Кафедра алгебры и методики преподавания математики

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К78

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты педагогических наук **А.В. Виноградова, В.В. Устименко**

Рецензент:
доцент кафедры дошкольного и начального образования УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук *З.К. Левчук*

Данное учебное издание написано в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. Кратко излагается необходимый теоретический материал и приводятся разобранные примеры данного курса.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, стержнем начального курса математики являются целые неотрицательные числа и действия над ними, величины и их измерение. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа и величины требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «множество», «отношение», «умозаключение» и др. Поэтому неслучайно изучение курса математики начинается с рассмотрения этих общих понятий.

Овладеть курсом математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемое издание призвано оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В данной работе большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В учебное издание включены темы: «Множества и операции над ними», «Элементы комбинаторики», «Математические понятия», «Высказывания и операции над ними», «Теоремы и способы их доказательства» и пр. Оно содержит теоретический материал, задачи с решениями и обоснованиями по данным темам, для студентов факультета начального образования. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

Структура данного издания такова: материал разбит на темы, темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только лучше овладеть необходимыми знаниями и умениями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность.

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

В математике часто рассматриваются те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и т.д. Все эти различные совокупности называют **множествами.**

Понятие множества является основным понятием математики, оно не определяется через другие, уже известные. Его смысл раскрывается лишь путем описания. Например: множество учеников данного класса, множество книг в библиотеке, числа от *1* до *10,* треугольники, множество корней данного уравнения и т.д.

Множества состоят из отдельных объектов, называемых **элементами**. Обозначают множества прописными буквами латинского алфавита $A, B, C\dots$, а его элементы строчными буквами $a, b, c\dots$

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что *5* – натуральное число, а *0,7* не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что *5* принадлежит множеству натуральных чисел, а *0,7* – не принадлежит. Чтобы записать эти утверждения на математическом языке, вводят символы $\in$ и $\notin$. Тогда предложение вида «объект a принадлежит множеству A» записывают, используя символы: $a \in A$. Например, *5* – натуральное число, значит *5* принадлежит множеству натуральных чисел: $5 \in N$. Если элемент не содержится в данном множестве, то записывают: $a \notin A$. Например, число *0,7* не является натуральным числом, значит *0,7* не принадлежит множеству натуральных чисел: $0{,}7 \notin N$. Элементами множества могут быть множества. Например, можно говорить о множестве классов некоторой школы. Элементы этого множества – классы, являющиеся в свою очередь множествами учащихся. Но учащиеся уже не являются элементами множества классов школы.

В зависимости от числа элементов множества делят на конечные и бесконечные. Множество, не содержащее ни одного объекта, называют **пустым** и обозначают $\varnothing$. Все числовые множества являются бесконечными. Для них приняты специальные обозначения: N – множество натуральных чисел, Z – целых, Q – рациональных, R – действительных чисел.

Понятие множества мы используем без определения. Как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество задано своими элементами, т.е. **множество задано,** если о любом объекте можно сказать: принадлежит он этому множеству или не принадлежит. **Задавать множество можно следующими способами:**

1) Если множество конечно, то его можно задать перечислением всех его элементов. Так, если множество A состоит из элементов *2, 5, 7,*

12, то пишут $A = \{2, 5, 7, 12\}$. Количество элементов множества A равно *4*, пишут $n(A) = 4$.

Но если множество бесконечно, то его элементы нельзя перечислить. Трудно задать множество перечислением и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества.

2) Множество можно задать указанием характеристического свойства его элементов. **Характеристическое свойство** – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, не принадлежащий ему. Рассмотрим, например, множество X двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, – «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать о том, принадлежит какой-либо объект множеству X или не принадлежит. Например, число 45 содержится в данном множестве, т.к. оно двузначное, а число 4 множеству X не принадлежит, т.к. оно однозначное и не является двузначным. Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись. Если множество B состоит из всех натуральных чисел, меньших *10,* то пишут $B = \{x \in N \mid x < 10\}$.

Второй способ – более общий и позволяет задавать как конечные, так и бесконечные множества.

2. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие множествам A и B одновременно, то говорят, что эти множества пересекаются. Например, пусть множество $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{b, c, d, k, l\}$. Элементы b, d принадлежат и множеству A, и множеству B. Значит, множества A и B имеют общие элементы, а сами множества пересекаются: $A \cap B$. Если множества не имеют общих элементов, *например,* $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5\}$,то они не пересекаются: $A \not\cap B$.

Иногда приходится рассматривать не все множество, а только его часть. Например, не все множество натуральных чисел, а только множество простых чисел. Тогда речь идет о подмножестве. Если любой элемент множества A принадлежит так же и множеству B, то A называют подмножеством B. Записывают $A \subset B$. Знак $\subset$ называют *знаком включения.*

Пусть даны множества: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Элементы $1, 2, 3$ принадлежит множеству A: $1 \in A$. $2 \in A$, $3 \in A$. Но из этих же элементов состоит и все множество B. Значит множество B есть подмножество множества A: $B \subset A$.

Любое множество является подмножеством самого себя, т.е. $A \subset A$. Пустое множество является подмножеством любого множества: ¾$\subset A$. Все множества являются подмножествами одного и того же множества, называемого универсальным U.

Приведем пример. Найдем все подмножества множества $X = \{a,b,c\}$. Выпишем одноэлементные подмножества: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, затем двухэлементные: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, трехэлементные: $\{a, b, c\}$ и множество, не содержащее ни одного элемента - $\varnothing$.

Количество подмножеств множества, состоящего из n элементов равно 2^n. В нашем примере множество состоит из трех элементов, значит количество подмножеств равно $2^3 = 8$.

Если множества состоят из одинаковых элементов и их количество равно, и каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, то $A \subset B$ и $B \subset A$ и говорят, что множества A и B равны: $A = B$. Например, $A = \{a, d, c, d\}$, $B = \{c, b, d, a\}$, значит $A = B$. Для равных множеств порядок их элементов не является существенным.

Таким образом, **между множествами возникают следующие отношения**: множества могут пересекаться, не пересекаться, быть равными и включаться одно в другое.

Для наглядности употребляют изображения множеств на плоскости, которые называют **диаграммами Эйлера-Венна** (множества наглядно представляют в виде кругов, овалов), где штриховкой обозначают нужные области. Тогда вышеперечисленные отношения можно изобразить следующим образом.

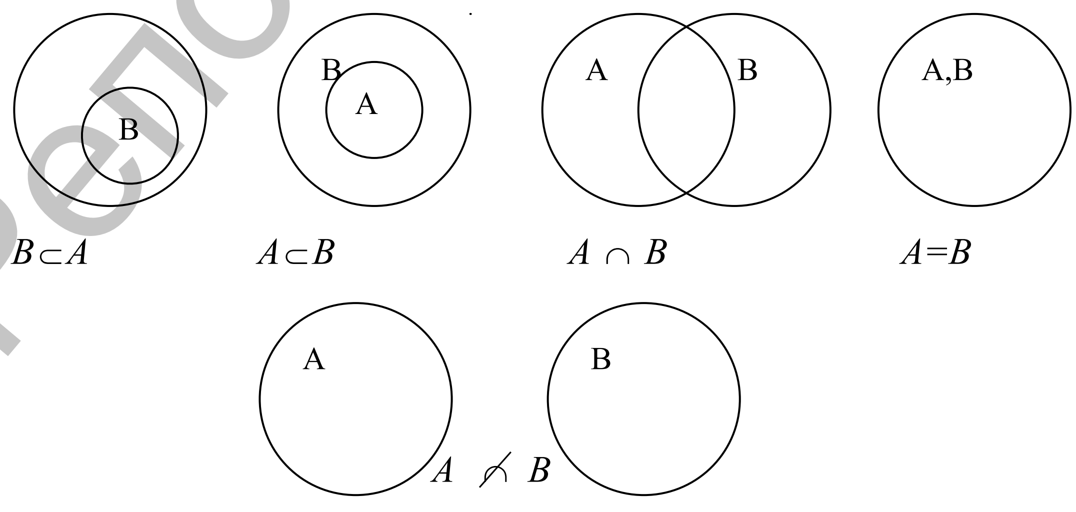


Рис. 1.

Нередко бывает так, что рассматривают только подмножества одного и того же множества *I*. Такое множество *I* называют **универсальным множеством.** Так, если *A* – множество студентов первого курса, *B* – множество студенток в этом же институте, *C* – множество спортсменов этого же института, то в качестве универсального множества I можно взять множество студентов данного института, потому, что тогда $A \subset I$, $B \subset I$, $C \subset I$. На диаграммах Эйлера-Венна универсальное множество часто изображается в виде прямоугольника, а его подмножества – кругами.

Различные **числовые множества можно изображать на числовой прямой.** Пусть *a* и *b* различные числа такие, что $a<b$. Тогда их запись и изображение таково:

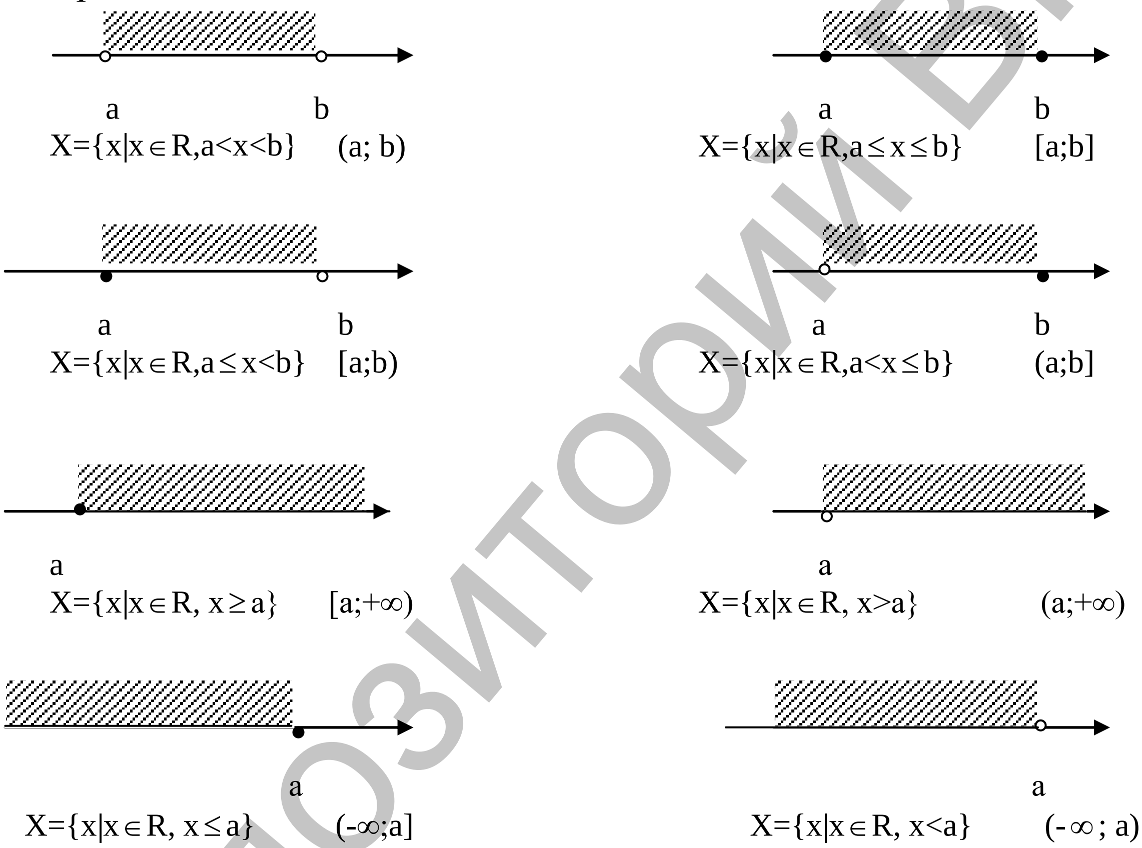


Рис. 2.

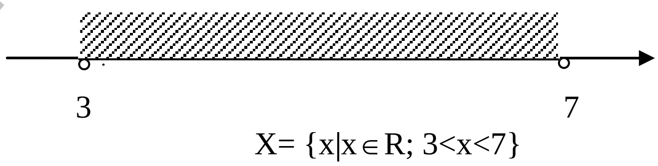
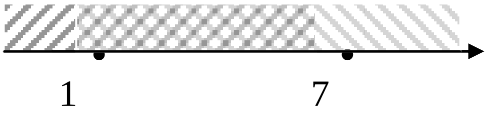


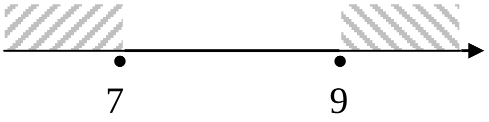
Рис. 3.

Найдем пересечение и объединение множеств: a) $(-\infty;7]$ и $[1;+\infty)$; b) $(-\infty;7]$ и $[9;+\infty)$.

Изобразим множества на числовой прямой. Там, где будет наложение двух штриховок – пересечение множеств, где есть хотя бы одна штриховка – объединение данных множеств.

a) 

$A \cap B = [1;\ 7]$ $\quad A \cup B = (-\infty;\ +\infty)$

b) 

$A \cap B = \varnothing$ $\quad A \cup B = (-\infty; 7] \cup [9;\ +\infty)$

Рассмотрим такую задачу: выясним, как связаны между собой множество A – четных чисел и множество B – чисел, кратных 4.

1. Не все четные числа делятся на 4, например, 14. Значит равенство $A=B$ невозможно.
2. Множества A и B пересекаются, так как содержат общие элементы – четные числа, кратные 4, например 12.
3. Всякое число, кратное 4, является четным. Поэтому, множество B является подмножеством множества A: $B \subset A$.

Данное решение можно изобразить при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

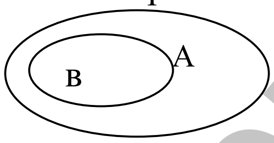


Рис. 4.

Понятие множества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например, «назови среди данных чисел четные», «среди данных четырехугольников найди квадраты».

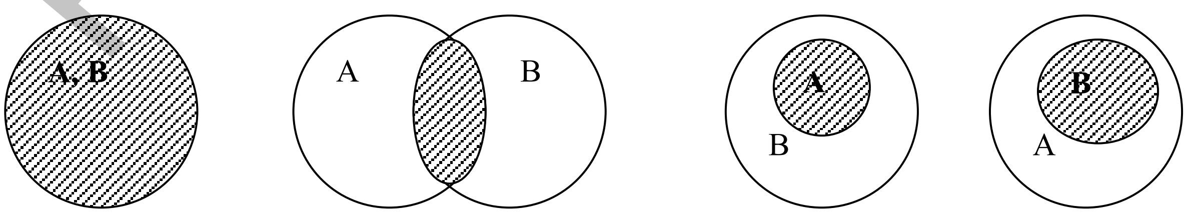
3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Операции над множествами – некоторые способы получения новых множеств из уже имеющихся.

1. Пересечение множеств

Пересечением множеств *A* и *B* называется множество, которое обозначают $A \cap B$ и состоящее из всех тех элементов, что принадлежат одновременно множеству A и B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

На диаграммах Эйлера-Венна это выглядит так.



$A=B$ $\quad A \cap B$ $\quad A \subset B$ $\quad B \subset A$

Рис. 5.

Непересекающимися называются множества A и B, не имеющие общих элементов: $A \cap B = \varnothing$.

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

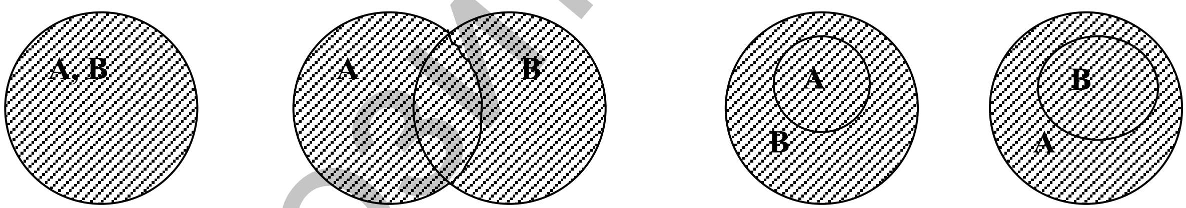
Найдем, например, пересечение множества A – четных натуральных чисел и множества B – двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества A – «быть четным», а B – «быть двузначным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четным и быть двузначным числом». Полученное множество не пусто. Например, $26 \in A \cap B$.

Рассмотрим другой пример: найдем пересечение множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$: Образуем новое множество C, состоящее из общих элементов множеств A и B: $C = A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

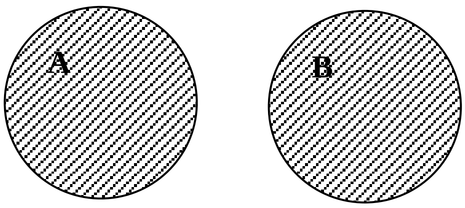
На основе данного примера построим множество K, которое содержит все элементы множества A и множества B. Это новое множество выглядит так: $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$. Данное множество представляет собой объединение множеств A и B.

2. Объединение множеств

Объединением множеств *A* и *B* называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A или B: $A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.



$A=B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \subset B$ $\qquad$ $B \subset A$



$A \not\cap B$

Рис. 6.

Как быть, если множества заданы с помощью характеристического свойства? Из определения следует, что характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств множеств A и B с помощью союза «или». Например, объединение множества

A – четных натуральных чисел и множества *B* – двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества *A* – «быть четным», а *B* – «быть двузначным числом» есть, согласно определению, элементы данных множеств, которые обладают свойством «быть четным или двузначным числом». Полученное множество не пусто. Например, $4 \in A \cup B$, так как оно четное, а $39 \in A \cup B$, так как оно двузначное.

3. Вычитание множеств. Дополнение множества

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ и состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству *A* и не принадлежат множеству *B* : $A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$. Если представить множества *A* и *B* при помощи кругов Эйлера, то разность $A \setminus B$ изобразится заштрихованной областью, как на рис. *7*.

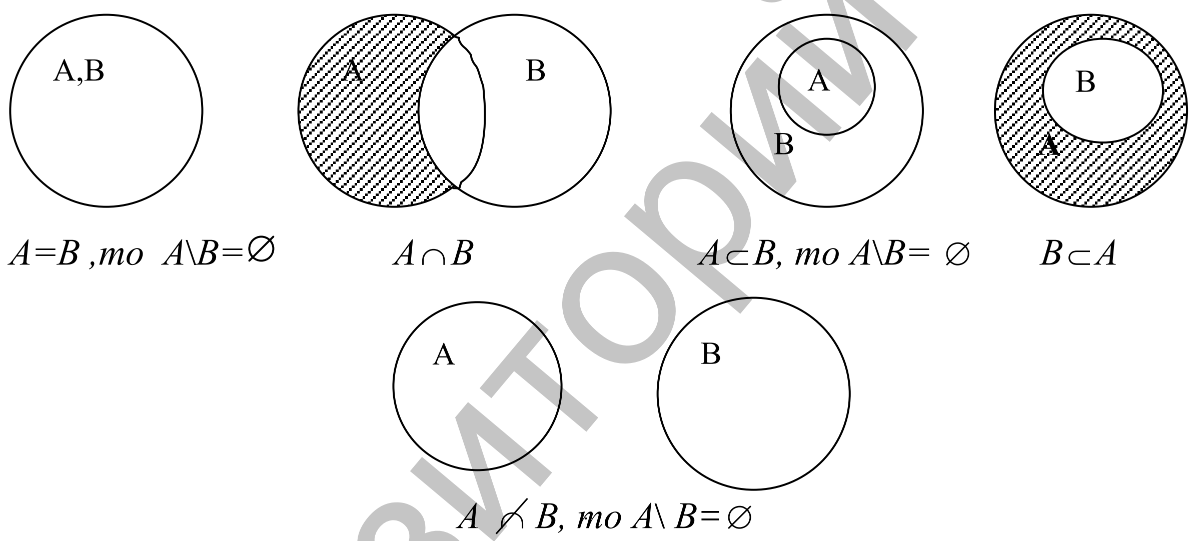


Рис. 7.

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств $A \setminus B$ называют дополнением множества *B* до множества *A*, и обозначают символом B_A'.

Пусть $B \subset A$. **Дополнением множества *B* до множества *A*** называется множество, содержащее все элементы множества *A,* которые не принадлежат множеству *B*: $B_A' = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$.

Дополнением множества тупоугольных треугольников на плоскости до множества всех треугольников является множество остроугольных и прямоугольных треугольников. Найдем дополнение множества $B = \{1, 2, 3\}$ до множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Получим множество $B_A' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Рассмотрим пример. Найдем разность множеств *A* и *B*. Пусть $A = \{3, 6, 12, 24\}$, $B = \{6, 24\}$, тогда по определению разность будет состоять из элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $A \setminus B = \{3, 12\}$.

Если U – универсальное множество, то дополнением множества A до U называют разность $U \setminus A$ *(рис. 8)*.

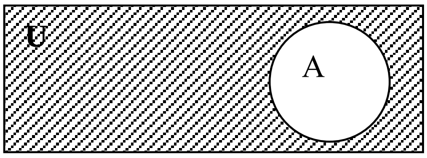


Рис. 8.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств A и B, и известно, что $B \subset A$, то множество B_A' задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого «$x \in A$ и $x \notin B$». Так, если A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 4, то B_A' – это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например, $22 \in B_A'$, так как $22 \in A$ (оно четное) и $22 \notin B$ (оно не делится на 4).

Вычитание – это третья операция над множествами, с которыми мы уже познакомились. Известно, что пересечение множеств более сильная операция, чем объединение и вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем полученное множество вычитают из множества A. Что касается объединения и вычитания, то их считают равноправными. Если в выражении присутствуют скобки, то сначала выполняются действия, стоящие в них.

Пусть даны множества: $A=\{a, b, c, d, e\}$; $B=\{c, d, f, k\}$; $C=\{b, c, d, f, m\}$. Перечислим элементы множеств: $K=(A \cup B) \cap C$ и $P=A \cup B \cap C$. Определим, содержится ли элемент m в множестве K, а элемент f в множестве P? Чтобы ответить на вопрос задачи, выполним некоторые действия: $A \cup B=\{a, b, c, d, e, f, k\}$, тогда $K=(A \cup B) \cap C=\{b, c, d, f\}$. Найдем $B \cap C=\{c, d, f\}$, так как операция пересечения более сильная. Затем перечислим элементы множества $P=A \cup B \cap C$: $P=\{a, b, c, d, e, f\}$. Видим, что элемент m в множестве K не содержится, а элемент f содержится в множестве P.

Рассмотрим пример: отметим штриховкой области, изображающие множества a) $(P \cup Q) \cap S$, b) $P \cup Q \cap S$, c) $(P \cup Q)' \cup S$, d) $P \setminus Q \setminus S$, если множества находятся в следующем отношении:

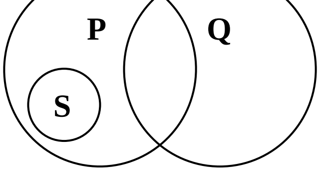


Рис. 9.

Решение:

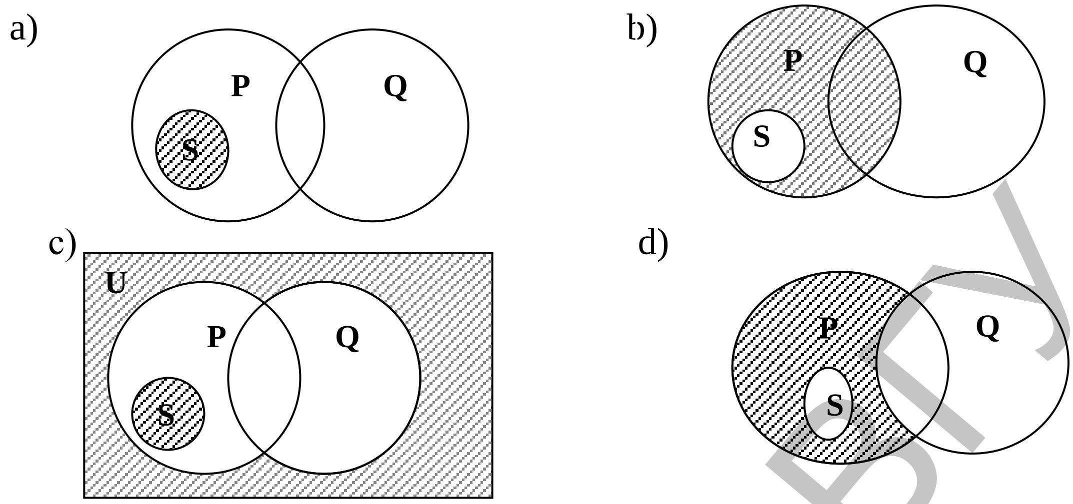


Рис. 10.

4. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Из школьного курса математики нам известно, что такие операции над числами, как сложение и умножение обладают переместительным и сочетательным свойствами. Между собой эти операции связаны распределительным свойством.

Аналогичная ситуация и в случае, когда выполняются операции над множествами. Так, операцию пересечения двух множеств отождествляют с произведением чисел, а объединение этих множеств – с суммой чисел. Операции над множествами обладают и рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел.

1) переместительные законы пересечения и объединения (коммутативность):
   $A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$
2) сочетательные законы пересечения и объединения (ассоциативность):
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3) $A \cap A = A$ $\qquad$ $A \cup A = A$
4) $A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup \varnothing = A$
5) $A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup U = U$
6) распределительные законы (дистрибутивность):
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
7) законы включения:
   $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $(A \cap B)\ (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Вычитание и дополнение также обладает рядом свойств.

8) $A' \cap A = \varnothing$ $\qquad$ $A' \cup A = U$
9) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\qquad$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
10) $\varnothing' = U$ $\qquad$ $U' = \varnothing$
11) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

12) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ $\quad$ $(A \setminus B) \cap C = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$
13) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ $\quad$ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Данные свойства можно проиллюстрировать на кругах Эйлера в соответствии с порядком действия, например, рассмотрим ассоциативность пересечения, так как оно не столь очевидно, как свойство коммутативности. Изобразим множества A, B, C в виде трех попарно пересекающихся кругов и изобразим множество $(A \cap B) \cap C$ на рис. 11, а множество $A \cap (B \cap C)$ на рис. 12.

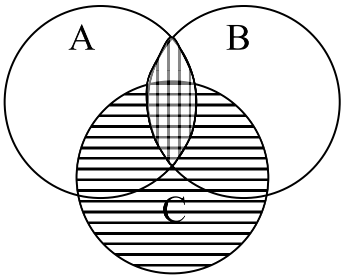


Рис. 11.

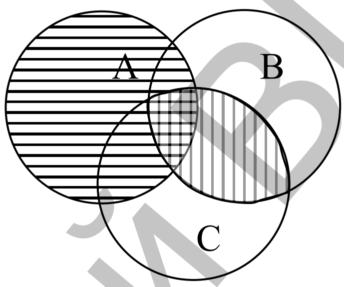


Рис. 12.

Однако рассмотрим более строгие доказательства некоторых законов.

Например, **докажем ассоциативность операции объединения** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Чтобы доказать равенство двух множеств, надо убедиться, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится в множестве $A \cup (B \cup C)$, и наоборот.

1. Пусть x – любой элемент множества $(A \cup B) \cup C$. Тогда, по определению объединения, $x \in A \cup B$ или $x \in C$.

Если $x \in A \cup B$, то по определению объединения $x \in A$ или $x \in B$.

В том случае, если $x \in A$, то так же по определению объединения $x \in (A \cup B) \cup C$.

Если $x \in B$, то имеем, что $x \in B \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cup C$.

Случай, когда $x \in A$ и $x \in B$, сводится к рассмотренным. Таким образом, из того, что $x \in A \cup B$, следует, что $x \in (A \cup B) \cup C$.

Если $x \in C$, то по определению объединения, $x \in B \cup C$, и, следовательно, $x \in (A \cup B) \cup C$.

Случай, когда $x \in A \cup B$ и $x \in C$, сводится к рассмотренным выше.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится в множестве $A \cup (B \cup C)$, т.е. $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.

Пусть y – любой элемент из множества $A \cup (B \cup C)$. Тогда по определению объединения, $y \in A$, $y \in B \cup C$.

Если $y \in A$, то по определению объединения, $y \in A \cup B$, и, следовательно, $y \in A \cup (B \cup C)$.

Если $y \in B \cup C$, то $y \in B$ или $y \in C$. В том случае, когда $y \in B$, то $y \in A \cup B$ и, значит, $y \in (A \cup B) \cup C$. Когда же $y \in C$, то $y \in (A \cup B) \cup C$. Случай, когда $y \in B$ и $y \in C$, сводится к уже рассмотренным.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $A \cup (B \cup C)$ содержится в множестве $(A \cup B) \cup C$, т.е. $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.

Согласно определению равных множеств заключаем, что $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Аналогично доказывается ассоциативность пересечения множеств и другие свойства операций над множествами.

Используя свойства операций над множествами, можно доказывать и другие равенства. Докажем, что для любых множеств A и B верно равенство $(A' \cap B)' = A \cup B'$.

Решение: Известно, что $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Применим эту формулу к выражению $(A' \cap B)'$. Получим $(A' \cap B)' = (A')' \cup B'$. Но поскольку $(A')' = A$, то имеем: $(A')' \cup B' = A \cup B'$. Таким образом, $(A' \cap B)' = A \cup B'$.

5. ПОНЯТИЕ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ

Понятие множества и операций над множествами позволяют уточнить представление о классификации.

Классификация – это действие распределения объектов по классам на основании сходств внутри класса и их отличия от других объектов. Классификация широко применяется в математике.

Например, натуральные числа делятся на четные и нечетные; углы бывают острые, тупые и прямые и т.д.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества.

Считают, что **множество X разбито на классы $X_1, X_2, \ldots, X_n$**, если:

1) подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно не пересекаются;

2) объединение этих подмножеств совпадает с множеством X.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, классификацию считают неправильной.

Например: a) Множество треугольников X разбито на три класса: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные. Действительно, выделенные подмножества попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X; b) Из множества треугольников X выделили подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников. Так как множества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются, значит, не выполнено первое условие классификации, и разбиения множества X на классы мы не получили.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают различными свойствами. Нас интересуют числа со свойством «быть кратным *3*». Это свойство позволяет выделить из множества *N* подмножество, состоящее из чисел, кратных *3*. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны *3*, т.е. получаем еще одно подмножество множества *N*. Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством *N*, то имеем разбиение данного множества на два класса.

Вообще, если на множестве *X* задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – это класс объектов, обладающих данным свойством, а второй – дополнение первого класса до множества *X*. Во втором классе содержатся такие объекты множества *X*, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют ***дихотомической.***

Рассмотрим ситуацию, когда для элементов множества заданы два свойства. Например, свойства натуральных чисел: «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества *N* можно выделить два подмножества: *A* – множество чисел, кратных 3 и *B* – множество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис. 13). Разбиения на подмножества *A* и *B* в данном случае на произошло. Но круг, изображающий множество *N*, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей. Каждая область изображает некоторое подмножество множество *N*. Множество I состоит из чисел, кратных 3 и 5, множество I – из чисел, кратных 3 и не кратных 5, множество III – из чисел, кратных 5 и не кратных 3, множество IV – из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех множеств есть множество *N*.

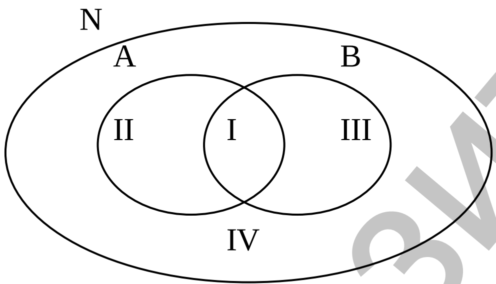


Рис. 13.

Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества *N* натуральных чисел на четыре класса.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, при помощи таких двух свойств «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (рис. 14): I – класс чисел, кратных 6; II – класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III – класс чисел, не кратных 3.

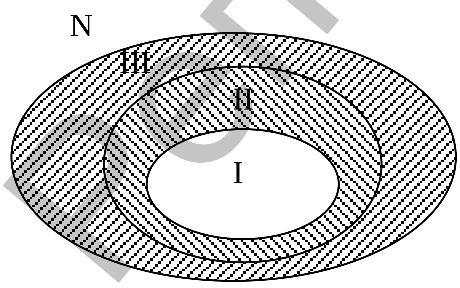


Рис. 14.

6. ДЕКАРТОВО УМНОЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ

В начальных классах ученики решают задачу: используя цифры *1, 2, 3* образовать всевозможные двузначные числа.

Путем перебора дети получают:

11 12 13
21 22 23
31 32 33

Запись каждого числа состоит из двух цифр, причем существенен порядок их следования. Например, из цифр *1, 2* образованы числа *12* и *21*.

В том случае, когда важен порядок следования элементов множества, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В данной задаче – упорядоченные пары $(a; b)$, образованные из элементов a и b. Это *(1; 2), (1; 3), (1; 4)* и т.д. Первый элемент a называют *первой координатой* пары, элемент b – *второй.*

Значит, в нашей задаче мы оперировали множеством $A=\{1, 2, 3\}$ и образовывали всевозможные пары.

Рассмотрим другой пример. Пусть $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5\}$. Образуем всевозможные пары $(a;b)$ так, что $a\in A$, $b\in B$. Получим некоторое новое множество $\{(1; 5), (1; 4), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5)\}$, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это новое множество называют декартовым произведением множеств A и B.

Декартовым произведением множеств *A* и *B* называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, вторая множеству B. Обозначают $A\times B$. Таким образом $A\times B = \{(x;y) \mid x\in A, y\in B\}$.

Операцию нахождения декартового произведения множеств A и B называют **декартовым умножением** этих множеств.

Рассмотрим следующий пример. Известно, что $A\times B=\{(2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6)\}$. Установим, из каких элементов состоят множества A и B. Так как первая компонента пары декартового произведения принадлежит множеству A, а вторая – множеству B, то данные множества имеют следующий вид: $A=\{2, 3\}$, $B=\{3, 5, 6\}$.

Перечислим элементы, принадлежащие множеству $A\times B$, если $A=\{a, b, c, d\}$, $B=A$. Декартово произведение $A\times B=\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b) ,(d, c), (d, d)\}$.

Количество пар в декартовом произведении $A\times B$ будет равно произведению числа элементов множества A и числа элементов множества B: $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$.

В математике рассматривают не только упорядоченные пары, но и наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Такие упорядоченные наборы называют **кортежами**. Так, набор *(1, 5, 6)* есть кортеж длины *3*, так как в нем три элемента.

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартового произведения n множеств.

Декартовым произведением множеств A_1, A_2,…, A_n называют множество кортежей длины n, образованных так, что первая компонента принадлежит множеству A_1, вторая – A_2, …, *n*-ая – множеству *A:* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Пусть даны множества $A_1=\{2, 3\}$; $A_2=\{3, 4, 5\}$; $A_3=\{7, 8\}$. Декартово произведение $A_1 \times A_2 \times A_3=\{ (2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 7), (2, 5, 8),(3, 3, 7), (3, 4, 7), (3, 3, 8), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 5, 8)\}$.

Рассмотрим свойства декартова умножения.

1. Декартово умножение *не обладает переместительным свойством*: $A\times B \neq B\times A$. Действительно, элементами множества $A\times B$ являются пары $(a;b)$, а элементами множества $B\times A$ являются пары $(b;a)$. При $a\neq b$ эти пары различны. Следовательно, если $A\neq B$, то множества $A\times B$ *и* $B\times A$ так же различны. В этом нетрудно убедиться на любом примере.

2. Декартово умножение множеств *не подчиняется и сочетательному закону*: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$.

3. Декартово умножение *связано* с операцией объединения множеств *распределительным свойством:* $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

Даны множества $A=\{a, b\}$, $B=\{c, d, e\}$, $C=\{c, m\}$. Докажем, что множество $A\times(B\cup C)$ равно множеству $(A\times B)\cup(A\times C)$.

Найдем вначале $B\cup C=\{c, d, e, m\}$, затем $A\times(B\cup C)=\{(a, c), (a, d), (a, e), (a, m), (b, c), (b, d), (b ,e), (b, m)\}$.

Теперь найдем $A\times B=\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$ и $A\times C=\{(a, c), (a, m), (b, c), (b, m)\}$. И наконец $(A\times B)\cup(A\times C)=\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e) (a, m), (b, m)\}$.

Мы видим, что множества $A\times(B\cup C)$ и $(A\times B)\cup(A\times C)$ состоят из одинаковых элементов. Значит $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

Наглядное изображение декартового произведения двух множеств (конечных и бесконечных) можно получить при помощи декартовой системы координат на плоскости.

Декартова система координат – это две взаимно перпендикулярные координатные прямые *OX* и *OY* с общей единицей длины и заданным направлением, точка пересечения которых является началом отсчета. Прямая *OX* – ось абсцисс, прямая *OY* – ось ординат. Заметим, что элементы множества *A* мы изобразим на оси *OX*, а элементы множества *B* – на оси *OY*.

Например, изобразим некоторые числовые множества *X* и *Y* наглядно:

1) $X=\{1,2,3\}, \quad Y=\{3,5\}$

Так как множества заданы перечислением, то образованная при этом каждая пара чисел может быть единственным образом отображена на координатной плоскости.

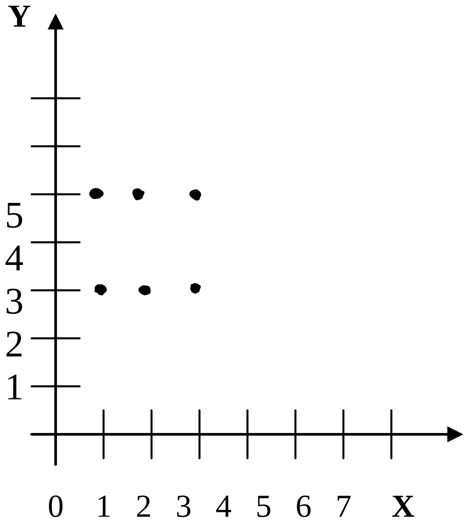


Рис. 15.

2) $X=\{1,2,3\}, \quad Y=[3;\ 5]$

Так как множество X состоит из трех элементов 1,2,3, а множество Y бесконечно, то их декартово произведение будет состоять из бесконечного множества пар, первая компонента либо 1, либо 2, либо 3, а вторая – любое действительное число из промежутка [3; 5], что изобразится тремя отрезками.

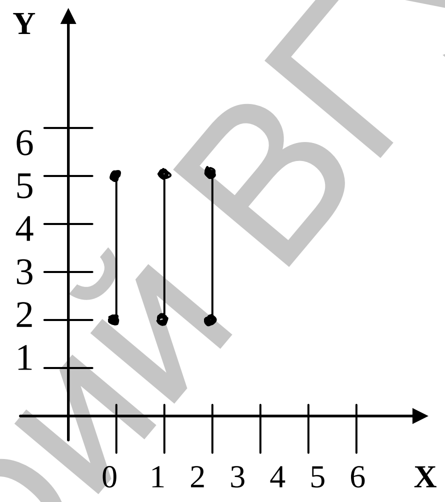


Рис. 16.

3) $X=[1;\ 3], \quad Y=[3;\ 5]$

Оба множества бесконечны. Поэтому первой координатой парой декартового произведения может быть любое число из промежутка [1; 3], а второй из промежутка [3; 5], и, следовательно, точки, изображающие элементы декартового произведения данных множеств, образуют квадрат.

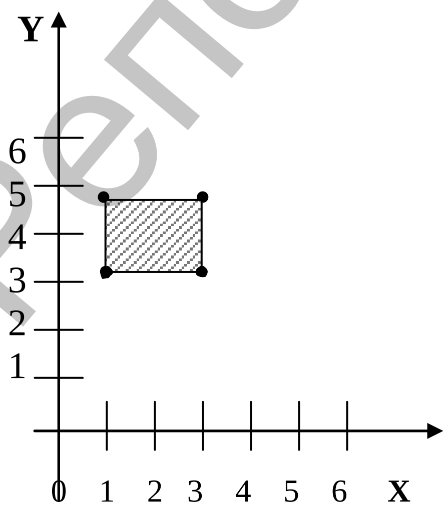


Рис . 17.

4) $X=R, \quad Y=[3;\ 5]$

Множество X состоит их всех действительных чисел, т.е. абсцисса точек декартового произведения данных множеств принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3; 5]. Множество таких точек образует полосу.

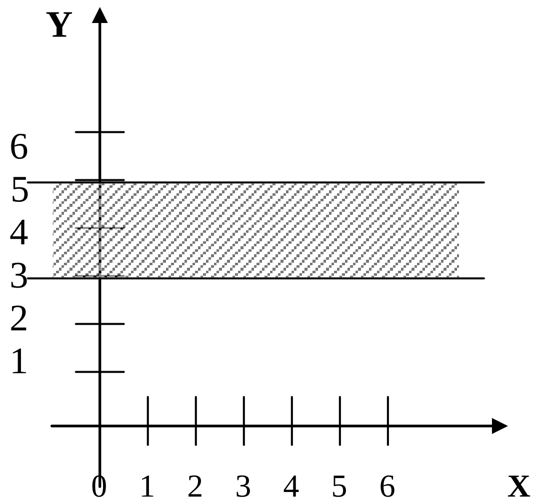


Рис. 18.

7. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ

Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями. Например, при вычислении длин предметов устанавливаются соответствия между предметами и числами, которые являются значениями их длин; при решении задач на движение устанавливается зависимость между пройденным расстоянием и временем при условии, что скорость движения постоянна. В начальной школе учащиеся устанавливают соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями, между числом, характеризующим площадь данной фигуры, и самой этой фигурой и т.п.

Соответствием между множествами X и Y называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств. Соответствия принято обозначать буквами P, S, T, R и др. Если xSy – соответствие между элементами множеств X и Y, то, согласно определению, $S \subset X \times Y$.

Поскольку ***соответствие*** – это подмножество, то его ***можно задать*** как любое множество, т.е. либо перечислив все пары элементов, находящихся в данном соответствии, либо указав характеристическое свойство элементов этого подмножества. Например, соответствие между множествами $X=\{1, 2, 4, 6\}$ и $Y=\{3, 5\}$ можно задать: 1) при помощи предложения с двумя переменными: $a<b$ при условии, что $a \in X$, $b \in Y$;
2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартова произведения $X \times Y$: $\{(1, 3),(1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$. К этому способу задания относят также задание соответствия при помощи графа (рис. 19) и графика (рис. 20).

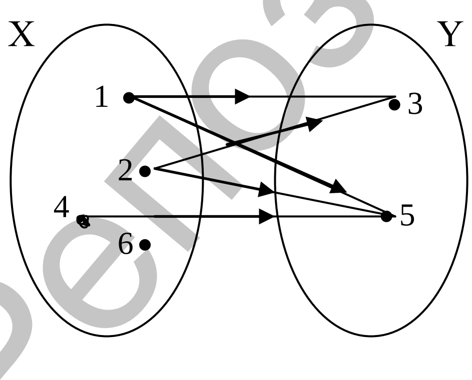


Рис. 19.

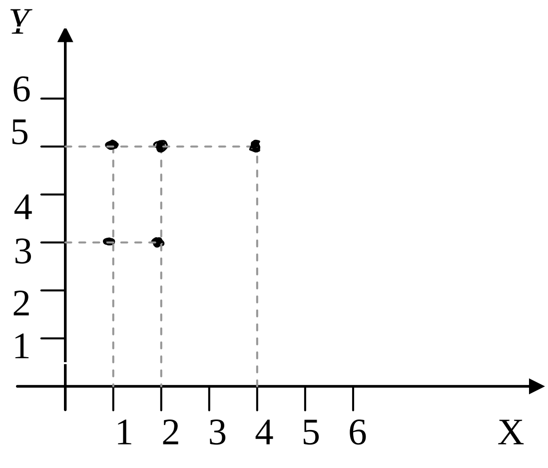


Рис. 20.

Графом в математике называется конечная совокупность точек, называемых вершинами графа; некоторые из них соединены друг с другом линиями, которые называются ребрами графа. **График** соответствия представляет собой изображение множества $X \times Y$ в виде точек на координатной плоскости. Представление соответствия в виде графа и графика позволяет изображать его в тех ситуациях, когда в заданном соответствии находится бесконечное множество пар чисел.

Пусть на множествах $X=R$, $Y=\{4, 6\}$ задано соответствие «больше». Так как в заданном соответствии находится бесконечное множество пар, то такое соответствие можно представить лишь наглядно.

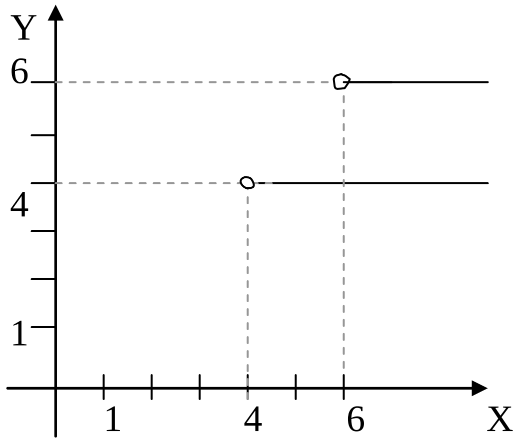


Рис. 21.

На рисунке *22* изображен граф соответствия между множествами *X* и *Y:*

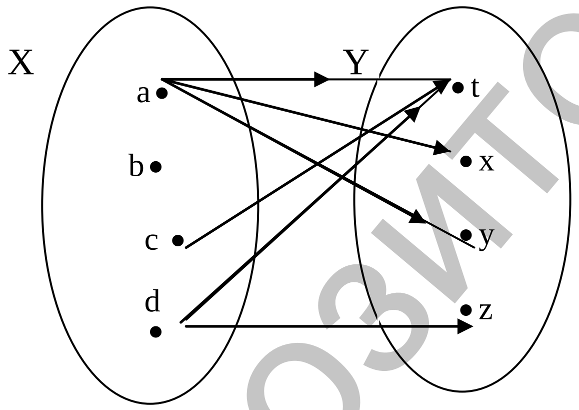


Рис. 22.

Возьмем какую, например, *a*, и все стрелки, выходящие из нее. Множество концов этих стрелок называют *образом элемента a* при соответствии *R: R(a)* .

$R(a)=\{t, x, y\}$.

Возьмем элемент из множества *Y*, например, *t,* и все стрелки, оканчивающиеся на

Множество этих стрелок называют *полным прообразом элемента t:* $R^{-1}(t)$.

$R^{-1}(t)=\{a, c, d\}$.

Может случиться, что из данной точки не выходит ни одна стрелка, например, *b*. Тогда образ элемента *b* пуст: $R(b)= \varnothing$.

Множество *X* называют областью отправления соответствия *R,* множество *Y* – областью прибытия.

Совокупность *A* всех элементов из *X*, имеющих непустые образы, называют *множеством определения соответствия R.* Множество *B* всех элементов из *Y*, имеющих непустой полный прообраз, называют *множеством значений соответствия R.*

Если график соответствия R между множествами X и Y совпадает со всем декартовым произведением $X \times Y$, то ***соответствие*** называют полным. Если же график пуст, то R называют ***пустым соответствием.***

Над соответствиями можно выполнять различные операции.

Если между множествами X и Y заданы соответствия xPy и xQy, то их ***пересечением*** $R=P \cap Q$ называют соответствие xRy, график которого является пересечением графиков данных соответствий.

Объединением $S=P \cup Q$ данных соответствий называют соответствие xSy, график которого является объединением графиков соответствий xPy и xQy .

Если графики соответствий xPy и xQy – дополнительные множества в $X \times Y$ (т.е. не пересекаются, а в объединении дают $X \times Y$), то такие соответствия называют ***противоположными***. Например, соответствие «число x больше числа y» и соответствие «число x не превосходит числа y».

Соответствия P и Q называют ***несовместимыми,*** если не существует ни одной пары $(x;y)$, для которой одновременно выполнялись бы условия xPy и xQy. Например, для прямых $x \perp y$ и $x || y$ соответствия несовместимы.

Например, рассмотрим S – соответствие «больше на *2*» между множествами $S=\{4, 5, 8, 10\}$ и $Y=\{2, 3, 6\}$. Тогда соответствие $S=\{(4; 2), (5; 3), (8; 6)\}$ и его граф будет таким, как на рисунке 23.

Изменим направление стрелок графа на обратное направление, как на рисунке 24. Получим граф нового соответствия «меньше на 2», которое обозначается S^{-1}. Тогда $S^{-1}=\{(2; 4), (3; 5), (6; 8)\}$. Такое соответствие называется обратным данному.

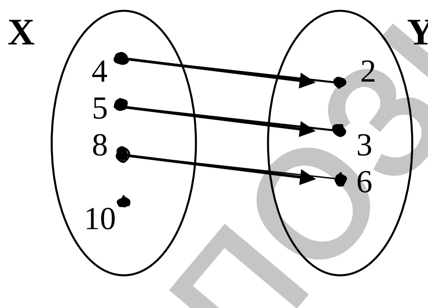


Рис. 23.

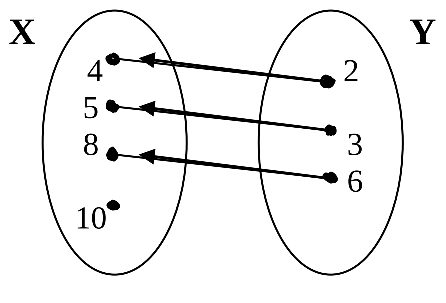


Рис. 24.

Пусть S – соответствие между множествами X и Y. Соответствие S^{-1} между множествами Y и X называется ***обратным*** *данному,* если $yS^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xSy.

Соответствия S и S^{-1} называют ***взаимно обратными.*** Выясним особенности их графиков соответствий, приведенных в примере выше. Построим в одной координатной плоскости (рис. 25) графики соответствий, заданных графами на рис. 23 и 24.

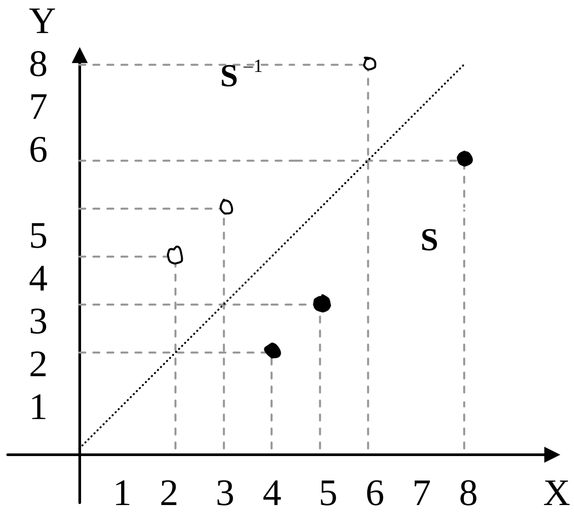


Рис. 25.

Мы видим, что графики взаимно обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Чтобы построить график соответствия S^{-1} достаточно изобразить на координатной плоскости точки, симметричные точкам графика S относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

В математике изучают различные виды соответствий. Это не случайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем нас мире, многообразны. Особую значимость имеют взаимно однозначные соответствия.

Рассмотрим примеры таких соответствий.

Пусть X – множество кружков, Y – множество квадратов. Соответствие между ними задано при помощи стрелок (рис. 26).

Это соответствие взаимнооднозначное, так как каждому кружку сопоставляется единственный квадрат и каждому квадрату сопоставляется единственный кружок.

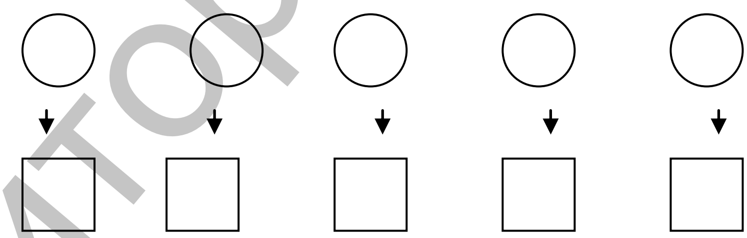


Рис. 26.

Рассмотрим другой пример. Пусть A – множество всех четных натуральных чисел, B – множество всех нечетных натуральных чисел. Каждому четному числу поставим в соответствие число, на единицу меньше:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 2n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 2n-1 & \dots \end{array}$$

Получим взаимно однозначное соответствие между бесконечными множествами A и B.

Таким образом, **взаимно однозначным соответствием** между множествами X и Y называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества Y и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу множества X.

Установим соответствие между элементами множеств A и B с помощью графа, если $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$.

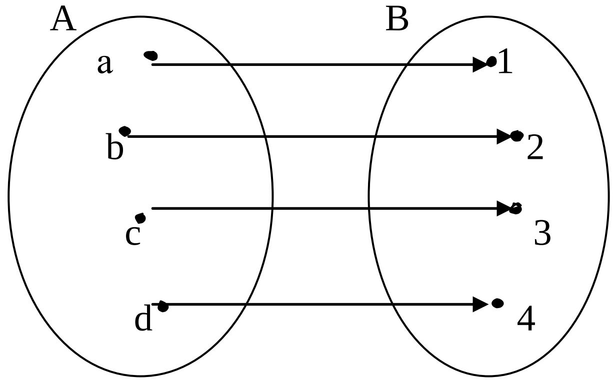


Рис. 27.

Так как каждому элементу из множества A соответствует единственный элемент из B и каждое число из множества B соответствует одному элементу из A, то соответствие между данными множествами взаимно однозначное.

В таком случае множества A и B считают равномощными или эквивалентными: $A \sim B$.

Множества X и Y называются **равномощными,** если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пусть X – множество точек отрезка AB, а Y – множество точек отрезка CD, причем длины отрезков различны. Так как между данными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (рис. 27), то множества точек отрезка AB и CD равномощны.

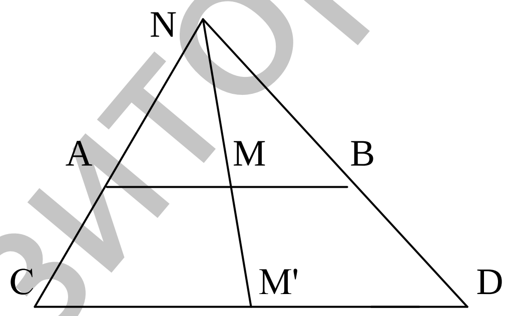


Рис. 28.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Например, множество четных чисел и множество нечетных чисел. Если бесконечное множество равномощно множеству натуральных чисел N, то его называют счетным. Но среди бесконечных множеств можно найти и такие, которые не будут эквивалентны между собой. Например, множество натуральных чисел и множество всех точек координатной прямой.

Отношение равномощности обладает рядом свойств:

– Рефлексивность (каждое множество равномощно самому себе: $X \sim X$).

– Симметричность, т.е. $X \sim Y$ и $Y \sim X$.

– Транзитивность, т.е. если множество X равномощно множеству Y, множество Y равномощно множеству Z, то множество X равномощно множеству Z: $X \sim Y$ и $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

8. ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим еще один важный частный случай общего понятия соответствия – отображения множеств. При соответствии R между множествами X и Y образ элемента $a \in X$ может оказаться пустым, а может содержать и несколько элементов.

Отношение между элементами множеств X и Y называется **отображением *X* в *Y***, если каждому элементу x из множества X соответствует только один элемент множества Y. Этот элемент называют **образом элемента** x при данном отображении: $f(x)$. На графе такого отображения из каждой точки множества X будет выходить только одна стрелка (рис. 29).

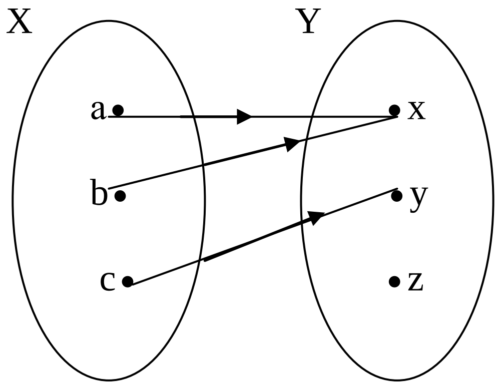


Рис. 29.

Отображения множеств обозначают так:

$f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$,

где f – символ отображения. Если при отображении f элементу x соответствует элемент y, то пишут:

$f\colon x \to y$; $x \xrightarrow{f} y$; $y = f(x)$.

Рассмотрим следующий пример**.** Пусть X – множество студентов в аудитории, а Y – множество стульев в той же аудитории. Соответствие «студент x сидит на стуле y» задает **отображение *X* в *Y*.** Образом студента x является стул.

Пусть $X = Y = N$ – множество натуральных чисел. Соответствие «десятичная запись числа x состоит из y цифр» определяет отображение N в N. При этом отображении числу 39 соответствует число 2, а числу 45981 – число 5(39 – двузначное число, 45981 – пятизначное).

Пусть X – множество четырехугольников, Y – множество окружностей. Соответствие «четырехугольник x вписан в окружность y» не является отображением X в Y, так как есть четырехугольники, которые нельзя вписать в окружность. Но в этом случае говорят, что получилось отображение из множества X в множество Y.

Если отображение X в Y таково, что каждый элемент y из множества Y соответствует одному или нескольким элементам x из множества X, то такое отображение называют **отображением множества *X* на множество *Y*.**

Множество X называют областью определения отображения $f\colon X \to Y$, а множество Y – областью прибытия этого отображения. Часть области прибытия, состоящая из всех образов y из множества Y, называется множеством значений отображения f.

Если $y=f(x)$, то x называют ***прообразом элемента y*** при отображении f. Множество всех прообразов элемента y называют его полным прообразом: $f^{-1}(y)$.

Отображения бывают следующих видов: инъективными, сюръективными и биективными.

Если полный прообраз каждого элемента $y \in Y$ содержит не более одного элемента (может быть и пустым), то такие отображения называют **инъективными** (рис. 30)

Отображения $X \xrightarrow{f} Y$ такие, что $f(X)=Y$, называют отображениями X на все множество Y или **сюръективными** (из каждой точки множества X выходит стрелка, а после изменения направления в каждой точке множества X заканчивается) (рис. 31).

Если отображение инъективно и сюръективно, то его называют взаимно однозначным или биективным.

Отображение множества X на множество называется **биективным**, если каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, а каждый элемент $y \in Y$ соответствует только одному элементу $x \in X$ (рис. 32).

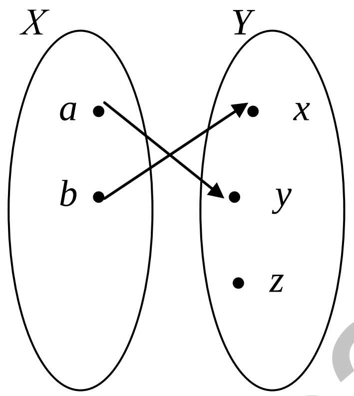


Рис. 30.

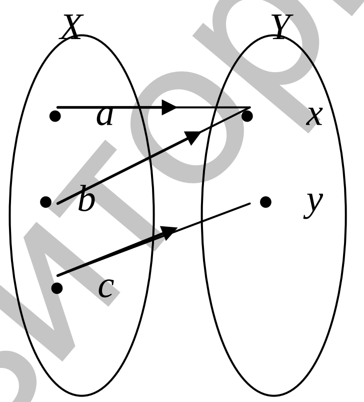


Рис. 31.

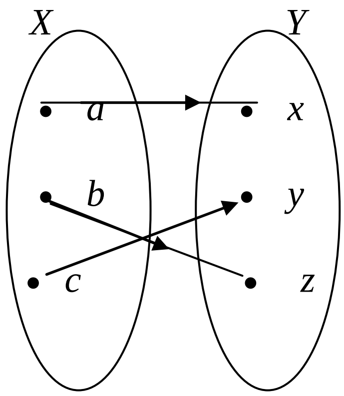


Рис. 32.

Биективные отображения порождают равномощные (эквивалентные) множества: $X \sim Y$.

Пример. Пусть – X множество пальто в гардеробе, Y – множество крючков там же. Поставим в соответствие каждому пальто крючок, на котором оно висит. Это соответствие является отображением *X в Y*. Оно инъективно, если ни на одном крючке не висит более одного пальто или некоторые крючки свободны. Данное отображение сюръективно, если все крючки заняты или на некоторых висят несколько пальто. Оно будет биективным, если на каждом крючке висит только одно пальто.

9. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т.е. соответствия отображения, но и связи между элементами одного множества. Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют бинарными, отношения между тремя элементами – тернарными, отношения между n элементами – n-арными.

Чтобы определить общее понятие отношения на множестве, рассмотрим пример.

Пусть дано множество $X=\{3, 4, 5, 6, 8\}$. Между числами этого множества существует отношение «больше»: $4>3$, $5>3$, $6>3$, $8>3$, $5>4$, $6>4$, $8>4$, $6>5$, $8>5$, $8>6$. Так же существует отношение «больше на 1»: $4>3$, $5>4$, $6>5$. Можно задать и отношение «меньше в два раза», «больше в два раза» и пр.

Рассматривая то или иное отношение, мы оперировали упорядоченными парами, образованными из чисел данного множества $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)$ и т.д., которые являются элементами декартова произведения $X \times X$.

Отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.

Утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R, можно записывать так: $(x, y) \in R$ или xRy. Последняя запись читается: «элемент x находится в отношении R с элементом y ».

Отношения можно задать так же, как и соответствия:

1) если множества конечны – перечислив пары элементов данного множества, находящиеся в этом отношении. Формы представления таких пар могут быть различными – они аналогичны формам задания соответствий.
2) при помощи предложения с двумя переменными, т.е. указав характеристическое свойство всех пар данного множества, находящихся в отношении R (например, «число x кратно числу y»).
3) при помощи графа и графика. В отличие от соответствий, граф отношения строится следующим образом: элементы данного множества изображаются точками на плоскости (их называют вершинами графа), а отношение R – стрелками, идущими от одних точек к другим.

Построим граф отношения «меньше» (рис. 33-*a*) и граф отношения «кратно» (рис. 33-*b*), заданных на множестве $X=\{2, 4, 6, 8\}$

Данные отношение можно задать, перечислив пары чисел, находящиеся в данном отношении. Отношение «меньше» $(x<y)$: $R=\{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8)\}$, а отношение «кратно» $(x \vdots y)$: $R=\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (8, 4)\}$.

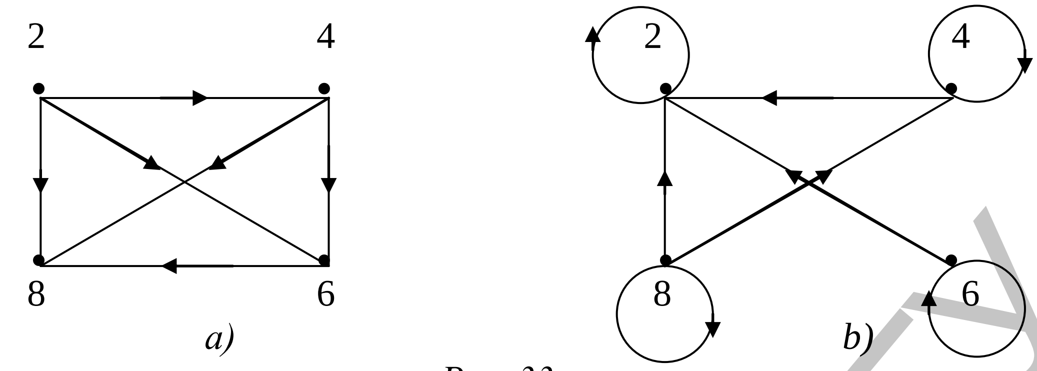


Рис. 33.

Для любого отношения R, заданного на множестве *X,* всегда можно задать отношение R^{-1}, ему **обратное**. Оно определяется так же, как соответствие, обратное данному.

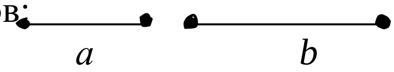
Например, если *R* – отношение «*x* меньше *y*», то обратным ему будет отношение «*y* больше *x*» на некотором множестве *K*.

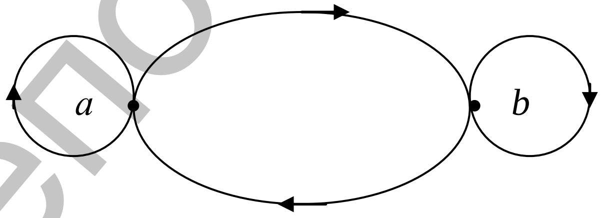
Как и любые другие понятия, отношения обладают свойствами. Их удалось выделить, изучая различные конкретные отношения. Свойств достаточно много, но в нашем курсе мы будем изучать только некоторые.

Свойства отношений:

1) рефлексивность;
2) симметричность;
3) транзитивность.
4) связанность.

Отношение *R* на множестве *X* называется **рефлексивным,** если о каждом элементе множества *X* можно сказать, что он находится в отношении *R* с самим собой: *xRx.* Если отношение рефлексивно, то в каждой вершине графа имеется петля. И обратно, граф, каждая вершина которого содержит петлю, представляет собой граф рефлексивного отношения (рис. 33-b).

Например**,** отношение параллельности отрезков: 

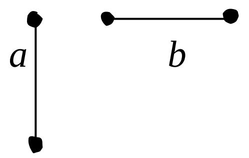


$a||b,\ a||a,\ b||a,\ b||b$

Рис. 34

Примерами рефлексивных отношений являются и отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое число кратно самому себе), и отношение подобия треугольников (каждый треугольник подобен самому себе), и отношение «равенства» (каждое число равно самому себе) и др.

Существуют отношения, не обладающие свойством рефлексивности, например, отношение перпендикулярности отрезков: $a \perp b,\ b \perp a$ (нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе). Поэтому на графе данного отношения нет ни одной петли.



Граф этого отношения выглядит так:

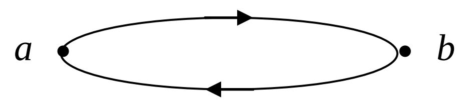


Рис. 35.

Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков, «больше на 2» для натуральных чисел и др.

Отношение *R* на множестве *X* называется **антирефлексивным**, если для любого элемента из множества *X* всегда ложно *xRx*: $\overline{xRx}$.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Примером такого отношения может служить отношение «точка *x* симметрична точке *y* относительно прямой *l*», заданное на множестве точек плоскости. Действительно, все точки прямой *l* симметричны сами себе, а точки, не лежащие на прямой *l*, себе не симметричны.

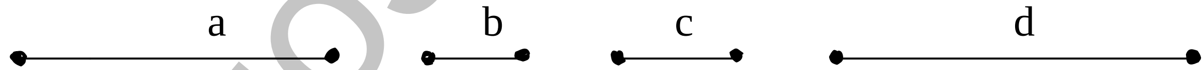
Отношение *R* на множестве *X* называется **симметричным**, если выполняется условие: из того, что элемент *x* находится в отношении с элементом *y*, следует, что и элемент *y* находится в отношении *R* с элементом *x*: $xRy \Rightarrow yRx$.

Граф симметричного отношения обладает следующей особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от *x* к *y*, граф содержит стрелку, идущую от *y* к *x* (рис. 35).

Примерами симметричных отношений могут быть следующие: отношение «параллельности» отрезков, отношение «перпендикулярности» отрезков, отношение «равенства» отрезков, отношение подобия треугольников, отношение «равенства» дробей и др.

Существуют отношения, которые не обладают свойством симметричности.

Например, отношение «длиннее» для отрезков:



Действительно, если отрезок *x* длиннее отрезка *y*, то отрезок *y* не может быть длиннее отрезка *x*. Граф этого отношения обладает особенностью: стрелка, соединяющая вершины, направлена только в одну сторону.

Такое отношение антисимметрично:
$a>b$, $a>c$, $c>b$,
$d>c$, $d>a$, $d>b$.

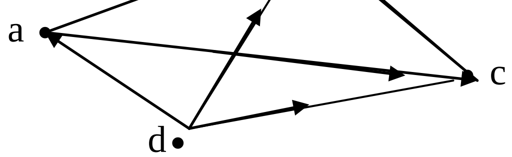


Рис. 36.

Отношение *R* называют **антисимметричным**, если для любых элементов *x* и *y* из истинности *xRy* следует ложность *yRx*: : $xRy \Rightarrow \overline{yRx}$.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков существуют и другие антисимметричные отношения. Например, отношение «больше» для чисел (если x больше y, то y не может быть больше x), отношение «больше на» и др.

Существуют отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

Например, в семье трое детей: Коля, Миша, Таня. Тогда граф отношения «быть братом» будет таким:

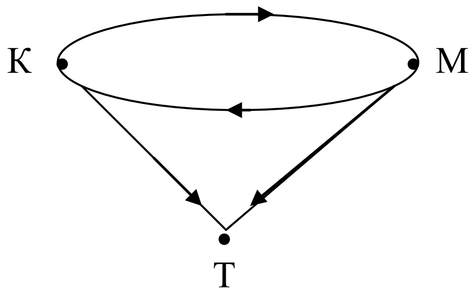


Рис. 37.

Отношение R на множестве X называют **транзитивным,** если из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, а элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z: xRy и $yRz \Rightarrow xRz$.

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и от y к z, содержит стрелку, идущую от x к z.

Например, Коле 8 лет, Мише 5 лет, Тане 2 года. Граф отношения «быть старше» выглядит так:

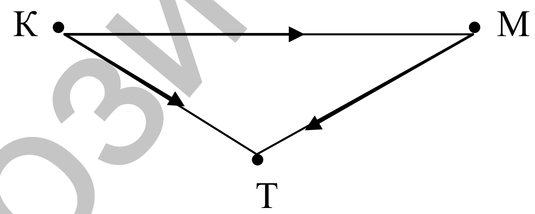


Рис. 38.

Свойством транзитивности обладает и отношение «длиннее» на множестве отрезков: если отрезок a длиннее отрезка b, отрезок b длиннее отрезка c, то отрезок a длиннее отрезка c. Отношение «равенства» на множестве отрезков также обладает свойством транзитивности: $(a=b, b=c) \Rightarrow (a=c)$.

Существуют отношения, которые не обладают свойством транзитивности. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности: если отрезок a перпендикулярен отрезку b, а отрезок b перпендикулярен отрезку c, то отрезки a и c не перпендикулярны!

Существует еще одно свойство отношений, которое называется свойством связанности, а отношение, обладающее им, называют связанным.

Отношение R на множестве X называется **связанным,** если для любых элементов x и y из данного множества выполняется условие: если x и y различны, то либо x находится в отношении R с элементом y, либо элемент y находится в отношении R с элементом x. С помощью символов это определение можно записать так: $x \neq y \Rightarrow xRy$ или yRx.

Например, свойством связанности обладает отношение «больше» для натуральных чисел: для любых различных чисел х и у можно утверждать, либо $x>y$, либо $y>x$.

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые не обладают свойством связанности. Таким отношением, например, является отношение делимости на множестве натуральных чисел: можно назвать такие числа х и y, что ни число x не является делителем числа y, ни число y не является делителем числа x (числа *17* и *11*, *3* и *10* и т.д.).

Рассмотрим несколько примеров. На множестве $X=\{1, 2, 4, 8, 12\}$ задано отношение «число x кратно числу y». Построим граф данного отношения и сформулируем его свойства.

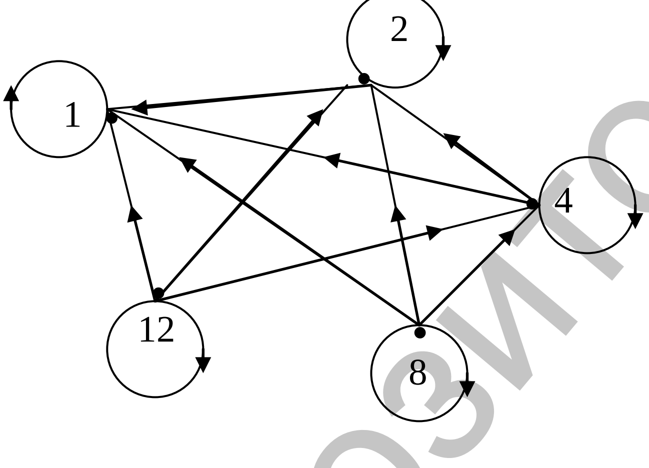


Рис. 39.

Данное отношение обладает следующими свойствами:
1) рефлексивностью, так как в каждой вершине графа есть петля;
2) антисимметричностью, две вершины графа соединены только одной стрелкой.

Рассмотрим на множестве дробей $X=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\}$ отношение «равенства».

Свойства отношения: 1) рефлексивность (каждая дробь равна сама себе);

2) симметричность $(\frac{m}{n} = \frac{ð}{ê})$;

3) транзитивность (если первая дробь равна второй, вторая дробь равна третьей дроби, то первая дробь равна третьей).

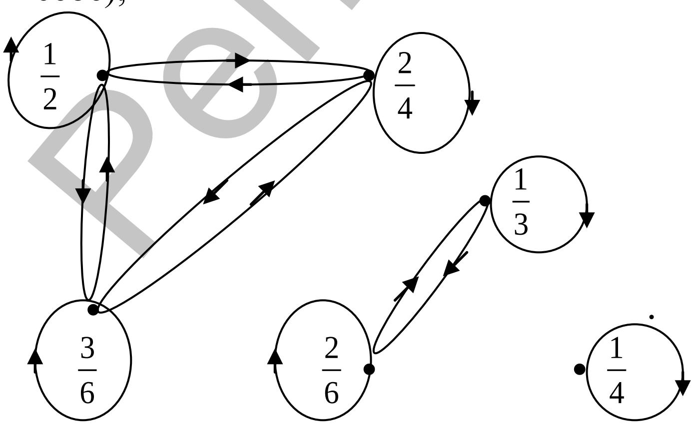


Рис. 40.

Про отношение равенства дробей говорят, оно является отношением эквивалентности.

Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности,** если оно одновременно обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примерами отношений эквивалентности могут служить: отношения равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными).

В рассмотренном выше отношении «равенства дробей», множество X разбилось на три подмножества: $\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{6}\}$, $\{\frac{1}{4}\}$. Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X, т.е. имеем разбиение множества на классы.

Итак, *если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.*

Так, мы установили, что отношению равенства на множестве $X=\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{6};\ \frac{3}{6}\}$ соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Принцип разбиения множества на классы при помощи некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Почему?

Во-первых, эквивалентный – это значит равносильный, взаимозаменяемый. Поэтому элементы одного класса эквивалентности взаимозаменяемы. Так, дроби, оказавшиеся в одном классе эквивалентности $\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{6}\}$, неразличимы с точки зрения отношения равенства, и дробь $\frac{3}{6}$ может быть заменена другой, например $\frac{1}{2}$. И эта замена не изменит результата вычислений.

Во-вторых, поскольку в классе эквивалентности оказываются элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения, то считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем, т.е. произвольным элементом класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность представителей из классов эквивалентности. Например, отношение эквивалентности «иметь одинаковое число вершин», заданное на множестве многоугольников, порождает разбиение этого множества на классы треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т.д. свойства, присущие некоторому классу, рассматриваются на одном его представителе.

В-третьих, разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется для введения новых понятий. Например, понятие «пучок прямых» можно определить как то общее, что имеют параллельные прямые между собой.

Другим важным видом отношений являются отношения порядка. Рассмотрим задачу. На множестве $X=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Это отношение порождает разбиение множества X на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа $3, 6, 9$). Во второй – числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа $4, 7, 10$). В третий попадут все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа $5, 8$). Действительно, полученные множества не пересекаются и их объединение совпадает с множеством X. Следовательно, отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3», заданное на множестве X, является отношением эквивалентности.

Возьмем еще пример: множество учащихся класса можно упорядочить по росту или возрасту. Заметим, что это отношение обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Или всем известен порядок следования букв в алфавите. Его обеспечивает отношение «следует».

Отношение R на множестве X называется **отношением строгого порядка**, если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности. Например, отношение «$x<y$».

Если же отношение обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, то такое оно будет являться **отношением нестрогого порядка**. Например, отношение «$x \geq y$».

Примерами отношения порядка могут служить: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел, отношение «короче» на множестве отрезков. Если отношение порядка обладает еще и свойством связанности, то говорят, что оно является **отношением линейного порядка**. Например, отношение «меньше» на множестве натуральных чисел.

Множество X называется **упорядоченным,** если на нем задано отношение порядка.

Например, множество $X=\{2, 8, 12, 32\}$ можно упорядочить при помощи отношения «меньше» (рис. 41), а можно это сделать при помощи отношения «кратно» (рис. 42). Но, являясь отношением порядка, отношения «меньше» и «кратно» упорядочивают множество натуральных чисел поразному. Отношение «меньше» позволяет сравнивать два любых числа из множества X, а отношение «кратно» таким свойством не обладает. Так, пара чисел 8 и 12 отношением «кратно» не связана: нельзя сказать, что 8 кратно 12 либо 12 кратно 8.

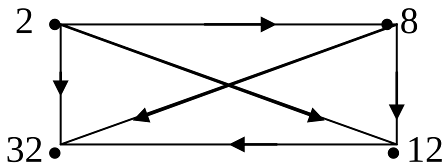


Рис. 41.

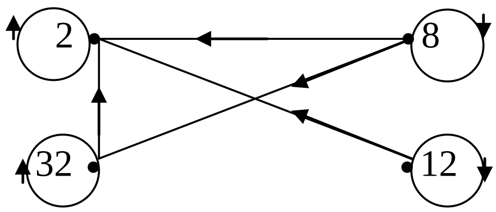


Рис. 42.

Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, – возникла в XVII в. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение изменилось после появления вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, биологии, планировании экспериментов, расшифровке кодов ДНК и т.д.

В математике комбинаторика используется при изучении конечных геометрий, комбинаторной геометрии, теории представлений групп, неассоциативных алгебр и пр.

С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди сталкивались еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрел. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли. Позже появились нарды, шашки, шахматы и пр., возникли комбинаторные задачи.

Первое упоминание о вопросах, близких к комбинаторным, встречается в китайских рукописях XII–XIII вв. до н.э. В Древнем Китае увлеклись составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что сумма по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям была одной и той же.

В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата и т.д.

Работы Паскаля и Ферма в XVII в. ознаменовали рождение двух ветвей математической науки – комбинаторики и теории вероятностей – они сформировали и доказали первые теоремы данных наук.

Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появился термин «комбинаторный». Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л. Эйлеру. Комбинаторными задачами интересовались и математики, занимавшиеся составлением и разгадыванием шифров, изучением древних письменностей.

По мере развития комбинаторики выяснилось, что, несмотря на внешнее различие изучаемых ею вопросов, многие из них имеют одно и то же математическое содержание и сводятся к задачам о конечных множествах и подмножествах. С ее помощью можно подсчитать число решений различных комбинаторных задач. В основе этой теории лежат «правило суммы» и «правило произведения», о которых мы будем говорить позже. Часто приходится считать число последовательностей длины m, составленных из элементов некоторого множества A, состоящего из n элементов. Целый ряд задач возникает при разбиении множества на части: найти число разбиений, если число частей равно k; найти, сколькими способами можно число n записать в виде суммы k слагаемых и пр. В решении комбинаторных задач часто используются графические методы, графы. Иногда при решении комбинаторных проблем нужно лишь доказать, что данная проблема имеет решение, или убедиться в его отсутствии.

10. ПРАВИЛО СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Обозначим число элементов конечного множества A символом $n(A)$. Если множества A и B не пересекаются, то $\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)}$. Если множества A и B пересекаются, то $\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$.

Например. На тарелке лежат 11 груш и 5 лимонов. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Речь идет о выборе «яблоко или груша» из множества плодов. Поэтому используем правило суммы: $11+5=16$. Значит, один плод можно выбрать 16 способами.

Правило подсчета числа элементов объединения непересекающихся конечных множеств носит название в комбинаторике **правила суммы**: если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y – m способами, причем ни один из способов выбора элемента x не совпадает со способом выбора элемента y, то выбор «x или y» можно осуществить $k+m$ способами.

Правило суммы распространяется не только на два множества. Так, например, пусть даны непересекающиеся множества A, B, C. Тогда

$$\boldsymbol{n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)}.$$

Число элементов декартова произведения множеств A и B подсчитывается по формуле $\boldsymbol{n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)}$.

Найдем сколько элементов содержит декартово произведение $A\times A$, если $A=\{a, b, c, d, e\}$?

Так как множество A содержит 5 элементов $(n(A)=5))$, то декартово произведение $A\times A$ содержит 5×5 элементов: $n(A\times A) = 5\times 5= 25$ пар. Значит, декартово произведение $A\times A$ содержит 25 элементов.

Правило подсчета числа элементов декартова произведения конечных множеств носит название в комбинаторике **правила произведения**: если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y – m способами, то пару (x, y) можно выбрать $k\cdot m$ способами.

Правила суммы и произведения могут быть обобщены на случай n множеств.

Приведем решения некоторых комбинаторных задач:

Задача 1. В классе *25* человек, посещающих факультативные занятия по литературе и математике. Углубленно изучают оба предмета *10* человек, а математику – *20*. Сколько человек посещает факультативные занятия только по литературе?

Решение: Пусть A – множество учащихся класса, B – множество учеников, посещающих факультатив по математике, C – множество человек, изучающих литературу: $n(A)=25$, $n(B)=20$. Множества B и C пересекаются: $n(B\cap C)=10$. Тогда количество учащихся класса $n(A)=n(B)+n(C)- n(B\cap C)$, т.е. $25=20+ n(C) -10$. Откуда $n(C)=25-20+10=15$. Таким образом, количество человек, посещающих занятия по литературе, равно *15*.

Данную задачу можно решить с помощью кругов Эйлера.

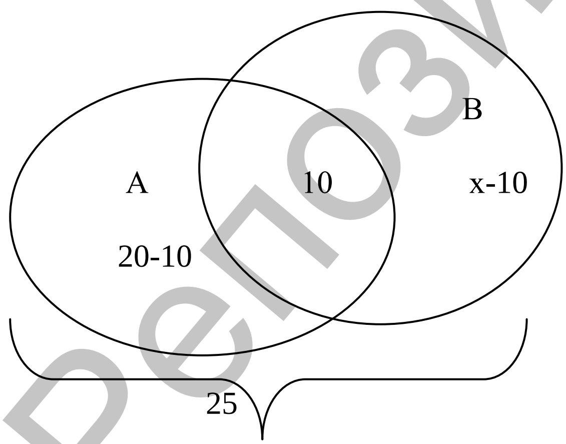


Рис. 43.

Тогда решение данной задачи будет следующим.

Так как математику изучают 20, то среди них будут те учащиеся, которые изучают еще и литературу. Их 10 человек. Тогда только математику изучают 20 – 10 = 10 человек.

Аналогично найдем количество человек, изучающих только литературу: (x – 10) человек.

Все эти учащиеся составляют 25 человек: 10 + (20 – 10) + (x – 10) = 25. Решая данное уравнение, найдем x = 15. Значит литературу изучают 15 человек.

Задача 2. В группе *30* студентов. *20* знают немецкий язык, *15* – английский. Каким может быть число студентов, знающих оба языка; знающих хотя бы один язык?

Решение: обозначим множество студентов, знающих немецкий язык через *N*, а множество студентов, знающих английский – через *A*, множество всех студентов – через *C*. Тогда $n(N)=20$, $n(A)=15$, $n(C)=50$.

Между множествами возможны следующие отношения:

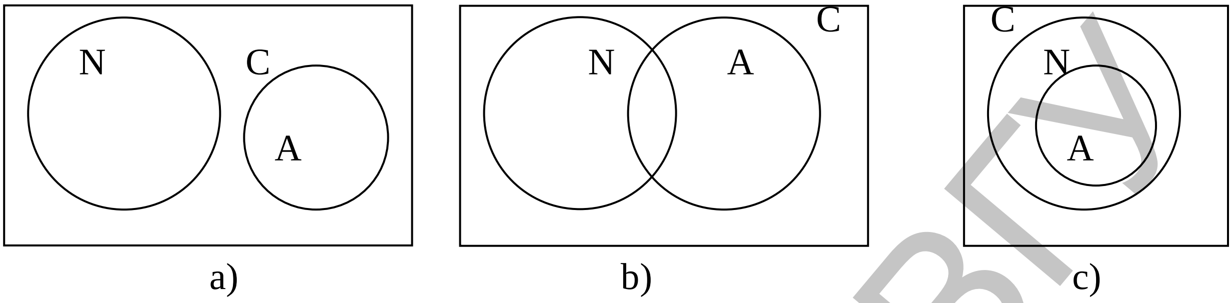


Рис. 44.

Вопрос о числе студентов, знающих оба языка, сводится к определению числа элементов в пересечении множеств *N* и *A*, вопрос о числе студентов, знающих хотя бы один язык, – к определению числа элементов в объединении этих множеств.

a) $n(N\cap A)=0$, $n(N\cup A)=n(N)+N(A)=20+15=35$;

b) $n(N\cap A)=?$, $n(N\cup A)=?$;

c) $n(N\cap A)=n(A)=15$, $n(N\cup A)=n(N)=20$.

Таким образом, число студентов, знающих оба языка (обозначим через x): $0 \le x \le 15$, а число студентов, знающих хотя бы один из языков (обозначим через y): $20 \le y \le 35$.

Задача 3. В классе *30* человек. Из них *26* человек занимается баскетболом, *25* – плаванием, *27* – лыжами, *15* занимаются баскетболом и плаванием, *18* – плаванием и лыжами, *16* посещают секции по баскетболу и лыжам. Один ученик освобожден от физкультурных занятий. Сколько человек занимается всеми указанными видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

Решение: В задаче рассматриваются три множества: множество *A* – учащихся, играющих в баскетбол, множество *B* – занимающихся плаванием и множество *C* – посещающих лыжную секцию. По условию эти множества попарно пересекаются и в объединении дают $40-1=39$.

Обозначим $n(A\cap B\cap C)=x$. Определим число учащихся в каждой непересекающейся области (рис. 44). Так как $n(A)=26$, $n(B)=25$, $n(C)=27$, $n(A\cap B)=15$, $n(B\cap C)=18$, $n(A\cap C)=16$, то число детей, посещающих только баскетбол и плавание, равно $(15\text{-}x)$, только плавание и лыжи – $(18\text{-}x)$, баскетбол и плавание – $(16\text{-}x)$, только баскетболом занимаются $26-(15-x)-(16-x)-x=x-5$ детей, только плавание посещает $25-(15-x)-(18-x)-x=x-8$ человек и, наконец, только лыжами – $27-(16-x)-(18-x)-x=x-7$ учащихся.

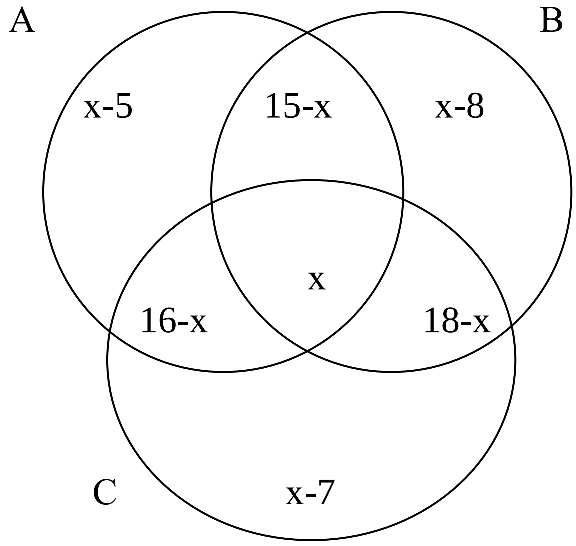


Рис. 45.

Составим уравнение: $(x\text{-}5)+ (x\text{-}8)+(x\text{-}7)+(15\text{-}x)+(18\text{-}x)+(16\text{-}x)+x=39$ – количество человек, которые занимаются спортом. Откуда $x=10$.

Тогда только баскетболом занимается $x\text{-}5=10\text{-}5=5$ человек, только плаванием – $x\text{-}8=10\text{-}8=2$ ученика и только лыжами – $x\text{-}7=10\text{-}7=3$ человека.

Аналогичную задачу решим используя правило суммы для трех множеств.

Задача 4. Пусть число дождливых дней равно *12*, ветреных – *8*, холодных – *4*, дождливых и ветреных – *5*, дождливых и холодных – *3*, ветреных и холодных – *2* . Наконец, дождливых, ветреных и холодных – *1*.

Тогда общее число плохих дней можно вычислить так: $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=n(A_1)+n(A_3)+n(A_3)\text{-}n(A_1 \cap A_2)\text{-}n(A_1 \cap A_3)\text{-}n(A_2 \cap A_3)\text{-}n(A_1 \bigcap A_2 \cap A_3)=12+8+4\text{-}5\text{-}3\text{-}2+1=15$.

Задача 5. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры *1, 3, 5*?

Решение: Цифры в записи числа могут повторяться и не повторяться. Рассмотрим первый случай. Тогда первую цифру в записи числа можно выбрать тремя способами (это может быть любая из данных цифр), вторую – также тремя и третью – тремя способами. Используя правило произведения, получаем: $3\times3\times3=27$ чисел. Во втором случае – первую цифру можно выбрать тремя способами, вторую двумя (так как цифры не должны повторяться) и третью – одним способом. В этом случае таких чисел будет равно $3\times2\times1=6$.

Задача 6. Из деревни *A* в деревню *B* ведут три дороги, а из *B* в *C* ведут две дороги. Сколькими способами можно пройти из *A* в С через *B*?

Чтобы решить данную задачу, обозначим дороги из *A* в *B* числами *1,2,3,* а из *B* в *C* – буквами *a, b*. Тогда каждый вариант пути из *A* в *C* задается парой, состоящей из числа и буквы. Например, *(2; a)*. Но число пар такого вида по правилу произведения равно $3 \cdot 2 = 6$. Вот эти варианты: *(1;a), (2;a),(3;a), (1;b), (2;b), (3;b).*

11. РАЗМЕЩЕНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ В КОМБИНАТОРИКЕ

Если задано множество X, то из его элементов можно составлять не только упорядоченные пары, но и упорядоченные тройки, четверки … элементов. Например, буквы слова «телефон» образуют упорядоченную семерку.

Пусть даны множества $X_1,\ X_2,\ X_3 \ldots X_n$. Возьмем какой-нибудь элемент a_1 из множества X_1, потом a_2 из множества $X_2, \ldots$ a_n из множества X_n. Выбранные элементы расположим по порядку: $(a_1;\ a_2; \ldots;\ a_n)$. Мы получим упорядоченную n–ку (энку) элементов, выбранных из множеств $X_1, X_2,\ \ldots,\ X_n$. Вместо слова «упорядоченная энка» говорят короче – «кортеж». Число n называют длиной кортежа, а элементы $a_1;\ a_2; \ldots;\ a_n$ – его компонентами.

В математике примером кортежа может служить набор цифр, входящих в десятичную запись какого-нибудь числа. Этот кортеж составлен из цифр *0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,* причем цифры могут повторяться, а при перестановке цифр может получиться иное число. Так, кортеж числа *112231* имеет вид *(1; 1; 2; 2; 3; 1).*

Два кортежа $(a_1;\ a_2; \ldots;\ a_n)$ и $(b_1;\ b_2; \ldots;\ b_n)$ называют равными, если они имеют одинаковую длину, т.е. $m = n$, и каждая компонента первого кортежа равна компоненте второго кортежа с тем же номером, т.е. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2,\ \ldots\ a_n = b_n$.

Понятие кортежа дает возможность рассматривать различные формулы в комбинаторике.

Пусть даны множества $X_1, X_2,\ \ldots,\ X_n$ из элементов которых составляются кортежи, которые могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством *X*, содержащим *m* элементов. Найдем количество кортежей длины *n*, которые можно составить из m-элементов множества *X*. Чтобы решить эту задачу, надо найти число кортежей в декартовом произведении $X \times X \times \ldots \times X$, содержащем *n* множителей. По правилу произведения это число элементов равно $n(X) \cdot n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots n(X)$. Так как по условию $n(X) = m$ (множество состоит из *m* элементов), то $n(X \times X \times \ldots \times X) = m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$.

Например, из *33* букв русского алфавита можно составить 33^2 слов длины *2 (аа, аб, ав,…, ая, ба, бб,…, яя)*, 33^3 слов длины *3* и т.д. Точно так же из *10* цифр *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* можно составить 10^2 двузначных номеров *(00,01,02,…,99)*, 10^3 трехзначных и т.д.

Количество кортежей длины *n*, составленных из элементов *m* множества *X*, называют **размещениями с повторениями** из *m* элементов по *n*, а их число обозначают $\overline{A_m^n}$ и вычисляют по формуле:

$$\boxed{\overline{A_m^n} = m^n}$$

Данная формула позволяет решать различные задачи. Например, имеется *4* различных кресла и *5* рулонов декоративной ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку кресел?

Так как кресла различны, то каждый способ обивки есть по существу кортеж длины *4*, составленный из элементов данного множества цветов ткани, содержащего *5* элементов. Значит, всего способов обивки кресел столько, сколько имеется таких кортежей. Т.е. мы имеем размещения с повторениями из *5* элементов по *4*.

$\overline{A_5^4}=5^4=5\times5\times5\times5=625$ – способов обивки кресел.

Конечное множество X называется *упорядоченным*, если его элементы перенумерованы некоторым образом: $X = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m)$. Понятие упорядоченного множества – частный случай понятия кортежа. Оно выделяется из общего понятия кортежа условием, что в упорядоченном множестве все элементы различны. Например, кортеж *(1, 5, 2, 4, 3)* не является упорядоченным множеством, а *(1, 2, 3, 4, 5)* – упорядоченное множество.

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами. Например, множество школьников в классе можно упорядочить по возрасту, росту, весу и т.д.

Сколькими способами можно упорядочить множество X? Каждое упорядочивание заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – номер 2, …, какой-то – номер m. Номер 1 может получить любой из элементов множества X. Значит, выбор первого элемента можно сделать m способами. Тогда второй можно выбрать $(m – 1)$ способами, третий – $(m – 2)$ способами и т.д. Последний элемент, который занимает m место, можно выбрать лишь одним способом.

По правилу произведения получаем, что общее число способов упорядочивания равно $m\times(m–1)\times(m–2)\times\ \ldots\ \times1$. Произведение первых m натуральных чисел в математике называют «*m-факториал*» и обозначают $m!$ Например, $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$. Таким образом, число упорядочиваний множества Х равно $m!$ Они состоят из одних и тех же элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком следования. При этом элементы в них не повторяются. Поэтому их число называют перестановками без повторений.

Два размещения без повторений из m элементов по m состоят из одних и тех же элементов, расположенных в различном порядке. Поэтому такие размещения называют **перестановками без повторений** из m элементов и обозначают $\boldsymbol{P_m}$.

Их количество подсчитывается по формуле:

$$\boxed{P_m=A_m^m=m\times(m–1)\times(m–2)\times\ \ldots\ \times1=m!}$$

Найдем число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.

Каждый способ задается перестановками *8* чисел – указываются номера горизонталей занятых полей на первой, второй, … , восьмой вертикалях. Число таких перестановок $P_8 = 8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40320$.

Определим, сколькими способами можно рассадить *12* человек за круглым столом?

У первого человека есть право выбора из *12* мест, у второго – из *11*, третьего – из *10*, … Последний занимает оставшееся одно место. Значит, в задаче речь идет о перестановках без повторений из *12* элементов: $P_{12} = 12! = 12\times11\times10\times9\times\ldots\times1 = 479001600$ способами можно рассадить *12* человек за круглым столом.

Решим следующую задачу. Сколько шестизначных чисел, не кратных *5*, можно образовать из цифр *1, 2, 3, 4, 5, 6* при условии, что каждая цифра входит в шестизначное число только один раз?

Решение: Так как количество всех чисел из данного набора *6* цифр задается перестановками без повторений, то их будет равно $P_6 = 6! = 720$.

Но среди этих чисел, есть числа, кратные *5*, т.е. которые оканчиваются на цифру *5*. Их количество выберется из цифр *1, 2, 3, 4, 6* и будет равно $P_5 = 5! = 120$.

Значит чисел, не кратных *5*, можно найти как $P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$.

Рассмотрим более сложную задачу: сколько упорядоченных *n*-множеств можно составить из элементов *m*-множества *X*?

Отличие этой задачи от предыдущей заключается в том, что составление упорядоченного *n*-множества заканчивается, когда мы выберем *n* элементов. Поэтому, чтобы найти число таких упорядоченных подмножеств, надо перемножить n чисел: $m, m-1, m-2$ и т.д. Последнее из них равно $m-n+1$. Эти упорядоченные *n*-множества называют размещения без повторений.

Кортежи длины *n*, составленные из неповторяющихся элементов множества *X*, содержащего *m* элементов, называют **размещениями без повторений** из *m* элементов по *n*. Число таких размещений обозначают A_m^n и подсчитывают по формуле:

$$\boxed{A_m^n = m\times(m-1)\times(m-2)\times\ \ldots\ \times(m-n+1)}$$

Эту формулу можно записать иначе:

$$\boxed{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!},\ \text{где}\ m! = m\times(m-1)\times(m-2)\times\ \ldots\times1.}$$

Определим, сколькими способами из *40* учащихся класса можно выделить актив в составе: староста, заместитель старосты, редактор стенгазеты?

В данной задаче речь идет о кортеже длины *3* (число школьников в активе класса), составленном из *40* неповторяющихся элементов, т.е. о размещении без повторений.

$A_{40}^{3}=40\times 39\times 38=59280$ – столько способов выделить актив класса.

Среди задач, связанных с применением формул по перестановкам или размещениям, рассматриваются задачи и вычислительные. Причем считают, что $1!=1$ и $0!=1$.

Рассмотрим задачу: четыре цифры *1,2,3,4* можно переставлять друг с другом $P_4=4!=24$ способами.

В слове *«мама»* четыре буквы. Но перестановок из этих букв можно составить не *24*, а только *6*: *«м а м а», «м а а м», «м м а а», «а а м м», «а м м а», «а м а м».* В этом легко убедиться, если в соответствие цифрам *1* и *2* поставить букву *«м»,* а цифрам 3 и *4* – букву *«а».*

Рассмотрим теперь задачу в общем виде. Пусть дан кортеж длины n, составленный из элементов множества $X=\{x_1; x_2; ...; x_m\}$, причем буква x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, …буква x_m – n_m раз. Тогда $n=n_1+\ldots+n_m$. Если переставлять в этом кортеже буквы, будут получаться новые кортежи, имеющие тот же состав, т.е. такие, что буква x_1 входит n_1 раз, …, буква x_m входит n_m раз. Мы будем называть эти кортежи перестановками с повторениями из букв $x_1; x_2; ...; x_m$, имеющими состав $(n_1, \ldots, n_m)$. Число таких перестановок обозначается $P(n_1, n_2, \ldots n_m)$. С помощью правила произведения находим, что число перемещений букв, не меняющих данную перестановку, равно $n_1!\ldots n_m!$ Но n чисел можно переставлять друг с другом $n!$ способами. Поэтому число различных перестановок букв, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots n_m)$, т.е. $P(n_1, n_2, \ldots n_m)$, *в* $n_1!\ldots. n_m!$ раз меньше, чем $n!$:

$$\boxed{P(n_1, n_2, \ldots n_m)=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_m!}.}$$

Пользуясь данной формулой, легко узнать, например, сколько различных кортежей получится, если переставить буквы в слове *«математика».*

Это слово состоит из *10* букв две буквы «*м*», три – *«а»,* две – *«т»,* и по одной – *«е», «и», «к».*

Значит состав слова «математика» – *(2, 3, 2, 1, 1, 1).* Тогда количество перестановок можно найти следующим образом:

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1)=\frac{10!}{2!\times 3!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!}=151200.$$

Итак, количество кортежей при перестановке букв в слове *«математика»* равно *151200.*

12. СОЧЕТАНИЯ В КОМБИНАТОРИКЕ

В комбинаторике часто рассматривают задачи на отыскание количества подмножеств, содержащих по k элементов каждое, можно составить из m элементов данного множества X?

Такие подмножества носят название сочетаний без повторений из элементов по *k*: C_m^k. Выведем формулу, выражающую C_m^k через *m* и *k*. Возьмем какое-нибудь *k*-подмножество *A* в m-множестве *X*. Так как множество *A* содержит *k* элементов, то его можно упорядочить *k*! способами. При этом каждое упорядоченное *k*-множество, состоящее из элементов множества *X*, может быть получено таким путем. Значит число упорядоченных *k*-множеств, составленных из элементов множества *X*, в *k*! раз больше числа неупорядоченных *k*-подмножеств в *X*.

Например, из элементов множества A = {*a, b, c, d*} можно составить четыре трехэлементных подмножества: {*a, b, c*}; {*a, b, d*}; {*a, c, d*}; {*b, c, d*}. Число же упорядоченных трехэлементных подмножеств в 3! = 6 раз больше:

{*a, b, c*}; {*a, b, d*}; {*a, c, d*}; {*b, c, d*}
{*a, c, b*}; {*a, d, b*}; {*a, d, c*}; {*b, d, c*}
{*b, a, c*}; {*b, a, d*}; {*c, a, d*}; {*c, b, d*}
{*b, c, a*}; {*b, d, a*}; {*c, d, a*}; {*c, d, b*}
{*c, a, b*}; {*d, a, b*}; {*d, a, c*}; {*d, b, c*}
{*c, b, a*}; {*d, b, a*}; {*d, c, a*}; {*d, c, b*}.

Но число упорядоченных *k*-множеств равно A_m^k, а число *k*-подмножеств мы обозначили через C_m^k. Поэтому $A_m^k = k! \cdot C_m^k$. Так как $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$,то мы получаем формулу, выражающую число *k*-подмножеств в *m*-множестве: $C_m^k = \frac{m!}{(m-k)! \times k!}$

Если множество *A* состоит из *m* элементов, то его подмножества, содержащие *k* элементов, называются **сочетаниями без повторений** из *m* элементов по *k* элементов. Их число подсчитывают по формуле:

$$\boxed{C_m^k = \frac{m!}{(m-k)! \times k!}}$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать делегацию в *5* человек из группы, содержащей *12* человек?

Поскольку порядок членов делегации не играет роли, то нам надо узнать, сколько можно выбрать пятиэлементных подмножеств из множества, содержащего *12* элементов. Число таких подмножеств $C_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)! \times 5!} = 792.$

Задача. В шахматном турнире принимают участие *12* человек. Сколько будет сыграно партий, если любые два участника встретятся между собой один раз?

Решение: Имеем множество, состоящее из *12* элементов. Так как нам нужно определить количество партий, т.е. подмножеств, куда входят *2* элемента, то речь идет о сочетании без повторений из *12* элементов по *2* элементам. Это можно подсчитать следующим образом: $C_{12}^{2}=\frac{12!}{(12-2)!\times 2!}=66.$

Таким образом, будет сыграно *66* партий.

Задача. На шахматном турнире, проводившемся в один круг, любые два участника встречались между собой один раз. Была сыграна *91* партия. Сколько человек участвовало в турнире?

Решение: Нам дано множество из x элементов. Известно, что каждая партия – это подмножество, которое состоит из *2-х* элементов. Всего таких подмножеств – *91*. Значит можно составить уравнение: $C_{x}^{2}=91$.

Решим данное уравнение: $C_{x}^{2}=\frac{x!}{(x-2)!\times 2!}=91;$ $\frac{x\times(x-1)\times(x-2)!}{(x-2)!\times 2!}=91.$

Сократим на $(x-2)!$. Получим квадратное уравнение $x^2-x=182$, откуда $x=14$. Значит, в турнире участвовало *14* человек.

Рассмотрим более сложную задачу. В кондитерской продаются пирожные *4* сортов: наполеоны, безе, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить *7* пирожных?

Если записывать порядок, в котором продавец кладет пирожные в коробку, то получится кортеж длины *7* из *4* элементов – сортов пирожных. Однако два кортежа одного и того же состава, например (н, н, э, п, с, с, э) и (э, н, с, н, э, п, с), означают одну и ту же покупку: 2 наполеона, 2 эклера, 2 слоеных, 1 песочное. Поэтому два способа сделать покупку надо считать различными лишь в случае, когда соответствующие кортежи отличаются своим составом.

Итак, мы пришли к следующей задаче: сколько различных составов могут иметь кортежи длины k из m элементов? По-другому эту задачу можно сформулировать так: на сколько классов эквивалентности разбивается вся совокупность кортежей длины k из m элементов (назовем два кортежа эквивалентными, если они имеют одинаковый состав)? Такие классы эквивалентности называют сочетаниями с повторениями из m элементов по k, а их число обозначают $\overline{C}_{m}^{k}$.

Сочетаниями с повторениями из m элементов по k вычисляют по следующей формуле.

$$\boxed{\overline{C}_{m}^{k}=\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!\times k!}}$$

Вернемся к нашей задаче. В ней поставлен вопрос: сколько различных составов могут иметь кортежи длины *7*, составленные из *4* элементов данного множества? По-другому эту задачу можно сформулировать и так: на сколько классов эквивалентности разбивается вся совокупность кортежей длины *7* из *4* элементов? В таком случае речь идет о сочетаниях с повторениями: $\overline{C}_{m}^{k}=\overline{C}_{4}^{7}=\frac{(4+7-1)!}{(4-1)!\times 7!}=120$ (способов).

Рассмотрим **свойства чисел $\boldsymbol{C_m^k}$**, которые выражают различные соотношения между подмножествами множества *X*.

1. Если $0 \le k \le m$, то верно равенство $\boldsymbol{C_m^k = C_m^{m-k}}$. Докажем данное равенство, используя формулу сочетаний без повторений:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!\times(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!\times k!} = C_m^k.$$

2. Для любых *k* и *m*, таких, что $0 \le k \le m$, верно равенство $\boldsymbol{C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k}$. Это равенство нетрудно получить также с помощью формулы сочетаний без повторений:

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{(m-1)!}{(m-k)!\times(k-1)!} = \frac{(m-1)!k}{(m-k)!\times k!};$$

$$C_{m-1}^{k} = \frac{(m-1)!}{(m-k-1)!\times k!} = \frac{(m-1)!(m-k)}{(m-k)!\times k!};$$

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^{k} = \frac{(m-1)!k}{(m-k)!\times k!} + \frac{(m-1)!(m-k)}{(m-k)!\times k!} = \frac{(m-1)!(k+m-k)}{(m-k)!\times k!} = \frac{m!}{(m-k)!\times k!} = C_m^k.$$

Отметим, что при *k=0* получаем равенство $C_m^0 = C_{m-1}^{-1} + C_{m-1}^0$. Так как $C_m^0 = C_{m-1}^0 = 1$, то следует положить $C_{m-1}^{-1} = 0$. Аналогично C_m^k при $k>m$. Тогда доказанное выше равенство (2) оказывается верным и при $k = m$.

Данная формула позволяет вычислить значения C_m^k, зная C_{m-1}^k и C_{m-1}^{k-1}. Иными словами, с помощью этого тождества можно последовательно вычислить C_m^k сначала при m=0, затем при m=1, при m=2 и т.д. Вычисления удобно записывать в виде треугольной таблицы, которая получила название арифметического треугольника (или треугольника Паскаля):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}$$

…………………………….

При составлении арифметического треугольника каждое число *n*-й сроки участвует в образовании двух чисел (*n* + 1)-й строки – стоящего слева и стоящего справа от него. Поэтому если сложить числа (*n* + 1)-й строки через одно, то в полученную сумму войдут по одному разу все числа *n*-й строки. Складывать числа через одно можно двумя способами – начав с первого числа строки или начав со второго числа. В обоих случаях получится одна и та же сумма, равная сумме чисел в *n*-й строке.

Доказанное свойство арифметического треугольника можно записать так:

$$C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots = C_{m-1}^0 + C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2 + \ldots + C_{m-1}^{m-1}.$$

Из него следует, что сумма чисел (*n* + 1)-й строки вдвое больше суммы чисел *n*-й сроки. Иными словами, при переходе к следующей строке арифметического треугольника сумма чисел в строке удваивается. Но в первой строке стоит только одно число 1, а потому для этой строки сумма равна 1. Поэтому в *(n + 1)*-й сроке сумма чисел равна 2^m:

3. $\boldsymbol{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m}$**.**

4. $\boldsymbol{C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-1} = \dfrac{k-m+1}{k+1} \times . C_{m+k}^m}$**.**

5. $\boldsymbol{C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m = C_{m+3}^{m+1}}$**.**

6. $\boldsymbol{C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m = C_{m+4}^{m+1}}$**.**

7. $\boldsymbol{C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots = 2^{m-1}}$**.**

8. $\boldsymbol{C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots = 2^{m-1}}$**.**

Рассмотрим задачу. Пусть дано множество *M={a, b, c, d}*. Подсчитаем количество всевозможных подмножеств данного множества, состоящего из *4* элементов: одноэлементных подмножеств будет $C_4^1 = \dfrac{4!}{(4-1)!\times 1!}$ *=4*; двухэлементных будет $C_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!\times 2!}$ *=6*; трехэлементных – $C_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!\times 3!}$ *=4*; четырехэлементных соответственно $C_4^4 = \dfrac{4!}{(4-4)!\times 4!}$ *=1* и еще одно пустое множество $\varnothing$. Всего получилось *4+6+4+1+1=16* подмножеств, что соответствует 2^4 *=16*.

Таким образом, *общее число всех подмножеств множества X*, состоящего и *m* элементов можно подсчитать по формуле:

$$\boxed{2^m = C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляются в виде четырех групп. В первую включаются понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, слагаемое и др. Во вторую входят алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и пр. Третью составляют геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т.д. Четвертую группу образуют понятия, связанные с величинами и их измерением.

Как же изучать такое обилие самых разных понятий?

Прежде всего, надо иметь представление о понятии логической категории и особенностях математических понятий.

В логике понятия рассматривают как форму мысли, отражающую объекты, предметы, явления в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Составить понятие об объекте – это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов. Математические понятия обладают рядом особенностей. Главная заключается в том, что математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие свойства: цвет, массу и пр. От всего этого отвлекаются, абстрагируются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят «геометрическая фигура».

Чтобы овладеть общими подходами к изучению понятий в начальном курсе математики, учителю необходимы знания об объеме и содержании понятия, об отношениях между понятиями и о видах определений понятий.

13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет равные стороны, равносторонний треугольник – равные углы, четные числа делятся на *2* и т.д. Данные объекты имеют и другие свойства: квадрат имеет прямые углы, равносторонний треугольник – равные стороны, четные числа на *1* больше нечетных в порядке их следования.

При выделении объекта из ряда других объектов различают его существенные и несущественные свойства.

Свойство считают **существенным** для объекта, если оно присуще этому объекту и без него не может существовать.

Несущественные свойства – это свойства, отсутствие которых не влияет на существование объекта.

Например, четные числа делятся на *2* – существенное свойство, больше на *1* – несущественное.

Чтобы понимать, что представляет собой объект, достаточно знать его существенные свойства. В этом случае говорят, что имеется *понятие* об этом объекте.

Условимся обозначать понятия строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c, ..., z$.

Когда говорят о математическом понятии, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином. Так, говоря о квадрате, имеют в виду геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Считают, что множество всех квадратов составляет объем понятия «квадрат».

Объем понятия – это множество объектов, обозначаемых одним термином. Соответственно обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C...

Совокупность всех взаимосвязанных существенных свойств объекта, отраженных в данном понятии, составляет **содержание понятия.**

Рассмотрим, например, понятие «прямоугольник».

Объем понятия – это множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства прямоугольников, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т.д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот. Так, *например,* объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник». В содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник».

Если объемы понятий a и b не пересекаются, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что понятия a и b **несовместимы.**

Если объемы понятий a и b находятся в отношении пересечения, т.е. $A \cap B \neq \varnothing$, то понятия **совместимы.**

Если объем понятия a является собственным подмножеством объема понятия b, т.е. $A \subset B$ *и* $A \neq B$, то говорят, что:

1) понятие a является **видовым** по отношению к понятию b , а понятие b – **родовым** по отношению к a;
2) понятие a уже, чем понятие b, а понятие b шире понятия a;
3) понятие a есть **частный случай** понятия b, а понятие b есть **обобщение** понятия a.

Например, если a – «прямоугольник», b – «четырехугольник», то их объемы A и B находятся в отношении включения: $A \subset B$ *и* $A \neq B$, поскольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «прямоугольник» – видовое по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» – родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если объемы понятий равны, т.е. $A=B$, то говорят, что понятия a и b **тождественны.**

Например, понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник» тождественны, так как их объемы совпадают.

Рассмотрим подробнее отношение вида и рода между понятиями. Во-первых, понятия рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» – родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий. Так, для понятия «прямоугольник» родовым являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Например, «параллелограмм».

В-третьих, видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами прямоугольника.

Так как объем понятия является множеством, удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их при помощи кругов Эйлера. Установим отношения между некоторыми понятиями и изобразим отношения между их объемами на кругах Эйлера: 1) a – «целое число», b – «натуральное число», c – «отрицательное число»; 2) a – «дерево», b – «растение», c – «кустарник».

Решение: Выясним, в каком отношении находятся данные объемы.

1) Целое число может быть как положительным, так и отрицательным. Натуральные числа – это целые положительные. Отрицательные числа могут быть и целыми и дробными. Значит $B \subset A$, $A \cap C$, $B \not\subset C$. На кругах Эйлера это выглядит так:

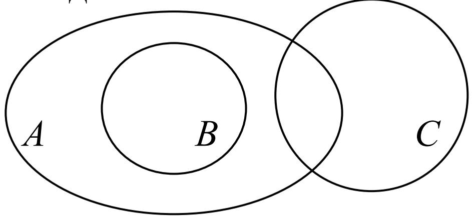


Рис. 46.

2) Дерево и кустарник являются растениями. Следовательно, $A \subset B$ и $C \subset B$, причем $A \not\subset C$. Тогда данные отношения между объемами понятий a – «дерево», b – «растение», c – «кустарник» можно изобразить следующим образом:

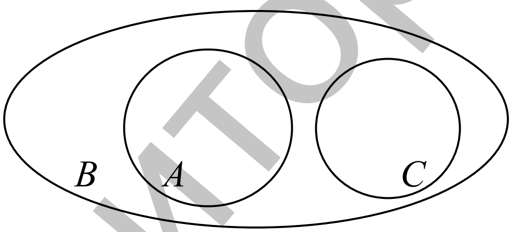


Рис. 47.

Указание существенных свойств объекта, которые достаточны для его распознавания, является определением понятия об этом объекте.

Определением обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина. Как правило, это делают на основе ранее введенных понятий.

Во всяком определении выделяются определяемое (что определяют) и определяющее (через что определяют) понятия. Через определяющее раскрывается содержание определяемого понятия.

Например, прямоугольник можно определить так: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые». В этом определении есть две части – определяемое понятие (прямоугольник) и определяющее понятие (четырехугольник). Если обозначить через a первое понятие, а через b – второе, то данное определение можно представить в таком виде: a есть (по определению) b. Слово «есть (по определению)» заменяют символом $\underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}$. Тогда определение будет выглядеть так $a \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} b$.

Читают: «a равносильно b по определению».

Определения, имеющие такую структуру, называются явными.

Явными называют определения, в которых смысл определяемого термина полностью передается через смысл определяющих терминов. Явные определения имеют форму равенства или совпадения двух понятий.

Например, «прямоугольный треугольник – это треугольник с прямым углом». Обозначим через *a* – «прямоугольный треугольник», через *b* – «треугольник с прямым углом». Тогда схема данного определения будет «*a* есть *b*».

В **неявных** определениях смысл определяемого термина не передается полностью определяющими терминами. Типичный пример неявного определения – определение исходных понятий с помощью системы аксиом.

К неявным определениям относят и **контекстуальные** и **остенсивные** определения. В первых определениях содержание нового понятия раскрывается через текст, анализ конкретной ситуации, описывающей смысл понятия. Остенсивные определения используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают.

Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения в учебнике II класса. *Пример* остенсивного определения:

$2\,7 > 2\,6$	$9 \times 3 = 27$
$37+6 > 37$	$17-5 = 8+4$
это неравенства	это равенства

Одним из видов определений является определение **через род и видовое отличие**. Структура таких определений такова: 1) в определяющем понятии указывается родовое понятие по отношению к определяемому; 2) указывается свойство, которое выделяет нужный нам вид из других видов данного рода (так называемое видовое отличие).

Например, в предложении «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые» родовым понятием является понятие «четырехугольник», а видовым отличием – свойство иметь прямой угол.

Схематично это можно представить так:

$$\boxed{\text{Определяемое понятие}} = \underbrace{\boxed{\text{родовое отличие}} + \boxed{\text{видовое отличие}}}_{\text{определяющее понятие}}$$

Если *a* – определяемое понятие, то его объем можно выразить следующим образом: $A=\{x \mid x \in B \text{ и } P(x)\}$, где *B* – объем родового понятия по отношению к *a*, а $P(x)$ – видовое отличие.

Таким образом, для выяснения принадлежности некоторого объекта объему определяющего понятия необходимо проверить, обладает ли этот элемент указанным характеристическим свойством.

Если элемент b принадлежит объему родового понятия и обладает свойством P, то можно сделать вывод о его принадлежности объему определяемого понятия. Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то можно сделать вывод о непринадлежности данного элемента объему определяемого понятия.

Встречаются в математике и определения, построенные по-другому. Рассмотрим, например, также определение ломаной: «Ломаной называется геометрическая фигура, которая состоит из отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$. В этом определении указано родовое понятие по отношению к ломаной – фигура, а затем дан способ построения такой фигуры, которая является ломаной. Подобные определения называют генетическими (от слова «генезис», то есть происхождение).

В индуктивном (рекуррентном) определении объект задается как функция $f(n)$ от натурального числа n. Это задание обеспечивается указанием значения $f(1)$ и некоторого равенства, связывающего значения $f(n+1)$ и $f(n)$. Индуктивным является, например, определение арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом». Здесь определяемое понятие 0 «арифметическая прогрессия», родовое понятие – «числовая последовательность», а далее описывается способ получения всех членов прогрессии, начиная со второго. Это определение можно записать в виде формулы $a_n = a_{n+1} + d$, где $n \geq 2$.

Формулируя определения, придерживаются ряда правил. Назовем основные.

1. Определение должно быть соразмерным. Это означает, что объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать. Это правило вытекает из того, что определяемое и определяющее понятия взаимозаменяемы.

Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Действительно, объем определяемого понятия – множество квадратов. Объем определяющего понятия – множество четырехугольников, все стороны которых равны, а это множество ромбов. Но не всякий ромб есть квадрат, т.е. объемы определяемого и определяющего понятия не совпадают, и, следовательно, данное определение несоразмерно.

2. В определении (или их системе) не должно быть порочного круга.

Это означает, что нельзя определять понятие через само себя (в определяющем не должно содержаться определяемого термина) или определять его через другое, которое, в свою очередь, определять через него.

Например, содержат порочный круг определения: «Равные треугольники – это треугольники, которые равны», «Касательная к окружности – это прямая, которая касается окружности».

Так как в математике рассматривают не просто отдельные понятия, а их систему, то данное правило запрещает порочный круг и в системе определений. В соответствии с ним нельзя определять понятие *а*, выбрав в качестве родового понятия *с*, а понятие *с* – через понятие *а*.

Например, если определить окружность как границу круга, а круг как часть плоскости, ограниченную окружностью, то мы будем иметь порочный круг в определениях данных понятий.

3. Определение должно быть ясным. Это на первый взгляд очевидное правило, но означает оно многое. Прежде всего, требуется, чтобы значения терминов, входящих в определяющее понятие, были известны к моменту введения определения нового понятия.

Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

К условиям ясности определения относят также рекомендацию включать в видовое отличие лишь столько свойств, сколько необходимо и достаточно для выделения определяемых объектов из объема родового понятия.

Рассмотрим, например, такое определение прямоугольника: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны».

Нетрудно убедиться в том, что это определение соразмерное и в нем нет порочного круга. Но можно доказать, что свойство «в прямоугольнике противоположные стороны равны» вытекает из свойства «в прямоугольнике все углы прямые». В этом случае считают, что в данном определении прямоугольника второе свойство избыточное.

Таким образом, чтобы определение было ясным, желательно, чтобы оно не содержало избыточных свойств в определяющей части, т.е. таких свойств, которые могут быть выведены из других, включенных в это определение. Однако иногда для простоты изложения это правило нарушают.

Для обеспечения ясности определения важно также наличие понятия, родового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия делает определение несоразмерным. Неприемлемо, например, такое определение квадрата: «Квадрат – это когда все стороны равны».

К сказанному следует добавить, что, формулируя определение, надо стремиться в определяющем указывать не просто родовое по отношению к определяемому понятие, а ближайшее. Это часто позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

Например, если для определения квадрата в качестве родового выбрать понятие «четырехугольник», то тогда надо будет включать в видовое отличие два свойства: «иметь все прямые углы» и «иметь все равные стороны». В результате получим определение: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны».

Если же в качестве родового выбрать ближайшее для квадрата родовое понятие – прямоугольник, то получим более короткое определение квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны».

4. Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие, соблюдая сформулированные выше правила, можно по-разному. Так, квадрат можно определить как:

а) прямоугольник, у которого соседние стороны равны;
б) прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;
в) ромб, у которого есть прямой угол;
г) параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

Различные определения одного и того же понятия возможны потому, что из большого числа свойств, входящих в содержание понятия, в определение включаются только некоторые. И когда из возможных определений выбирают одно, исходят из того, какое из них проще и целесообразнее для дальнейшего построения теории.

Если же одному и тому же понятию даются, например, два разных определения, то необходимо доказывать их равносильность, т.е. убеждаться в том, что из свойств, включенных в одно определение, вытекают свойства, включенные в другое, и наоборот.

Завершая рассмотрение определений понятий через род и видовое отличие, назовем ту последовательность действий, которую мы должны соблюдать, если хотим воспроизвести определение знакомого понятия или построить определение нового:

1. Назвать определяемое понятие (термин).
2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемому) понятие.
3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты из объема родового, т.е. сформулировать видовое отличие.
4. Проверить, выполнены ли правила определения понятия (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя как естественный словесный язык, так и свой символический. Описание строится при помощи предложений. Но чтобы математические знания были достоверными, правильно отражали окружающую нас реальность, эти предложения должны быть истинными. Как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ином математическом предложении? На этот и другие вопросы дает ответ математическая логика.

14. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Под **высказыванием** обычно понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Например: «Минск – столица Республики Беларусь» – истинное высказывание, «В данном треугольнике *ABC* два внутренних угла прямые» – ложное высказывание.

Не всякое предложение является высказыванием. Например, «шахматы – интересная игра», «число *13* не способствует удаче» и пр. К высказываниям не относят и повелительные, вопросительные и восклицательные предложения. Определения также не являются высказываниями.

Высказывания обозначаются прописными латинскими буквами *A, B, C*... Значения, которые могут принимать высказывания, записывают: *И* – «истинно», *Л* – «ложно».

Из двух данных высказываний с помощью логических связок «и», «или», «если …, то…», «…тогда и только тогда, когда…» и др. можно образовывать новые высказывания, не учитывая при этом их смысловое значение.

Например, из высказываний «$3<9$» и «число 2 – простое» можно образовать следующие высказывания: «$3<9$ и число 2 – простое», «$3<9$ или число 2 – простое», «если $3<9$, то число 2 – простое», «$3<9$ тогда и только тогда, когда 2 – простое число».

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называют **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называют **элементарными.**

Если высказывание элементарное, то его значение истинности определяют по содержанию. Определение же истинности составного высказывания определяется с помощью операций над высказываниями.

1. *Операция отрицания.*

Отрицанием высказывания A называется высказывание, обозначаемое $\overline{A}$ (читается «не *A*», «неверно, что *A*»), которое истинно, когда *A* ложно и ложно, когда *A* – истинно.

Эту операцию можно определить с помощью таблицы истинности:

Таблица 1

A	$\overline{A}$
Л	*И*
И	*Л*

Операция отрицания соответствует логической связке «не».

Отрицающие друг друга высказывания A и $\overline{A}$ называются **противоположными.**

Построим отрицание высказывания «число π $=3,14$». Это истинное высказывание. Тогда его отрицание будет следующим: «$\pi \neq 3,14$» – ложное высказывание.

2. *Операция конъюнкции*.

Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (читается «A и B»), истинные значения которого определяются в том и только том случае, когда оба высказывания A и B истинны.

Таблица 2

A	B	$A \wedge B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*Л*

Конъюнкцию высказываний называют логическим произведением и часто обозначают AB.

Пусть дано высказывание A – «в марте температура воздуха от $0^0 C$ до $+7^0 C$» и высказывание B – «в Витебске идет дождь». Тогда $A \wedge B$ будет следующей: «в марте температура воздуха от $0^0 C$ до $+7^0 C$ и в Витебске идет дождь». Данная конъюнкция будет истинной, если будут высказывания A и B истинными. Если же окажется, что температура была меньше $0^0 C$ или в Витебске не было дождя, то $A \wedge B$ будет ложной.

3. *Операция дизъюнкции*.

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (A или B), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний истинно и ложно – когда оба высказывания ложны.

Данное определение можно представить с помощью таблицы истинности:

Таблица 3

A	B	$A \wedge B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*

Дизъюнкцию высказываний называют также логической суммой $A+B$.

Высказывание «$4<5$ или $4=5$» является истинным. Так как высказывание «$4<5$» – истинное, а высказывание «$4=5$» – ложное, то $A \vee B$ представляет собой истинное высказывание «$4 \leq 5$».

4. *Операция импликации*.

Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \Rightarrow B$ («если A, то B», «из A следует B»), значение которого ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

В импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называют *основанием*, или посылкой, а высказывание B – *следствием*, или *заключением*.

С помощью таблиц истинности это можно определить так:

Таблица 4

A	B	$A \Rightarrow B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*И*
Л	*Л*	*И*

Дано высказывание «Если число *12* делится на *2* и на *3*, то оно делится на *6*». Так как высказывание A – «число *12* делится на *2*» истинно, высказывание B – «число *12* делится на *3*» также истинно, то и импликация $A \Rightarrow B$ истинна.

5. *Эквиваленция высказываний*.

Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ ($A;B$) (читается «A эквивалентно B», «A тогда и только тогда, когда B», «A необходимо и достаточно для B»), которое истинно тогда, когда A и B одновременно истинны или оба ложны.

Истинность эквиваленции определяется следующей таблицей.

Таблица 5

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	*И*	*И*
И	*Л*	*Л*
Л	*И*	*Л*
Л	*Л*	*И*

Дано высказывание A – «число *5n* делится на *2*» и высказывание B – «число *n* является четным». Сформулируем эквиваленцию $A \Leftrightarrow B$:

a) число *5* делится на *2* тогда и только тогда, когда *n* – четное число;

b) условия: число *5n* делится на *2* и что число *n* – четное, эквивалентны;

c) для того чтобы число *5n* делилось на *2*, необходимо и достаточно, чтобы *n* было четным;

d) для того чтобы *n* было четным, необходимо и достаточно, чтобы число *5n* делилось на *2*;

e) из того, что *5n* делится на *2*, следует, что *n* число четное и обратно.

Два высказывания, составленные из высказываний *A, B, C, …* с помощью знаков $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и отрицания называют **равносильными,** если они имеют одну и ту же истинность при любых предположениях об истинности и ложности *A, B, C, …*

Например, $A \wedge B = B \wedge A$, $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

Составные высказывания, принимающие значения истинности при всех наборах значений входящих в них элементарных высказываний, называют **тавтологиями.** Их называют и **тождественно-истинными высказываниями** или **законами логики.**

Найдем значение истинности формулы $A\vee\overline{A}$:

Таблица 6

A	$\overline{A}$	$A\vee\overline{A}$
И	*Л*	*И*
Л	*И*	*И*

Из таблицы видно, что высказывание $A\vee\overline{A}$ принимает значение истинности при любом наборе истинности высказывания *А*. Значит, формула $A\vee\overline{A}$ является тавтологией.

Основные **законы логики:**

1) $A\vee\overline{A}$ – закон исключения третьего;
2) $A\wedge\overline{A}$ – закон исключения противоречия;
3) $\overline{\overline{A}}\equiv A$ – закон двойного отрицания;
4) $\overline{A\wedge B}\equiv(\overline{A}\vee\overline{B})$ } законы де Моргана;
5) $\overline{A\vee B}\equiv(\overline{A}\wedge\overline{B})$
6) $\overline{A\Rightarrow B}\equiv(A\wedge\overline{B})$ – закон отрицания импликации;
7) $\overline{A\Leftrightarrow B}\equiv(A\wedge\overline{B})\vee(B\wedge\overline{A})$ – закон отрицания эквиваленции;
8) $(A\Rightarrow B)\equiv(\overline{B}\Rightarrow\overline{A})$ – закон контрапозиции;
9) $(A\Rightarrow B)\Rightarrow C\equiv(A\wedge B)\Rightarrow C;$
10) $(A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)\equiv(A\Rightarrow(B\wedge C);$
11) $(A\Rightarrow C)\wedge(B\Rightarrow C)\equiv(A\vee B\Rightarrow C);$
12) $((A\Rightarrow B)\wedge A)\Rightarrow B;$
13) $((A\Rightarrow B)\wedge\overline{B})\Rightarrow\overline{A};$
14) $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C);$
15) $(A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow\overline{B})\Rightarrow\overline{A};$
16) $(A\wedge B)\equiv(B\wedge A)$ } коммутативность;
17) $(A\vee B)\equiv(B\vee A)$
18) $(A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C$ } ассоциативность;
19) $(A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$
20) $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ } дистрибутивность;
21) $(A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(B\vee C)$
22) $A\wedge A\equiv A;$
23) $A\vee A\equiv A.$

Пусть символы *X, Y, Z,* …обозначают произвольные высказывания. Каждое из них представляет собой переменное, которое может принимать два значения *И* и *Л,* и называется **переменным элементарным высказы-**

ванием. В отличие от переменного, элементарное высказывание, имеющее определенное значение *И* или *Л,* называется **постоянным.**

Переменные элементарные высказывания *X, Y, Z,* …есть **формулы.**

С помощью формул, знаков логических операций и скобок можно составлять новые формулы. Если X_1 *и* X_2 – формулы, то $\overline{X_1}$, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $X_1 \Rightarrow X_2$, $X_1 \Leftrightarrow X_2$ – также **формулы.**

Пусть даны X_1, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee \overline{X_2}$. С помощью знаков логических операций составим формулу. Согласно определению заключаем, что выражение $(X_1 \Rightarrow ((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow (X_1 \vee \overline{X_2})))$ – является формулой.

Выражения $(AB \Rightarrow C)$, $(A \wedge C \Rightarrow)$ не являются формулами.

Действия над числами в числовых выражениях выполняются в определенном порядке: умножение и деление, затем сложение и вычитание. Аналогично и в логике высказываний ***логические операции выполняют по следующему правилу:*** операцию конъюнкции раньше дизъюнкции, и обе эти операции выполняют раньше операций импликации и эквиваленции.

Указанное правило помогает сократить число скобок в формулах.

Например: $(((X_1 \vee X_2) \Leftrightarrow X_3) \vee (X_1 \wedge X_2) = (X_1 \vee X_2) \Leftrightarrow X_3 \vee X_1 \wedge X_2$.

Если в формулу алгебры высказываний вместо переменных *X, Y, Z, …* подставить высказывания определенной истинности, то получим составное высказывание также определенной истинности. Заменив в конкретном составном высказывании элементарные высказывания соответствующими переменными, получим формулу, выражающую **логическую структуру** данного высказывания.

Любое высказывание можно формализовать, то есть, заменить его формулой.

Например, высказыванию «если число *60* делится на *3* и на *5*, то *60* делится на *15*» соответствует формула $(A \wedge B) \Rightarrow C$, где *A* – «число *60* делится на *3*», *B* – «число *60* делится на *5*», *C* – «число *60* делится на *15*».

Для ***формализации высказываний*** поступают следующим образом:

1) выделяют все элементарные высказывания и обозначают их соответствующими буквами;
2) выделяют все логические связки и заменяют их логическими символами;
3) расставляют скобки в соответствии со смыслом исходного высказывания, учитывая при этом правило расстановки скобок.

Если известно значение каждого высказывания, входящего в формулу, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этой формулы.

Для ***составления таблицы*** (см. табл. 7) выписываются сначала элементарные переменные высказывания *X* и *Y*, затем более сложные высказывания $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, входящие в эту формулу, затем более сложные высказывания $\overline{X} \vee Y$ и $X \wedge \overline{Y}$ и, наконец, сама формула $\overline{X} \vee Y \Rightarrow X \wedge \overline{Y}$. В последней колонке таблицы получаются значения формулы при всевозможных комбинациях значений переменных высказываний.

Нетрудно установить, что таблица имеет 2^n строк, где n – число элементарных переменных в формуле (в случае двух переменных – *4* строки, трех – *8* строк и т.д.).

Для удобства пользования таблицами значения истинности переменных записываются «*И*», значения лжи – «*Л*».

Значения формулы при любой комбинации значений переменных высказываний можно описать посредством таблицы.

Формула $\overline{X} \vee Y \Rightarrow X \wedge \overline{Y}$ характеризуется следующей таблицей:

Таблица 7

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \vee Y$	$X \wedge \overline{Y}$	$\overline{X} \vee Y \Rightarrow X \wedge \overline{Y}$
И	*И*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*
И	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*И*
Л	*И*	*И*	*Л*	*И*	*Л*	
Л	*Л*	*И*	*И*	*И*	*Л*	*Л*

Формула, принимающая значение истины хотя бы при одном значении входящих высказываний, называется **выполнимой.**

Например, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – выполнимые.

Формулы, принимающие значение истинности при всех наборах значений входящих в них высказывательных переменных, называются **тождественно истинными формулами** или **тавтологиями.**

Формулы, принимающие значение лжи при всех наборах значений входящих в них высказывательных переменных, называются **тождественно ложными** или **противоречиями.**

Если формулы при всех наборах истинности и лжи входящих высказывательных переменных принимают одинаковые значения, то их называют **равносильными.** Запись $A \equiv B$ читается так: *A* равносильно *B*.

Докажем, что высказывание $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ истинно при любых предположениях об истинности *A* и *B*, т.е. доказать, что высказывание $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ является тавтологией.

Построим таблицу истинности.

Таблица 8

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
И	*И*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*И*
И	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*И*	*И*	*И*
Л	*И*	*Л*	*И*	*И*	*Л*	*И*	*И*
Л	*Л*	*Л*	*И*	*И*	*И*	*И*	*И*

15. ПРЕДИКАТЫ. КВАНТОРЫ

Предложение $A(x)$ с переменной x, где $x \in X$, которое в результате замены переменной допустимыми значениями обращается в высказывание, называется **предикатом** или **высказывательной формой**.

В зависимости от числа переменных различают одноместные, двухместные, трехместные и т.д. предикаты: $A(x)$; $B(x, y)$; $C(x, y, z)$ и т.д.

Например: $x > 5$ – одноместный предикат; x делится на y – двухместный; $x + 2y = z$ – трехместный предикат.

Множество всех допустимых значений переменной, при подстановке которых в предикат $P(x)$ получается истинное или ложное высказывание, называют **областью определения предиката.**

Предикат считается заданным, если указать множество всех допустимых значений переменной. Например: предикат $3x + 7 = 15$ может быть задан на множестве натуральных чисел N, или на множестве действительных чисел R.

Множество всех значений переменной x из области определения, при которых предикат $P(x)$ обращается в истинное высказывание, называется **множеством истинности предиката**. Обозначают $\overset{\prime}{P}$ или T_p.

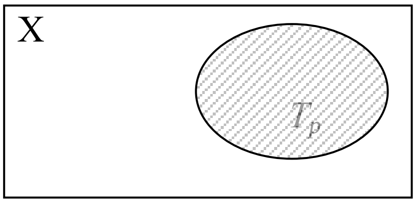


Рис. 48.

Если предикат $P(x)$ задан на множестве X, тогда $T_p \subset X$.

Если множество истинности T_p предиката $P(x)$ совпадает с множеством X, на котором он задан ($T_p = X$), то такой предикат называют **тождественно истинным**.

Если множество истинности $\overset{\prime}{P}$ предиката $P(x)$ пусто ($T_p = \varnothing$), то предикат называют **тождественно ложным.** Два предиката $P(x)$ и $Q(x)$ называют **равносильными**, если они заданы на одном и том же множестве X и их множества истинности совпадают.

Пример. Даны предикаты $P(x) : x^2 = 9$ и $Q(x): (x – 3)(x + 3) = 0$ на множестве Z. Так как $\overset{\prime}{P} = \overset{\prime}{Q} = \{–3; 3\}$, значит, данные предикаты равносильны.

Множество истинности двухместного предиката $P(x,y)$ состоит из всех пар $(a; b)$, при подстановке которых в этот предикат получается истинное высказывание. Например, если $P(x;y)$ предикат «x делится на y» на множестве Z, то, так как «6 делится на 3» – истинное высказывание, значит $(6; 3) \in \overset{\prime}{P}$.

Соответственно определяется множество истинности и для любого многоместного предиката.

Над предикатами, как и над высказываниями можно выполнять **логические операции.**

1. *Операция отрицания.*

Отрицанием предиката *P(x),* заданного на множестве *X,* называется предикат $\overline{P(x)}$, заданный на том же множестве и истинный при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых предикат *P(x)* принимает значение лжи. Множество истинности предиката $\overline{P(x)}$ можно изобразить так:

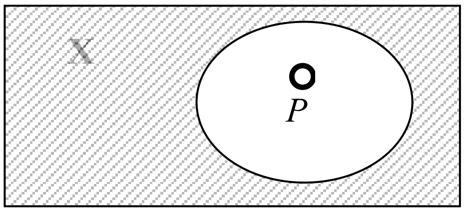


Рис. 49.

2. *Операция конъюнкции.*

Конъюнкцией предикатов *P(x)* и *Q(x)*, заданных на множестве *X*, называется предикат $P(x) \wedge Q(x)$, заданный на том же множестве и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых оба предиката принимают значения истины.

Если обозначить T_P – множество истинности предиката *P(x)*, T_Q – множество истинности предиката *Q(x)*, а множество истинности их конъюнкции $T_{P \wedge Q}$, то, по всей видимости, $T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q$.

Докажем это равенство.

1. Пусть *a* – произвольный элемент множества *X* и известно, что $a \in T_{P \wedge Q}$. По определению множества истинности это означает, что предикат $P(x) \wedge Q(x)$ обращается в истинное высказывание при $x = a$, т.е. высказывание $P(a) \wedge Q(a)$ истинно. Так как данное высказывание конъюнкция, то по определению конъюнкции получаем, что каждое из высказываний *P(a)* и *Q(a)* также истинно. Это означает, что $a \in T_P$ и $a \in T_Q$. Таким образом, мы показали, что $T_{P \wedge Q} \subset T_P \cap T_Q$.

2. Докажем обратное утверждение. Пусть *a* – произвольный элемент множества *X* и известно, что $a \in T_P \cap T_Q$. По определению пересечения множеств это означает, что $a \in T_P$ и $a \in T_Q$, откуда получаем, что *P(a)* и *Q(a)* – истинные высказывания, поэтому конъюнкция высказываний $P(a) \wedge Q(a)$ также будет истинна. А это означает, что элемент *a* принадлежит множеству истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$, т.е. $a \in T_{P \wedge Q}$.

Из 1 и 2 в силу определения равных множеств вытекает справедливость равенства $T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q$, что и требовалось доказать.

Наглядно это можно изобразить следующим образом.

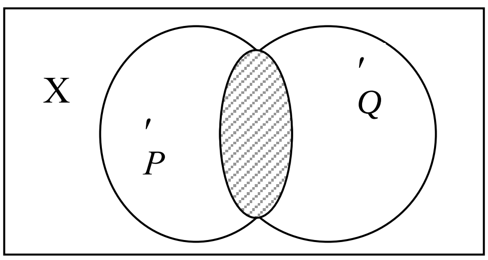


Рис. 50.

3. *Операция дизъюнкции.*

Дизъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется предикат $P(x) \vee Q(x)$, определенный на том же множестве X и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых принимает значение истины хотя бы один из предикатов $P(x)$ или $Q(x)$. Множество истинности дизъюнкции выглядит так:

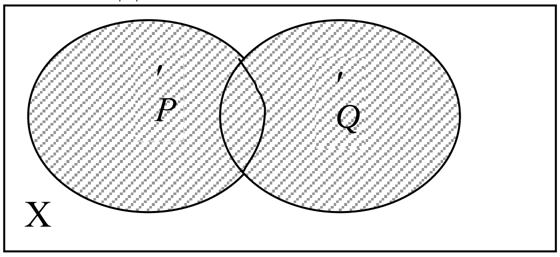


Рис. 51.

Аналогично доказывается, что $T_{P \vee Q} = T_P \cup T_Q$.

4. *Операция импликации.*

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $P(x) \Rightarrow Q(x)$, определенный на том же множестве X и обращающийся в ложное высказывание при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых P(x) принимает значение истины, а $Q(x)$ – значение лжи. Множество истинности импликации изобразится следующим образом:

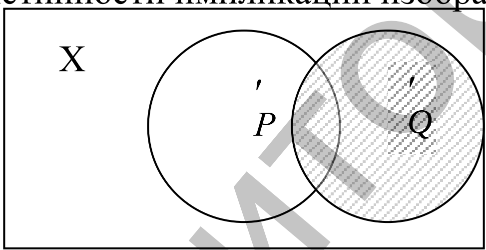


Рис. 52.

$$T_{P \Rightarrow Q} = \overline{T}_P \cup T_Q.$$

5.*Операция эквиваленции.*

Эквиваленцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве X, называется предикат $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, определенный на том же множестве X и принимающий значение истины при тех и только тех значениях $x \in X$, при которых значения каждого из предикатов либо истинны либо ложны. Множество истинности в таком случае выглядит так:

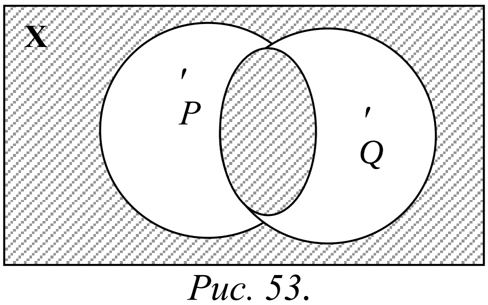


Рис. 53.

$$T_{P \Leftrightarrow Q} = \left(T_P \cap T_Q\right) \cup \left(\overline{T}_P \cap \overline{T}_Q\right).$$

Пример. На множестве $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ заданы предикаты: $A(x)$ – «число x не делится на 5», $B(x)$ – «x – число четное», $C(x)$ – «x – число простое», $D(x)$ – «число x кратно 3». Найти множество истинности следующих предикатов:
a) $A(x) \wedge B(x)$; b) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$; c) $C(x) \Rightarrow A(x)$; d) $B(x) \vee D(x)$ и изобразить их при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

Решение: а) Найдем множество истинности предикатов.
$A(x)$: $T_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$;
$B(x)$: $T_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

Множество истинности конъюнкции $A(x) \wedge B(x)$ есть пересечение множеств истинности T_1 и T_2.
$T = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18\}$, что соответствует рис. 54.

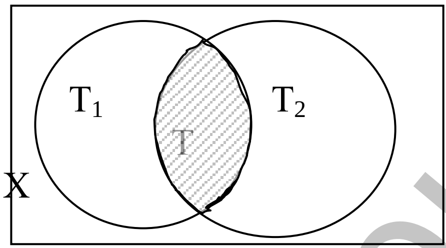


Рис. 54.

b) Множества истинности $A(x)$: $T_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$; $\overline{D(x)}$: $T_2 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$.

Тогда множество истинности $A(x) \wedge \overline{D(x)}$ будет следующим:
$T=\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$.

c) Множества истинности $C(x)$: $T_1 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; $A(x)$: $T_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}$.

Множество истинности импликации есть объединение множества истинности второго предиката с множеством истинности отрицания первого.

Значит множество истинности импликации $C(x) \Rightarrow A(x)$ будет следующим: $T = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

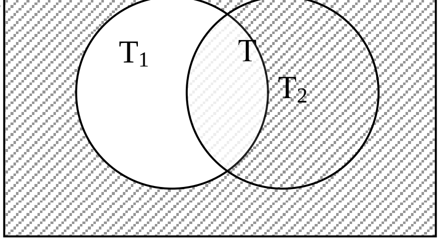


Рис. 55.

d) Множества истинности $B(x)$: $T_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ и $D(x)$: $T_2 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Тогда множество истинности дизъюнкции $B(x) \vee D(x)$ есть объединение множеств истинности T_1 и T_2 и будет следующим: $T = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$, что соответствует следующему рисунку.

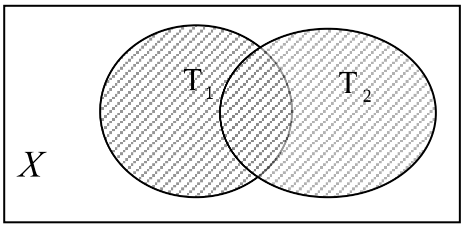


Рис. 56.

Кроме известных нам логических операций для предикатов вводятся две новые: операция навешивания кванторов существования и общности.

Высказывания «для всех x» (для любого x, для каждого x) называется **квантором общности** и обозначается $\forall x$.

Высказывание «существует x» (для некоторых x, хотя бы для одного x, найдется такое x) называется **квантором существования** и обозначается $\exists x$.

Высказывание «существует одно и только одно x» (для единственного значения x) называется **квантором единственности** : $\exists!\, x$.

Например: «Все кустарники являются растениями». Это высказывание содержит квантор общности («все»). Высказывание «существуют числа, кратные 5» содержит квантор существования («существуют»).

Для того чтобы получить высказывание из многоместного предиката, надо связать кванторами каждую переменную. *Например,* если $P(x; y)$ – двухместный предикат, то $(\forall x \in X)\ (\exists y \in Y)\ P(x; y)$ – высказывание.

Если не каждая переменная связывается квантором, то получается не высказывание, а предикат, зависящий от той переменой, которая не связана квантором. Так, если перед предикатом $P(x; y)$ поставить квантор $\forall y$, то получим предикат $(\forall y \in Y)\ P(x; y)$, зависящий от переменной x.

Выясним, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие предикатами: a) найдется такое x, что $x + y = 2$;
b) для любых x и y имеет место равенство $x + y = y + x$.

Решение: Выявим логическую структуру данных предложений.

a) Предложение «Найдется такое x, что $x + y = 2$» можно записать в виде $(\exists x \in R)\ x + y = 2$. Так как квантором связана только переменная x, то рассматриваемое предложение с двумя переменными является предикатом.

b) Предложение «для любых x и y имеет место $x + y = y + x$» можно записать в виде: $(\forall x \in R)\ (\forall y \in R)\ x + y = y + x$, где обе переменные являются связанными. Следовательно, данное предложение является высказыванием.

Если какое-либо предметное переменное в формуле не связано квантором, то его называют ***свободным переменным.***

Например: $(\forall x)\ xy = yx$. Здесь переменное y не связано каким-либо квантором, поэтому оно свободно. От него не зависит истинность данного высказывания.

Кванторы $(\forall x)$ $(\exists x)$ называются **двойственными** друг другу.

Одноименные кванторы можно менять местами, что не влияет на истинность высказывания.

Например: $(\exists y)\ (\exists x)\ x + y = 5$. Это утверждение имеет тот же смысл, что и $(\exists x)\ (\exists y)\ x + y = 5$.

Для разноименных кванторов изменение порядка может привести к изменению истинности высказывания.

Например: $(\forall x)\ (\exists y)\ \ x<y$, т.е. для всякого числа x существует большее число y – истинное высказывание.

Поменяем местами кванторы: $(\exists x)\ (\forall y)\ \ x<y$ – существует число y большее любого числа x – ложное высказывание.

В связи с введением кванторов необходимо учесть следующее:

1. Формула логики предикатов не может содержать одно и то же предметное переменное, которое было бы связано в одной части формулы и свободно в другой.

2. Одно и то же переменное не может находиться в области двойственных друг другу кванторов.

Нарушение этих условий называют ***коллизией переменных.***

Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Для доказательства утверждения с квантором общности необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений x в предикат $P(x)$ последний обращается в истинное высказывание. Если множество X конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество X бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Высказывание $(\forall x)\ P(x)$ ложно, если можно указать такое значение $a \in X$, при котором $P(x)$ обращается в ложное высказывание $P(a)$. Поэтому, ***для опровержения высказывания с квантором общности*** достаточно привести пример.

Высказывание $(\exists x)\ P(x)$ истинно, если можно указать такое значение $a \in X$, при котором $P(x)$ обращается в истинное высказывание $P(a)$. Поэтому, чтобы ***убедиться в истинности высказывания с квантором существования***, достаточно привести пример и таким образом доказать.

Для того чтобы **убедиться в ложности высказывания с квантором *существования*** $(\exists x)\ P(x)$, необходимо убедиться в ложности каждого высказывания $P(x_1)$, $P(x_2)$, ..., $P(x_ё)$. Если множество X конечно, то это можно сделать перебором. Если же множество X бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Примеры.

1. Найти значение истинности высказывания «среди чисел *1, 2, 3, 4* найдется простое число».

Решение: Высказывание содержит квантор существования и поэтому может быть представлено в виде дизъюнкции высказываний: «*1* – простое число» или «*2* – простое число» или «*3* – простое число» или «*4* – простое число». Для доказательства истинности дизъюнкции достаточно истинности хотя бы одного высказывания, например, «*3* – простое число», которое истинно. Следовательно, истинно и исходное высказывание.

2. Докажем, что любой квадрат является прямоугольником.

Решение: Высказывание содержит квантор общности. Поэтому оно может быть представлено в виде конъюнкции: «квадрат – прямоугольник» и «квадрат – прямоугольник» и «квадрат – прямоугольник» и т.д. Так как все эти высказывания истинны, то истинна конъюнкция этих высказываний, следовательно, истинно и исходное предложение.

3. «Любой треугольник равнобедренный». Это ложное высказывание. Чтобы убедиться в этом, достаточно начертить треугольник, не являющийся равнобедренным.

Таким образом, мы опровергли высказывание контрпримером.

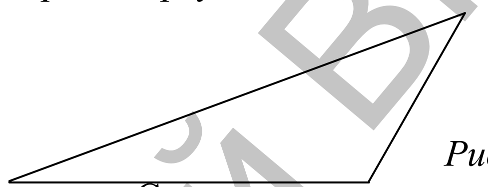


Рис. 57.

4. Определим истинность высказывания «Существуют равносторонние прямоугольные треугольники».

Решение: Высказывание ложно. Действительно, в прямоугольном треугольнике один угол равен 90^o. А в равностороннем треугольнике все углы по 60^o. Следовательно, среди равносторонних треугольников нет прямоугольных.

В математике часто приходится строить отрицания высказываний, содержащих тот или иной квантор.

Отрицанием высказывания с квантором общности $(\forall x)\ P(x)$ является высказывание $(\exists x)\ \overline{P(x)}$, а ***отрицанием высказывания с квантором существования*** $(\exists x)\ P(x)$ – высказывание $(\forall x)\ \overline{P(x)}$.

Для ***отрицания высказывания с двумя переменными*** $(\forall x)(\exists y)\ P(x;y)$ используется следующая формула: $(\exists x)(\forall y)\ \overline{P(x;y)}$

Для построения отрицания высказывания с кванторами надо:

1) квантор общности заменить квантором существования, а квантор существования – квантором общности;
2) предикат заменить его отрицанием.

Пример. Сформулируем отрицание для следующих высказываний:

а) все элементы множества *Z* четные; b) некоторые глаголы отвечают на вопрос «что делать?».

Решение: а) Заменим квантор общности квантором существования, а высказывание его отрицанием: некоторые элементы множества *Z* нечетные.

b) Заменим квантор существования квантором общности, а выражение его отрицанием: все глаголы не отвечают на вопрос «что делать?».

16. ОТНОШЕНИЯ СЛЕДОВАНИЯ И РАВНОСИЛЬНОСТИ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Возьмем два предложения: *А* – «*х* кратно *4*» и *В* – «*х* кратно *2*». Они связаны между собой: любое число, кратное *4*, будет кратно *2*, или иначе: из того, что число кратно *4*, следует, что оно кратно *2*.

Говорят, что **из предложения *А* следует предложение *В***, если всякий раз, когда истинно предложение *А*, истинно и предложение *В* и данные предложения находятся в **отношении логического следования.**

Высказывательная форма *В(х)* **следует** из высказывательной формы *А(х),* если *В(х*) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях, при которых *А(х)* истинна.

Предложение «Из *А(х)* следует *В(х)*» можно записать таким образом: $A(x) \Rightarrow B(x)$. Читают по-разному: из *А(х)* следует *В(х)*; *В(х)* следует из *А(х)*; если *А(х)*, то *В(х)*; всякое *А(х)* есть *В(х)*.

Если обозначить через $T_{À}$ множество истинности предиката *А(х)* и через $T_{Â}$ множество истинности предиката *В(х)*, то $A(x) \Rightarrow B(x)$ тогда и только тогда, когда $T_{À} \subset T_{Â}$.

Для того чтобы показать, что предикаты *А(х)* и *В(х)* не находятся в отношении следования, достаточно указать такое значение $a \in X$, при котором высказывание *А(а)* истинно, а *В(а*) – ложно.

Пусть даны предложения: *А* – «Треугольник равнобедренный» и *В* – «Углы при основании равны». Выясним, как они связаны между собой.

В курсе геометрии доказано, что если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны (т.е. можно утверждать, что $A \Rightarrow B$), и обратно: если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный (т.е. $B \Rightarrow A$).

Если из предложения *А* следует предложение *В*, а из предложения *В* следует предложение *А*, то говорят, что **предложения *А* и *В* равносильны.**

Высказывательные формы *А(х)* и *В(х)* **равносильны**, если из предиката *А(х)* следует предикат *В(х),* а из предиката *В(х)* следует предикат *А(х).*

Предложение «*А(х)* равносильно *В(х)*» записывают $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ и читают: *А(х)* равносильно *В(х)*; *А(х)* тогда и только тогда, когда *В(х)*; *А(х)* если и только, если *В(х).*

Предикаты *А(х)* и *В(х)* равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают, т.е. когда $T_{À} = T_{Â}$.

Для того чтобы показать, что предикаты *А(х)* и *В(х)* неравносильны на множестве *Х,* достаточно указать такое значение $a \in X$, при котором высказывания *А(а)* и *В(а)* принимают противоположные значения истинности.

Примеры.

1. Переформулировать предложение «Всякий квадрат является прямоугольником» и «Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на *5*».

Решение: В первом высказывании можно выделить два предложения: $A(x)$ – «четырехугольник – квадрат» и $B(x)$ – «четырехугольник – прямоугольник». Они находятся в отношении следования: $A(x) \Rightarrow B(x)$, которое выражено предложением со словом «всякий».

Данное высказывание можно переформулировать:

1) Из того, что четырехугольник – квадрат, следует, что он прямоугольник;
2) Если четырехугольник квадрат, то он прямоугольник;
3) Четырехугольник является прямоугольником – это следствие того, что четырехугольник – квадрат.

Во втором высказывании также можно выделить два предложения: $K(x)$ – «запись числа оканчивается цифрой *0*» и $P(x)$ – «число делится на *5*», причем имеет место следования $K(x) \Rightarrow P(x)$, которое можно сформулировать так:

1) Из того, что запись числа оканчивается нулем, следует, что число делится на *5*;
2) Всякое число, запись которого оканчивается нулем, делится на *5*;
3) Делимость числа *5* – это следствие того, что его запись оканчивается нулем.

2. Доказать, что из уравнения $3x(x-2)=0$ следует уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$, если уравнения заданы на множестве *Z* целых чисел.

Решение: Множество решений первого уравнения $T_1 = \{0, 2\}$ множество решений второго – $T_2 = \{0, 2, -3\}$. Видим, что $T_1 \subset T_2$. Следовательно, из первого уравнения следует второе уравнение.

3. Доказать, что уравнения $3x(x-2)=0$ и уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$ равносильны, если уравнения заданы на множестве целых неотрицательных чисел.

Решение: Множество решений первого уравнения $T_1 = \{0, 2\}$ множество решений второго на множестве целых неотрицательных чисел $T_2 = \{0, 2\}$, так как число -3 не является целым неотрицательным числом. Имеем, что $T_1 = T_2$, следовательно, данные уравнения на множестве целых неотрицательных чисел равносильны.

Понятие отношения следования между предложениями позволяет уточнить смысл слов «необходимо» и «достаточно», которые часто употребляются в математике.

Если из предложения *A* следует предложение *B*, то говорят, что *B* – необходимое условие для *A*, а *A* – достаточное условие для *B*.

Другими словами, предикат $B(x)$ логически следует из предиката $A(x)$, т.е. $A(x) \Rightarrow B(x)$, то $A(x)$ называют **достаточным условием** для $B(x)$, а $B(x)$ – **необходимым условием** для A(x).

условие необходимости: $A \Rightarrow B$
условие достаточности: $B \Rightarrow A$

Если же предложения *A* и *B* равносильны, то говорят, что *A* – необходимое условие для *B*, и наоборот.

Другими словами, если из предиката *A(x)* логически следует предикат *B(x),* а из предиката *B(x)* логически следует предикат *A(x),* т.е. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, то *A(x)* – **необходимое и достаточное условие** для *B(x),* а *B(x)* – **необходимое и достаточное условие** для *A(x).*

условие необходимости и достаточности:
$A \Leftrightarrow B$

В начальном курсе математики слова «необходимо» и «достаточно», как правило, не употребляются, но зато широко используются их синонимы – «нужно» и «можно».

Приведем пример. В первой коробке 6 карандашей, во второй – на 2 меньше. Сколько карандашей в двух коробках?

Один из возможных путей поиска решения задачи может быть таким. Учитель спрашивает: можно ли сразу узнать, сколько карандашей (т.е. достаточно ли данных в задаче, чтобы сразу ответить на ее вопрос)?

Учащийся отвечает: нельзя, так как нужно знать, сколько карандашей во второй коробке (т.е. необходимо знать).

Учитель далее спрашивает: можно ли узнать количество карандашей во второй коробке? (т.е. достаточно ли данных в задаче, чтобы сразу ответить на этот вопрос)?

Ученик отвечает: можно.

Учитель спрашивает: что для этого нужно сделать? И т.д.

Правильное употребление слов «нужно» и «можно» – залог успеха в использовании слов «необходимо» и «достаточно» при дальнейшем изучении математики.

Рассмотрим следующие ***примеры.***

1. Вместо многоточия вставим термины «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»: «Для того чтобы число *x* являлось делителем числа *15, …*, чтобы число *x* являлось делителем числа *5*».

Решение: Введем обозначения: *C(x)* – «число *x* делитель числа *5*», *B(x)* – «число *x* – делитель числа *15*».

Для ответа на вопрос задачи нужно выяснить, каким условием является предикат *C(x)* для предиката *B(x).*

Для проверки достаточности предиката *C(x)* выясним, находятся ли *C(x)* и *B(x)* в отношении следования. Так как $T_{C} = \{1, 5\}$, а $T_{B} = \{1, 3, 5, 15\}$, то $T_{Ñ} \subset T_{Â}$ и, следовательно, $C(x) \Rightarrow B(x)$. Истинность последнего высказывания означает, что $C(x)$ является достаточным условием для $B(x)$.

Проверим, является ли $C(x)$ необходимым условием для $B(x)$, выяснив, истинно ли высказывание $B(x) \Rightarrow C(x)$.

Так как найдется такое значение x (например, $x = 3$), при котором $B(x)$ истинно, а $C(x)$ ложно, то высказывание $B(x) \Rightarrow C(x)$ ложно и, следовательно, $C(x)$ не является необходимым условием для $B(x)$.

Таким образом, вместо многоточия можно вставить термин «достаточно»: «Для того чтобы число x являлось делителем числа *15*, достаточно, чтобы x являлось делителем числа *5*».

2. Дано предложение: «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны». Выясним, нельзя ли сформулировать это предложение по-другому.

Поскольку предложение «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» вытекает из предложения «Четырехугольник – ромб», то предложение «Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны» можно сформулировать еще так:

1) Из того, что четырехугольник – ромб, следует, что его диагонали взаимно перпендикулярны.
2) Во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.
3) Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны.
4) Чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом.

3. Вставить слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» в предложение «Для того чтобы натуральное число делилось на *6*, …, чтобы оно делилось на *2*».

Решение: Пусть предложение A – «число делится на *6*», B – «Число делится на *2*». Тогда, для того чтобы выполнялось условие необходимости, из предложения A должно логически следовать предложение B, а чтобы выполнялось условие достаточности – предложение A должно логически следовать из B.

Действительно, любое число, которое делится на *6*, делится на *2*. Значит, выполняется условие необходимости. И не верно, что любое число, делящееся на *2*, делится на *6* (например, *14* делится на *2*, но не делится на *6*).

Значит, условие достаточности не выполняется, а вместо многоточия нужно вставить термин «необходимо»: «Для того чтобы натуральное число делилось на *6*, необходимо, чтобы оно делилось на *2*».

17. СТРУКТУРА ТЕОРЕМЫ. ВИДЫ ТЕОРЕМ

Понятие логического следования позволяет уточнить ряд вопросов, связанных с предложениями, которые в математике называют теоремами.

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается путем доказательства (рассуждений).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение A называют **условием** теоремы, а предложение B – ее **заключением.**

Например, в теореме «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» предложение «четырехугольник – прямоугольник» является условием, а предложение «в таком четырехугольнике диагонали равны» – заключением.

В рассмотренном примере теорема сформулирована с помощью слов «если…, то …». Но утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому. Например, «во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны».

В математике кроме теорем используются предложения, называемые **правилами и формулами.**

Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$». Условие данной теоремы – это предложение «а – любое число» и «n, k – натуральные числа». Заключение – это равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, справедливость которого надо доказать, исходя из данного условия.

Для того чтобы этой теоремой было удобнее пользоваться на практике, записывают только формулу $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, опуская все условия, указанные в теореме.

Для всякой теоремы вида $A \Rightarrow B$ (если A, то B) можно сформулировать предложение $B \Rightarrow A$ (если B, то A), которое называют **обратным** данному. Однако не всегда это предложение является теоремой.

Рассмотрим, например, теорему «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это ложное высказывание, в чем легко убедиться (в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником).

Рассмотрим теорему «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково: «если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник – равнобедренный». Это истинное предложение и потому является теоремой. Ее называют **теоремой, обратной данной.**

Для любой теоремы вида $A \Rightarrow B$ (если A, то B) можно сформулировать предложение $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ (если не A, то не B), которое называют **противоположным данному**. Но это предложение также не всегда является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником» будет ложным: «если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют **теоремой, противоположной данной**.

Для всякой теоремы вида $A \Rightarrow B$ (если A, то B) можно сформулировать предложение $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (если не B, то не A), которое называют **обратным противоположному.** Например, для теоремы «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником» предложение, обратное противоположному, будет таким: «если в четырехугольнике диагонали не равны, то он не является прямоугольником». Это, как известно, предложение истинное, и, следовательно, является **теоремой, обратно противоположной данной.**

Вообще, для какой бы теоремы мы ни формулировали предложение, обратное противоположному, оно всегда будет теоремой, потому что имеется следующая равносильность: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

Эту равносильность называют **законом контрапозиции.**

Теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ – **взаимообратные,** а $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – **взаимопротивоположные.**

Примеры.

1. В следующих теоремах выделим условие и заключение: а) «Для того чтобы разность двух чисел делилась на 2, достаточно, чтобы на 2 делилось уменьшаемое и вычитаемое»;
б) «Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы хоты бы один из его углов был прямым».

Решение: а) Слово достаточно относится к предложению «уменьшаемое и вычитаемое делится на 2», следовательно, это предложение и является условием теоремы. Тогда заключение теоремы – «разность двух чисел делится на 2».
б) В данной теореме есть слово «необходимо», которое относится к предложению «чтобы четырехугольник был квадратом». Значит, это и будет условием данной теоремы. А ее заключением в таком случае будет предложение «один из углов четырехугольника прямой».

2. Сформулируем следующие теоремы в виде «если …, то …»: а) «Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых также перпендикуляр к другой»; б) «Всякий параллелограмм имеет центр симметрии».

Решение: а) Выделим условие и заключение теоремы: «Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых» – условие, «перпендикуляр к другой» – заключение. Тогда теорема примет вид: «Если есть перпендику-

ляр к одной из двух параллельных прямых, то он является также перпендикуляром к другой прямой».
б) Условие теоремы – «всякий параллелограмм», заключение – «имеет центр симметрии». Нашу теорему тогда можно переформулировать следующим образом: «Если фигура параллелограмм, то она имеет центр симметрии».

3. Дана теорема: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то четырехугольник параллелограмм». Сформулируем предложения, являющиеся обратным, противоположным и обратно противоположным.

Решение: Выделим условие и заключение данной теоремы. Условие: «в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны». Заключение: «четырехугольник – параллелограмм».

Поменяв местами условие и заключение, получим теорему, обратную данной: «Если четырехугольник – параллелограмм, то две противоположные стороны равны и параллельны», так как данное предложение истинно.

Заменяя условие и заключение исходной теоремы их отрицаниями, получим теорему, противоположную данной: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны не равны или не параллельны, то четырехугольник – не параллелограмм». Это предложение также истинно.

Меняя местами отрицание условия и отрицание заключения, получим истинное предложение, которое является обратно противоположной теоремой: «Если четырехугольник – не параллелограмм, то две противоположные стороны не равны или не параллельны».

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Большую часть знаний об окружающей нас действительности мы получаем с помощью рассуждений. Выводы в них будут истинными, если они являются результатами правильных рассуждений, а такими считают рассуждения, построенные по правилам логики. Рассуждения лежат в основе доказательства, без которого трудно представить математику.

18. УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ И ИХ ВИДЫ

Свойства основных понятий раскрываются в **аксиомах** – предложениях, принимаемых без доказательства.

Например, в школьной геометрии есть аксиомы: «через любые две точки можно провести прямую и только одну» или «прямая разбивает плоскость на две полуплоскости».

Система аксиом любой математической теории, раскрывая свойства основных понятий, дает их определения. Такие определения называют *аксиоматическими*.

Доказываемые свойства понятий называют **теоремами**, **следствиями, признаками, формулами, правилами.**

Доказать теорему $A \Rightarrow B$ – это значит установить логическим путем, что всегда, когда выполняется свойство A, будет выполняться свойство B.

Доказательством в математике называют конечную последовательность предложений данной теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или нескольких предложений этой последовательности по правилам логического вывода.

В основе доказательства лежит рассуждение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащее новое знание.

В качестве примера рассмотрим рассуждение школьника, которому надо установить отношение «меньше» между числами 7 и 8. Учащийся говорит: «7 < 8, потому что при счете 7 называют раньше, чем 8».

Выясним, на какие факты опирается вывод, полученный в этом рассуждении.

Таких фактов два: Первый: если число a при счете называют раньше числа b, то $a < b$. Второй: 7 при счете называют раньше, чем 8.

Первое предложение носит общий характер, так как содержит квантор общности – его называют общей посылкой. Второе предложение касается конкретных чисел 7 и 8 – его называют частной посылкой. Из двух посылок получен новый факт: 7 < 8, его называют заключением.

Между посылками и заключением существует определенная связь, благодаря которой они и составляют рассуждение.

Рассуждение, между посылками и заключением которого имеет место отношение следования, называют **дедуктивным.**

В логике вместо термина «рассуждения» чаще используется слово «умозаключение».

Умозаключение – это способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося.

Умозаключение состоит из посылок и заключения.

Посылки – это высказывания, содержащие исходное знание.

Заключение – это высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного.

Как правило, заключение отделяется от посылок с помощью слов «следовательно», «значит». Умозаключение с посылками $p_1, p_2, \dots, p_n$ и заключением P будем записывать в виде: $\frac{ð_1, ð_2, \dots, ð_n}{Ð}$ или $(p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow P$.

Примеры умозаключений: а) Число $a = b$. Число $b = c$. Следовательно, число $a = c$.

b) Если в дроби числитель меньше знаменателя, то дробь правильная. В дроби $\frac{5}{6}$ числитель меньше знаменателя $(5<6)$. Следовательно, дробь $\frac{5}{6}$ – правильная.

с) Если идет дождь, то на небе есть тучи. На небе есть тучи, следовательно, идет дождь.

Умозаключения могут быть правильными и неправильными.

Умозаключение называется **правильным,** если формула, соответствующая его структуре и представляющая собой конъюнкцию посылок, соединенная с заключением знаком импликации тождественно истинна.

Для того *чтобы установить, является ли умозаключение правильным, поступают следующим образом:*

1) формализуют все посылки и заключение;
2) записывают формулу, представляющую конъюнкцию посылок, соединенную знаком импликации с заключением;
3) составляют таблицу истинности для данной формулы;
4) если формула тождественно-истинна, то умозаключение правильное, если нет – то умозаключение неправильное.

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. И в логике предлагаются такие правила, соблюдая которые, можно строить дедуктивные умозаключения. Эти правила называют **правилами вывода** или схемами дедуктивных рассуждений.

Правил много, но наиболее часто используются следующие:

1. $\dfrac{A(x)\Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$ ***– правило заключения;***

2. $\dfrac{A(x)\Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$ ***– правило отрицания;***

3. $\dfrac{A(x)\Rightarrow B(x), B(x)\Rightarrow C(x)}{A(x)\Rightarrow C(x)}$ ***– правило силлогизма.***

Приведем *пример умозаключения, выполненного по* правилу *заключения:* «Если запись числа *x* оканчивается цифрой *5,* то число *x* делится на *15.* Запись числа *135* оканчивается цифрой *5.* Следовательно, число *135* делится на *5*».

В качестве общей посылки в этом умозаключении выступает утверждение «если *A(x),* то *B(x)*», где *A(x)* – это «запись числа *x* оканчивается цифрой *5*», а *B(x)* – «число *x* делится на *5*». Частная посылка представляет собой высказывание, которое получилось из условия общей посылки при *x = 135* (т.е. *A(135)*). Заключение является высказыванием, полученным из *B(x)* при *x = 135* (т.е. *B(135)*).

Приведем *пример умозаключения, выполненного по правилу отрицания:* «Если запись числа *x* оканчивается цифрой *5,* то число *x* делится на *5.* Число *177* не делится на *5.* Следовательно, оно не оканчивается цифрой *5*».

Видим, что в этом умозаключении общая посылка такая же как и в предыдущем, а частная представляет собой отрицание высказывания «число *177* делится на *5*» (т.е. $\overline{B(177)}$). Заключение – это отрицание предложения «Запись числа *177* оканчивается цифрой *5*» (т.е. $\overline{A(177)}$).

И наконец, рассмотрим *пример умозаключения, построенного по правилу силлогизма*: «Если число x кратно *12,* то оно кратно *6*. Если число x кратно *6*, то оно кратно *3*. Следовательно, если число x кратно *12,* то оно кратно *3*».

В этом умозаключении две посылки: «если $A(x)$, то $B(x)$» и «если $B(x)$, то $C(x)$», где A(x) – «число x кратно *12*», $B(x)$ – «число x кратно *6*» и $C(x)$ – «число x кратно *3*». Заключение представляет собой высказывание «если $A(x)$, то $C(x)$».

Проверим, правильны ли следующие умозаключения:

1) Если четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. *ABCD* – ромб. Следовательно, его диагонали взаимно перпендикулярны.

2) Если число делится на *4*, то оно делится на *2*. Число *22* делится на *2*. Следовательно, оно делится на *4.*

3) Все деревья являются растениями. Сосна – дерево. Значит, сосна – растение.

4) Все учащиеся данного класса ходили в театр. Петя не был в театре. Следовательно, Петя – учащийся не данного класса.

5) Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь правильная. Если дробь правильная, то она меньше 1. Следовательно, если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь меньше 1.

Решение: 1) Для решения вопроса о правильности умозаключения выявим его логическую форму. Введем обозначения: $C(x)$ – «четырехугольник x – ромб», $B(x)$ – «в четырехугольнике x диагонали взаимно перпендикулярны». Тогда первую посылку можно записать в виде: $C(x) \Rightarrow B(x)$, вторую – $C(a)$, а заключение $B(a)$.

Таким образом, форма данного умозаключения такова: $\frac{\tilde{N}(\tilde{o}) \Rightarrow \hat{A}(\tilde{o}), \tilde{N}(\grave{a})}{\hat{A}(\grave{a})}$. Оно построено по правилу заключения. Следовательно, данное рассуждение правильное.

2) Введем обозначения: $A(x)$ – «число x делится на *4*», $B(x)$ – «число x делится на *2*». Тогда первую посылку запишем: $A(x) \Rightarrow B(x)$, вторую $B(a)$, а заключение – $A(a)$. Умозаключение примет форму: $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}$.

Такой логической формы среди известных нет. Легко заметить, что обе посылки истинны, а заключение ложно.

Значит, что данное рассуждение неправильное.

3) Введем обозначения. Пусть $A(x)$ – «если x дерево», $B(x)$ – «x растение». Тогда посылки примут вид: $A(x) \Rightarrow B(x)$, $A(a)$, а заключение $B(a)$. Наше умозаключение построено по форме: $\frac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$ – правила заключения.

Значит, наше рассуждение построено верно.

4) Пусть *A(x)* – «*x* – учащиеся нашего класса», *B(x)* – «учащиеся *x* ходили в театр». Тогда посылки будут следующими: $A(x) \Rightarrow B(x)$, $\overline{\hat{A}(\grave{a})}$, а заключение $\overline{\grave{A}(\grave{a})}$.

Данное умозаключение построено по правилу отрицания:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$ – значит оно верное.

5) Выявим логическую форму умозаключения. Пусть *A(x)* – «числитель дроби *x* меньше знаменателя». В(х) – «дробь *x* – правильная». *C(x)* – «дробь *x* меньше *1*». Тогда посылки примут вид: $A(x) \Rightarrow B(x)$, $B(x) \Rightarrow C(x)$, а заключение $A(x) \Rightarrow C(x)$.

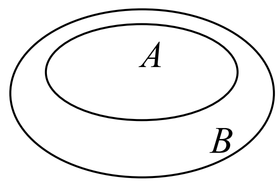
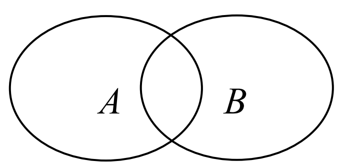
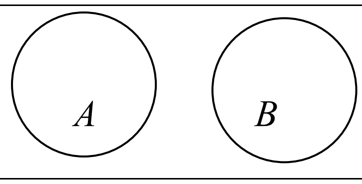
Наше умозаключение будет следующей логической формы:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$$ – правило силлогизма.

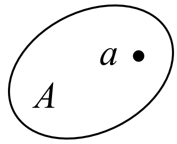
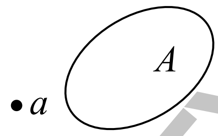
Значит, данное умозаключение верно.

В логике рассматривают различные способы проверки правильности умозаключений, среди которых **анализ правильности умозаключений с помощью кругов Эйлера.** Его проводят следующим образом: записывают умозаключение на теоретико-множественном языке; изображают посылки на кругах Эйлера, считая их истинными; смотрят, всегда ли при этом истинно заключение. Если да, то говорят, что умозаключение построено правильно. Если же возможен рисунок, из которого видно, что заключение ложно, то говорят, что умозаключение неправильно.

Таблица 9

Словесная формулировка предложения	Запись на теоретико-множественном языке	Изображение на кругах Эйлера
Всякое *A* есть *B*	$A \subset B$	
Некоторые *A* есть *B* Некоторые *A* не есть *B*	$A \cap B \neq \varnothing$	
Ни одно *A* не есть *B*	$A \cap B = \varnothing$	

Окончание табл. 11

a есть A	$a \in A$	
a не есть A	$a \notin A$	

Покажем, что умозаключение, выполненное по правилу заключения, является дедуктивным. Сначала запишем это правило на теоретико-множественном языке.

Посылка $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть записана в виде $T_A \subset T_B$, где T_A и T_B – множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$.

Частная посылка $A(a)$ означает, что $a \in T_A$, а заключение $B(a)$ показывает, что $a \in T_B$.

Все умозаключение , построенное по правилу заключения, запишется на теоретико-множественном языке так: $\dfrac{T_A \subset T_B, a \in T_A}{a \in T_B}$.

Изобразив на кругах Эйлера множества T_A и T_B и обозначив элемент $a \in T_A$, мы увидим, что $a \in T_B$ (рис. 58). Значит, $a \in T_{À} \Rightarrow a \in T_{Â}$.

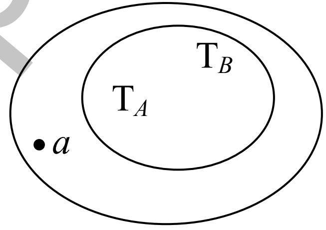


Рис. 58.

Примеры.

1. Правильно ли умозаключение «Если запись числа оканчивается цифрой *5,* то число делится на *5.* Число *125* делится на *5.* Следовательно, запись числа *125* оканчивается цифрой *5*»?

Решение: Это умозаключение выполнено по схеме $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), B(125)}{A(125)}$, что соответствует $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}$. Такой схемы среди известных нам нет. Выясним, является ли она правилом дедуктивного умозаключения?

Воспользуемся кругами Эйлера. На теоретико-множественном языке полученное правило можно записать так:

$\dfrac{T_A \subset T_B, a \in T_B}{a \in T_A}$. Изобразим на кругах Эйлера множества T_A и T_B и обозначим элемент *a* из множества T_B.

Оказывается, что он может содержаться в множестве T_A, а может и не принадлежать ему (рис. 59). В логике считают, что такая схема не является правилом дедуктивного умозаключения, так как не гарантирует истинности заключения.

Данное умозаключение не является правильным, так как выполнено по схеме, не гарантирующей истинности рассуждения.

2. Выясним, правильны ли следующие умозаключения:

а) Некоторые студенты педагогического факультета являются учителями. Некоторые учителя старше 20 лет. Следовательно, некоторые студенты педагогического факультета старше 20 лет.

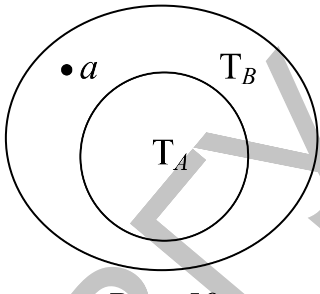


Рис. 59.

б) Все глаголы отвечают на вопрос «что делать?» или «что сделать?». Слово «василек» не отвечает ни на один из этих вопросов. Следовательно, «василек» не является глаголом.

Решение: а) Запишем данное умозаключение на теоретико-множественном языке. Обозначим через A – множество студентов педагогического факультета, через B – множество студентов, являющихся учителями, через C – множество студентов, старше 20 лет.

Тогда умозаключение примет вид: $\dfrac{A \cap B \neq \varnothing, B \cap C \neq \varnothing}{A \cap C \neq \varnothing}$.

Если изобразить данные множества на кругах, то возможно 2 случая:
1) множества A, B, C пересекаются;
2) множество B пересекается с множеством C и A, а множество A пересекается с B, но не пересекается с C.

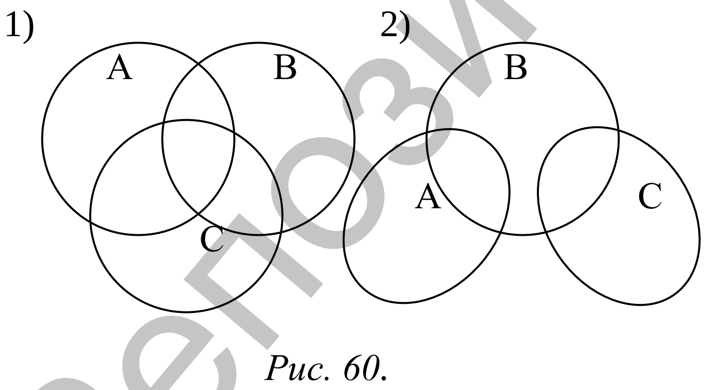


Рис. 60.

Из рисунка видно, что возможно множества A и C не пересекаются. Тогда наше умозаключение ложно. Это и означает, что заключение логически не следует из посылок, т.е. построено неправильно.

б) Обозначим через A множество глаголов, а через B множество слов, отвечающих на вопрос «что делать?» или «что сделать?».

Тогда умозаключение можно записать в следующем виде:

$\dfrac{A \subset B, a \notin B}{a \notin A}$. Изобразив посылки на кругах Эйлера (рис. 68), видим, что в этом случае $a \notin A$, т.е. заключение истинно. Это значит, что умозаключение построено правильно.

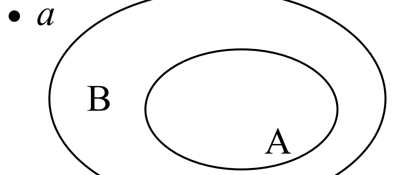


Рис. 61.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы 20 + 3. Он рассуждает: «Число 23 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 23 = 20 + 3».

Первое и второе предложения в этом умозаключении посылки, причем одна общего характера – это высказывание «любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых», а другая – частная, она характеризует только число 23 – оно двузначное. Заключение – это предложение, которое стоит после слова «следовательно», – также носит частный характер, так как в нем речь идет о конкретном числе 23.

Умозаключения, которые обычно используются при доказательствах теорем, основаны на понятии логического следования. При этом из определения логического следования вытекает, что при всех значениях высказывательных переменных, при которых истинны исходные высказывания (посылки), истинно и заключение теоремы. Такие умозаключения дедуктивные.

В примере, рассмотренном выше, приведенное умозаключение является дедуктивным.

Пример 2. Один из приемов ознакомления младших школьников с переместительным свойством умножения заключается в следующем. Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что, например, $6\times3 = 3\times6$, $5\times2 = 2\times5$. Затем на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a\times b = b\times a$.

В данном умозаключении посылками являются первые два равенства. В них утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство. Заключением в данном примере является утверждение общего характера – переместительное свойство умножения натуральных чисел.

В данном умозаключении посылки частного характера показывают, что *некоторые* натуральные числа обладают свойством: от перестановки множителей произведение не изменяется. И на этой основе сделан вывод, что этим свойством обладают все натуральные числа. Такие умозаключения называют неполной индукцией.

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме, можно прийти к ложному выводу.

Например, рассмотрим такие выражения: $3 + 5$ и 3×5; $2 + 7$ и 2×7. Видим, что $3 + 5 < 3\times5$; $2 + 7 < 2\times7$, т.е. для некоторых натуральных чисел можно утверждать, что сумма меньше их произведения. Значит, на основании, что некоторые числа обладают данным свойством, можно сделать вывод, что этим свойством обладают все натуральные числа:

$$a + b < a \times b.$$

Но это утверждение ложно, в чем можно убедиться с помощью контрпримера: числа *1* и *2* – натуральные, но $1 + 2 > 1 \times 2$.

Поэтому выводы, полученные с помощью неполной индукции, необходимо либо доказывать, либо опровергать.

Пример 3. При обучении делению на однозначное число используется такой прием. Сначала выясняется: чтобы найти значение выражения $12 : 4$, следует узнать, на какое число надо умножить делитель 4, чтобы получить делимое *12*. Известно, что $4 \times 3 = 12$. Значит, $12 : 4 = 3$.

Данный пример – это пример рассуждения по аналогии.

Под **аналогией** понимают умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Вывод по аналогии носит характер предположения, гипотезы и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

19. СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Во всяком доказательстве выделяют три части: **тезис** – предложение, истинность которого необходимо доказать; **аргументы** – предложения, которыми пользуются при доказательстве; **демонстрация** – логический процесс взаимосвязи предложений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

Различают **два вида доказательств:** прямое и косвенное.

Построение доказательства, начинающегося условием и заканчивающегося заключением теоремы, носит название **прямого.** Путь рассмотрения некоторых случаев, исчерпывающих все возможности – это **косвенное** доказательство.

Прямое доказательство представляет собой цепочку правильных умозаключений так, что заключение каждого из них, кроме последнего, является посылкой в одном из последующих: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow B$.

Пример. Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Доказательство: $a + b = 0$ *(1)* $\qquad a + b = -c$ *(2)*

$(a + b)^3 = -c^3$ *(3)* $\qquad a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$ *(4)*

из (2) и (4): $a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3$ *(5)* $\qquad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ *(6)*

Мы построили цепочку логических рассуждений:

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow ((2) \wedge (4)) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$, чем и доказали формулу.

К прямым доказательствам относят и **метод полной индукции**.

Пусть требуется доказать истинность высказывания $(\forall x \in X)\ A(x)$. Если множество $X=\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ конечно, то перебирая все элементы из X можно установить истинность $A(x_1), A(x_2), ..., A(x_n)$. Следовательно и истинность $A(x)$. Такой способ доказательства носит название полной индукции.

Пример. Пусть $K = \{5,7,11,13\}$. Доказать, что все элементы данного множества простые числа.

Доказательство: Простое число – это числа, имеющие только два делителя – *1* и само это число. Тогда *5* – простое число, *7* – простое число, *11* – простое число, *13* – простое число, что и требовалось доказать.

Пример. Приведем доказательство следующей теоремы: «Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство:

I рассуждение.

Вертикальные углы равны (раньше доказанная теорема). Углы *AOD* и *COB* при вершине *O* – вертикальные (по определению).

Следовательно, $\angle AOD = \angle COB$.

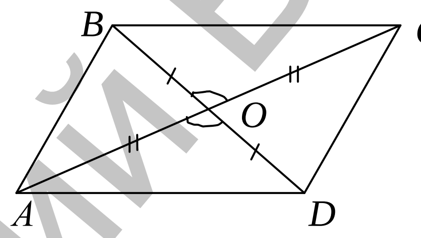


Рис. 62.

II рассуждение.

Два треугольника равны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника (первый признак равенства треугольников).

В ΔAOD и ΔCOB $OD = OB$, $OA = OC$ (по условию, $\angle AOD = \angle COB$ (заключение рассуждения I).

III рассуждение.

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы (ранее доказанный факт).

$\Delta AOD = \Delta COB$ (заключение рассуждения II), $\angle OBC$ и $\angle ODA$ лежат в равных треугольниках против равных сторон.

Следовательно, $\angle OBC$ и $\angle ODA$.

IV рассуждение.

Если внутренние накрест лежащие углы при прямых *AD, BC* и секущей *BD* параллельны (ранее известный факт), $\angle OBC$ и $\angle ODA$ – внутренние накрест лежащие углы при прямых *AD, BC* и секущей *BD*. $\angle OBC = \angle ODA$ (заключение рассуждения III).

Следовательно, $AD = BC$.

С помощью рассуждений V–VIII аналогичным образом получаем, что $AB \parallel DC$.

V рассуждение.

Если в четырехугольнике противолежащие стороны параллельны, то такой четырехугольник – параллелограмм (на основании определения параллелограмма).

В четырехугольнике *ABCD* $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$. Следовательно, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм.

Доказательство завершено.

Если множество *X* бесконечно, то его разбивают (если возможно) на конечное число попарно непересекающихся непустых подмножеств. Установив истинность для одного подмножества, делают общий вывод.

К **косвенным** доказательствам относят метод от противного и метод контрпозиции.

Метод контрпозиции предполагает доказательство теоремы $\overline{\hat{A}} \Rightarrow \overline{A}$ вместо $A \Rightarrow B$.

Рассмотрим **метод от противного**. Пусть требуется доказать $A \Rightarrow B$. Предположим, что если А – истинно, то имеет место $\overline{\hat{A}}$. Далее мы устанавливаем, что из $\overline{\hat{A}} \Rightarrow \overline{A}$ или $\overline{\tilde{N}}$, где *C* – ранее доказанное истинное утверждение. Тогда в первом случае мы доказываем теорему $\overline{\hat{A}} \Rightarrow \overline{A}$ по закону контрпозиции, а во втором получаем противоречие с тем условием, что *C* – истинно. Следовательно, сделанное нами допущение неверно.

Пример. Доказать, что если n^2 – нечетное натуральное число, то *n* также нечетное.

Доказательство. Пусть *n* – четное число. Тогда *n* =2*k*. Значит n^2 = $(2k)^2$ =4*k*. Следовательно, n^2 делится на *2* и является четным числом, что противоречит условию. Наше предположение неверно. Значит n^2 – нечетное натуральное число.

Пример. Доказать теорему: «Две прямые, параллельные третьей, параллельны».

Доказательство: Пусть прямые *a* и *b* параллельны прямой *c*. Допустим, что прямые *a* и *b* не параллельны (рис. 63). Тогда они пересекаются в некоторой точке С. Значит, через точку *C* проходят две прямые, параллельные прямой *c*. Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

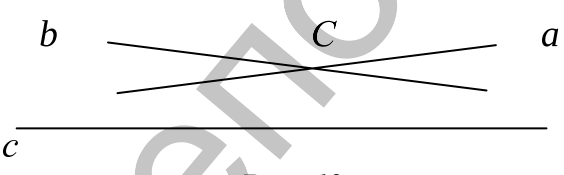


Рис.63.

Теорема доказана методом от противного.

Прямые доказательства делятся на синтетические и аналитические.

1. Синтетический метод доказательства.

Доказательство математического предложения $A \Rightarrow B$ называют синтетическим, если оно осуществляется по следующей логической схеме:

$(A \wedge T) \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B,$

где *T* – определенная совокупность предложений той математической теории, в рамках которой доказывается данное предложение и которой принадлежит конечная последовательность предложений A_1 , A_2 , …, A_n, составляющих доказательство, а также суждения A и B.

Синтетическое доказательство предложения начинается с выведения некоторого следствия A_1 из условия A (или его части) с использованием определенных, связанных с условием предложений *T,* истинность которых уже была установлена. Затем аналогично из A_1 получают следствие A_2 и так далее до тех пор, пока не получат в качестве следствия заключение доказываемого предложения B. Это дает строгое доказательство предложения.

Пример. Доказать, что если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то четырехугольник – параллелограмм.

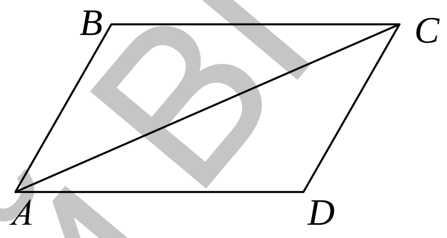


Рис. 64.

Выполним дополнительное построение: проведем диагональ AC. Тогда:
1) ($AB = DC; BC = AD, AC$ – общая) $\Rightarrow$ ($\Delta ABC = \Delta CDA$) (на основании третьего признака равенства треугольников);
2) ($\Delta ABC = \Delta CDA, AB = DC$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ($\angle ACB = \angle CAD$);
3) ($\Delta ABC = \Delta CDA, BC = AD$) $\Rightarrow$ ($\angle BAC = \angle ACD$) (на основании определения равенства двух треугольников);
4) п. 2 $\Rightarrow$ ($BC \parallel AD$);
5) п. 3 $\Rightarrow$ ($AB \parallel DC$) (на основании признака параллельности двух прямых);
6) (пп. 4 и 5) $\Rightarrow$ ($ABCD$ – параллелограмм) (на основании определения параллелограмма).

2. Восходящий анализ (анализ Панна). При доказательстве методом восходящего анализа отталкиваются от заключения теоремы и подбирают для него достаточные условия. В символической записи процесс доказательства можно представить следующим образом. Пусть «$A \Rightarrow B$» – данная теорема. Для заключения B подбираем достаточное условие A_1, т.е. такое условие, что $A_1 \Rightarrow B$. Для A_1, в свою очередь, находимо достойное условие A_2: $A_2 \Rightarrow A_1$ и т.д. Подбор достаточных условий продолжается до тех пор, пока для какого-либо A_n достаточным условием окажется условие теоремы, т.е. условие A: $A \Rightarrow A_n$. В итоге доказательство теоремы завершается: $A \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow A_{n\text{-}1}, \ldots, A_2 \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow B$. Следовательно, $A \Rightarrow B$.

Приведем доказательство теоремы: «Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник – параллелограмм» методом восходящего анализа.

1) Для доказательства того, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, достаточно доказать, что $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$. *(A_1)*

2) Для доказательства параллельности сторон четырехугольника достаточно доказать равенство накрест лежащих углов, образуемых при пересечении двух прямых третьей. *(A_2)*

3) Такие накрест лежащие углы можно получить, если провести диагональ AC: $\angle ACB$ и $\angle CAD$; $\angle BAC$ и $\angle ACD$. (A_3)

4) Для доказательства равенства $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle BAC = \angle ACD$ достаточно доказать равенство треугольников ABC и CDA. (A_4)

5) Для доказательства равенства треугольников ABC и CDA достаточно установить справедливость равенств: $AD = BC$, $AB = DC$, $AC = AC$, а эти равенства выполняются. (A)

Теорема доказана.

3. Нисходящий анализ (анализ Евклида).

При нисходящем анализе рассуждения также начинают с заключения теоремы, однако подбирают уже не достаточные, а необходимые условия. Выведение необходимых условий продолжают до тех пор, пока не придут к очевидному следствию, представляющему собой или условие теоремы, или ранее изученное предложение. Если окажется возможным провести рассуждения в обратном порядке, при котором условие теоремы или очевидное предложение выступают отправной посылкой, то получим искомое доказательство.

Итак, пусть $A \Rightarrow B$ – данная теорема. Допустим, что из заключения теоремы B выводится следствие B_1: $B \Rightarrow B_1$, из B_1, в свою очередь, – следствие B_2 и т.д.:

$B \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2$, … $B_{n-1} \Rightarrow B_n$, $B_n \Rightarrow A$. (1)

Если возможно провести рассуждения в обратном порядке: $A \Rightarrow B_n$, $B_n \Rightarrow B_{n-1}$, …, $B_2 \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B$, (2)

то получим доказательство теоремы.

Понятно, что цепочка рассуждений (1) не является доказательством теоремы. Цель ее – найти доказательство (2).

Если обратиться к рассмотренной выше теореме, то нисходящий анализ может быть проведен следующим образом:

1. Пусть $ABCD$ – параллелограмм. (B)

2. Тогда $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$. (B_1)

3. Тогда $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей). (B_2)

4. Из равенства этих углов с учетом того, что AC – общая сторона ΔABC и ΔCDA, следует: $\Delta ABC = \Delta CDA$. (B_3)

5. Тогда $AD = BC$, $AB = DC$, $AC = AC$. (A)

Итак, $B \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2$, $B_2 \Rightarrow B_3$, $B_3 \Rightarrow A$.

Нетрудно теперь эти рассуждения провести в обратном порядке. В итоге получим синтетическое доказательство.

Если не понимать недостаточность цепочки рассуждений (1) и обязательность перехода к цепочке рассуждений (2), то смысл применения данного метода утрачивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин, Н.Я. Математика / Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало, В.Б. Рождественская, Л.П. Стойлова. – М., Просвещение, 1977.
2. Виноградова, А.В. Пособие по математике. Часть 1 / А.В. Виноградова. – Витебск: Издательство УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2004.
3. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.
4. Задачник-практикум по математике / Н.Н. Лаврова. – М.: Просвещение, 1985.
5. Стойлова, Л.П. Основы начального курса математики / Л.П. Стойлова, А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1988.
6. Стойлова, Л.П. Математика. – М.: Academa, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ