть необходимыми знаниями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность. Приведенные в конце пособия задания и тесты должны способствовать формированию и закреплению умений и навыков студентов по изученным темам, а также оказать помощь в подготовке к экзаменам и зачетам.

I. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, НУЛЯ И ОТНОШЕНИЯ «МЕНЬШЕ»

Отрезком $\boldsymbol{N_a}$ ***натурального ряда*** называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа *а*, т.е. $N_a = \{x | x \in N \text{ и } x \le a\}$. Например, N_7 – это множество натуральных чисел, не превосходящих 7, т.е. $N_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Множество *А* называется конечным, если оно равномощно некоторому отрезку $\boldsymbol{N_a}$ натурального ряда. Например, множество *А* вершин треугольника, множество *В* букв в слове «*мир*» – конечные множества, т.к. они равномощны отрезку $N_3 = \{1,2,3\}$, т.е. $A \sim B \sim N_3$.

Если непустое конечное множество *А* равномощно отрезку N_a, то натуральное число *а* называют ***числом элементов множества*** *А* и пишут *n(A) = a*. Например, если *А* – множество вершин треугольника, то *n(A)* = 3.

Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда, т.е. каждому конечному множеству *А* может быть поставлено в соответствие однозначно определенное число *а*, такое, что множество *А* взаимно однозначно отображается на отрезок N_a. Установление взаимно-однозначного соответствия между элементами непустого конечного множества *А* и отрезком натурального ряда называется ***счетом элементов множества А***. Так как любому непустому конечному множеству соответствует только одно натуральное число, то вся совокупность конечных множеств разбивается на классы равномощных множеств. В одном классе будут содержаться все одноэлементные множества, в другом – двухэлементные и т.д. И это число можно рассматривать как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Таким образом, с теоретико-множественной точки зрения, ***натуральное число*** – это общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Число 0 тоже имеет теоретико-множественное истолкование – оно ставится в соответствие пустому множеству: $n(\varnothing) = 0$.

Если *a = n(A), b = n(B)*, то ***число а меньше числа b*** тогда и только тогда, когда множество *А* равномощно собственному подмножеству множества *В*, т.е. $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B,\ B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing$ (рис. 1). Либо когда отрезок натурального ряда N_a является собственным подмножеством отрезка N_b, т.е. $N_a \subset N_b$.

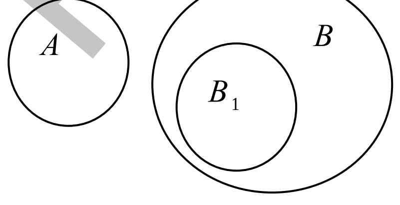


Рис. 1.

Числа a и b равны, если они определяются равномощными множествами: $a = k \Leftrightarrow A \sim B_1$, где $n(A) = a$, $n(B_1) = k$.

Например, 2 = 2, т.к. $n(A) = 2$, $n(B) = 2$, $A = \{a, b\}$, $B = \{z, x\}$, $A \sim B$.

Задача 1. Покажем, используя теоретико-множественную трактовку отношения «меньше» для натуральных чисел, что 2<5.

Решение. Возьмем множество A, содержащее 2 элемента, и множество B, содержащее 5 элементов, т.е. $n(A) = 2$, $n(B) = 5$. Например, $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e, f, r\}$. Из множества B можно выделить подмножество B_1, равномощное множеству A: например $B_1 = \{c, d\}$ и $A \sim B_1$. Согласно определению отношения «меньше», 2<5. Справедливость данного неравенства вытекает и из того, что $N_2 < N_5$, т.е. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

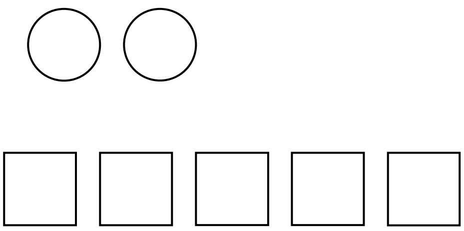


Рис. 2.

Данное неравенство можно рассмотреть на рис. 2. Пусть 2 – это число кружков, а 5 – число квадратов. Если наложить кружки на квадраты, то увидим, что часть квадратов осталась незакрытыми.

Значит, количество кружков меньше количества квадратов, т.е. 2<5.

Задача 2. Покажем, используя теоретико-множественную трактовку отношения «меньше» для натуральных чисел, что 0<3.

Решение. Возьмем пустое множество $A = \varnothing$, содержащее 0 элементов, и множество B, содержащее 3 элемента, т.е. $n(A) = 0$, $n(B) = 3$. Так как пустое множество является подмножеством любого множества, то можно говорить, что $A \subset B$. Значит, $n(A) < n(B)$, и 0<3.

2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ СУММЫ

Сложение целых неотрицательных чисел связано с объединением конечных непересекающихся множеств. Если $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то ***суммой целых неотрицательных чисел a и b*** называется число элементов в объединении множеств A и B, т.е. $a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B)$.

Действие, при помощи которого находят сумму, называют ***сложением***, а числа, которые складывают, называют слагаемыми.

Сложение обладает *коммутативностью* и *ассоциативностью* (переместительный и сочетательный законы).

Покажем ***коммутативность***. Для любых множеств A и B выполняется равенство $A \cup B = B \cup A$. Т.к. $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то $a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B) = n(B \cup A) = n(B) + n(A) = a + b$.

Аналогично можно показать ***ассоциативность*** сложения, которая вытекает из равенства $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Действительно, $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, то $(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = a + (b + c)$.

Задача 3. Используя определение суммы целых неотрицательных чисел, покажем, что 2 + 4 = 6.

Решение. Возьмем множество A, содержащее 2 элемента и множество B, содержащее 4 элемента, такие, что $n(A) = 2$, $n(B) = 4$, $A \cap B = \varnothing$. Например, $A = \{a, b\}$, $B = \{k, l, m, h\}$. Найдем объединение множеств A и B: $A \cup B = \{a, b, k, l, m, h\}$. Полученное множество содержит 6 элементов, т.е. $n(A \cup B)=6$. Согласно определению сложения, 2 + 4 = 6.

Задача 4. Выясним теоретико-множественный смысл равенства $a + 0 = a$. Если $a=n(A)$, $0= n(\varnothing)$, то $a + 0 = n(A)+ n(\varnothing)=n(A\cup \varnothing)=n(A)= a$.

Задача 5. Выясните, почему данная задача решается при помощи сложения и решите ее: Катя нашла 5 грибов, Даша нашла 3 гриба. Сколько грибов нашли девочки?

Решение. В задаче рассматриваются три множества: множество A грибов Кати, множество B – грибов Даши и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Пусть $n(A)=5$, $n(B)=3$, $A\cap B= \varnothing$. $A=\{a, s, d, f, g\}$, $B=\{z, x, c\}$. Тогда $A\cup B=\{a, s, d, f, g, z, x, c\}$, и $n(A\cup B)=8$. Согласно определению суммы в теоретико-множественном подходе, 5 + 3 = 8.

Ответ: девочки нашли 8 грибов.

Задача 6. Дадим теоретико-множественное истолкование суммы нескольких слагаемых, и, используя полученный вывод, найдем сумму 3 + 4 + 2 + 9.

Решение. Пусть сумма двух слагаемых определена и определена сумма k слагаемых. Тогда сумма, состоящая из $k+1$ слагаемого, т.е. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1}$ равна $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + a_{k+1}$. Значит, чтобы найти сумму 3 + 4 + 2 + 9, согласно этому определению, надо выполнить следующие преобразования: 3 + 4 + 2 + 9 = (3 + 4 + 2) + 9 = ((3 + 4) + 2) + 9 = (7 +2) + 9 = 9 +9 = 18.

Задача 7. Найдите значение выражения и объясните, какие законы сложения были при этом использованы: (16 + 9) + 21 + 14.

Решение. Используем ассоциативность, что позволяет нам опустить скобки: 16 + 9 + 21 + 14. Используя коммутативность, получим 16 + 14 + 9 + 21. Затем, используя снова ассоциативность, расставим скобки в нужном нам месте: (16 + 14) + (9 +21). Вычислим значения в скобках: 30 + 30. В итоге получим 60. Значит, значение выражения (16 + 9) + 21 + 14 равно 60.

Задача 8. Как изменится сумма, если: а) одно из слагаемых увеличить на 2; б) одно из слагаемых увеличить в 2 раза; в) каждое из двух слагаемых увеличить на 2; г) каждое из двух слагаемых увеличить в 2 раза. Вывод обоснуйте.

Решение. Пусть сумма двух слагаемых имеет вид $a + b$.

а) Если увеличить одно из слагаемых на 2, например, слагаемое a, то сумма примет вид $a + 2 + b = (a + b) + 2$, т.е. сумма увеличится на 2.

б) Если одно из слагаемых увеличить в 2 раза, например а, то сумма примет вид $2a + b = a + a + b = (a + b) + a$, т.е. увеличится на то слагаемое, которое увеличивали.

в) Если каждое из двух слагаемых увеличить на 2, то сумма примет вид $a + 2 + b + 2 = (a + b) + 4$, т.е. сумма увеличится на 4.

г) Если каждое из двух слагаемых увеличить в 2 раза, то сумма примет вид $2a + 2b = a + a + b + b = (a + b) + (a + b) = 2(a + b)$, т.е. увеличится в 2 раза.

3. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ РАЗНОСТИ

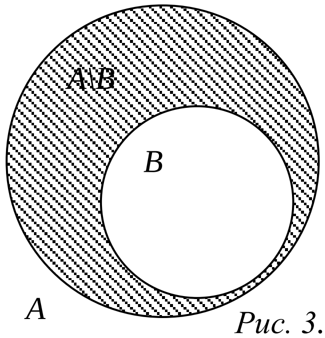


Рис. 3.

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что $n(A)=a$, $n(B)=b$, $B\subset A$, т.е. $a - b = n(A\backslash B)$. Это обуславливается тем, что $A=B\cup(A\backslash B)$, т.е. $n(A)=n(B) + n(A\backslash B)$.

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а также вычитание a из a. Так как $A\backslash\varnothing=A$, $A\backslash A=\varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

Разность $a - b$ целых неотрицательных чисел существует тогда и только тогда, когда $b \le a$.

Действие, при помощи которого находят разность $a - b$, называется *вычитанием*, число a – уменьшаемым, b – вычитаемым.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций различные правила.

Правило вычитания числа из суммы: чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых и к полученному результату прибавить другое слагаемое, т.е. при $a\ge c$ имеем, что $(a+b)-c=(a-c)+b$; при $b\ge c$ имеем, что $(a+b)-c=a+(b-c)$; при $a\ge c$ и $b\ge c$ можно использовать любую из данных формул.

Правило вычитания суммы из числа: чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим, т.е. при условии, что $a\ge b + c$, имеем $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Правило вычитания разности из числа: чтобы вычесть из числа a разность $b - c$, достаточно к данному числу прибавить вычитаемое c и из полученного результата вычесть уменьшаемое b; при $a > b$ можно вычесть из числа а уменьшаемое b и к полученному результату прибавить вычитаемое c, т.е. $a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c$.

Правило вычитания числа из разности: чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел, т.е. $(a - b) - c = a - (b + c)$.

Задача 9. Выясним смысл правила: «Если a, b, c – натуральные числа и $a>c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$»

Решение. Пусть A, B, C – такие множества, что $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $A\cap B=\varnothing$, $C\subset A$ (рис. 4).

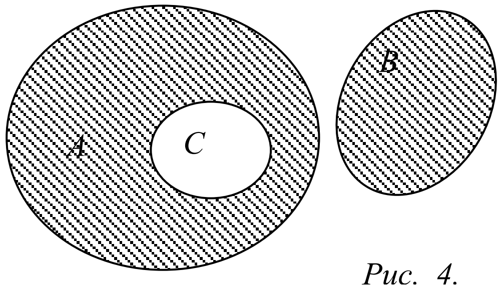


Рис. 4.

Нетрудно доказать с помощью кругов Эйлера, что для данных множеств имеет место равенство $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$.

Правая часть равенства имеет вид: $n((A\cup B)\setminus C=n(A\cup B)-n(C)=(a+b)-c$.

Левая часть равенства имеет вид: $n((A\setminus C)\cup B=n(A\setminus C)+n(B)=(a-c)+b.$

Следовательно, $(a + b) - c = (a- c) + b$, при условии, что $a>c$.

Задача 10. Выясним смысл правила: «Если a, b, c – натуральные числа, то $a - (b - c) = (a + c) - b$».

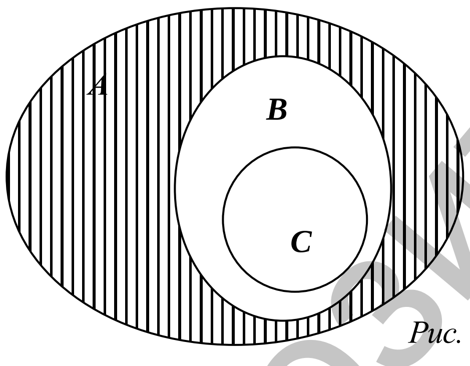


Рис. 5.

Решение. Пусть A, B, C – такие множества, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(C) = c$ и $C\subset B$, $B\subset A$ (рис. 5). Тогда $a - (b - c)$ есть число элементов множества $A\setminus(B\setminus C)$, а число $(a + c) - b$ есть число элементов множества $(A\cup C)\setminus B$. На рис. 5 множество $A\setminus(B\setminus C)$ изображено штриховкой. Легко убедиться в том, что множество $(A\cup C)\setminus B$ изобразится точно такой же областью.

Значит, $A\setminus(B\setminus C) = (A\cup C)\setminus B$.

Следовательно, $n(A\setminus(B\setminus C)) = n((A\cup C)\setminus B)$ и $a - (b - c) = (a + c) - b$.

Задача 11. Используя определения, покажите, что 8 – 5 = 3.

Решение. Пусть даны два множества такие, что $n(A) = 8$, $n(B) = 5$. И пусть множество B является подмножеством множества A. Например, $A = \{a, s, d, f, g, h, j, k\}$, $B = \{a, s, d, f, g\}$.

Найдем дополнение множества B до множества A: $A\setminus B = \{h, j, k\}$. Получаем, что $n(A\setminus B) = 3$.

Следовательно, 8 – 5 = 3.

Задача 12. Выясните, почему следующая задача решается при помощи вычитания, и решите ее: «У школы росло 7 деревьев, из них 3 березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?»

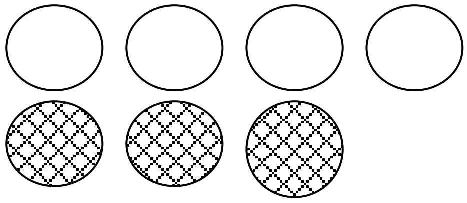


Рис. 6.

Решение. Представим условие задачи наглядно, изобразив каждое дерево, посаженное возле школы кружком (рис. 6). Среди них есть 3 березы – на рисунке выделим их штриховкой. Тогда остальные деревья – не заштрихованные кружки – и есть липы. Т.е. их столько, сколько будет из 7 вычесть 3, т.е. 4.

В задаче рассматриваются три множества: множество A всех деревьев, множество B – берез, которое является подмножеством A, и множество C лип – оно представляет собой дополнение множества B до A. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении.

По условию $n(A) = 7$, $n(B) = 3$ и $B \subset A$. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{a, b, c\}$. Найдем дополнение множества A до B: $A \backslash B = \{d, e, f, g\}$ и $n(A \backslash B) = 4$.

Значит, $n(C) = n(A \backslash B) = n(A) - n(B) = 7 - 3 = 4$.

Ответ: у школы росло 4 липы.

Задача 13. Какими способами можно найти разность: а) $15 - (5 + 6)$; б) $(12 + 6) - 2$?

Решение. а) Используем правило вычитания суммы из числа: $15 - (5 + 6) = (15 - 5) - 6 = 10 - 6 = 4$.

Или $15 - (5 + 6) = (15 - 6) - 5 = 9 - 4 = 4$.

Или $15 - (5 + 6) = 15 - 11 = 4$.

б) Используем правило вычитания числа из суммы: $(12 + 6) - 2 = (12 - 2) + 6 = 10 + 6 = 16$.

Или $(12 + 6) - 2 = 12 + (6 - 2) = 12 + 4 = 16$.

Или $(12 + 6) - 2 = 18 - 2 = 16$.

Задача 14. Как изменится разность, если а) уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличить на одно и то же число; б) уменьшаемое увеличить в два раза; в) вычитаемое увеличить в 2 раза; г) уменьшаемое увеличить, а вычитаемое уменьшить на одно и то же число? Ответ обоснуйте.

Решение. Пусть разность чисел имеет вид $a - b$.

а) Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличить на одно и то же число, то разность примет вид: $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$, т.е. не изменится.

б) Если уменьшаемое увеличить в два раза, то разность примет вид $2a - b = (a + a) - b = (a - b) + a$, т.е. увеличится на уменьшаемое.

в) Если вычитаемое увеличить в 2 раза, то разность примет вид $a - 2b = a - (b + b) = (a - b) - b$, т.е. уменьшится на вычитаемое.

г) Если уменьшаемое увеличить, а вычитаемое уменьшить на одно и то же число, то разность примет вид $(a + c) - (b - c) = a + c - b + c = (a - b) + 2c$, т.е. увеличится на число, умноженное на два.

Смысл приведенных выше правил хорошо раскрывается при решении арифметических задач различными способами.

Задача 15. Утром ушли в море 20 маленьких и 8 больших лодок. 6 лодок вернулись. Сколько лодок осталось в море?

Решение. Задача может быть решена тремя способами:

1 способ. $(20 + 8) – 6 = 28 – 6 = 22$;

2 способ. $(20 – 6) + 8 = 14 + 8 = 22$;

3 способ. $(8 – 6) + 20 = 2 + 20 = 22$.

Ответ: в море осталось 22 лодки.

4. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ НА…» и «МЕНЬШЕ НА…»

Пусть a и b – целые неотрицательные числа, такие, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, и установлено, что $a < b$. Это значит, что в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и множество $B\setminus B_1$ не пусто. Пусть $n(B\setminus B_1) = c$ и $c \neq 0$. Тогда в множестве B элементов столько же, сколько в множестве A, да еще c элементов. В этом случае говорят, что ***число a меньше числа b на c или что число b больше числа a на c.***

Так как $c = n(B\setminus B_1)$, где $B_1 \subset B$, то $c = b – a$. Следовательно, ***чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.***

Задача 16. На верхней полке шкафа 5 книг, а на нижней – на 2 больше. Сколько книг на нижней полке? Решите задачу и объясните ее решение.

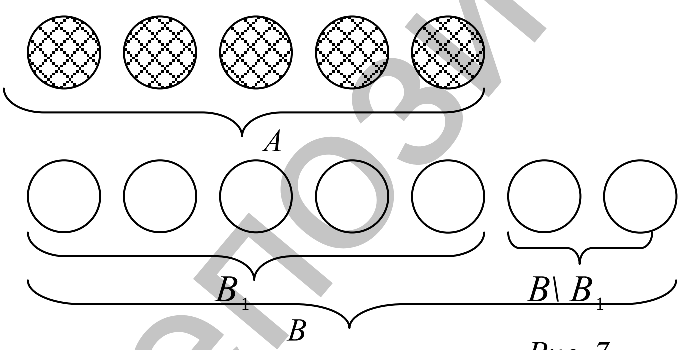


Рис. 7.

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве книг на верхней полке (A) и множестве книг на нижней полке (B), т.е. $n(A) = 5$. Число элементов множества требуется найти при условии, что в нем на 2 элемента больше, чем в первом. Наглядно это можно изобразить с помощью кружков (рис. 7). Отношение «больше на» означает, что в множестве B столько же элементов, сколько их в A, да еще 2 элемента.

Пусть $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = B_1 \cup (B\setminus B_1)$.

Т.к. $B_1 \sim A$, то предположим $B_1 = \{q, w, e, r, t\}$.

Тогда число книг, которых на нижней полке больше, чем на верхней, обозначим $C = B\setminus B_1 = \{z, x\}$. Найдем множество книг на нижней полке: $B = \{q, w, e, r, t, z, x\}$, $n(B) = 7$.

Это значит, что $n(B) = n(B_1) + n(B \backslash B_1)$. Т.к. $B_1 \sim A$, то $n(B) = n(A) + n(B \backslash A) = 5 + 2 = 7$.

Ответ: на нижней полке 7 книг.

Задача 17. Во дворе гуляли 6 мальчиков, а девочек на 2 меньше. Сколько было девочек? Решите задачу и обоснуйте выбор ее решения.

Решение. В задаче речь идет о двух множествах: множестве A мальчиков, множестве B девочек. Известно, что в первом множестве 6 элементов, т.е. $n(A) = 6$. Число элементов во втором множестве надо найти при условии, что в нем на 2 элемента меньше, чем в первом. Отношение «меньше на» означает, что в множестве B элементов столько же, сколько в A, только без двух. Наглядно это можно представить с помощью треугольников (рис. 8).

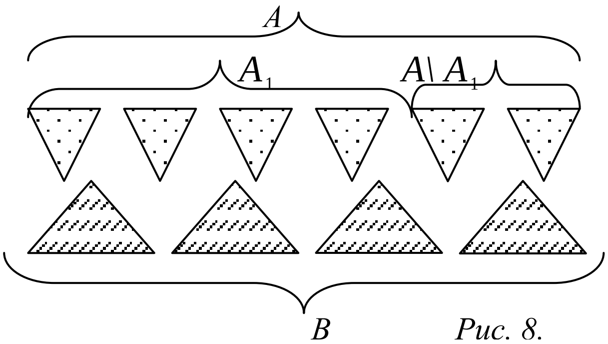


Рис. 8.

Таким образом, $n(B) = n(A_1) = n(A) - n(A \backslash A_1) = 6 - 2 = 4$.

Ответ: девочек во дворе было 4.

Задача 18. У школы посадили 3 дуба и 7 лип. На сколько больше посадили лип?

Решение. В задаче рассматриваются два: множество дубов A и множество лип B. Известно, что лип посадили больше. Тогда, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно воспользоваться сформулированным выше правилом и найти ответ при помощи вычитания: 7 – 3 = 4 (липы).

Однако возникает вопрос: можно ли из количества лип вычитать количество дубов? Дело в том, что в данном случае мы из 7 лип вычитаем 3 липы. Чтобы убедиться в этом, изобразим дубы кружками, а липы квадратами (рис. 9).

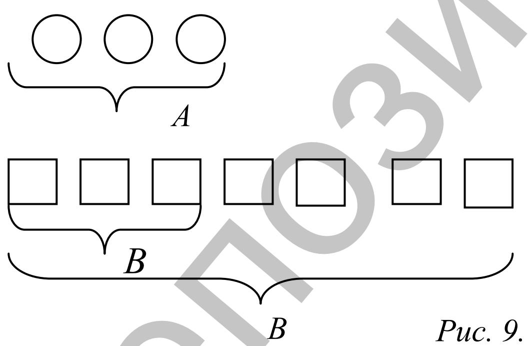


Рис. 9.

Чтобы ответить на вопрос задачи, выделим в множестве лип подмножество B_1, равномощное множеству дубов A, т.е. $B_1 \sim A$ и $n(B_1) = 3$. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B_1 = \{a, b, c\}$. Тогда остальные липы образуют множества B: $B \backslash B_1 = \{d, e, f, g\}$, количество элементов в данном множестве $n(B \backslash B_1) = 4$.

Т.о., количество лип, которое необходимо найти, равно разности $n(B \backslash B_1) = n(B) - n(B_1) = 7 - 3 = 4$.

5. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Понятие произведения может быть определено по-разному. Рассмотрим подход, в основе которого лежит понятие суммы.

Если a, b – целые неотрицательные числа, то **произведением** $\boldsymbol{a \cdot b}$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}$, если $b > 1$;
2) $a \cdot b = a$, если $b = 1$;
3) $a \cdot b = 0$, если $b = 0$.

С теоретико-множественных позиций $a \cdot b$ ($b > 1$) представляет число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит по a элементов и никакие два из них не пересекаются.

$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$, если $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b) = a$ и множества $A_1, A_2, \ldots, A_b$ попарно не пересекаются.

Рассмотрим подход, в основе которого лежит понятие декартового произведения множеств.

Пусть даны два множества: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots b_k\}$. Найдем декартово произведение, которое запишем в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{l}
(a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ \ldots,\ (a_1, b_k), \\
(a_2, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_2, b_k), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_n, b_1),\ (a_n, b_2),\ \ldots,\ (a_n, b_k).
\end{array}$$

В каждой строке таблицы все пары имеют одинаковую первую компоненту, а в каждом столбце одинаковая вторая компонента. При этом никакие две строки не имеют хотя бы одной одинаковой пары.

Отсюда следует, что число элементов в декартовом произведении $A \times B$ равно сумме k слагаемых, каждое из которых равно n, т.е. произведению чисел n и k. Таким образом, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

При $k = 0$ данное равенство также верно, поскольку $B = \varnothing$ и $n(A \times \varnothing) = n(A) \cdot n(\varnothing) = a \cdot 0 = 0$.

С теоретико-множественной точки зрения ***произведение*** $\boldsymbol{a \cdot b}$ целых неотрицательных чисел есть число элементов в декартовом произведении множеств A и B, таких, что $n(A) = a$, $n(B) = b$.

$$\boldsymbol{a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B)}$$

Действие, при помощи которого находят произведение чисел, называют ***умножением***, а числа, которые умножают, называют множителями.

Умножение обладает коммутативностью, ассоциативностью и дистрибутивностью (переместительный, сочетательный и распределительный законы).

Рассмотрим **коммутативность** с точки зрения теоретико-множественного подхода, т.е. $a \cdot b = b \cdot a$.

Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$. Тогда по определению произведения $a \cdot b = n(A \times B)$. Но множества $A \times B = B \times A$ равномощны: каждой паре $(a;b)$ из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие единственную пару $(b;a)$ из множества $B \times A$, и наоборот.

Следовательно, $n(A \times B) = n(B \times A)$. Значит $a \cdot b = b \cdot a$.

Ассоциативность $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ вытекает из того, что множества $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ равномощны, а значит $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$.

Дистрибутивность рассматривают относительно сложения и вычитания. Рассмотрим относительно сложения: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

По определению произведения имеем $(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C)$. Но $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, поэтому $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$, а значит и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Задача 19. Объясните, почему $3 \cdot 2 = 6$?

Решение. Используя первое определение, произведение $3 \cdot 2$ можно записать в виде суммы 3 + 3. Возьмем различные множества K и C такие, что $n(K) = n(C) = 3$. Допустим $K = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$. По определению нам нужно найти количество элементов в объединении $K \cup C$. Т.к. $K \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то $n(K \cup C) = 6$. Значит $3 \cdot 2 = 6$.

Используем второе определение. Пусть $n(A) = 3$, $n(B) = 2$. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{q, w\}$. Найдем декартово произведение данных множеств: $A \times B = \{(a, q), (a, w), (b, q), (b, w), (c, q), (c, w)\}$. Количество пар в декартовом произведении равно 6. Значит $3 \cdot 2 = 6$.

Определим ***произведение нескольких множителей.***

Пусть произведение двух множителей определено и определено произведение n множителей. Тогда произведение, состоящее из $n + 1$ множителя, т.е. произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$, равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$.

Задача 20. С помощью определения суммы нескольких множителей найдите произведение $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$.

Решение. Чтобы найти произведение $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9$ согласно этому правилу, надо выполнить последовательно следующие преобразования: $(2 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 9 = ((2 \cdot 7) \cdot 5) \cdot 9 = (14 \cdot 5) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630$.

Задача 21. На одно пальто пришивают 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 3 таких пальто? Решите задачу и обоснуйте ее решение.

Решение. В задаче идет речь о трех множествах, в каждом из которых по 4 элемента. Требуется узнать число элементов в объединении этих трех множеств.

Если $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$, то $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: на три пальто нужно пришить 12 пуговиц.

Задача 22. Школьники посадили в парке 4 ряда деревьев по 5 штук в каждом ряду. Сколько деревьев они посадили? Объясните, почему данная задача решается при помощи умножения.

Решение. Обозначим деревья кружками. Тогда получим 4 ряда кружков по 5 в каждом (рис. 10). Всего таких кружков окажется 20, т.е. $4 \cdot 5$.

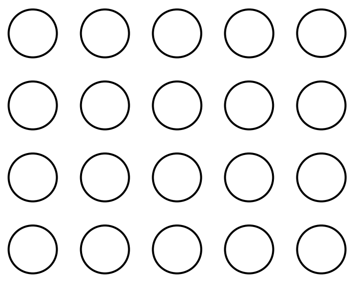


Рис. 10.

Возьмем множества A и B такие, что $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ и найдем их декартово произведение. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда $A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (4, 9)\}$.

Количество элементов в декартовом произведении $n(A \times B) = 20$, т.е. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 5 = 20$.

Ответ: школьники посадили 20 деревьев.

Задача 23. Используя распределительный закон умножения, найдите $297 \cdot 8$.

Решение. $297 \cdot 8 = (300 - 3) \cdot 8 = 300 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 2400 - 24 = 2376$.

Задача 24. Как изменится произведение двух целых неотрицательных чисел, если а) один из множителей увеличить на 2; б) один множитель увеличить в 2 раза; в) каждый множитель увеличить в 2 раза?

Решение. Пусть произведение двух целых неотрицательных чисел имеет вид $a \cdot b$. Тогда:

а) если один из множителей увеличить на 2, например a, то произведение примет вид $(a + 2) \cdot b = a \cdot b + 2b$, т.е. увеличится на удвоенный второй множитель;

б) если один множитель увеличить в 2 раза, например b, то произведение примет вид $a \cdot 2b = (a \cdot b) \cdot 2$, т.е. увеличится в 2 раза;

в) если оба множителя увеличить в 2 раза каждый, то произведение примет вид $2a \cdot 2b = 4(a \cdot b)$, т.е. увеличится в 4 раза.

Задача 25. Решите следующую задачу различными способами и обоснуйте выбор способа: «В гараже в 3 ряда стояло по 9 машин. Из каждого ряда выехало 8 машин. Сколько машин осталось в гараже?»

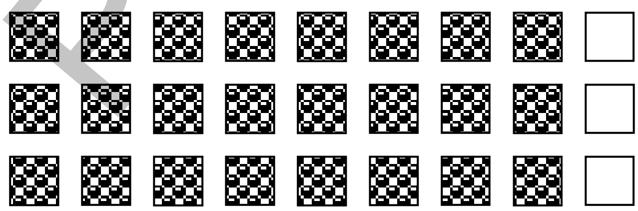


Рис. 11.

Решение. 1 способ. Если в каждом ряду стояло по 9 машин и из каждого ряда выехало 8 машин, то в каждом ряду осталось по 1 машине. Так как всего 3 ряда, то и осталось $1 \cdot 3 = 3$ машины.

2 *способ*. Найдем общее количество машин: $3\cdot 9 = 27$. Теперь найдем количество машин, которые выехали из каждого из трех рядов: $3\cdot 8 = 24$.

Тогда в гараже осталось $27 – 24 = 3$ машины.

Ответ: осталось 3 машины.

Задача 26. Решите следующую задачу различными способами и обоснуйте выбор способа: «Двум детям раздали по 3 зеленых и по 4 красных яблока. Сколько всего яблок раздали детям?»

Решение. 1 *способ*. Каждый из детей получил $3 + 4 = 7$ яблок. Т.к. всего детей было двое, то всего раздали $2\cdot(3 + 4) = 2\cdot 7 = 14$ яблок.

2 *способ*. Так как детей двое, то зеленых яблок было $2\cdot 3 = 6$, а красных – $2\cdot 4 = 8$. Всего раздали $6 + 8 = 14$ яблок.

Ответ: раздали 14 яблок.

6. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ ЧАСТНОГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Деление целого неотрицательного числа на натуральное число связано с разбиением множества на классы.

Если a – число элементов множества A и множество A разбито на b попарно непересекающихся подмножеств, то ***частным чисел a и b*** называется число элементов каждого подмножества разбиения.

Если a – число элементов множества A и множество A разбито на попарно непересекающиеся подмножества, в каждом из которых b элементов, то ***частным чисел a и b*** называется число подмножеств разбиения.

Действие, при помощи которого находят частное, называется *делением*, число a – делимым, число b – делителем.

Познакомимся с некоторыми *свойствами деления* натуральных чисел.

Правило деления суммы на число. Если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c. Частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Правило деления числа на произведение. Если натуральное число a делится на натуральные числа b и c, то чтобы разделить a на произведение чисел b и c, достаточно разделить число a на $b(c)$ и полученное частное разделить на $c(b)$: $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Правило умножения числа на частное двух чисел. Чтобы умножить число на частное двух чисел, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель, т.е. $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$.

Правило деления произведения на число. Чтобы разделить произведение нескольких целых неотрицательных чисел на натуральное число, достаточно один из множителей разделить на это число и полученное частное умножить на оставшиеся множители, т.е., если $a : n$, то $(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$.

Задача 27. Дадим теоретико-множественное обоснование равенству $6 : 3 = 2$.

Решение. Возьмем множество A, в котором 6 элементов, например $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Разобьем множество A на 3 попарно непересекающихся равномощных множества, например $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$, $A_3 = \{e, f\}$. В каждом подмножестве по 2 элемента: $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 2$.

Следовательно, $6 : 3 = 2$.

Справедливость данного равенства можно объяснить и так. Возьмем данное нам множество A и разобьем его на подмножества, в каждом из которых по 3 элемента, например: $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{d, e, f\}$. Таких подмножеств в разбиении будет два. Следовательно, $6 : 3 = 2$.

Теоретико-множественное истолкование можно дать и делению с остатком. ***Разделить*** натуральное число a на натуральное число b ***с остатком*** – это значит найти такие натуральные целые числа q и r, что $a = bq + r$, где $0 \le r < b$.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на множества $A_1, A_2, \ldots, Aq$, R, так, что множества $A_1, A_2, \ldots, Aq$ равномощны, а множество R содержит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, Aq$. Тогда, если $n(A_1), n(A_2), \ldots, n(Aq) = b$, а $n(R) = r$, то $a = bq + r$, где $0 \le r < b$. Причем число q равномощных множеств является *неполным частным* при делении a на b, а число элементов в R – *остатком* при этом делении.

Задача 28. Разделить 7 на 2 с остатком.

Решение. Возьмем множество X, состоящее из 7 элементов. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Разобьем это множество на 2 равномощных подмножества, например $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{4, 5, 6\}$. В эти подмножества не вошел один элемент, он составит некоторое множество $R = \{7\}$. Тогда $n(X_1) = n(X_2) = 3$, $n(R) = 1$. Согласно определению деления с остатком, получим: $7 : 2 = 3$ (ост. 1) или $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Наглядно это можно представить с помощью рис. 12.

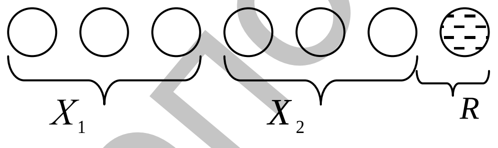


Рис. 12.

Задача 29. 15 тетрадей раздали поровну 5 ученикам. Сколько тетрадей получил каждый? Объясните, почему данная задача решается при помощи деления.

Решение. Множество учеников A из 15 элементов разбивается на 5 равночисленных подмножеств. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве.

Пусть $n(A) = 15$, например, $A = \{z, x, c, v, b, a, s, d, f, g, q, w, e, r, t\}$.

Разобьем множество A на 5 попарно непересекающихся равномощных подмножества: A_1 = {z, x, c,}, A_2 = {v, b, a}, A_3 = {s, d, f}, A_4 = {g, q, w}, A_5 = {e, r, t}. В каждом таком подмножестве по 3 элемента: $n(A_1) = n(A_2) =$ $= n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = 3$. Данные действия соответствуют второму определению деления, значит, ответ на решение задачи можно найти делением: 15 : 5 = 3, и каждый ученик получил по 3 тетради.

Ответ: по 3 тетради.

Задача 30. В коробке 12 карандашей. Их надо разложить в коробки, по 4 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится? Обоснуйте свой выбор действия при решении задачи.

Решение. Множество карандашей C из 12 элементов разбивается на подмножества, в каждом из которых по 4 элемента. Требуется найти количество таких подмножеств.

Пусть C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Разобьем это множество на непересекающиеся подмножества, в каждом из которых по 4 элемента: C_1 = {1, 2, 3, 4}, C_2 = {5, 6, 7, 8}, C_3 = {9, 10, 11, 12}. Таких подмножеств получилось 3. Значит, согласно первому определению деления, задачу можно решить при помощи деления: 12 : 4 = 3.

Следовательно, чтобы разложить 12 карандашей по 4 карандаша в коробку, то понадобится 3 коробки.

Ответ: понадобится 3 коробки.

Задача 31. Используя теоретико-множественный подход к действиям над целыми неотрицательными числами, дайте истолкование правила деления суммы на число: если частные $a : c$ и $b : c$ существуют, то $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Решение. Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$, причем $A \cap B = \varnothing$. Если множества A и B можно разбить на равномощные подмножества, состоящие из c элементов каждое, то и объединение этих множеств допускает такое разбиение. Если при этом множество A состоит из $a : c$ подмножеств, а множество B состоит из $b : c$ подмножеств, то $A \cup B$ состоит из $a : c + b : c$. Это значит, что $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Рассмотрим данное правило на примере. Пусть $n(A) = 6$, $n(B) = 4$, причем $A \cap B = \varnothing$: A = {z, x, c, v, b, n}, B = {a, s, d, f}. И пусть множества A и B можно разбить на равномощные подмножества, состоящие из 2 элементов каждое: A_1 = {z, x}, A_2 = {c, v}, A_3 = {b, n}, B_1 = {a, s}, B_2 = {d, f}.

Значит, множество A можно разбить на 3 равномощных подмножества, в каждом из которых по 2 элемента, а множество B можно разбить на 2 таких подмножества и всего таких подмножеств будет 5. Т.е. 6 : 2 = 3, а 4 : 2 = 2 и 3 + 2 = 5.

Теперь найдем объединение множеств A и B: $A \cup B$ = {z, x, c, v, b, n, a, s, d, f} и разобьем его на равномощные подмножества, содержащие по

2 элемента: $X_1 = \{z, x\}$, $X_2 = \{c, v\}$, $X_3 = \{b, n\}$, $X_4 = \{a, s\}$, $X_5 = \{d, f\}$. Таких подмножеств будет 5. Т.е. 6 + 4 = 10, 10 : 2 = 5.

Т.о., получаем (6 + 4) : 2 = 6 : 2 + 4 : 2.

Данное правило верно в том случае, если каждое слагаемое делится на число, то и сумма делится на это число. Если же сформулировать правило наоборот, т.е., если сумма делится на число и каждое слагаемое делится на число, то утверждение может оказаться неверным. Например, сумма чисел 5 и 3 делится на 2, но каждое слагаемое, т.е. 5 и 3, не делится на 2.

Задача 32. Как изменится частное, если а) делимое и делитель умножить на одно и то же число; б) не изменяя делителя, делимое увеличить в *к* раз; в) не изменяя делимого, делитель увеличить в *с* раз?

Решение. Пусть частное имеет вид $a : b$.

Тогда если: а) делимое и делитель умножить на одно и то же число, то частное примет вид $(a \cdot d) : (b \cdot d) = (a : b) \cdot (d : d) = (a : b) \cdot 1 = a : b$, т.е. частное не изменится;

б) не изменяя делителя, делимое увеличить в *к* раз, то частное примет вид $(a \cdot к) : b = (a : b) \cdot к$, т.е. увеличится в *к* раз;

в) не изменяя делимого, делитель увеличить в *с* раз, то частное примет вид $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$, т.е. уменшится в *с* раз.

Задача 33. Решите задачу разными способами: «В лапту играли 8 девочек и 6 мальчиков. Они разделились на 2 команды. Сколько человек было в каждой команде?»

Решение. 1 *способ.* Так как в лапту играли 8 девочек, а команды было 2, то в каждую команду попало по 8 : 2 = 4 девочки. Так как было 6 мальчиков, то в каждой команде могло оказаться по 6 : 2 = 3 мальчика. Всего в каждой команде было 4 + 3 = 7 человек.

2 *способ*. Найдем, сколько всего детей играли в лапту: 8 + 6 = 14. Так как было 2 команды, то в каждой команде оказалось по 14 : 2 = 7 детей.

Задача 34. Вычислите различными способами: а) (690 + 23) : 23; б) $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15$; в) $225 \cdot (75 : 15)$.

Решение. а) (690 + 23) : 23 = 713 : 23 = 31.

Применим правило деления суммы на число:
(690 + 23) : 23 = 690 : 23 + 23 : 23 = 30 + 1 = 31.

б) $(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = 94500 : 15 = 6300$.

Применим правило деления произведения на число:
$(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = (315 : 15) \cdot 10 \cdot 30 = 21 \cdot 10 \cdot 30 = 630$,
$(315 \cdot 10 \cdot 30) : 15 = (315 \cdot 10) \cdot (30 : 15) = 3150 \cdot 2 = 6300$.

в) $225 \cdot (75 : 15) = 225 \cdot 5 = 1125$.

Применим правило умножения числа на частное двух чисел:
$225 \cdot (75 : 15) = (225 \cdot 75) : 15 = 16875 : 15 = 1125$,
$225 \cdot (75 : 15) = (225 : 15) \cdot 75 = 15 \cdot 75 = 1125$.

7. ОТНОШЕНИЯ «БОЛЬШЕ В…» и «МЕНЬШЕ В…»

Пусть дано множество A, в котором 6 элементов, и множество B, содержащее 3 элемента:

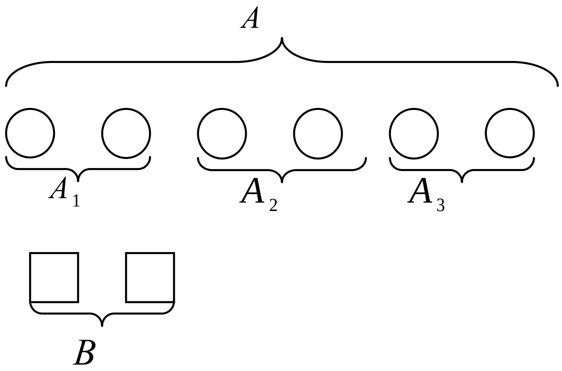


Рис. 13.

$n(A) = 6$, $n(B) = 3$: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, s, d\}$.

Выделим в множестве A подмножества, равномощные множеству B: $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{5, 6\}$ (рис. 13). Их оказывается три.

В этом случае говорят, что число 6 больше числа 2 в 3 раза, а число 2 меньше 6 в 3 раза.

Если даны числа a и b такие, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, $a>b$, и множество A можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству B, то говорят, что ***число а больше числа b в с раз, а число b меньше числа а в с раз.***

Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, необходимо большее число разделить на меньшее.

Задача 35. Объясните смысл предложения «10 больше 5 в 2 раза».

Решение. Если предположить, что в множестве C 10 элементов, а в множестве K 5 элементов, и в множестве C можно выделить подмножества, равномощные K, то таких подмножеств окажется 2.

Значит, 10 больше 5 в 2 раза.

Задача 36. На участке растут 8 елей. Их в 2 раза больше, чем сосен. Сколько сосен на участке? Решите задачу и обоснуйте выбор действий.

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве A елей и C сосен. Известно, что $n(A) = 8$. Требуется найти $n(C)$, зная, что число елей в 2 раза больше сосен, т.е. число сосен в 2 раза меньше числа *8*. Исходя из этого условия, можно представить множество A состоящим из двух равномощных подмножеств: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{5, 6, 7, 8\}$. Тогда в множестве C будет столько элементов, сколько в каждом подмножестве множества A: $n(A_1) = n(A_2) = 4$, а это число можно найти делением $8 : 2 = 4$.

Значит $n(C) = 4$, т.е. на участке росло 4 сосны.

Ответ: 4 сосны.

Задача 37. У Нины 3 тетради, а у Коли в 4 раза больше. Сколько тетрадей у Коли? Решите задачу и обоснуйте выбор решения.

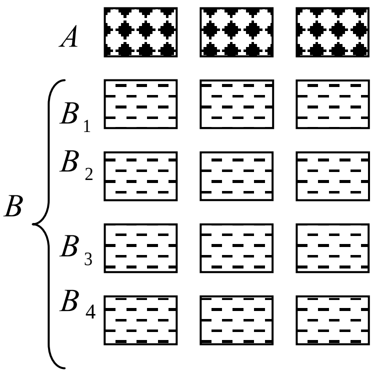


Рис. 14.

Решение. В задаче рассматриваются два множества: множество A тетрадей Нины и множество B тетрадей Коли (рис. 14). Известно, что $n(A) = 3$. Требуется найти $n(B)$, зная, что это число элементов в множестве B в 4 раза больше числа элементов в множестве A. Это значит, что множество B состоит из четырех непересекающихся подмножеств B_1, B_2, B_3, B_4, равномощных множеству A, т.е. $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = n(B_4) = n(A) = 3$.

Но тогда число элементов в множестве B можно найти сложением $n(B) = n(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = n(B_1) + n(B_2) + n(B_3) + n(B_4) = 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$.

Значит, у Коли 12 тетрадей.

Ответ: 12 тетрадей.

Задача 38. Во дворе гуляли 4 утенка и 8 цыплят. Во сколько раз больше цыплят, чем утят? Решите задачу и дайте обоснование решению.

Решение. В задаче идет речь о двух множествах: множестве A цыплят и множестве B утят. Известно, что $n(A) = 4$, $n(B) = 8$, причем известно, что цыплят больше чем утят.

Пусть $A = \{z, x, c, v\}$, $B = \{a, s, d, f, g, h, j, k\}$.

Выделим в множестве B подмножества, равномощные множеству A: $B_1 = \{a, s, d, f\}$, $B_2 = \{g, h, j, k\}$, т.е. $n(B_1) = n(B_2) = n(A) = 4$. Их оказывается *2*. По определению отношения больше, если множество B можно разбить, например на 2 подмножества, равномощных множеству A, то $n(B)$ больше $n(A)$ в 2 раза.

Ответ: цыплят было больше, чем утят в 2 раза.

II. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

При аксиоматическом построении какой-либо математической теории соблюдаются определенные *правила*:

- некоторые понятия теории выбираются в качестве основных и принимаются без определения;
- каждому понятию теории, которое не содержится в списке основных, дается определение;

- формулируются аксиомы – предложения, которые в данной теории принимаются без доказательства; в них раскрываются свойства основных понятий;
- каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, должно быть доказано; такие предложения называют теоремами и доказывают их на основе аксиом и теорем.

При аксиоматическом построении теории все утверждения выводятся из аксиом путем доказательства.

Поэтому к системе аксиом предъявляются особые *требования:*

- непротиворечивость (система аксиом называется непротиворечивой, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения);
- независимость (система аксиом называется независимой, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других аксиом).

В качестве основного понятия при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел взято отношение «непосредственно следовать за…», заданное на непустом множестве N.

Суть этого отношения раскрывается в следующих ***аксиомах Пеано*:**

***АКСИОМА* 1.**

Во множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей, и обозначать символом 1.

***АКСИОМА* 2.**

Для каждого элемента a из N существует единственный элемент a', непосредственно следующий за a.

***АКСИОМА* 3.**

Для каждого элемента a из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a.

***АКСИОМА* 4.**

Всякое подмножество M множества N совпадает с N, если обладает свойствами: 1) 1 содержится в M; 2) из того, что a содержится в M, следует, что и a' содержится в M.

Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за…», удовлетворяющее аксиомам 1–4, называется ***множеством натуральных чисел***, а его элементы – ***натуральные числами.***

Если в качестве множества N выбрать некоторое конкретное множество, на котором задано конкретное отношение «непосредственно следовать за…», удовлетворяющее аксиомам 1–4, то получим различные ***интерпретации (модели)*** данной ***системы аксиом.***

Стандартной моделью системы аксиом Пеано является возникший в процессе исторического развития общества ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, …

Моделью аксиом Пеано может быть любое счетное множество.

Например, I, II, III, IIII, …

o oo ooo oooo, …

один два три четыре, ...

Рассмотрим последовательность множеств, в которой множество {oo} есть начальный элемент, а каждое последующее множество получается из предыдущего приписыванием еще одного кружка (рис. 15).

{oo}, {ooo}, {oooo}, …

Рис. 15.

Тогда N есть множество, состоящее из множеств описанного вида, и оно является моделью системы аксиом Пеано.

Действительно, во множестве N существует элемент {oo}, непосредственно не следующий ни за каким элементом данного множества, т.е. выполняется аксиома 1. Для каждого множества A рассматриваемой совокупности существует единственное множество, которое получается из A добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 2. Для каждого множества A существует не более одного множества, из которого образуется множество A добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 3. Если $M \subset N$ и известно, что множество A содержится в M, следует, что и множество, в котором на один кружок больше, чем в множестве A, также содержится в M, то $M = N$, и значит выполняется аксиома 4.

В определении натурального числа ни одну из аксиом опустить нельзя.

Задача 39. Установите, какие из множеств, приведенных на рис. 16, являются моделью аксиом Пеано.

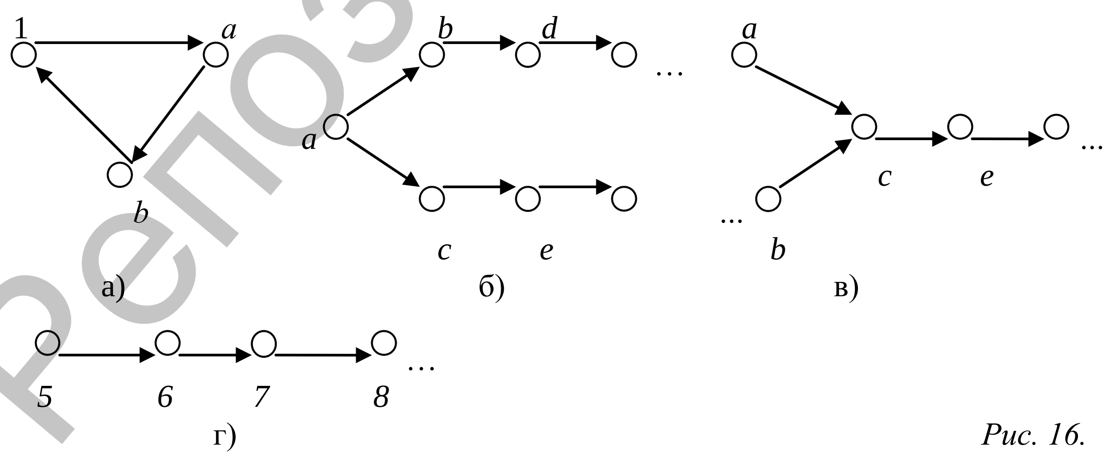


Рис. 16.

Решение. На рис. 16 а) изображено множество, в котором выполняются аксиомы 2 и 3. Действительно, для каждого элемента существует единственный, непосредственно следующий за ним, и существует единственный элемент, за которым он следует. Но в этом множестве не выполняется аксиома 1 (аксиома 4 не имеет смысла, т.к. в множестве нет элемента, непосредственно не следующего ни за каким другим). Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рис. 16 б) показано множество, в котором выполнены аксиомы 1, 3 и 4, но за элементом *a* непосредственно следуют два элемента, а не один, как требуется в аксиоме 2. Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рис. 16 в) изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 4, но элемент *c* непосредственно следует сразу за двумя элементами. Поэтому данное множество не является моделью аксиом Пеано.

На рис. 16 г) изображено множество, удовлетворяющее аксиомам 2, 3, и, если в качестве начального элемента возьмем число 5, то данное множество будет удовлетворять аксиомам 1 и 4. Т.е., в данном множестве для каждого элемента существует единственный, непосредственно следующий за ним, и существует единственный элемент, за которым он следует. Существует и элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества, это 5, т.е. выполняется аксиома 1. Соответственно будет выполняться и аксиома 4. Поэтому данное множество является моделью аксиом Пеано.

Задача 40. Докажем, что для всех натуральных чисел выполняется неравенство $x \neq x'$.

Доказательство. Обозначим через *A* множество натуральных чисел, для которых $a \neq a'$. Число 1 принадлежит *A*, поскольку оно не следует ни за каким числом из *N*, а значит, не следует само за собой: $1 \neq 1'$. Пусть $a \in A$, тогда $a \neq a'$. Обозначим a' через *b*. В силу аксиомы 3, $a' \neq b'$, т.е. $b \neq b'$ и $b \in A$.

Итак, множество *A* содержит 1 и вместе с каждым числом *A* содержит $b = a'$. Значит, $A = N$. В силу определения *A* это означает, что для всех $x \in A$ имеем неравенство $x \neq x'$.

Задача 41. Докажите, что каждое натуральное число *a*, отличное от 1, имеет предшествующее число *b*, такое, что $b' = a$.

Доказательство. Обозначим через *M* множество натуральных чисел, состоящее из числа 1 и всех чисел, имеющих предшествующее. Если число *a* содержится в *M*, то и число a' также есть в *M*, поскольку предшествующим для a' является число *a.* Это значит, что множество *M* содержит 1, и из того, что число *a* принадлежит *M*, следует, что и a' принадлежит *M*. Тогда по аксиоме 4 множество *M* совпадает с множеством натуральных чисел *N*. Значит, все натуральные числа, кроме 1, имеют предшествующее число, т.е. $b' = a$.

2. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая следующими свойствами:

1) $(\forall a \in N)a + 1 = a'$; $(\forall a \in N)a + 0 = a$;

2) $(\forall a, b \in N)a + b' = (a + b)'$.

Будем считать, что 0 + 0 = 0.

Число $a + b$ называется ***суммой*** чисел a и b, а сами числа ***слагаемыми.***

Задача 42. Доказать единственность сложения натуральных чисел.

Доказательство. Допустим, что в множестве N существуют две операции сложения, обладающие свойствами 1 и 2. Одну из них обозначим знаком +, а другую – знаком $\oplus$. Для этих операций имеем:

1) $a + 1 = a'$; 1) $a \oplus 1 = a'$;

2) $a + b = (a + b)'$ 2) $a \oplus b' = (a \oplus b)'$.

Докажем, что $(\forall a, b \in N)a + b = a \oplus b$ (1)

Пусть число a выбрано произвольно, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех чисел b, для которых равенство (1) истинно.

Нетрудно убедиться в том, что $1 \in M$. Действительно, из того, что $a + 1 = a' = a \oplus 1$, следует, что $a + 1 = a \oplus 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. если $a + b = a \oplus b$, то $a + b' = a \oplus b'$. Так как $a + b = a \oplus b$, то по аксиоме 2 $(a + b)' = (a \oplus b)'$, и тогда $a + b' = (a + b)' = (a \oplus b)' = a \oplus b'$. Поскольку множество M содержит 1 и вместе с каждым числом b содержит и число b', то по аксиоме 4 множество M совпадает с N, а значит равенство (1) истинно для любого натурального числа b. Так как число a было выбрано произвольно, то равенство (1) верно при любых натуральных a и b, т.е. операции + и $\oplus$ на множестве N могут отличаться друг от друга только обозначениями.

Задача 43. Доказать существование сложения натуральных чисел.

Доказательство. Покажем, что алгебраическая операция, обладающая свойствами 1 и 2, указанными в определении, существует.

Пусть M – множество тех и только тех чисел a, для которых можно определить $a + b$ так, чтобы выполнялись условия 1 и 2.

Покажем, что $1 \in M$. Для этого при любом b предположим $1 + b = b'$ (2). Тогда:

1) $1 + 1 = 1'$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + 1 = a'$ при $a = 1$.

2) $1 + b' = (b')' = (1 + b)'$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + b' = (a + b)'$ при $a = 1$.

Итак, 1 принадлежит множеству M.

Предположим, что a принадлежит M. Исходя из этого предположения, покажем, что и a' содержится в M, т.е. что можно определить сложение a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Для этого положим:

$a' + b = (a + b)'$.

Так как по предположению число $a + b$ определено, то по аксиоме 2 единственным образом определяется и число $(a + b)'$. Проверим, что при этом выполняются условия 1 и 2:

1) $a' + 1 = (a + 1)' = (a')'$.

2) $a' + b' = (a + b')' = ((a + b)')' = (a' + b)'$.

Итак, показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым число a содержит и число a'. По аксиоме 4 заключаем, что множество M есть множество натуральных чисел.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых натуральных чисел a и b однозначно найти такое натуральное число $a + b$, что выполняются свойства 1 и 2, сформулированные в определении сложения.

Задача 44. Докажем, что $(\forall a, b \in N) a + b \neq b$.

Доказательство. Пусть a – натуральное число, выбранное произвольно, а b принимает различные значения. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел b, для которых данное утверждение истинно. Тогда 1 содержится в M, т.к. $a + 1 = a'$ (по определению сложения), а 1 не следует ни за каким числом (аксиома 1), то $a + 1 \neq 1$.

Если число b принадлежит M, т.е. $a + b \neq b$, то и b' принадлежит M, т.е. $a + b' \neq b'$. Действительно, по определению сложения $a + b' = (a + b)'$, но поскольку $a + b \neq b$, то $(a + b)' \neq b'$. Значит, $a + b' \neq b'$.

По аксиоме 4 множества M и N совпадают, следовательно, для любых натуральных чисел a и b верно утверждение $a + b \neq b$.

Покажем, как из определения сложения и его существования и единственности можно вывести *таблицу сложения однозначных чисел*.

Условимся о следующих обозначениях:

$1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 5$ и т.д.

Составим таблицу в следующей последовательности: сначала к любому однозначному числу прибавляем единицу, затем – число два, потом – три и т.д.

$1 + 1 = 1'$ на основании свойства 1 определения сложения. Но $1' = 2$, следовательно, $1 + 1 = 2$.

Аналогично $2 + 1 = 2' = 3$; $3 + 1 = 3' = 4$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи, связанные с прибавлением к любому однозначному натуральному числу числа 2.

$1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3$.

Аналогично $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = 3' = 4$; $3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = 4' = 5$ и т.д.

Если продолжить этот процесс, то получим всю таблицу сложения однозначных чисел.

Задача 45. Найти с помощью аксиоматического подхода к построению теории натуральных чисел сумму 6 + 3.

Решение. Такой подход является основой начального обучения математике. Получение чисел путем прибавления 1 тесно связано с принципом построения натурального ряда, а второе свойство сложения используется при вычислениях: $6 + 3 = 6 + 2' = (6 + 2)' = (6 + 1')' = ((6 + 1)')' = (6')')' = (7')' = 8' = 9$.

На языке начального курса математики это выглядит так: $6 + 3 = (6 + 2) + 1 = ((6 + 1) + 1) + 1 = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Сложение обладает свойствами ***ассоциативности*** $((a + b) + c = a + (b + c))$ и ***коммутативности*** $(a + b = b + a)$.

Задача 46. Доказать, что для любых чисел a и b выполняется равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех чисел c, для которых равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Докажем сначала, что 1 содержится в M, т.е. убедимся в справедливости равенства $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$. Действительно, по определению сложения $(a + b) + c = (a + b)' = a + b' = a + (b + 1)$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то и $c' \in M$, т.е. из равенства $(a + b) + c = a + (b + c)$ следует равенство $(a + b) + c' = a + (b + c')$. Действительно, по определению сложения, имеем: $(a + b) + c' = ((a + b) + c)' = (a + (b + c))' = a + (b + c)' = a + (b + c')$.

Таким образом, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что c содержится в M, следует, что и $c' \in M$. Следовательно, согласно аксиоме Пеано 4, $M = N$, т.е. равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ истинно для любого натурального числа c. А поскольку числа a и b выбирались произвольно, то истинно и для любых натуральных чисел a и b, что и требовалось доказать.

Аналогично, можно доказать и коммутативность сложения.

Задача 47. Выполните преобразование выражения, применив свойства сложения: а) 8091 + (2809 + 409); б) 386 + 187 + 1213 + 1564; в) (8073 + 2329) + 1671.

Решение. а) 8091 + (2809 + 409) = [применим ассоциативность и переставим скобки] = (8091 + 2809) + 409 = 10900 + 409 = 11309;

б) 386 + 187 + 1213 + 1564 = [применим коммутативность, что позволит поменять числа местами] = 386 + 1564 +187 + 1213 = [применим ассоциативность, что позволит расставить скобки в нужном месте] = (386 + 1564) + (187 + 1213) = 1950 + 1400 = 3350;

в) (8073 + 2329) + 1671 = [применим ассоциативность и опустим скобки] = 8073 + 2329 + 1671 = [применим снова ассоциативность и поставим скобки в нужном нам месте] = 8073 + (2329 + 1671) = 8073 + 4000 = 12073.

Задача 48. Известно, что $a + b = 17$. Чему равно: а) $a + (b + 3)$; б) $(a + 6) + b$; в) $(13 + b) + a$?

Решение. а) $a + (b + 3) = (a + b) + 3 = 17 + 3 = 20$;

б) $(a + 6) + b = a + 6 + b = a + b + 6 = (a + b) + 6 = 17 + 6 = 23$;

в) $(13 + b) + a = 13 + b + a = 13 + (a + b) = 13 + 17 = 30$.

3. УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1) $(\forall a \in N) a \cdot 1 = a$; $(\forall a \in N) a \cdot 0 = 0$;

2) $(\forall a, b \in N) a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Будем считать, что $0 \cdot 0 = 0$.

Число $a \cdot b$ называют произведением чисел a и b, а сами эти числа – множителями.

Задача 49. Докажем, что умножение натуральных чисел единственно.

Доказательство. Допустим, что в множестве N существуют две операции умножения, обладающие свойствами 1 и 2. Одну из них обозначим знаком $\cdot$, а другую – знаком –.

Для этих операций имеем:

1) $a \cdot 1 = a$; 1) $a - 1 = a$;

2) $a \cdot b' = a \cdot b + a$ 2) $a - b' = a - b + a$.

Докажем, что ([a, b ♣ N)$a \cdot b = a - b$ (1)

Пусть число a выбрано произвольно, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех чисел b, для которых равенство (1) истинно.

Нетрудно убедиться в том, что $1 \in M$. Действительно, из того, что $a \cdot 1 = a = a - 1$ следует, что $a \cdot 1 = a - 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. если $a \cdot b = a - b$, то $a \cdot b' = a - b'$. Так как $a \cdot b = a - b$, то по аксиоме 2 $a \cdot b' = a \cdot b + a$; и $a - b' = a - b + a$. Тогда $a \cdot b' = a - b'$. Поскольку множество M содержит 1 и вместе с каждым числом b содержит и число b', то по аксиоме 4 множество M совпадает с N, а значит равенство (1) истинно для любого натурального числа b. Так как число a было выбрано произвольно, то равенство (1) верно при любых натуральных a и b, т.е. операции $\cdot$ и – на множестве N могут отличаться друг от друга только обозначениями.

Задача 50. Доказать существование умножения.

Доказательство. Покажем, что алгебраическая операция, обладающая свойствами 1 и 2, указанными в определении, существует.

Пусть M – множество тех и только тех чисел a, для которых можно определить $a \cdot b$ так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Покажем, что $1 \in M$. Для этого при любом b предположим $1 \cdot b = b$ (2). Тогда:

1) $1 \cdot 1 = 1$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a \cdot 1 = a$ при $a = 1$.

2) $1 \cdot b' = 1 \cdot b + 1 = b + 1$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a \cdot b' = a \cdot b + a$ при $a = 1$.

Итак, 1 принадлежит множеству M.

Предположим, что a принадлежит M. Исходя из этого предположения, покажем, что и a' содержится в M, т.е. что можно определить умножение a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Для этого положим:

$a' \cdot b = a \cdot b + b$.

Так как по предположению число $a \cdot b$ определено, то по аксиоме 2 единственным образом определяется и число $a \cdot b + b$. Проверим, что при этом выполняются условия 1 и 2:

1) $a' \cdot 1 = (a + 1) \cdot 1 = a + 1 = a'$, т.е. $a' \cdot 1 = a'$;

2) $a' \cdot b' = a \cdot b' + b' = a \cdot (b + 1) = (b + 1) = a \cdot b + a + b + 1 =$
$= a \cdot b + b + a + 1 = (a + 1) \cdot b + (a + 1) = a' \cdot b + a'$, т.е. $a' \cdot b' = a' \cdot b + a'$.

Итак, показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым число a содержит и число a'. По аксиоме 4 заключаем, что множество M есть множество натуральных чисел.

Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых натуральных чисел a и b однозначно найти такое натуральное число $a \cdot b$, что выполняются свойства 1 и 2, сформулированные в определении умножения.

Используя определение умножения, его существование и единственность, можно вывести *таблицу умножения однозначных чисел.*

Делаем это в такой последовательности: сначала рассматриваем умножение на 1, затем на 2, потом на 3 и т.д.

Легко видеть, что умножение на 1 выполняется по свойству 1 в определении умножения: $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 1 = 2$; $3 \cdot 1 = 3$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи умножения на 2:

$1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Аналогично:

$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$;

$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$.

Далее можно рассмотреть процесс умножения на 3:

$1 \cdot 3 = 1 \cdot 2' = 1 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 1' + 1 = (1 \cdot 1 + 1) + 1 = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3$;

$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2' = 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 1' + 2 = (2 \cdot 1 + 2) + 2 = (2 + 2) + 2 = 4 + 2 = 6$.

Если продолжить этот процесс, получим всю таблицу умножения однозначных чисел.

Задача 51. Используя определение умножения, найдите значение выражения $3\cdot 4$.

Решение. $3\cdot 4 = 3\cdot 3' = 3\cdot 3 + 3 = 3\cdot 2' + 3 = (3\cdot 2 + 3) + 3 = (3\cdot 1' + 3) + 3 =$ $= ((3\cdot 1 + 3) + 3) + 3 = ((3 + 3) + 3) + 3 = (6 + 3) + 3 = 9 + 3 = 12.$

Умножение натуральных чисел обладает следующими свойствами: оно ***коммутативно*** $(a \cdot b = b \cdot a)$, ***ассоциативно*** $((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$ и ***дистрибутивно*** относительно сложения $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Задача 52. Докажите свойство дистрибутивности умножения относительно сложения.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество таких натуральных чисел c, для которых верно равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Докажем, что $1 \in M$, т.е. что равенство $(a + b) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1$ истинно. Согласно свойству 1 из определения умножения имеем: $(a + b) \cdot 1 =$ $= a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. что из равенства $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ следует равенство $(a + b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'$. По определению умножения, имеем: $(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot c + (a + b) =$ $= (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) =$ [используя ассоциативное и коммутативное свойство сложения, выполним преобразования] $= (a \cdot c + b \cdot c + a) + b =$ $= (a \cdot c + a + b \cdot c) + b = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) =$ [по определению умножения] $= a \cdot c' + b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что оно содержит c, следует, что и c' содержится в M. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$. Это значит, что равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ верно для любых натуральных чисел c, а также для любых произвольных a и b.

Задача 53. Доказать коммутативность умножения.

Доказательство. Докажем, что для любого натурального числа a имеет место равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a$. Пусть M множество всех тех чисел a, для которых это равенство истинно. Так как $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ – истинное равенство, то 1 принадлежит множеству M.

Докажем теперь, что если $a \in$ М, то $a' \in$ М, т.е. из равенства $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ следует равенство $a' \cdot 1 = 1 \cdot a'$. Действительно, $a' \cdot 1 = (a + 1) \cdot 1 =$ [дистрибутивность умножения] $= a \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = 1 \cdot (a + 1) =$ $= 1 \cdot a'$.

Докажем теперь, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$. Пусть a – произвольное натуральное число, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех чисел b, для которых равенство $a \cdot b = b \cdot a$ истинно.

Так как при $b = 1$ получаем равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, истинность которого доказана, то 1 содержится в M.

Докажем, что если b принадлежит M, то и b' принадлежит M, т.е. из равенства $a \cdot b = b \cdot a$ следует равенство $a \cdot b' = b' \cdot a$. Действительно, $a \cdot b' = a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a = b \cdot a + a = (b + 1) \cdot a = b' \cdot a$.

Итак, мы доказали, что 1 содержится в M и вместе с каждым числом b множество содержит и число b', непосредственно следующее за b. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$, т.е. равенство $a \cdot b = b \cdot a$ истинно для любого натурального числа b, а также для любого произвольного числа a.

Аналогично можно доказать и ассоциативность умножения.

Задача 54. Найти значение выражения, используя свойства умножения: а) $125 \cdot 15 \cdot 6$; б) $(8 \cdot 379) \cdot 125$; в) $49 \cdot 54 + 36 \cdot 49 + 90 \cdot 51$; г) $47 \cdot 3$.

Решение. а) $125 \cdot 15 \cdot 6$ = [применим ассоциативность умножения] $= 125 \cdot (15 \cdot 6) = 125 \cdot 90 = 11200$;

б) $(8 \cdot 379) \cdot 125$ = [применим ассоциативность умножения, что позволит нам расставить скобки, как нам необходимо, и коммутативность умножения, что позволит нам поменять множители местами] $= (8 \cdot 125) \cdot 379 = 1000 \cdot 379 = 379000$;

в) $49 \cdot 54 + 36 \cdot 49 + 90 \cdot 51$ = [применим ассоциативность для второго произведения] $= 49 \cdot 54 + 49 \cdot 36 + 90 \cdot 51$ = [применим дистрибутивность относительно первого и второго слагаемого данной суммы] $= 49 \cdot (54 + 36) + 90 \cdot 51 = 49 \cdot 90 + 90 \cdot 51$ = [применим ассоциативность для первого произведения] $= 90 \cdot (49 + 51) = 90 \cdot 100 = 900$;

г) $47 \cdot 3$ = [представим первый множитель в виде суммы] $= (40 + 7) \cdot 3$ = [применим дистрибутивность] $= 40 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 120 + 21 = 141$.

Задача 55. Известно, что $37 \cdot 3 = 111$. Используя это равенство, вычислите: $37 \cdot 18$ и $185 \cdot 12$.

Решение. $37 \cdot 18 = 37 \cdot (3 \cdot 6) = (37 \cdot 3) \cdot 6 = 111 \cdot 6 = 666$;

$185 \cdot 12 = (5 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 4) = (5 \cdot 4) \cdot (37 \cdot 3) = 20 \cdot 111 = 2220$.

4. УПОРЯДОЧЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество натуральных чисел можно упорядочить при помощи отношения «меньше».

Число a меньше числа b $(a < b)$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число c, что $a + c = b$.

Отношение «меньше» обладает свойством транзитивности и антисимметричности.

Так как отношение «меньше» транзитивно и антисимметрично, то оно является отношением линейного порядка, а ***множество натуральных чисел*** является ***упорядоченным*** и 1 – наименьшее среди данных чисел.

Задача 56. Докажем, что если $a < b$, $b < c$, то $a < c$, т.е. отношение «меньше» обладает свойством транзитивности.

Доказательство. Так как $a < b$, $b < c$, то по определению отношения «меньше» существуют числа k и l такие, что $b = a + k$, $c = b + l$. Но тогда

$c = (a + k) + l =$ [на основании ассоциативности сложения] $= a +(k + l)$. Поскольку $k + l$ является натуральным числом, то, по определению отношения «меньше», $a < c$.

Задача 57. Докажите, что если $a < b$, то неверно, что $b < a$, т.е. отношение «меньше» антисимметрично.

Доказательство. Докажем, что ни для одного натурального числа a не выполняется отношение $a < a$.

Предположим противное, т.е. что $a < a$ имеет место. Тогда по определению отношения «меньше» найдется такое натуральное число c, что $a + c = a$, но это невозможно в силу единственности суммы.

Предположим, что оба неравенства выполнимы: $a < b$ и $b < a$. Тогда по свойству транзитивности отношения «меньше» будем иметь $a < a$, что невозможно.

Задача 58. Докажем, что среди всех натуральных чисел единица является наименьшим числом, т.е. $1 < a$ для любого натурального числа $a \neq 1$.

Доказательство. Пусть a – любое натуральное число. Тогда возможны два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

Если $a \neq 1$, то существует натуральное число b, за которым следует a: $a = b' = b + 1 = 1 + b$, т.е. по определению отношения «меньше», $1 < a$.

Следовательно, любое натуральное число либо равно 1, либо больше 1. Или единица является наименьшим натуральным числом.

Отношение «меньше» связано со сложением и умножением чисел *свойствами монотонности:* 1) $a = b \Rightarrow a + c = b + c,\ ac = bc;$

2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ ac < bc;$

3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c,\ ac > bc.$

Задача 59. Докажем, что $a < b \Rightarrow a + c < b + c,\ ac < bc.$

Доказательство. Если $a < b$, то существует такое натуральное число k, что $a + k = b$. Тогда $b + c = (a + k) + c = a + (k + c) = a + (c + k) = (a + c) + k$. Равенство $b + c = (a + c) + k$ означает, что $a + c < b + c$.

Точно также можно доказать, что если $a < b$, то $ac < bc$.

Располагая элементы данного множества так, чтобы из любых двух чисел сначала шло меньшее, получим ряд целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, 3, 4,… Этот ряд бесконечен и за каждым числом a непосредственно следует число $a + 1$. Причем, ни для одного натурального числа a не существует такого натурального числа x, что $a < x < a + 1$. Это свойство называется *дискретностью* множества натуральных чисел. Числа a и $a + 1$ называют соседними.

Отношение «непосредственно следовать за…» связано со сложением и умножением целых неотрицательных чисел.

Действительно, сумму $a + (b + 1)$ легко найти, зная сумму $a + b$: $a +(b + 1) = (a + b) + 1$, т.е. она равна числу, непосредственно следующему за суммой $a + b$.

Задача 60. Известно, что $4 + 2 = 6$, $7 \cdot 5 = 35$. Найти сумму $4 + 3$ и произведение $7 \cdot 6$.

Решение. $4 + 3 = 4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$.

$7 \cdot 6 = 7 \cdot (5 +1) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1 =35 + 7 = 42$.

5. ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

При аксиоматическом построении теории целых неотрицательных чисел вычитание определяется как операция, обратная сложению.

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется такое натуральное число c, что $a = c + b$. Это число обозначают $a – b$. Число a называют *уменьшаемым, b – вычитаемым*.

Разность целых неотрицательных чисел a и b существует, если $b \le a$ и она единственна.

Будем считать, что $0 – 0 = 0$ и $a – a = 0$.

Задача 61. Доказать, что разность целых неотрицательных чисел существует, если $b \le a$.

Доказательство. Пусть $a = b$. Тогда $a – b = 0$, и следовательно, разность существует. Если $b < a$, то по определению отношения «меньше» существует натуральное число c такое, что $a = b + c$. Тогда по определению разности $c = a – b$, т.е. разность существует и $b + c = a$. Если $c = 0$, то $a = b$; если $c > 0$, то $b < a$ по определению отношения «меньше». Итак, $b \le a$.

Задача 62. Доказать, что если разность натуральных чисел a и b существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, что существует два различных значения разности чисел a и b: $a – b = c_1$ и $a – b = c_2$. Тогда, по определению разности, имеем: $a = b + c_1$ и $a = b + c_2$. Отсюда следует, что $b + c_1 = b + c_2$ и значит $c_1 = c_2$. Мы пришли к противоречию с нашим предположением. Следовательно, значение разности чисел a и b единственно.

Дистрибутивность умножения относительно вычитания: при $b < a$ и при любых натуральных c верно равенство $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$.

Правило вычитания числа из суммы: при $a \ge c$ имеем, что $(a + b) – c = (a – c) + b$; при $b \ge c$ имеем, что $(a + b) – c = a + (b – c)$; при $a \ge c$ и $b \ge c$ можно использовать любую из данных формул.

Правило вычитания суммы из числа: при условии, что $a \ge b +c$, имеем $a – (b + c) = (a – b) – c$.

Правило вычитания разности из числа: при $a > b$, имеем $a – (b – c) = (a + c) – b = (a – b) +c$.

Правило вычитания числа из разности: при $a > b$, имеем $(a – b) – c = a – (b + c)$.

Задача 63. Доказать, что если $a \geq c$, то $(a + b) – c = (a – c) + b$.

Доказательство. В первом случае разность существует, т.к. $a > c$. Обозначим ее через x: $a – c = x$, откуда $a = c + x$. Если $(a + b) – c = y$, то по определению разности $a + b = c + y$. Подставим в это равенство вместо a выражение $c + x$: $(c + x) + b = c + y$. Воспользуемся свойством ассоциативности сложения: $c + (x + b) = c + y$. Преобразуем это равенство: $x + b = y$. Заменив в данном равенстве x на выражение $a – c$, будем иметь $(a – c) + b = y$.

Таким образом, мы доказали: если $a \geq c$, то $(a + b) – c = (a - c) + b$.

Задача 64. Докажите, что при $b < a$ и при любых натуральных c верно равенство $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны произвольно, а c принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество таких натуральных чисел c, для которых верно равенство $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$.

Докажем, что $1 \in M$, т.е. что равенство $(a – b) \cdot 1 = a \cdot 1 – b \cdot 1$ истинно. Согласно свойству 1 из определения умножения имеем: $(a – b) \cdot 1 = a – b = a \cdot 1 – b \cdot 1$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. что из равенства $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$ следует равенство $(a – b) \cdot c' = a \cdot c' – b \cdot c'$.

По определению умножения, имеем: $(a – b) \cdot c' =(a – b) \cdot (c + 1) =$ $= (a – b) \cdot c – (a – b) \cdot 1 = (a \cdot c – b \cdot c) + (a – b) = (a \cdot c – b \cdot c + a) – b =$ $= (a \cdot c + a) – (b \cdot c + b) =a \cdot (c + 1) – b \cdot (c + 1) = a \cdot c' – b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что оно содержит c, следует, что и c' содержится в M. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$. Это значит, что равенство $(a – b) \cdot c = a \cdot c – b \cdot c$ верно для любых натуральных чисел c, а также для любых произвольных a и b.

Задача 65. Не выполняя вычислений, определите, значения каких выражений будут равны: а) (50 + 16) – 14; б) (50 – 14) + 16; в) (50 – 14) – 16; г) 50 + (16 – 14); д) 50 – (16 – 14); е) (50 + 14) – 16; ж) 50 – (16 + 14); з) 50 – 16 – 14; и) (50 – 16) – 14; к) (50 – 16) + 14?

Решение. Значения выражений а), б), г) равны: (50 + 16) – 14 = [правило вычитания числа из суммы] = (50 – 14) + 16 = 50 + (16 – 14).

Значения выражений д), к), е) равны: 50 – (16 – 14) = [правило вычитания разности из числа] = (50 + 14) – 16 = (50 – 16) + 14.

Значения выражений в), з), и) равны: (50 – 14) – 16 = (50 – 16) – 14 = [правило вычитания числа из разности] = 50 – 16 – 14.

6. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЦЕЛЫМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ

При аксиоматическом построении теории целых неотрицательных чисел деление обычно определяется как операция, обратная умножению.

Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $b \cdot c = a$.

Число $a : b$ называется *частным* чисел a и b, число a – *делимым,* число b – *делителем*.

Частное двух чисел существует и оно единственно.

Задача 66. Докажем, что, для того, чтобы частное двух натуральных чисел a и b существовало, необходимо, чтобы $b \leq a$.

Доказательство. Пусть частное двух натуральных чисел a и b существует, т.е. есть такое натуральное число c, что $b \cdot c = a$.

Так как для любого натурального числа 1 справедливо неравенство $1 \leq c$, то умножив обе его части на натуральное число b, получим $b \leq b \cdot c$. Но $b \cdot c = a$, следовательно, $b \leq a$.

Задача 67. Доказать, что если частное двух натуральных чисел a и b существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что существует два различных значения частного чисел a и b: $a : b = c_1$ и $a : b = c_2$. Тогда, по определению разности, имеем: $a = b \cdot c_1$ и $a = b \cdot c_2$. Отсюда следует, что $b \cdot c_1 = b \cdot c_2$ и значит $c_1 = c_2$. Мы пришли к противоречию с нашим предположением. Следовательно, значение частного чисел a и b единственно.

Пусть даны целое неотрицательное число a и $b = 0$. Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Предположим, что частное такого числа и нуля существует. Тогда, по определению деления, имеем $a = c \cdot 0$, откуда $a = 0$. Пришли к противоречию. Значит, ***частное чисел a ≠ 0 и b = 0 не существует.***

Пусть $a = 0$. Предположим, что частное чисел $a = 0$ и $b = 0$ существует. Тогда найдется целое неотрицательное число c, что $0 = c \cdot 0$. Т.о., частным чисел $a = 0$ и $b = 0$ может быть любое число, т.е. результат деления определяется не единственным образом. В математике считают, что ***деление нуля на нуль невозможно.***

Исходя из определения частного натуральных чисел и условия его существования, можно обосновать известные правила деления суммы, разности, произведения на число.

Правило деления суммы на число. Для того чтобы разделить сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить. Пусть числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Правило деления разности на число. Для того чтобы разделить разность на число, достаточно разделить это число на уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе. Пусть числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a - b$ делится на c, т.е. $(a - b) : c = a : c - b : c$.

Правило деления числа на произведение. Для того чтобы разделить число на произведение, достаточно это число разделить на один множитель, а затем полученное частное разделить на другой множитель. Пусть натуральное число a делится на натуральные числа b и c, то $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Правило умножения числа на частное двух чисел. Чтобы умножить число на частное двух чисел, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель, т.е. $a \cdot (b : c) = (a \cdot b): c$.

Правило деления произведения на число. Чтобы разделить произведение нескольких целых неотрицательных чисел на натуральное число, достаточно один из множителей разделить на это число и полученное частное умножить на оставшиеся множители, т.е., если $a : n$, то $(a \cdot b \cdot c) : n = (a : n) \cdot b \cdot c$.

Задача 68. Докажите, что если числа a и b делятся на число c, то и их сумма $a + b$ делится на c. Частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно сумме частных получаемых при делении a на c и b на c, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Доказательство. Так как число a делится на число c, то существует натуральное число $x = a : c$, что $a = c \cdot x$. Аналогично существует натуральное число $y = b : c$, что $b = c \cdot y$. Но тогда $a + b = c \cdot x + c \cdot y = c \cdot (x + y)$. Это значит, что сумма $a + b$ делится на число c, причем частное при делении суммы $a + b$ на число c равно $x + y$, т.е. $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Задача 69. Докажите, что если натуральное число a делится на натуральное число c, то для любого натурального числа b произведение $a \cdot b$ делится на c. При этом частное, получаемое при делении произведения $a \cdot b$ на число c, равно произведению частного, получаемого при делении a на c, и числа b: $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$.

Доказательство. Так как число a делится на число c, то существует натуральное число $x = a : c$, что $a = c \cdot x$. Умножив обе части этого равенства на b, получим $a \cdot b = (c \cdot x) \cdot b$. Поскольку умножение ассоциативно, то $(c \cdot x) \cdot b = c \cdot (x \cdot b)$. Отсюда $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$.

Задача 70. Найдите значение выражения рациональным способом:

а) (7 · 63) : 7; б) (3 · 4 · 5) : 15; в) (15 · 18) : (5 · 6); г) (12 · 21) : 14.

Решение. а) (7 · 63) : 7 = [правило деления произведения на число] = (7 : 7) · 63 = 1 · 63 = 63;

б) (3 · 4 · 5) : 15 = [коммутативность и ассоциативность умножения] = ((3 · 5) · 4) : 15 = (15 · 4) : 15 = [правило деления произведения на число] = (15 : 15) · 4 = 1 · 4 = 4;

в) (15 · 18) : (5 · 6) = [правило деления числа на произведение] = ((15 · 18) : 5) : 6 = [правило деления произведения на число] = ((15 : 5) · 18) : 6 = (3 · 18) : 6 = [правило деления произведения на число] = (18 : 6) · 3 = 3 · 3 = 9;

г) $(12 \cdot 21) : 14 = (12 \cdot 21) : (2 \cdot 7) =$ [правило деления числа на произведение] $= ((12 \cdot 21) : 2) : 7 =$ [правило деления произведения на число] $=$ $((12 : 2) \cdot 21) : 7 = (6 \cdot 21) : 7 =$ [правило деления произведения на число] $=$ $(21 : 7) \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18$.

Рассматривая деление на множестве целых неотрицательных чисел, мы имеем в виду деление нацело, т.е. при котором частное является также целым неотрицательным числом. Но такое частное существует не всегда. Например, нельзя разделить на 7 число 29. Но существуют числа 4 и 1 такие, что $29 = 7 \cdot 4 + 1$. Говорят, что мы разделили число 29 на 7 с остатком 1, а число 4 называют неполным частным.

Разделить натуральное число a на натуральное число b ***с остатком*** – это значит найти такие натуральные целые числа q и r, что $a = b \cdot q + r$, где $0 \le r < b$.

Из этого определения следует, что делить с остатком можно не только большее число на меньшее, но и меньшее на большее. Например, при делении числа 6 на 9 получаем неполное частное, равное 0, а остаток равен 6: $6 = 9 \cdot 0 + 6$. Вообще, если $a < b$, то при делении числа a на b с остатком получаем $q = 0$ и $r = a$.

Задача 71. При делении числа a на b с остатком получили частное q и остаток r. Найдите: а) число a, если $b = 11$, $q = 6$, $r = 3$; б) число b, если $a = 137$, $q = 11$, $r = 5$; в) число q, если $a = 96$, $b = 31$, $r = 3$; г) число r, если $a = 123$, $b = 10$, $q = 12$.

Решение. а) Найдем число a, если $b = 11$, $q = 6$, $r = 3$.

Согласно определению деления с остатком число a имеет вид: $a = 11 \cdot 6 + 3$. Т.е. $a = 66 + 3 = 69$.

б) Найдем число b, если $a = 137$, $q = 11$, $r = 5$.

Тогда число a имеет вид: $137 = b \cdot 11 + 5$. Откуда найдем число b: $b = (137 - 5): 11 = 132 : 11 = 12$.

в) Найдем число q, если $a = 96$, $b = 31$, $r = 3$.

Тогда число a имеет вид: $96 = 31 \cdot q + 3$. Откуда найдем $q = (96 - 3) : 31 = 3$.

г) Найдем число r, если $a = 123$, $b = 10$, $q = 12$.

По определению деления с остатком, число a имеет вид: $123 = 10 \cdot 12 + r$. Откуда $r = 123 - 10 \cdot 12 = 123 - 120 = 3$.

Задача 72. При делении на 6 чисел a и b получаются соответственно остатки 3 и 2. Какой остаток при делении на 6 дает сумма $a + b$?

Решение. Пусть число a делится на 6 с остатком 3: $a = 6 \cdot q_1 + 3$, а число b делится на число 6 с остатком 2: $b = 6 \cdot q_2 + 2$. Тогда сумма $a + b = (6 \cdot q_1 + 3) + (6 \cdot q_2 + 2) = (6 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2) + 3 + 2 = 6 \cdot (q_1 + q_2) + 5$. Так как $q_1 + q_2$ есть целое неотрицательное число, то его можно представить как q. Т.е. сумма $a + b = 6 \cdot q + 5$.

Значит, сумма $a + b$ при делении на 6 дает остаток 5.

Задача 73. При делении чисел a и b на 9 получаются соответственно остатки 5 и 2. Какой остаток при делении на 9 дает произведение $a \cdot b$?

Решение. Пусть число a делится на 9 с остатком 5: $a = 9 \cdot q_1 + 5$, а число b делится на число 9 с остатком 2: $b = 9 \cdot q_2 + 2$. Тогда произведение $a \cdot b = (9 \cdot q_1 + 5)(9 \cdot q_2 + 2) = 81 \cdot q_1 \cdot q_2 + 45 \cdot q_2 + 18 \cdot q_1 + 10 =$ $= 81 \cdot q_1 \cdot q_2 + 45 \cdot q_2 + 18 \cdot q_1 + 9 + 1 = 9 \cdot (9 \cdot q_1 \cdot q_2 + 5 \cdot q_2 +$ $+ 2 \cdot q_1 + 1) + 1 = 9 \cdot q + 1$.

Значит, остаток при делении произведения $a \cdot b$ равен 1.

Задача 74. Разбейте множество от 7 до 30 на классы чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4. Сколько классов получилось?

Решение. Выпишем числа, которые при делении на 4 дают соответственно остатки 0, 1, 2, 3, при условии, что $0 \le r < b$.

Тогда образуется четыре множества:
первое, где при делении на 4 в остатке получается 0: {8, 12, 16, 20, 24, 28};
второе, где в остатке при делении на 4 получается 1: {9, 13, 17, 21, 25, 29};
третье – при делении на 4 в остатке получается 2: {10, 14, 18, 22, 26, 30};
четвертое, где при делении на 4 в остатке получается 3: {7, 11, 15, 19, 23, 27}.

Таким образом, получилось четыре класса.

Задача 75. Одно число на 62 больше другого. При делении одного из них на другое с остатком в частном получается 5 и в остатке 6. Найдите эти числа.

Решение. Пусть даны числа a и b такие, что $a = b + 62$. Деление числа a на b с остатком можно записать в виде: $a = b \cdot 5 + 6$. Тогда $b + 62 =$ $= b \cdot 5 + 6$. Решим полученное уравнение относительно b: $62 - 6 = b \cdot 5 - b$, $56 = 4 \cdot b$. Следовательно, $b = 14$. Откуда найдем $a = 76$.

7. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод доказательства, основанный на аксиоме Пеано 4, используют для доказательства многих математических свойств и различных утверждений. Основой для этого служит следующая теорема.

Теорема. Если утверждение $A(n)$ с натуральной переменной n истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = k$, следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k'$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел, для которых утверждение $A(n)$ истинно. Тогда из условия теоремы имеем: 1) $1 \in M$; 2) $k \in M \Rightarrow k' \in M$. Отсюда, на основании аксиомы 4, заключаем, что $M = N$, т.е. утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального n.

Метод доказательства, основанный на этой теореме, называется **методом математической индукции,** а аксиома – аксиомой индукции. Такое доказательство состоит из двух частей:

1) доказывают, что утверждение *A(n)* истинно для $n = 1$, т.е. что истинно высказывание *A(1);*
2) предполагают, что утверждение *A(n)* истинно для $n = k$, и, исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение *A(n)* истинно и для $n = k + 1$, т.е. что истинно высказывание $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

Если $A(1) \wedge A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ – истинное высказывание, то делают вывод о том, что утверждение *A(n)* истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции можно начинать не только с подтверждения истинности утверждения для $n = 1$, но и с любого натурального числа m. В этом случае утверждение *A(n)* будет доказано для всех натуральных чисел $n \geq m$.

Задача 76. Докажем, что для любого натурального числа истинно равенство $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Решение. Равенство $1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) = n^2$ представляет собой формулу, по которой можно находить сумму первых последовательных нечетных натуральных чисел. Например, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$ (сумма содержит 4 слагаемых), $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$ (сумма содержит 6 слагаемых); если эта сумма содержит 20 слагаемых указанного вида, то она равна $20^2 = 400$ и т.д. Доказав истинность данного равенства, получим возможность находить по формуле сумму любого числа слагаемых указанного вида.

1) Убедимся в истинности данного равенства для $n = 1$. При $n = 1$ левая часть равенства состоит из одного члена, равного 1, правая часть равна $1^2 = 1$. Так как $1 = 1$, то для $n = 1$ данное равенство истинно.

2) Предположим, что данное равенство истинно для $n = k$, т.е. что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Исходя из этого предположения, докажем, что оно истинно и для $n = k + 1$, т.е. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) =$ $= (k + 1)^2$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства.

По предположению, сумма первых k слагаемых равна k^2 и потому

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) =$$

$= k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$. Выражение $k^2 + 2k + 1$ тождественно равно выражению $(k + 1)^2$.

Следовательно, истинность данного равенства для $n = k + 1$ доказана.

Таким образом, данное равенство истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$.

Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

Задача 77. Доказать, что для любого натурального числа верно равенство $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

Решение. 1) Проверим истинность равенства при n=1: $\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 1+1}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ – истинное равенство, значит утверждение верно при n = 1.

2) Предположим, что утверждение верно и при $n = k$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}.$$

Докажем, исходя из предположения, что равенство верно для $n = k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=\frac{k+1}{3(k+1)+1} \quad (*).$$

Преобразуем левую часть равенства (*):

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=[\textit{т.к.}\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+$$

$$+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3k+1},\textit{то}]=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}==\frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{(3k+4)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

Т.о., мы получили выражение, тождественно равное выражению, стоящему в правой части равенства (*). Итак, данное равенство истинно для n = 1, и, из того, что равенство верно для некоторого $n = k$, мы получили, что оно верно и для $n = k$+1.

Тем самым, используя аксиому 4, мы доказали, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

Задача 78. Доказать, что для любого натурального числа верно равенство $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Решение. 1) Покажем истинность утверждения при n = 1. Левая часть равенства состоит из одного члена $1\cdot 1! = 1$, правая часть имеет вид $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 1$.

Т.е. для n = 1 данное равенство истинно.

2) Предположим, что утверждение верно при $n = k$. Тогда равенство примет вид $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! = (k + 1)! - 1$.

Покажем, что, если равенство верно для $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$:

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + k\cdot k! + (k + 1)\cdot(k + 1)! = (k + 2)! - 1$ (*). Преобразуем левую часть равенства (*) и получим:

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (1 + k + 1) \cdot (k+1)! - 1 = (k+2) \cdot (k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$

Т.е. мы получили выражение, тождественно равное выражению правой части равенства (*).

Следовательно, истинность нашего равенства для $n = k + 1$ доказана.

Таким образом, данное равенство истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$.

Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

Задача 79. Доказать, что для любого натурального числа верно равенство $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$.

Решение. 1) Проверим истинность данного равенства при *n=1.* $2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^1$, $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$ – истинно.

2) Предположим, что данное равенство верно при $n = k$:

$$2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^{k-1} = k \cdot 2^k.$$

Докажем теперь, что равенство верно и для $n = k + 1$:

$$2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^{k-1} + ((k+1)+1) \cdot 2^{(k+1)-1} = (k+1) \cdot 2^{k+1} \quad (*)$$

Заменим сумму *n* членов нашим предположением и получим следующее равенство: $k \cdot 2^k + (k+2) \cdot 2^k = (k+1) \cdot 2^{k+1}$.

Преобразуем левую часть:

$$k \cdot 2^k + (k+2) \cdot 2^k = 2^k \cdot (k + k + 2) = 2^k \cdot (2k+2) = 2^k \cdot 2 \cdot (k+1) = (k+1) \cdot 2^{k+1}.$$

Таким образом, данное равенство истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$.

Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

С помощью метода математической индукции можно доказывать истинность не только равенств, но и неравенств.

Задача 80. Доказать, что $3^n - 2^n \geq n$, где $n \in N$.

Решение. Проверим истинность неравенства при $n = 1$. Имеем $3^1 - 2^1 \geq 1$ – истинное неравенство.

Предположим, что неравенство верно при $n = k$, т.е. $3^k - 2^k \geq k$ – истинное неравенство. Докажем, исходя из предположения, что оно верно и при $n = k + 1$, т.е. $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq k + 1$ (*).

Преобразуем левую часть неравенства (*), учитывая, что $3^k \geq 2^k - k$:

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = 3^k \cdot k - 2^k \cdot 2 = 3 \cdot (2^k + k) - 2^k \cdot 2 = 3 \cdot 2^k + 3k - 2^k \cdot 2 = 3k + 2^k.$$

Но $3k + 2^k \geq k + 1$, значит и $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq k + 1$.

Итак, данное неравенство истинно для $n = 1$, и, из того, что неравенство верно для некоторого $n = k$, мы получили, что оно верно и для $n = k + 1$.

Тем самым, используя аксиому 4, мы доказали, что данное неравенство истинно для любого натурального числа.

Методом математической индукции можно доказать и иные утверждения.

Задача 81. Доказать, что для любого натурального числа истинно утверждение $(6^{2n-1}+1)\vdots 7$.

Решение. Проверим истинность утверждения при n = 1: $(6^{2\cdot 1-1}+1)\vdots 7$ – истинное высказывание.

Предположим, что данное утверждение верно при n = k: $(6^{2k-1}+1)\vdots 7$. Покажем, используя это, истинность утверждения при n = k + 1: $(6^{2(k+1)-1}+1)\vdots 7$.

Преобразуем выражение: $(6^{2(k+1)-1}+1)=(6^{2k+1}+1)$. Найдем разность k и k+1 членов. Если окажется, что полученная разность кратна 7, а по предположению вычитаемое делится на 7, то и уменьшаемое также кратно 7:

$$(6^{2k+1}+1)-(6^{2k-1}+1)=6^{2k}\cdot 6+1-6^{2k}\cdot\frac{1}{6}-1=6^{2k}(6-\frac{1}{6})=6^{2k}\cdot\frac{35}{6}=\frac{6^{2k}}{6}\cdot 35=6^{k}\cdot 35.$$

Произведение $6^k\cdot 35$ кратно 7, следовательно, и $(6^{2k-1}+1)\vdots 7$.

Таким образом, данное утверждение истинно для n = 1 и из истинности его для n = k следует истинность для n = k + 1.

Тем самым доказано, что данное утверждение истинно для любого натурального числа.

Задача 82. Доказать, что для любого натурального числа истинно утверждение $(8^n+6)\vdots 7$.

Решение. Проверим истинность утверждения при n = 1: $(8^1+6)\vdots 7$ – истинное высказывание.

Предположим, что данное нам утверждение истинно при n = k: $(8^k+6)\vdots 7$. Докажем, что оно верно и для n = k + 1, т.е. $(8^{k+1}+6)\vdots 7$. Преобразуем наше утверждение:

$$8^{k+1}+6=8^k\cdot 8+6=8^k\cdot(7+1)+6=8^k\cdot 7+8^k+6=8^k\cdot 7+(8^k+6).$$

Так как $8^k\cdot 7$ делится на 7, а выражение 8^k+6 делится на 7 по нашему предположению, то по теореме о делимости суммы имеем, что и $(8^{k+1}+6)\vdots 7$.

Мы показали, что данное выражение кратно 7 при n = 1, и из того, что оно кратно 7 при n = k, следует, что оно кратно 7 и при n = k + 1.

Значит, данное утверждение верно при любом натуральном n.

Задача 83. Доказать, что для любого натурального числа $n \geq 2$ истинно утверждение $(7^{2n}-1)\vdots 24$.

Решение. 1) Проверим истинность утверждения при n = 2: $(8^1+6)\vdots 7$ – истинное высказывание.

2) Предположим, что данное нам утверждение истинно при $n = k$: $(7^{2k} - 1) \vdots 24$.

Докажем, что оно верно и для $n = k + 1$, т.е. $(7^{2(k+1)} - 1) \vdots 24$. Преобразуем наше утверждение: $(7^{2(k+1)} - 1) \vdots 24 = 7^{2k+2} - 1 = 7^{2k} \cdot 49 - 1 = 7^{2k}(48 + 1) - 1 =$ $= 7^{2k} \cdot 48 + (7^{2k} - 1)$.

Так как $7^{2k} \cdot 48$ делится на 24, а выражение $(7^{2k} - 1)$ делится на 24 по нашему предположению, то по теореме о делимости суммы имеем, что $7^{2k} \cdot 48 + (7^{2k} - 1)$ и $(7^{2(k+1)} - 1) \vdots 24$.

Мы показали, что данное выражение кратно 24 при $n = 2$, и из того, что оно кратно 24 при $n = k$, следует, что оно кратно 24 и при $n = k + 1$.

Значит данное утверждение $(7^{2n} - 1) \vdots 24$ истинно при любом натуральном n.

III. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК МЕРА ВЕЛИЧИНЫ

1. ПОНЯТИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Величины представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются величинами одного рода или *однородными величинами*. Например, длина стола и длина комнаты, масса яблок и масса зерна, стоимость карандашей и стоимость крупы и т.п.

Такие ***величины обладают рядом свойств*****:**

1. Любые величины одного рода сравнимы: $a > b$, $a < b$, $a = b$. Например, длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше длины катета.

2. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода: $a + b = c$, например, если a – масса яблок, b – масса груш, то $c = a + b$ – общая масса указанных фруктов.

3. Величины одного и того же рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение: разностью величин a и b называется величина $c = a - b$ такая, что $a = c + b$. Например, если a – масса овощей, из которых огурцы имеют массу b, то масса моркови определится как $a - b = c$.

4. Величину умножают на действительное число, получая в результате величину того же рода: $b = x \cdot a$, величину b называют произведением величины a на число x. Например, если a – время отводимое на один урок, то, умножив a на 3 получим $b = 3a$ – время трех уроков.

5. Величины одного рода делят, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число: частным величин a и b называется положительное действительное число $x = a : b$, что $a = x \cdot b$. Например, если a – длина отрезка АВ, и отрезок АВ состоит из 4 отрезков, равных b, то $a : b = 4$.

Если задана величина a и выбрана единица величины e (того же рода), то измерить величину a – значит найти такое положительное число x, что $a = x \cdot e$. Число x называется ***численным значением величины** a* при единице e или мерой величины a при единице e: $\boldsymbol{x = m_e(a)}$. Например, 7 кг = 7 · 1 кг.

Используя вышеперечисленные свойства, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12} \cdot 1$ ч и 1 ч = 60 мин, то $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12} \cdot (60 \cdot 1$ мин$) = (\frac{5}{12} \cdot 60) \cdot$ 1 мин = 25 мин.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется скалярной. Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

Так, например, если величины a и b измерены при помощи единицы e, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$a = b \Leftrightarrow m(a) = m(b);$

$a < b \Leftrightarrow m(a) < m(b);$

$a > b \Leftrightarrow m(a) > m(b).$

Например, если массы двух тел таковы, что a = 5 кг, b = 3 кг, то можно утверждать, что $a > b$, поскольку 5 > 3.

Далее, выясняя смысл натурального числа как меры величины, все рассуждения будем вести на примере одной величины – длины отрезка.

2. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК ЗНАЧЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА. СМЫСЛ СУММЫ И РАЗНОСТИ

Считают, что отрезок a состоит из отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы.

Если отрезок a состоит из n отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то число n называют численным значением длины данного отрезка a при единице e: $a = n \cdot e$. Например, численным значением длины отрезка a, изображенного на рис. 16, при единице e является число 6: $a = 6e$. Если в качестве единицы выбрать другой отрезок, например e_1, то длина отрезка a будет состоять из 3 отрезков e_1: $a = 3e_1$.

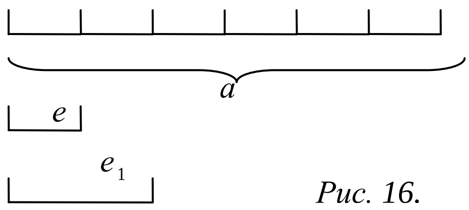


Рис. 16.

Таким образом, ***натуральное число как численное значение длины отрезка*** a показывает, из скольких единичных отрезков e слагается отрезок a. При выбранной единице e это число единственное.

Пусть отрезок a состоит из отрезков b и c и $b = me$, $c = ne$, где m и n – натуральные числа. Тогда отрезок b разбивается на m частей, каждая из которых равна единичному отрезку e, а отрезок c – на n таких частей. Весь отрезок a разбивается на $m + n$ таких частей. Тогда ***сумму натуральных чисел m и n*** можно рассматривать как значение длины отрезка a, состоящего из отрезков b и c, длины которых выражаются натуральными числами m и n: $a = b + c = m_e(b) + n_e(c) = (m + n)e$.

Например, числа 3 и 8 являются результатами измерения длин отрезков b и c при помощи единицы e, т.е. $b = 3e$, $c = 8e$, и отрезок a состоит из отрезков b и c. Тогда $a = b + c = 3e + 8e = (3 + 8)e = 11e$.

Если отрезок a состоит из отрезков b и c, и длины отрезков a и b выражаются натуральными числами m и n при выбранной единице e, то длина отрезка c выражается как разность отрезков a и b и равна разности значений длин этих отрезков $m – n$. Т.е. ***разность натуральных чисел m и n*** можно рассматривать как значение длины отрезка c, являющегося разностью отрезков a и b, длины которых выражены натуральными числами m и n соответственно: $c = a – b = m_e(a) – n_e(b) = (m – n)e$.

Например, если отрезок $a = 7e$ и состоит из отрезков b и c, причем $b = 5e$, то $c = a – b = 7e – 5e = (7 – 5)e = 2e$.

Такой подход к сложению и вычитанию натуральных чисел связан не только с измерением длин отрезков, но и с измерением других величин.

Задача 84. Обоснуйте выбор действия задачи: «Купили 5 кг картофеля и 2 кг моркови. Сколько килограммов овощей купили?»

Решение. Изобразим массу картофеля в виде отрезка c, а массу моркови – в виде отрезка b. Тогда массу купленных овощей можно изобразить в виде отрезка, состоящего из отрезков b и c (рис. 17).

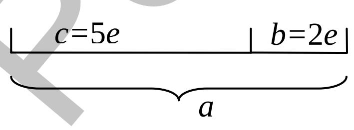


Рис. 17.

Так как численное значение отрезка a равно сумме численных значений отрезков c и b, то массу купленных овощей можно найти действием сложения: $a = c + b = n_e(c) + m_e(b) = (n + m)e =$ 5 кг + 2 кг = $= 5 \cdot 1$ кг + $2 \cdot 1$ кг = $(5 + 2) \cdot 1$ кг = $7 \cdot 1$ кг = 7 кг.

Ответ: купили 7 кг овощей.

Задача 85. Сестре 7 лет, а брат на 2 года старше сестры. Сколько лет брату? Решите задачу, обосновав выбор действий.

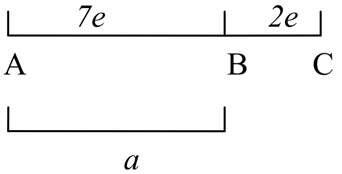


Рис. 18.

Решение. Изобразим возраст сестры с помощью отрезка a. Тогда возраст брата можно изобразить при помощи отрезка АВ, равного a, и отрезка ВС, изображающего 2 года (рис. 18).

Так как значение длины отрезка c = АС равно сумме значений длин слагаемых отрезков, то возраст брата можно найти сложением: c = АВ + ВС = 7 лет + 2 года = $7 \cdot 1$ год + $2 \cdot 1$ год = $(7 + 2) \cdot 1$ год = 9 лет.

Ответ: брату 9 лет.

Задача 86. Объясним, почему следующая задача решается при помощи вычитания: «Купили 6 кг фруктов, из них 4 кг яблок и остальные груши. Сколько килограммов груш купили?»

Решение. В задаче рассматривается масса фруктов, известно ее численное значение. Эта масса складывается из массы яблок, численное значение которой известно, и массы груш, численное значение которой нужно найти. Изобразим массу фруктов при помощи отрезка a, который состоит из отрезков b – массы яблок и c – массы груш (рис. 19).

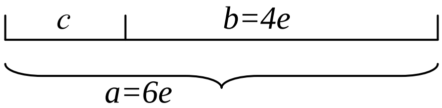


Рис. 19.

Тогда массу груш можно получить, вычитая из всей массы фруктов массу яблок. Численное значение массы груш находят действием вычитания: $c = a - b = m_e(a) - n_e(b) = (m - n)e$. Т.о., c = 6 кг – 4 кг = = $6 \cdot 1$ кг – $4 \cdot 1$ кг = $(6 - 4) \cdot 1$ кг = 2 кг.

Ответ: купили 2 кг груш.

Задача 87. От ленты отрезали 5 м, а потом еще 3 метра. Сколько метров ленты отрезали? Решите задачу и обоснуйте выбор действия.

Решение. Изобразим первый отрезанный кусок в 5 м с помощью отрезка a, а второй кусок в 3 м – при помощи отрезка b (рис. 20). Тогда всю длину отрезанной ленты можно изобразить при помощи отрезка $c = a + b$. Численное значение такого отрезка будет равно сумме численных значений длин отрезанных кусков: $m_e(c) = m_e(a) + n_e(b)$. Значит, задача решается сложением: c = 5 м + 3 м = $5 \cdot 1$ м + $3 \cdot 1$ м = $(5 + 3) \cdot 1$ м = = 8 м.

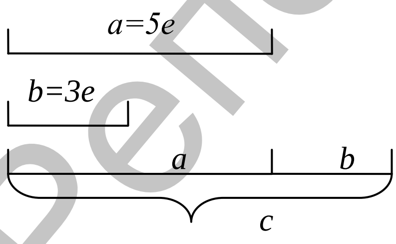


Рис. 20.

Ответ: отрезали всего 8 м ленты.

Задача 88. Высота стола 7 дм, а высота стула 4 дм. На сколько дециметров стол выше стула? Решите задачу и обоснуйте выбор действий.

Решение. В задаче идет речь о двух величинах – высоте стола и высоте стула. Известно численное значение высоты стола и численное значение высоты стула. Необходимо найти разницу в высоте данных предметов. Изобразим высоту стола при помощи отрезка $a = 7e$, высоту стула при помощи отрезка $b = 4e$ (рис. 21). Тогда разницу между высотой стола и высотой стула можно изобразить при помощи отрезка c, равного длине отрезка a без b, т.е. $m_e(c) = m_e(a) - m_e(b) = 7e - 4e$.

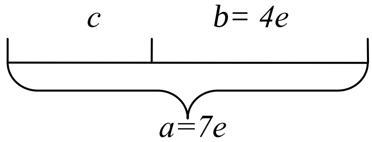


Рис. 21.

Значит, задачу можно решить при помощи действия вычитания: $c = 7$ дм – 4 дм = = $7 \cdot 1$ дм – $4 \cdot 1$ дм = $(7 - 4) \cdot 1$ дм = 3 дм.

Ответ: стол выше стула на 3 дм.

Задача 89. В одном кувшине 5 л молока, а в другом на 3 л меньше. Сколько литров молока в другом кувшине? Объясните выбор действия при решении данной задачи.

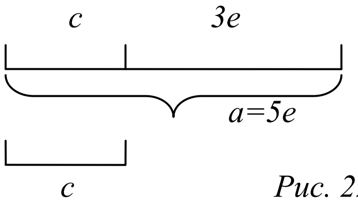


Рис. 22.

Решение. В данной задаче рассматриваются две величины – емкость одного кувшина, численное значение которой известно, и емкость другого кувшина, численное значение которой надо найти. При этом известно, что численное значение второй величины на $3e$ меньше численного значения первой величины. Изобразим емкость первого кувшина при помощи отрезка $a = 5e$ (рис. 22). Тогда емкость второго кувшина можно изобразить отрезком c, который меньше отрезка a на $3e$.

Значит, задачу можно решить вычитанием: $c = 5e - 3e = 5$ л – 3 л = = $5 \cdot 1$ л – $3 \cdot 1$ л = $(5 - 3) \cdot 1$ л = 2 л.

Ответ: во втором кувшине 2 л молока.

3. СМЫСЛ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН

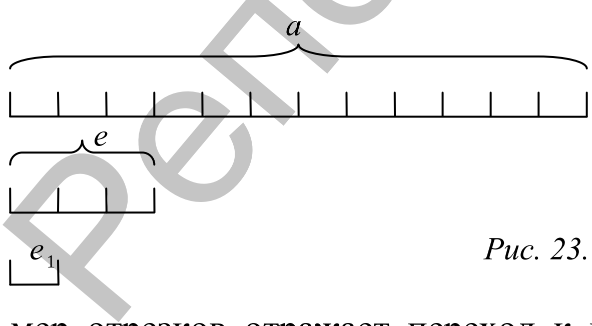


Рис. 23.

Если отрезок a состоит из p отрезков, равных e ($a = p \cdot e$), а отрезок e состоит из q отрезков, равных e_1 ($e = q \cdot e_1$), то мера отрезка a при единице длины e_1 будет равна $p \cdot q$. Таким образом, ***умножение натуральных чисел*** как мер отрезков отражает переход к новой (более мелкой) единице длины (рис. 23).

Действительно, число частей отрезка *a,* равных отрезку e_1, выражается так так: $\underbrace{p + p + p + \ldots + p}_{q \text{ слагаемых}}$ – и равно $p \cdot q$. Значит, $a = (p \cdot q) \cdot e_1$.

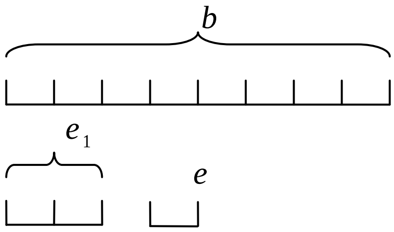


Рис. 24.

Пусть отрезок b состоит из m отрезков, равных e ($b = me$), а отрезок e_1 состоит из n отрезков, равных e ($e_1 = ne$). Тогда мера отрезка b при единице e_1 будет равна $m : n$. Действительно, если $e = ne$, то $e = e_1 : n$. Тогда $b = me = m(e_1 : n) = (m : n) \cdot e_1$ (рис. 24).

Таким образом, ***деление натуральных чисел***, рассматриваемых как значения длин отрезков, отражает переход к новой (более крупной) единице длины.

Задача 90. Объясним смысл произведения $4 \cdot 3$, если 4 и 3 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть 4 – мера измерения величины X при единице e, а 3 – мера измерения величины e при единице e_1, т.е. e – первоначальная единица величины, e_1 – новая единица величины. Тогда $4 \cdot 3$ – это численное значение величины X при единице e_1 (рис. 23). Пусть X – длина отрезка a. Если e – первоначальная единица длины данного отрезка, то $X = 4 \cdot e$. Если e_1 – новая единица длины, такая, что $e = 3 \cdot e_1$, то $X = 4 \cdot e = 4 \cdot (3 \cdot e_1) = (4 \cdot 3) \cdot e_1 = 12\, e_1$.

Задача 91. Объясним смысл частного 8 : 2, если 8 и 2 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть 8 – мера измерения величины X при единице e, а 2 – мера измерения величины e_1 при единице e. Тогда 8 : 2 – это численное значение величины X при единице e_1 (рис. 24). Пусть X – длина отрезка b. Если e – первоначальная единица длины данного отрезка, то $X = 8 \cdot$ е. Если e_1 – новая единица длины. Такая, что $e_1 = 2 \cdot e$, то $X = 8 \cdot e = 8 \cdot (e_1 : 2) = (8 : 2) \cdot e_1 = 4\, e_1$.

Задача 92. В буфете было 5 банок сока, по 3 л в каждой банке. Сколько всего сока в этих банках? Обоснуйте выбор способа действия при решении данной задачи.

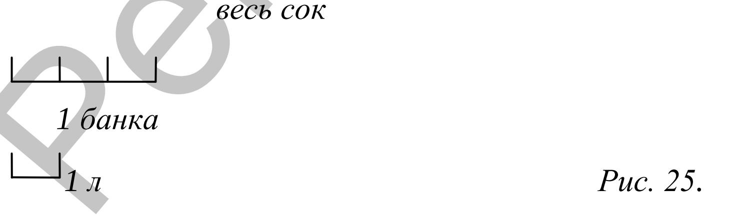


Рис. 25.

Решение. В задаче идет речь о двух единицах объема, занимаемого соком, – банках и литрах. Сначала он измерен банками, а затем его надо измерить новой единицей – литром, причем известно, что в старой единице (банке) содержится 3 новые единицы (3 литра) (рис. 25). Значит, $5 \cdot 1б = 5 \cdot (3\ л) = 5 \cdot (3 \cdot 1\ л) = (5 \cdot 3) \cdot 1\ л = 15\ л$.

Таким образом, мы получили измерения объема сока в более мелкой единице – литрах.

Ответ: в буфете было 15 л сока.

Задача 93. Обоснуйте выбор действия при решении задачи: «Купили 3 кг моркови, а картофеля в 2 раза больше. Сколько килограммов картофеля купили?»

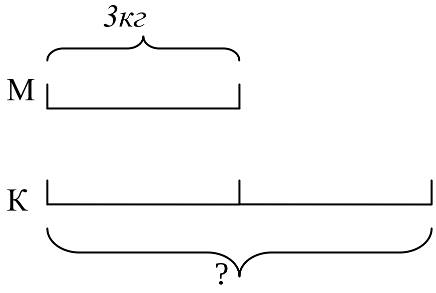


Рис. 26.

Решение. В задаче рассматривается масса моркови и масса картофеля, причем численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в два раза больше первой.

Если мы воспользуемся вспомогательной моделью задачи (рис. 26), то можно сказать, что масса картофеля складывается из двух масс по 3 кг, и следовательно, по четвертому свойству величин (об умножении величины на натуральное число) численное значение массы картофеля можно найти, умножив 3 на 2. Найдя значение выражения $3 \cdot 2$, получим ответ на вопрос задачи: $3 \cdot 2 = 6$. Значит, купили 6 кг картофеля.

Ответ: купили 6 кг картофеля.

Задача 94. Обоснуйте выбор действия при решении следующей задачи: «В одной коробке 6 карандашей. Сколько карандашей в трех таких коробках?».

Решение. В задаче идет речь о количестве карандашей, которое сначала измерено коробками и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице – карандаше, причем известно, что коробка – это 6 карандашей.

Тогда 3 кор. = $3 \cdot 1$ кор. = $3 \cdot$ (6 кар.) = $3 \cdot$ ($6 \cdot 1$ кар.) = ($3 \cdot 6$) $\cdot$ 1 кар.= = 18 кар.

Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой – карандаш.

Ответ: всего было 18 карандашей.

Задача 95. Решите задачу и обоснуйте выбор действий: «12 кг варенья надо разложить в банки, по 3 кг в каждую. Сколько банок потребуется?».

Решение. В задаче рассматриваются две единицы измерения – килограмм и банка. В условии масса варенья измерена килограммами.

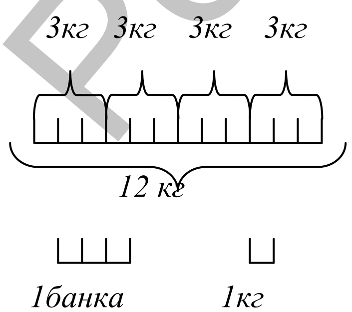


Рис. 27.

Так как в задаче требуется выразить результат измерения массы варенья в банках, т.е. в новой единице, и известно, что в новой единице содержится три старых (1 банка = 3 кг), то рассуждения, связанные с поиском численного значения массы при единице «банка» можно представить в таком виде:

$12\text{ кг} = 12 \cdot 1\text{ кг} = 12 \cdot \frac{1}{3}\text{ б.} = 12 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 1\text{ б.}) = (12 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 1\text{ б.} = (12 : 3) \cdot 1\text{ б.} =$
$= 4 \cdot 1\text{ б.} = 4$ банки (рис. 27).

Следовательно, задача решается делением, поскольку нужно перейти от одной единицы величины к более крупной другой: 12 кг : 3 кг = 4 банки.

Ответ: потребуется 4 банки.

Задача 96. Обосновать выбор действия при решении задачи: «На садовом участке посадили 15 кустов смородины, по 5 в каждом ряду. Сколько было рядов?»

Решение. В задаче рассматривается количество смородины, которое измерено сначала при помощи единицы измерения – куст. И известно численное значение заданной величины. Требуется найти численное значение той же величины при условии, что она измеряется новой единицей – рядом. Причем известно, что 1 ряд = 5 кустов, откуда 1 куст = $\frac{1}{5}$ ряда (рис. 28).

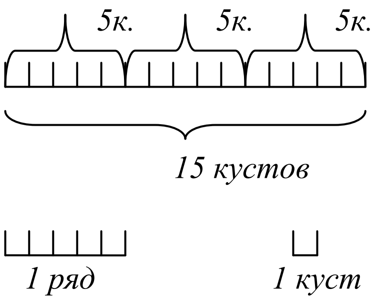


Рис. 28.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения количества смородины при единице «куст», можно представить в следующем виде: $15\text{ кустов} = 15 \cdot 1\text{ куст} = 15 \cdot \frac{1}{5}\text{ ряда} = 15 \cdot (\frac{1}{5} \cdot 1\text{ ряд}) =$

$(15 \cdot \frac{1}{5}) \cdot 1\text{ ряд} = (15 : 5) \cdot 1\text{ ряд} = 3 \cdot 1\text{ ряд} = 3$ ряда.

Значит, задача решается делением, т.к. необходимо перейти от одной единицы величины к другой, более крупной: 15 кустов : 5 кустов = 3 ряда.

Ответ: получилось 3 ряда смородины.

Задача 97. Сестре 9 лет. Брат в 3 раза моложе. Сколько лет брату? Решите задачу и объясните выбор действия.

Решение. Изобразим возраст сестры при помощи отрезка $a = 9e$, где $e = 1$ год. Тогда возраст брата можно изобразить при помощи отрезка c, причем известно, что три таких отрезка составляют возраст сестры: $3 \cdot c = a$. Значит $c = \frac{1}{3} \cdot a$ (рис. 29). Рассуждения, связанные с поиском численного значения возраста брата, можно представить так:

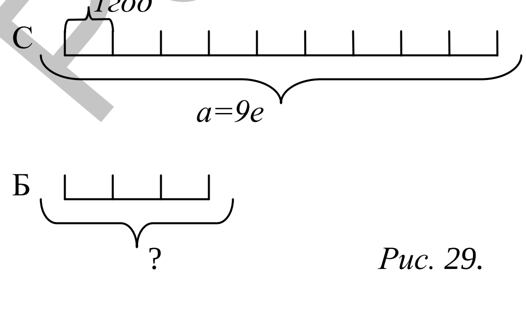


Рис. 29.

$9 \cdot 1$ год $= 9 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 1$ год$)=(9 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 1$ год $=$ $(9 : 3) \cdot 1$ год $= 3 \cdot 1$ год $= 3$ года. Значит, возраст брата можно найти делением – разделив возраст сестры на три: 9 лет : 3 = 3 года.

Ответ: брату 3 года.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОТРЕЗКОВ

Задача 98. У Алеся, Миши и Лени вместе 27 орехов. Известно, что у Алеся на 3 ореха больше, чем у Миши, а у Миши на 3 больше, чем у Лени. Сколько орехов у каждого?

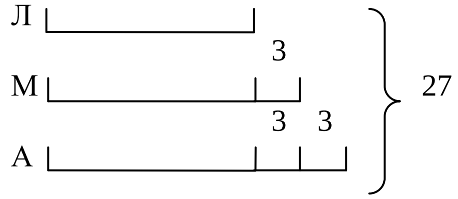


Рис. 30.

Решение. В задаче требуется найти три числа по их сумме и разностям. Условие задачи представим с помощью отрезков (рис. 30).

Задачу можно решить тремя способами. Каждый из них основан на предположении, что орехов у детей поровну.

Способ 1. Сделаем так, чтобы у Лени и Алеся орехов было столько же, сколько у Миши. Для этого Лене надо добавить 3 ореха, а у Алеся забрать 3 ореха. При этом общее количество орехов не меняется (рис. 31).

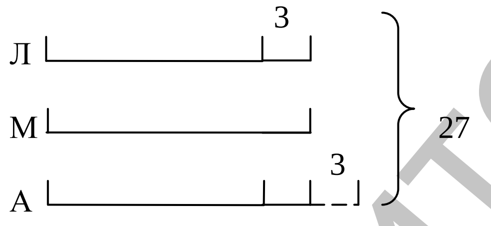


Рис. 31.

Получаем решение:

1) 27 : 3 = 9 (ор.) – было у Миши;
2) 9 + 3 = 12 (ор.) – было у Алеся;
3) 9 – 3 = 6 (ор.) – было у Лени.

Уравнивая количество орехов у каждого мальчика по Лене и по Алесю, получаем еще два способа решения.

Способ 2. Чтобы у Миши и Алеся было орехов столько же, сколько у Лени, надо у Миши забрать 3 ореха, а у Алеся – 6 орехов (3 + 3). При этом общее количество орехов у мальчиков уменьшится (рис. 32).

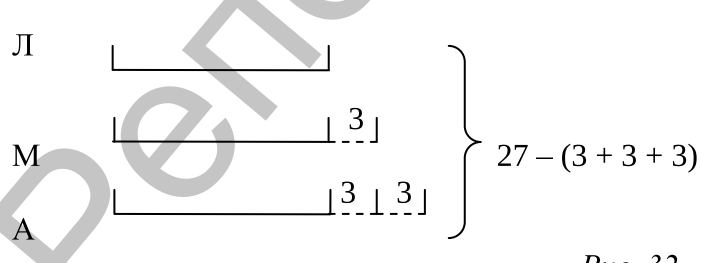


Рис. 32.

Получаем решение:

1) 3 + 3 = 3 = 9 (ор.) – на столько орехов уменьшилось;
2) 27 – 9 = 18 (ор.) – стало;
3) 18 : 3 = 6 (ор.) – было у Лени;
4) 6 + 3 = 9 (ор.) – было у Миши;
5) 9 + 3 = 12 (ор.) – было у Алеся.

Способ 3. Чтобы у Миши и Лени было орехов столько, сколько у Алеся, надо Мише добавить 3 ореха, а Лене – 6 орехов (3 + 3). При этом общее количество орехов увеличится (рис. 32).

Получаем решение: 1) 3 + 3 + 3 = 9 (ор.) – столько орехов добавилось;

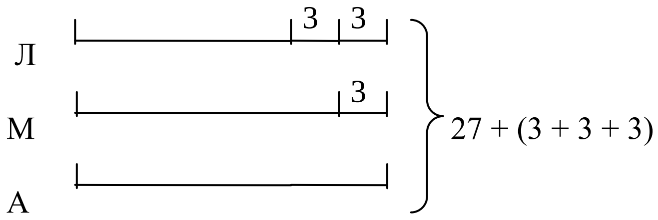


Рис. 33.

2) 27 + 9 = 36 (ор.) – стало;
3) 36 : 3 = 12 (ор.) – было у Алеся;
4) 12 – 3 = 9 (ор.) – было у Миши;
5) 9 – 3 = 6 (ор.) – было у Лени.

Ответ: у Лени 6 орехов, у Миши 9 орехов, у Алеся 12 орехов.

Задача 99. У Андрея и Бори вместе 11 марок, у Андрея и Вовы 12 марок, у Бори и Вовы 13 марок. Сколько марок у Андрея, Бори и Вовы вместе?

Решение. Условие этой задачи удобно представить отрезками. Пусть отрезок *а* обозначает количество марок у Андрея, отрезок *б* – количество марок у Бори, отрезок *в* – количество марок у Вовы.

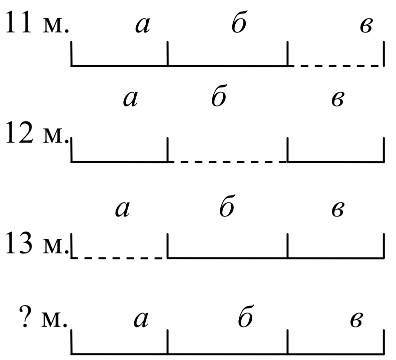


Рис. 34.

Тогда получаем рисунок (рис. 34). Заметим, что если сложить числа 11, 12, 13, то в общей сумме количество марок каждого мальчика будет учитываться дважды. Решаем:

1) 11 + 12 + 13 = 36 (м.) – удвоенное количество всех марок;

2) 36 : 2 = 18 (м.) – всего марок у детей.

Ответ: 18 марок у Андрея, Бори, Вовы вместе

Задача 100. Ваня говорит Пете: «Будь у меня на 4 яблока больше, чем теперь, то у меня было бы вдвое больше, чем у тебя». Сколько яблок у каждого, если у обоих 26 яблок?

Решение. Если бы у Вани было на 4 яблока больше, то вместе у мальчиков было бы также на 4 яблока больше:

1) 26 + 4 = 30 (ябл.) – было бы вместе.

При этом оказалось бы ситуация, изображенная на рис. 35.

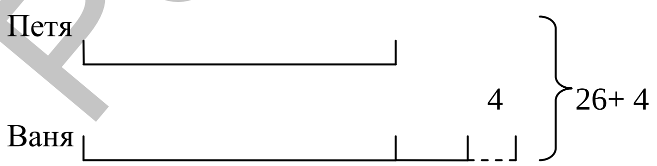


Рис. 35.

Три одинаковые части составляют 30 яблок.
2) 30 : 3 = 10 (ябл.) – одна часть (было у Пети);
3) 26 – 10 = 16 (ябл.) – было у Вани.

Ответ: у Пети было 10 яблок, у Вани – 16 яблок.

Задача 101. У Сережи было тетрадей вдвое больше, чем у Димы. Когда Сережа купил еще 6 тетрадей, то у него стало тетрадей в 5 раз больше, чем у Димы. Сколько тетрадей было у каждого первоначально?

Решение. Рассуждения проводим с помощью рис. 36.

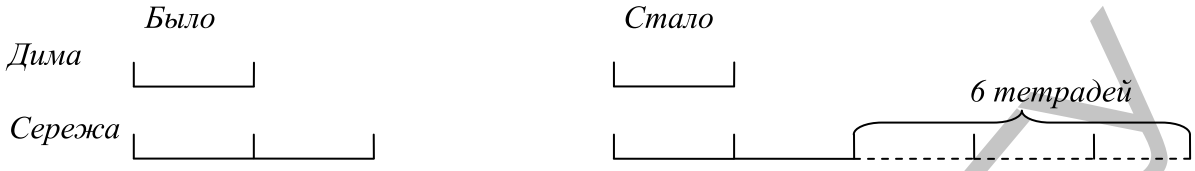


Рис. 36.

Из второго чертежа видно, что 6 тетрадей составляют 3 одинаковые части. Получаем решение:

1) $6 : 3 = 2$ (т.) – одна часть (у Димы);

2) $2 \cdot 2 = 4$ (т.) – было у Сережи.

Ответ: у Димы было 2 тетради, у Сережи – 4 тетради.

Задача 102. Пассажир, проехав половину пути, уснул. Когда он проснулся, ему оставалось ехать еще половину того, что он проспал. Сколько километров пути проспал пассажир, если всего нужно было проехать 60 км?

Решение. Условию задачи соответствует рис. 37.

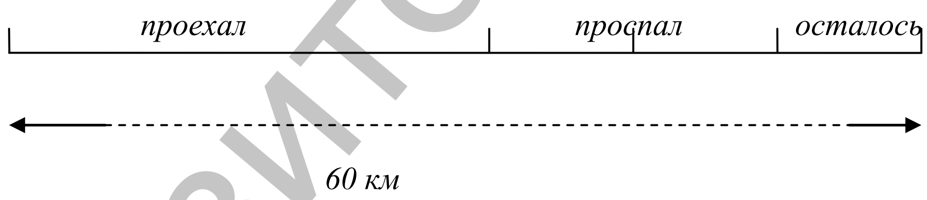


Рис. 37.

1) $60 : 2 = 30$ (км) – половина пути. Это расстояние проехал пассажир. На столько же километров составляет и вторая половина.

При этом вторая половина пути состоит из трех равных частей: одна часть – осталось проехать, 2 части – пассажир проспал.

2) $30 : 3 = 10$ (км) – осталось проехать;

3) $10 \cdot 2 = 20$ (км) – пассажир проспал.

Ответ: пассажир проспал 20 км пути.

Задача 103. Когда отцу было 37 лет, сыну было 3 года. Сейчас сыну в 3 раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас отцу?

Решение. Разница возрастов отца и сына составляет:

1) $37 – 3 = 34$ (года).

Сделаем чертеж к задаче (рис. 38):

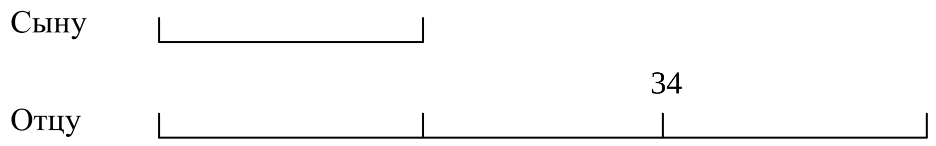


Рис. 38.

Из рисунка видно, что возраст отца составляет три части, тогда как возраст сына – одну часть. Причем две части составляют 34 года. Тогда:

2) 34 : 2 = 17 (лет) – сыну;

3) 17 + 34 = 51 (год) – отцу.

Ответ: отцу сейчас 51 год.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ по теме «ЦЕЛЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА»

1 блок заданий

1. Пусть A = {3; 4; 7}, B = {1; 3; 5}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A) = m(B)$;
2) $m(A \times B) = 6$;
3) $m(A \cap B) = 0$;
4) $m(A \cup B) = 6$.
ВЕРНО 1)

2. Пусть A = {1; 4; 7}, B = {1; 5; 8}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A) \neq m(B)$;
2) $m(A \cap B) = 1$;
3) $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$;
4) $m(A \times B) = 6$.
ВЕРНО 2)

3. Пусть A = {2; 4; 7}, B = {1; 3; 7}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \cap B) = 0$;
2) $m(A \times B) = 9$;
3) $m(A \cup B) = 6$;
4) $m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.
ВЕРНО 2)

4. Пусть A = {2; 4; 7}, B = {1; 3; 9}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \cap B) = 0$;
2) $m(A \times B) = 6$;
3) $m(A \cup B) = 3$;
4) $m(A \cap B) = m(A) - m(B)$.
ВЕРНО 1)

5. Пусть A = {0; 4; 5}, B = {1; 2; 8}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \cap B) \neq 0$;
2) $m(A \times B) = 6$;
3) $m(A \setminus B) \neq m(B \setminus A)$;
4) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
ВЕРНО 4)

6. Пусть A = {0; 2; 5; 6}, B = {1; 2; 5}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \cap B) \neq 0$;
2) $m(A \times B) = 9$;
3) $m(A \setminus B) = m(B \setminus A)$;
4) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
ВЕРНО 1)

7. Пусть A = {5; 8; 9; 10}, B = {1; 3; 4}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A) > m(B)$;
2) $m(A \times B) = 7$;
3) $m(A \cap B) \neq 0$;
4) $m(A \cup B) \neq m(B \cup A)$.
ВЕРНО 1)

8. Пусть A = {1; 4; 7; 8}, B = {4; 5; 8}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A) = m(B)$;
2) $m(A \cap B) = 2$;
3) $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$;
4) $m(A \times B) = 7$.
ВЕРНО 2)

9. Пусть A = {2; 4; 7}, B = {1; 3; 7}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \cup B) = 6$;
2) $A < B$;
3) $A \subset B$;
4) $m(A \cap B) = 1$.
ВЕРНО 4)

10. Пусть A = {2; 4; 7}, B = {1; 3; 9}.
Укажите верные утверждения:
1) $A \cap B = 0$;
2) $m(A \times B) = 6$;
3) $m(A \cup B) = 6$;
4) $m(A \cap B) \neq 0$.
ВЕРНО 3)

11. Пусть A = {2; 4}, B = {1; 2; 3; 4; 9}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \setminus B) = m(B \setminus A)$;
2) $m(A \cup B) = 7$;
3) $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$;
4) $m(A \times B) = 7$.
ВЕРНО 3)

12. Пусть A ={1; 2; 3; 4; 9}, B = {2; 4}.
Укажите верные утверждения:
1) $m(A \setminus B) = m(B \setminus A)$;
2) $m(A \cap B) = 2$;
3) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;
4) $m(A \times B) = 7$.
ВЕРНО 2)

13. Пусть A = {5; 6}, B = {1; 2; 3; 4}.
Укажите верные утверждения:
1) $A \cap B \neq \varnothing$;
2) $m(A \cap B) = 0$;
3) $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$;
4) $m(A) \times m(B) \neq m(A \times B)$.
ВЕРНО 2)

14. Пусть A = {5; 6; 7}, B = {5; 6; 7}.
Укажите верные утверждения:
1) $A \subset B$;
2) $m(A \cup B) \neq 3$;
3) $m(A) = m(B)$;
4) $m(A \times B) = 3$.
ВЕРНО 3)

2 блок заданий

1. Пусть $a, b \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a \cdot b = m(A \times B)$;

2) $a \cdot b = m(A \times B)$, где $m(A) = a, m(B) = b$;

3) $a \cdot b \neq m(A) \times m(B)$, где $m(A) = a, m(B) = b$;

4) $a \cdot b = m(A) + m(B)$.

ВЕРНО 2)

2. Пусть $a, b \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a = b \Leftrightarrow A \sim B$;

2) $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$;

3) $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, где $B_1 \subset B,\ B_1 \neq B$;

4) $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, где $B_1 \subset B,\ B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing$.

ВЕРНО 4)

3. Пусть b делится на c $(a, b, c \in \mathrm{N})$.

Укажите верные утверждения:

1) $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$;

2) $5 \cdot (24 : 3) \neq (5 \cdot 24) : 3$;

3) $a \cdot (b : c) = (a : c) : b$;

4) $a \cdot (b : c) = (a : b) \cdot (a : c)$.

ВЕРНО 1)

4. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$;

2) $a + (b + c) \neq ((a - 1) + (b + 1)) + c$;

3) $7544 + 1736 \neq (7544 + 868) + 868$;

4) $a + (b + c) \neq (b + c) + a$.

ВЕРНО 1)

5. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a - (b + c) = (a - b) + c$;

2) $a - (b + c) = (a - b) - c$, при $a \geq b + c$;

3) $a - (b + c) \neq (a - b) - c$;

4) $a - (b + c) \neq (a - b) - c$, при $a \geq b$.

ВЕРНО 2)

6. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $(a + b) - c = (a - c) - b$;

2) $(a + b) - c = (a - c) + b$, при $a \geq c$;

3) $(a + b) - c \neq (a - c) + b$;

4) $(a + b) - c = (a - c) + b$, при $b \geq c$.

ВЕРНО 2)

7. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $(a + b) - c = a + (b - c)$;

2) $(a + b) - c = a + (b - c)$, при $b \geq c$;

3) $(a + b) - c \neq a + (b - c)$;

4) $(a + b) - c \neq a + (b - c)$, при $a + b \geq c$.

ВЕРНО 2)

8. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a \cdot b = b \cdot a$;

2) $(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$;

3) $(156 + 247) \cdot 32 = 156 + (247 \cdot 32)$;

4) $(a + b) \cdot c \neq a \cdot c + b \cdot c$.

ВЕРНО 1)

9. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.

Укажите верные утверждения:

1) $a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot b$;

2) $a \cdot (b + c) \neq a \cdot b + a \cdot c$;

3) $17 \cdot (18 + 12) \neq 17 \cdot 12 + 17 \cdot 18$;

4) $a \cdot c + a \cdot b = a \cdot (c - b)$.

ВЕРНО 1)

10. Пусть a и b делятся на $c\,(a, b, c \in \mathrm{N})$.

Укажите верные утверждения:

1) $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$;

2) $120 : (40 \cdot 3) \neq (120 : 40) : 3$;

3) $a : (b \cdot c) \neq (a : c) : b$;

4) $1440 : (12 \cdot 15) = (1440 : 12) \cdot 15$.

ВЕРНО 1)

11. Пусть a и b делятся на $c\,(a, b, c \in \mathrm{N})$.
Укажите верные утверждения:
1) $(a+b):c \neq b:c+a:c$;
2) $(a+b):c = a:c+b:c$;
3) $(33+9):3 \neq 33:3+9:3$;
4) $(a+b):c = a+(b:c)$.
ВЕРНО 1)

12. Пусть $a, b \in \mathrm{N}_0$.
Укажите верные утверждения:
1) $(a-b)\cdot c \neq a\cdot c - b\cdot c$;
2) $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$;
3) $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$, при $a \geq b$;
4) $(735-213)\cdot 32 \neq 735\cdot 32 - 213\cdot 32$.
ВЕРНО 3)

13. Пусть $a, b \in \mathrm{N}_0$.
Укажите верные утверждения:
1) $a+b = m(A \cup B)$;
2) $a+b = m(A \cap B)$, где $m(A) = a$, $m(B) = b$;
3) $a+b = m(A \cup B)$,
где $m(A) = a$, $m(B) = b$, $A \cap B = \varnothing$;
4) $a+b = m(A) + m(B) = m(A \cup B)$,
где $m(A) = a$, $m(B) = b$.
ВЕРНО 3)

14. Пусть $a, b, c \in \mathrm{N}_0$.
Укажите верные утверждения:
1)$a-b = m(A \setminus B)$;
2)$a-b = m(A \setminus B)$,
где $m(a) = a, m(B) = b, B \subset A$;
3)$a-b = m(A \setminus B)$, где $m(A) = a, m(B) = b$;
4) $a-b = m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$,
где $m(A) = a$, $m(B) = b$.
ВЕРНО 2)

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите $2 + 3$?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: На одной полке *30* книг. На другой полке на *7* книг меньше. Сколько книг на двух полках?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: 7+2.
5. Числа *a, b, c* при делении на 12 дают остатки 7 и 9 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a + b - c$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(3^{2n+1}+1):4$.

Вариант 2

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите $7 - 4$?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: На садовом участке посадили 20 деревьев по 5 в каждом ряду. Сколько было рядов?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: $4 \cdot 2$.
5. Числа *a* и *c* при делении на 7 дают остатки 4 и 6 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a \cdot c$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(5^{2n-1}+1):6$.

Вариант 3

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 3×4?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: Сначала в вагон погрузили *23 т* груза, потом еще *9 т.* Через некоторое время *8 т* пришлось выгрузить. Сколько тонн груза осталось в вагоне?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: 3+3.
5. Числа *a* и *b* при делении на 5 дают остатки 3 и 4 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a \cdot b$ на 5?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(13^n+5):6$.

Вариант 4

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 12 : 3?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: В куске было несколько метров шелка. После того как отрезали *12 м*, а затем *2 м*, в куске осталось *18 м.* Сколько метров шелка было в куске?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: $3\cdot 2$.
5. Числа *a, b и c* при делении на 7 дают остатки 3, 5 и 8 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a+b+c$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(n^3+5n) \vdots 3$.

Вариант 5

1. Используя теоретико-множественную трактовку, покажите, что $6 > 4$?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: Масса бочки с медом *58 кг*. Масса пустой бочки *8 кг.* Сколько килограммов меда в этой бочке?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: 4+2.
5. Числа a и b при делении на 15 дают остатки 3 и 7 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a-b$ на 15?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(15^n+6) \vdots 7$.

Вариант 6

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 3 + 5?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:
$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+...+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$
3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: В пятиэтажном доме *80* квартир. На каждом этаже в подъезде *4* квартиры. Сколько подъездов в этом доме?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: $4\cdot 3$.
5. Числа a и b при делении на 7 дают остатки 3 и 5 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a\cdot b$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(9^n+3) \vdots 4$.

Вариант 7

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 9 – 3?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: *8 кг* варенья разложили в банки по *2 кг* в каждую. Сколько получилось банок?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: 5+3.
5. Числа a и b при делении на 13 дают остатки 2 и 7 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a - b$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(n^5 - n) : 5$.

Вариант 8

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 2×4?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: С первого участка собрали *10* мешков картофеля. Со второго на *3* мешка меньше. Сколько картофеля собрали с двух участков?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: $5 \cdot 3$.
5. Числа a и b при делении на 9 дают остатки 1 и 7 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a + b$ на 9?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(n^3 - 7n + 6) : 3$.

Вариант 9

1. Используя теоретико-множественную трактовку, найдите 14 : 2?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: Купили *4 кг* огурцов, *3 кг* помидоров и капусту. Сколько килограммов было капусты, если масса всех овощей *12 кг*?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: 5+2.
5. Числа a и b при делении на 7 дают остатки 3 и 5 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a \cdot b$ на 7?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(n(n+1)(n+2)(n+4)) : 4$.

Вариант 10

1. Используя теоретико-множественную трактовку, покажите, что 13 > 5?
2. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа n истинно равенство:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

3. Объясните решение задачи с точки зрения «натуральное число как мера величины»: Веревку разрезали на две части так, что первая часть оказалась в *4* раза больше второй. Чему равна длина веревки, если первая часть на *18 м* длиннее второй?
4. Используя аксиоматический подход к построению системы натуральных чисел, найдите: $4 \cdot 2$.
5. Числа a и b при делении на 3 дают остатки 1 и 2 соответственно. Какой остаток получится при делении числа $a + b$ на 3?
6. С помощью метода математической индукции докажите, что для любого натурального числа верно утверждение: $(14^n - 1) : 13$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.

2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.

3. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.

4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1988.

5. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Academia, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ