Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

• ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
• ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Курс лекций

2009

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73
И20

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 30.10.2008 г.

Авторы: доценты кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты физико-математических наук **Ж.В. Иванова; Т.Л. Сурин**; старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В. Шерегов**

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент *С.А. Шлапаков*

Иванова, Ж.В.
И20 Математический анализ : применение дифференциального исчисления ; интегральное исчисление функции одной переменной : курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск : УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009. – 97 с.
ISBN 978-985-517-972-7.

Данный курс лекций является продолжением опубликованного ранее учебного издания «Математический анализ: Введение в анализ. Производная» и предназначен для студентов заочной формы обучения математического факультета. Может быть полезен также и студентам очной формы обучения математического и физического факультетов.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-985-517-972-7

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное издание «Математический анализ: Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функции одной переменной» предназначено для студентов первого курса заочного отделения математического факультета. В этой части содержится теоретический материал, который обычно изучается во II семестре. Курс лекций написан в соответствии с учебным планом по математическому анализу для специальности 1-02 05 03-02 «Математика. Информатика». Порядок расположения материала соответствует действующей учебной программе и установившемуся на математическом факультете плану чтения лекций. Материал излагается в простой, доступной для самостоятельного изучения форме. Приводится большое количество примеров, которые способствуют более основательному, осмысленному изучению теоретического материала, а также будут полезны при решении контрольной работы за II семестр.

Данный курс лекций будет полезен также студентам очной формы обучения, занимающимся на математическом и физическом факультетах.

Несмотря на то, что в данном курсе лекций достаточно подробно рассматриваются теоретические вопросы, предусмотренные учебной программой, для более глубокого изучения вышеназванных разделов математического анализа, а также для закрепления практических навыков самостоятельного решения конкретных задач, рекомендуется в качестве базовой изучить основную литературу по данной теме [1]–[5]. Кроме того, возможно использование дополнительной литературы, приведенной в конце учебного издания, и других доступных учебников и пособий по данным разделам математического анализа.

I. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Теорема Ферма

***Теорема* 1.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и во внутренней точке c из этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение, тогда, если в этой точке существует производная функции, то она равна нулю*: $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть в точке c функция $y = f(x)$ принимает свое наибольшее значение. Придадим точке c приращение Δx так, чтобы точка $c + \Delta x \in X$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) = f(x) - f(c)$ и

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

По условию теоремы, производная функции $f(x)$ в точке $x = c$ существует, следовательно, выполняется равенство

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \qquad (1)$$

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to c+0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Так как $x \to c + 0$, то $x - c > 0$. В свою очередь, $f(c)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале X, тогда $f(x) - f(c) < 0$. Значит, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ и по свойствам предела функции $\lim\limits_{x \to c+0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0$.

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x \to c-0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$.

Так как выполняется равенство (1), то

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

Следовательно, $f'(c) = 0$. □

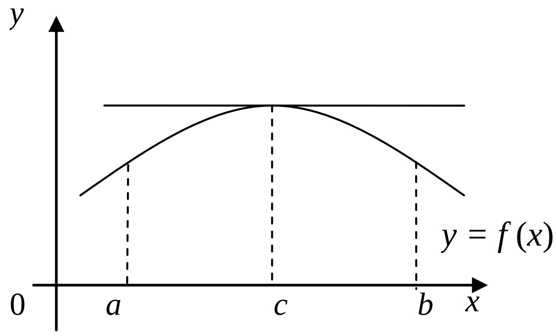


Рис. 1.

Замечание. Если функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка $[a, b]$, то производная функции в этой точке не обязательно равна 0.

Геометрический смысл теоремы Ферма. Так как $f'(c) = \mathrm{tg}\,\alpha = k$, где k – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке c и $f'(c) = 0$, то касательная к графику функции в этой точке параллельна оси $0X$ (рис. 1).

2. Теорема Ролля

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$

1) *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$,
2) *дифференцируема на интервале* (a, b),
3) *на концах отрезка* $[a, b]$ *принимает равные значения, т.е.* $f(a) = f(b)$,

тогда существует такая точка c $(a < c < b)$, *что* $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса, она достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Пусть m – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, M – наибольшее значение функции на этом отрезке.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $M = m$. Следовательно, $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ для любых $x \in [a, b]$. Теорема доказана.

2. Пусть $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то наибольшее и наименьшее значения функции не могут достигаться на концах отрезка одновременно, следовательно, хотя бы одно из них достигается во внутренней точке c промежутка (a, b), тогда, по теореме Ферма, $f'(c) = 0$. □

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что касательная к графику функции в этой точке будет параллельна оси $0X$.

3. Теорема Лагранжа

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x)$

1) *непрерывна на* $[a, b]$,
2) *дифференцируема на интервале* (a, b),

тогда существует такая точка c $(a < c < b)$, *что имеет место равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \quad (2)$$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a). \quad (3)$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

1) она непрерывна на $[a, b]$, так как функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке;

2) дифференцируема на интервале (a, b), так как функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b);

3) $F(b) = F(a) = 0$.

Следовательно, по теореме Роля, существует такая точка c $(a < c < b)$, что $F'(c) = 0$.

Найдем производную функции (3):

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

Тогда $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ или $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Таким образом, получили формулу (2). □

Замечание. Формула (2) называется формулой Лагранжа, она справедлива и в случае $a > b$.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющую условиям теоремы Лагранжа на этом отрезке. Зафиксируем точку $x_0 \in [a, b]$ и придадим ей приращение Δx. Рассмотрим отрезок $[x_0, x_0 + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$ (или отрезок $[x_0 + \Delta x, x_0]$ $(\Delta x < 0)$). Функция $f(x)$ на этом отрезке также удовлетворяет теореме Лагранжа. Следовательно, существует точка c, лежащая между точками x_0 и $x_0 + \Delta x$, такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c).$$

Это равенство можно записать в следующем виде:

$$\Delta y = f'(c)\Delta x, \quad (4)$$

где $c = x_o + \theta\Delta x$ $(c < \theta < 1)$.

Равенство (4) дает точную формулу для нахождения приращения функции при любых конечных приращениях аргумента и называется **формулой конечных приращений.**

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей на отрезке $[a, b]$ условиям теоремы Лагранжа. Тогда

$$f(b) - f(a) = BN, \quad b - a = AN$$

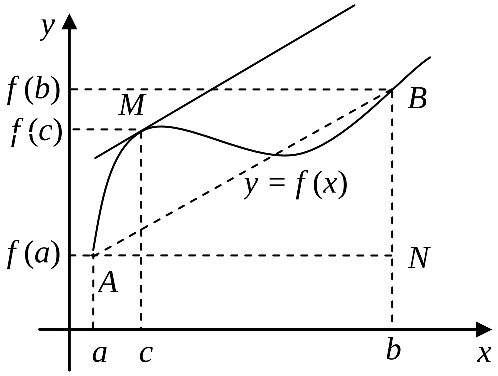


Рис. 2.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{BN}{AN} = \text{tg}\angle BAN = f'(c).$$

Значит, на кривой AB найдется такая точка $M(c, f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна хорде AB.

4. Теорема Коши

Теорема 4. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

1) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$,
2) *дифференцируемы, по крайней мере, на интервале* (a, b),
3) $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b),

тогда существует такая точка c $(a < c < b)$, *что имеет место равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (5)$$

Доказательство.

Прежде всего, докажем, что $g(b) \neq g(a)$.

Предположим обратное, пусть $g(b) = g(a)$. Тогда для функции $g(x)$ на $[a, b]$ выполняются все условия теоремы Ролля, и, следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $g'(c) = 0$, а это противоречит условию теоремы Коши.

Так как $g(b) - g(a) \neq 0$, то мы можем рассмотреть следующую вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Аналогично теореме Лагранжа можно доказать, что для функции $F(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля, согласно которой на интервале (a, b) найдется такая точка c, что $F'(c) = 0$.

Так как $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, то, найдя значение производной функции $F(x)$ в точке c, и приравняв ее к нулю, получим формулу (5). □

§ 1.2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

***Теорема* 1.** *Пусть*

1) *две функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *определены и дифференцируемы всюду в некоторой* δ*-окрестности точки* a*, за исключением, может быть, самой точки* a*,*

2) $g'(x) \neq 0$ *всюду в этой окрестности (за исключением точки* a*),*

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$

тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*, то существует и предел отношения самих функций* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, причем справедлива формула*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K. \qquad (1)$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, положив $f(a) = g(a) = 0$. Возьмем произвольное число $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Для определенности положим, что $x > a$. Тогда на отрезке $[a, x]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны, дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, x), следовательно, по теореме Коши, найдется точка $c \in (a, x)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Но, так как $f(a) = g(a) = 0$, то $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Перейдем в данном равенстве к пределу при $x \to a$ (так как точка $a < c < x$, то при $x \to a$, $c \to a$)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

□

***Замечание* 1.** Теорема справедлива и в том случае, когда для функций $f(x)$ и $g(x)$ условия теоремы выполняются в левосторонней (правосторонней) окрестности точки a.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \beta x}{tg\, \alpha x}$.

Решение.

Рассмотрим функции $\sin\beta x$ и $\mathrm{tg}\,\alpha x$. Эти функции удовлетворяют условиям теоремы 1:

1) функции $\sin\beta x$ и $\mathrm{tg}\,\alpha x$ определены и непрерывны на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, содержащем точку 0;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\beta x = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}\,\alpha x = 0$,

3) $(\mathrm{tg}\,\alpha x)' = \dfrac{\alpha}{\cos^2\alpha x} \neq 0$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

следовательно, по теореме 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{tg\,\alpha x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin\beta x)'}{(tg\,\alpha x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\beta\cos\beta x}{\dfrac{\alpha}{\cos^2\alpha x}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

***Замечание* 2.** Предел отношения производных функций может и не существовать, в то время как предел отношения функций существует.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение.

1) функции $x^2\sin\frac{1}{x}$ и $\sin x$ – определены и непрерывны на всей числовой прямой, за исключением точки 0, в которой не определена функция $x^2\sin\frac{1}{x}$;

2) так как $x^2 \to 0$ при $x \to 0$, а функция $\sin\frac{1}{x}$ ограничена, то по свойствам бесконечно малых функций, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$, кроме того, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$;

3) существует окрестность точки 0, в которой $(\sin x)' = \cos x \neq 0$.

Но $\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$. Предел от этого выражения при $x \to 0$ не существует, следовательно, теорему 1 применять нельзя. Попытаемся найти предел, не используя данную теорему.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$$

***Замечание* 3.** Теорема 1 верна и в случае $a = \pm\infty$. Сформулируем теорему при $a \to +\infty$.

***Теорема* 2.** *Пусть*

1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы всюду на полупрямой* (c, ∞),

2) $g'(x) \neq 0$ *везде на данной полупрямой.*

3) *Пусть*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

тогда, если существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует и предел отношения самих функций* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем справедлива формула*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K. \tag{1}$$

***Замечание* 4.** Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применять повторно (т.е. предел отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ равен пределу отношения $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ и т.д.).

***Теорема* 3.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой выколотой δ-окрестности точки а* $(x \neq a)$,

2) $g'(x) \neq 0$ *в этой окрестности,*

2) *пусть* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,

тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$, *то существует и предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем справедлива формула*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Все замечания, сформулированные для случая неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, могут быть перенесены на случай неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^{\alpha} x}{x^{\mu}}$ $(\alpha,\ \mu > 0)$.

Решение.

Под знаком предела имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha}x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^{\alpha}x)'}{(x^{\mu})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\frac{1}{x}\ln^{\alpha-1}x}{\mu x^{\mu-1}}=\frac{\alpha}{\mu}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha-1}x}{x^{\mu}}.$$

Если $\alpha\le 1$, то предел равен 0. При $\alpha>1$ получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому применим правило Лопиталя еще раз.

$$\frac{\alpha}{\mu}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha-1}x}{x^{\mu}}=\frac{\alpha}{\mu}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^{\alpha-1}x)'}{(x^{\mu})'}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\mu^{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha-2}x}{x^{\mu}}.$$

При $\alpha\le 2$ предел равен 0, если $\alpha>2$ опять получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть k – наименьшее натуральное число большее α. Применив правило Лопиталя k раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha}x}{x^{\mu}}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{\mu^{k}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\alpha-k}x}{x^{\mu}}=0.$$

2. Другие типы неопределенностей

Кроме изученных выше неопределенностей видов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ часто встречаются неопределенности следующих видов: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}. Все эти неопределенности сводятся к двум, изученным выше, путем алгебраических преобразований.

1. Раскрытие неопределенностей вида $(0\cdot\infty)$. Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, тогда произведение этих функций всегда можно представить в виде

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

то есть при $x\to a$ выражение $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, а выражение $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ – неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$.

Решение.

Выражение, стоящее под знаком предела, представляет неопределенность $0 \cdot \infty$. Представим это выражение в виде $\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ и найдем предел по правилу Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3}}{x} = -2\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0.$$

2. Раскрытие неопределенностей вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}. Каждая из этих неопределенностей имеет вид $y = f(x)^{g(x)}$. Прологарифмируем данное выражение (считаем, что $f(x) > 0$). Получим $\ln y = g(x)\cdot\ln(f(x))$. В любом из трех случаев выражение $g(x)\cdot\ln(f(x))$ представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $0 \cdot \infty$, которая рассматривалась выше.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

Решение.

Пусть $y = \lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$, тогда $\ln y = \sin x\cdot\ln(\operatorname{ctg} x) = \dfrac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\dfrac{1}{\sin x}}$.

Применяя правило Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to +0}\frac{-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot\sin^2 x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cos x} = \lim_{x\to +0}\frac{1}{\operatorname{ctg} x\cdot\cos x} = \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Отсюда $y = e^0 = 1$.

§ 1.3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора для многочлена

Формула Тейлора является одной из основных формул математического анализа и имеет многочисленные применения.

Рассмотрим сначала формулу Тейлора для многочлена.

Рассмотрим многочлен степени n

$$P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n. \qquad (1)$$

Выберем произвольным образом точку a, **и сделаем подстановку** $x = (x - a) + a$. Получим

$$P(x) = b_0 + b_1((x-a) + a) + \ldots + b_n((x-a) + a)^n =$$
$$= \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots + \beta_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k(x-a)^k, \qquad (2)$$

где β_i – некоторые постоянные.

Равенство (2) называется разложением многочлена $P(x)$ по степеням $x - a$, а числа β_i называются коэффициентами этого разложения.

Найдем коэффициенты β_i, предполагая, что известны значения $P(a), P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)$. Для этого найдем производные многочлена $P(x)$ до n-ого порядка включительно, и значения этих производных в точке a. Получим

$$P(a) = \beta_0,\ P'(a) = \beta_1,\ P''(a) = 2!\,\beta_2,\ P'''(a) = 3!\,\beta_3, \ldots, P^{(n)}(a) = n!\,\beta_n.$$

Следовательно, $\beta_0 = P(a)$, $\beta_1 = \dfrac{P'(a)}{1!}$, $\beta_2 = \dfrac{P''(a)}{2!}$, …, $\beta_n = \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}$. Значит многочлен можно записать в виде

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^k. \qquad (3)$$

Формула (3) носит название **формулы Тейлора** для многочлена $P(x)$.

Формула Тейлора для разложения многочлена $P(x)$ по степеням x (при $a = 0$) имеет вид

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^k. \qquad (4)$$

и называется **формулой Маклорена**.

Пример. Разложить по формуле Маклорена многочлен $P(x) = (x + a)^n$.

Решение:

Найдем значения функции $P(x)$ и ее производных до n-ого порядка включительно в точке $x = 0$.

$P(0) = a^n$

$P'(x) = n(x + a)^{n-1}$, $\qquad P'(0) = n\,a^{n-1}$,

$P''(x) = n(n-1)(x + a)^{n-2}$, $\qquad P''(0) = n(n-1)\,a^{n-2}$,

$P^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-(k-1))(x-a)^{n-k}$,

$P^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-(k-1))\,a^{n-k}$,

…

$P^{(n)}(x) = n!$, $\qquad P^{(n)}(0) = n!$.

Подставив эти значения в формулу (4), получим

$$(x+a)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \ldots +$$

$$+\ \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + x^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}x^k$$

– формула Маклорена для многочлена $P(x) = (x + a)^n$. Эта формула носит название **бином Ньютона**.

2. Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, определенную на некотором промежутке X. Пусть функция $f(x)$ в точке $a \in X$ имеет производные до n-го порядка включительно: $f'(a)$, $f''(a)$, … , $f^{(n)}(a)$.

Тогда, аналогично (3) для функции $f(x)$ можно составить многочлен

$$Q(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Этот многочлен совпадает с функцией $f(x)$ в точке a. Однако если функция $f(x)$ не является многочленом n-степени, то $f(x) \neq Q(x)$. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = Q(x) + R_{n+1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \tag{5}$$

где $R_{n+1}(x)$ – величина, на которую отличается функция $f(x)$ от многочлена $Q(x)$.

Равенство (5) называют **формулой Тейлора** для функции $f(x)$. Функция $R_{n+1}(x)$ называется **остаточным членом** разложения функции $f(x)$ по формуле Тейлора.

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ можно найти по следующим формулам:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{6}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n, \tag{7}$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (6) называется **остаточным членом в форме Лагранжа.** Формула (7) называется **остаточным членом в форме Коши.**

Остаточные члены в формах Лагранжа и Коши используются, если требуется при фиксированных значениях x, отличных от a, приближенно вычислить значения функции $f(x)$. Тогда функцию $f(x)$ заменяют многочленом $Q_n(x)$ и оценивают погрешность, которая не превосходит $|R_{n+1}(x)|$ (если $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то функцию $f(x)$ можно приблизить многочленом с любой точностью).

Однако иногда встречаются задачи, в которых не интересует величина ошибки, а лишь, как быстро она стремится к нулю при $x \to a$. В этом случае используется остаточный член в **форме Пеано**

$$R_{n+1}(x) = o((x - a)^n)$$

Если в (5) $a = 0$, то формула Тейлора называется **формулой Маклорена**. Разложение функции $f(x)$ по формуле Маклорена имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \qquad (8)$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n$ – остаточный член в форме Лагранжа,

$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n$ – остаточный член в форме Коши,

$R_n(x) = o(x^n)$ – остаточный член в форме Пеано.

4. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

1. Рассмотрим функцию $y = e^x$.

Так как $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f^{(n)}(0) = 1$, то формула Маклорена для этой функции имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \qquad (9)$$

где остаточный член в форме Лагранжа задается формулой

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

На любом отрезке $[-r, r]$ ($r > 0$) имеет место оценка остаточного члена

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \qquad (10)$$

2. $y = \sin x$.

Найдем производные этой функции:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

…

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n + x\right).$$

Найдем значения производных функции в точке $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{при} \quad n = 2k-1, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots$.

Формула Маклорена для данной функции записывается в виде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x). \qquad (11)$$

Остаточный член в форме Лагранжа для функции $y = \sin x$:

$$R_{2k+1}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

Так как функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, то для любого отрезка $[-r, r]$ $(r > 0)$ справедлива следующая оценка остаточного члена:

$$|R_{2k+1}(x)| \le \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (12)$$

3. Аналогично можно найти разложение функции $y = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}(x), \qquad (13)$$

где $R_{2k+2}(x) = \dfrac{\cos(\theta x + (k+1)\pi)}{(2k+2)!}x^{2k+2}, \qquad (0 < \theta < 1)$.

Для любого отрезка $[-r, r]$ $(r > 0)$ справедливо неравенство

$$R_{2k+2}(x) = \frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

4. $y = \ln(x + 1)$.

Поскольку

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то формула Маклорена имеет вид

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x), \quad (14)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (в форме Лагранжа)}, \quad (15)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (в форме Коши)}. \quad (16)$$

5. Рассмотрим функцию $y = (1 + x)^{\alpha}$. Найдем производные функции

$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha - 1}$,

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha - 2}$,

…

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - (n - 1))(1 + x)^{\alpha - n}$.

Так как $f(0) = 1$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - (n - 1))$, то

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \quad (17)$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1).$$

5. Примеры применения формулы Маклорена

1. Алгоритм нахождения числа *e*. В § 2.3, п.2, [4] мы ввели понятие числа e как предела последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и получили для e грубую оценку $2 \le e \le 3$. Теперь мы укажем, как вычислить число e с любой интересующей нас степенью точности. Воспользуемся формулой Маклорена (9) и оценкой остаточного члена (10). Положим в этих формулах $x = r = 1$. Получим

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),$$

где

$$|R_{n+1}(1)| \le \frac{e}{(n+1)!} \le \frac{3}{(n+1)!}. \quad (18)$$

Видим, что $R_{n+1}(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, выбирая в разложении достаточно большое число n, мы можем вычислить число e с любой интересующей нас степенью точности, при этом погрешность вычисления не будет превосходить модуля остаточного члена.

Например, нужно решить следующую задачу: сколько членов в формуле (9) необходимо взять, чтобы вычислить число e с точностью 10^{-6}? Положим в формуле (9) $x = 1$. Нетрудно подсчитать, что $10! > 3\cdot 10^6$. Поэтому, учитывая формулу (18), получим

$$|R_{10}(1)| \le \frac{3}{10!} \le \frac{3}{3\cdot 10^6} = 10^{-6}.$$

Следовательно, в формуле (9) при $x = 1$ достаточно положить $n = 9$, чтобы найти число e с точностью 10^{-6}:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} \approx 2{,}718282.$$

2. Нахождение пределов.

Рассмотрим полученные в п. 4 разложения элементарных функций по формуле Маклорена, беря в каждой из этих формул остаточный член в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\,(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o\,(x^{2n-1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\,(x^{2n-2}),$$

$$\ln\,(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\,(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\,(x^n).$$

Эти формулы называются **асимптотическими.** Данные формулы применяют при нахождении пределов функций.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!} + \frac{o\,(x^3)}{x^3}\right) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}\ .$$

§ 1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Условие постоянства и условие монотонности функции на интервале

***Теорема* 1.** *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f'(x) = 0$ *для всех* $x \in (a, b)$, *то функция является постоянной на интервале* (a, b).

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки x_1 и x_2 принадлежащие интервалу (a, b) $(x_1 < x_2)$ и отрезок $[x_1, x_2]$. На этом отрезке функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа (так как она дифференцируема по условию теоремы на данном отрезке, а, следовательно, непрерывна), значит, существует точка $c \in (x_1, x_2)$, в которой выполняется равенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Но так как всюду на интервале (a, b) производная $f'(x) = 0$, то в равенстве (1) $f'(c) = 0$. Тогда $f(x_1) - f(x_2) = 0$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Так как x_1 и x_2 – произвольные точки на интервале $(a. b)$, то функция постоянна на всем интервале. □

Определение* 1.** *Функция* $f(x)$ *называется* ***возрастающей (убывающей) *на интервале* (a, b), *если для любых двух точек* x_1 *и* x_2 *интервала* (a, b), *удовлетворяющих неравенству* $x_1 < x_2$, *справедливо неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

***Теорема* 2.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда, для того, чтобы функция* $f(x)$ *была монотонно возрастающей (убывающей) на этом интервале, достаточно, чтобы* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *всюду на* (a, b).

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ на интервале (a, b) и точки x_1 и x_2 принадлежат интервалу (a, b). Будем считать, что $x_1 < x_2$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на этом отрезке, следовательно, существует такая точка $c \in (x_1, x_2)$, что выполняется равенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Значит из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функция возрастает на интервале (a, b).

Если $f'(x) < 0$, то доказательство аналогично. □

Замечание. Данный признак является достаточным, но не необходимым признаком монотонности функции, т.е. существует функции монотонно возрастающие (убывающие) на интервале (a, b), производ-

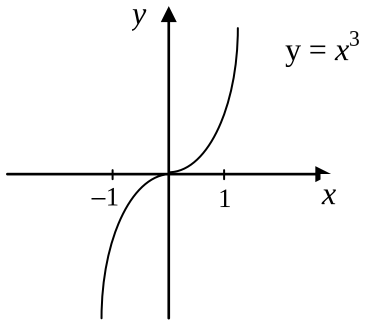
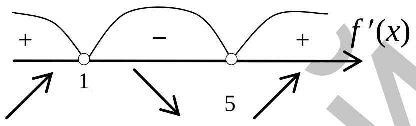


Рис. 3.

ная которых равна нулю или не существует в некоторой точке этого интервала (или в конечном числе точек интервала).

Например, рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Производная этой функции $f'(x) = 3x^2$. При $x = 0$ производная равна нулю. В то же время функция $f(x) = x^3$ монотонно возрастает на всей числовой прямой (см. рис. 3).

Аналогично, функция $y = x - \sin x$ является возрастающей, в то время как ее производная $f'(x) = 1 - \cos x$ не отрицательна и обращается в нуль для значений $x = 2\pi k$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$)



Пример 1. Найти промежутки возрастания, убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

Решение.

1) Найдем область определения функции: $D(f) = R$.

2) Найдем производную функции: $f'(x) = x^2 - 6x + 5$.

3) Найдем точки в которых производная функции равна нулю. Для этого решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Отметим точки $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ на числовой прямой и найдем знаки производной на полученных интервалах:

4) Согласно теореме 2, функция убывает на интервале (1, 5) и возрастает на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(5, +\infty)$.

2. Точки экстремума функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Определение 2. *Точка* $x_0 \in (a, b)$ *называется* ***точкой максимума (минимума)*** *функции, если существует такая* δ*-окрестность точки* x_0*, содержащаяся в интервале* (a, b)*, что для всех точек* $x \in U_\delta(x_0)$ $(x \neq x_0)$*, выполняется неравенство* $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$.

Напомним, что δ-окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (см. стр. 24, [4]). Обозначение: $U_\delta(x_0)$),

Часто точки максимума (минимума) функции называют точками **локального максимума (локального минимума).**

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции.

Теорема 3. (*необходимое условие экстремума дифференцируемой функции*). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то существует окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ $(x \neq x_0)$, выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$, т.е. значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим) в данной окрестности. Тогда, по теореме Ферма (теорема 1, § 1.1) $f'(x_0) = 0$. □

Замечание 1. Функция $f(x)$ может иметь экстремум также в точке x_0, такой, что $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки x_0, в которой производная функции не существует или бесконечна, но функция непрерывна. Например, точка $x = 0$ является точкой минимума функции $y = |x|$, хотя производная функции существует для всех значений $x \neq 0$. В точке $x = 0$ производная функции $y = |x|$ не существует, но сама функция непрерывна (см., пример 2, стр. 64, [*]).

Точки, в которых функция определена, непрерывна, а производная функции равна нулю, или не существует, называются **критическими точками** функции. Критические точки не всегда являются точками экстремума функции. Для определения их характера необходимо дальнейшее исследование.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть точка x_0 является критической точкой функции

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой δ-окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0. Если производная функции при переходе через точку x_0, меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума функции. В частности,*

– если в пределах данной окрестности слева от точки x_0 производная положительна, а справа – отрицательна, то точка x_0 является точкой максимума функции;

– если слева от точки x_0 производная отрицательна, а справа – положительна, то точка x_0 является точкой минимума функции;

– если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то экстремума в точке x_0 функция не имеет.

Доказательство.

1. Рассмотрим интервалы $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. Пусть $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда по теореме 2, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Следовательно, для всех x из рас-

сматриваемой δ-окрестности $(x \neq x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$, т.е. точка x_0 – точка максимума функции.

2. Аналогично можно доказать, что если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 – точка минимума функции.

3. Если производная функции положительна (отрицательна) на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$, то функция возрастает (убывает) в δ-окрестности точки x_0, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума функции. □

Второе достаточное условие экстремума.

***Теорема* 5.** *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную и $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции. Если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка максимума функции.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$.

По определению, вторая производная функции – производная от функции $f'(x)$. Тогда, учитывая, что x_0 – критическая точка функции, т.е. $f'(x_0) = 0$, получим

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Так как $f''(x_0) > 0$, то, по свойству предела функции, существует такая δ-окрестность точки x_0, что $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ для всех x из этой окрестности. Тогда $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Производная функции $f(x)$, проходя через точку x_0, меняет знак с минуса на плюс, значит, по теореме 4, точка x_0 является точкой минимума функции.

Аналогично можно доказать, что если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции. □

Пример 2. Найти точки экстремума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 4$.

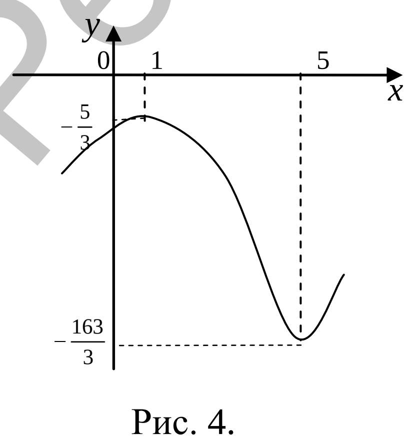


Рис. 4.

Решение.

Используя исследование функции, проведенное в примере 1 п.1, и первое достаточное условие экстремума функции, получим:

– точка $x = 1$ является точкой локального максимума,

– точка $x = 5$ – точкой локального минимума функции.

Построим схематически график функции. Для этого найдем значение функции в точках экстремума: $f(1) = -\frac{5}{3}$, $f(5) = -\frac{163}{3}$.

По полученным данным строим график функции (рисунок 4).

Замечание. Построенный нами график функции может содержать неточности. Для более точного построения графика, требуются дополнительные исследования (нахождение точек пресечения графика функции с координатными осями, исследование с помощью второй производной, и т.д.)

Пример 3. Найти точки экстремума функции $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение.

Эта функция непрерывна на всей числовой прямой и дифференцируема всюду на этой прямой за исключением точки $x = 0$. Производная функции при $x \neq 0$ равна

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

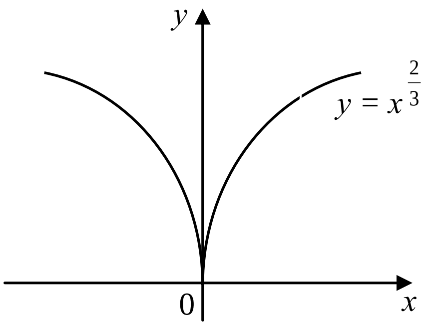


Рис. 5.

Эта производная отрицательна слева от точки $x = 0$ и положительна справа от данной точки.

Следовательно, по теореме 4, точка $x = 0$ – точка минимума функции. Кроме того, $y' \to +\infty$ при x стремящемся к нулю слева и справа. Учитывая геометрическое истолкование производной как углового коэффициента касательной, делаем вывод, что в точке $x = 0$ существует касательная к графику функции параллельная оси OY. График рассматриваемой функции изображен на рисунке 5.

3. Промежутки выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба

Будем говорить, что функция $y = f(x)$ **вогнута вверх** (**выпукла**) на отрезке $[a, b]$, если график этой функции в пределах указанного отрезка лежит ниже любой своей касательной.

Функция $y = f(x)$ называется **вогнутой вниз** (**вогнутой**) на отрезке $[a, b]$, если график функции в пределах указанного отрезка лежит выше любой касательной, проведенной к этому графику в произвольной точке отрезка $[a, b]$.

На рисунке 6 изображен график, имеющий на отрезке $[a, b]$ вогнутость вниз, а на рисунке 7 изображен график функции, имеющий вогнутость вверх.

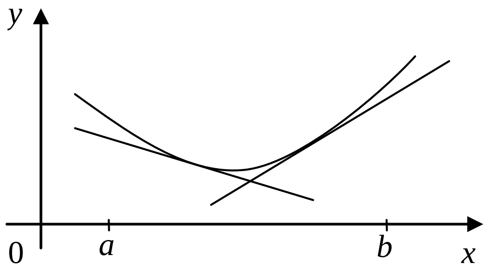


Рис. 6.

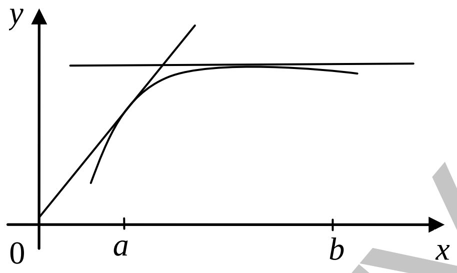


Рис.

***Теорема* 6.** *Если на интервале* (a, b) *существует вторая производная функции* $y = f(x)$, *которая положительна* (*отрицательна*) *всюду на интервале, то график функции* $y = f(x)$ *имеет на интервале* (a, b) *вогнутость вниз* (*вверх*).

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Выберем произвольным образом точку $x_0 \in (a, b)$ и рассмотрим точку $M_0(x_0, f(x_0))$, лежащую на графике функции $f(x)$. Проведем касательную к графику функции в точке M_0.

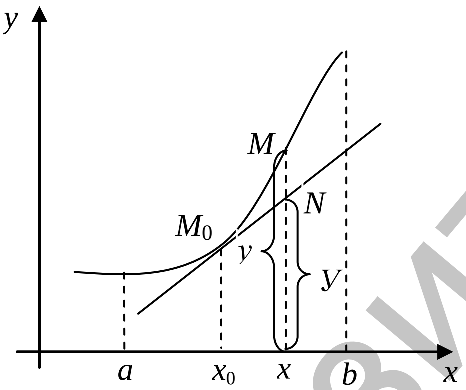


Рис. 8.

Обозначим через y ординату произвольной точки $M(x, y)$ графика функции. а через Y – ординату произвольной точки $N(x, Y)$ касательной (рис. 8).

Докажем, что $y - Y > 0$.

Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

Разложим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора, считая $n = 1$. Получим

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \qquad (3)$$

где последнее слагаемое – остаточный член в форме Лагранжа и $x_0 < \xi < x$. Так как функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a, b), то формула (3) справедлива для любых x из этого интервала.

Из равенства (3) вычтем равенство (2). Будем иметь

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Поскольку $f''(x) > 0$ всюду на интервале (a, b), то вторая часть этого равенства неотрицательна. Следовательно, $y - Y > 0$. Это доказывает, что график функции лежит выше касательной (2).

Аналогично доказывается теорема в случае $f''(x) < 0$. □

Точка x_0, в которой функция $y = f(x)$ меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется **точкой перегиба**.

Необходимое условие перегиба: $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие перегиба: вторая производная функции $f(x)$ меняет знак, при переходе через точку x_0.

Пример 4. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 4.$$

Решение.

Поскольку вторая производная функции $f''(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$ обращается в нуль при $x = 3$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 2$ – абсцисса точки перегиба. Ордината этой точки $y = f(3) = -7$, т.е. $M(3, -7)$, – точка перегиба графика функции.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 3$ и $f''(x) > 0$ при $x > 3$, то график функции является вогнутым вверх на интервале $(-\infty, 3)$ и вогнутым вниз – на интервале $(3, +\infty)$.

3. Асимптоты графика функции

Определение* 3**. *Говорят, что прямая $x = a$ является* ***вертикальной асимптотой *графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно $\pm\infty$.*

Из данного определения следует, что вертикальная асимптота существует в точке разрыва функции или на концах области определения.

Определение* 4**. *Прямая $y = kx + b$ называется* ***наклонной асимптотой *графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функция представима в виде*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{4}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

***Теорема* 7.** *Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) имел наклонную асимптоту $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали два предельных значения*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad и \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) \tag{5}$$

$$\left(k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad и \quad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx)\right).$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$, тогда $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha \to 0$, при $x \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы вида (5). Тогда, по свойству предела функции, $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, а это и есть определение наклонной асимптоты.

В случае $x \to -\infty$ доказательство аналогично. □

***Замечание* 1.** Если пределы вида (5) существуют при $x \to \infty$, то у функции существует наклонная асимптота $y = kx + b$ и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$.

5. Схема полного исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти нули функции, т.е. решить уравнение $f(x) = 0$. Корни этого уравнения и точки разрыва функции разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства.
3. Находим точки пересечения функции с координатными осями.
4. Установить, является ли функция четной, нечетной, периодической. Если функция нечетная, то график данной функции симметричен относительно начала координат. График четной функции симметричен относительно оси *ОУ*.
5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции и установить их вид.
6. Изучить поведение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения. Ответить на вопрос: существуют ли вертикальные и наклонные асимптоты функции?
7. Исследовать функцию с помощью первой производной (найти промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума).
8. Исследовать функцию с помощью второй производной (найти промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба).
9. Построить график функции.

Пример 5. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение.

1. Найдем область определения функции:

$D(f) = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$.

2. Так как уравнение $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 0$ не имеет действительных корней, то $y \neq 0$. Если $x = 0$, то $y = -1$.

3. Так как $f(x+T) = \frac{(x+T)^2+1}{(x+T)^2 - 1} \neq \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$, то функция $f(x)$ непериодическая. Так как $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ и область определения функции симметрична относительно начала координат, то функция $f(x)$ – четная, а значит, график функции симметричен относительно оси OY.

4. Функция непрерывна в своей области определения, как частное двух непрерывных функций. Точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва функции. Так как

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty,$$

то точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва второго рода.

5. Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1, \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

Учитывая исследование, проведенное в пункте 4, получим, что график функции имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$.

Найдем наклонные асимптоты функции. Рассмотрим следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

Следовательно, имеем наклонную (горизонтальную) асимптоту $y = 1$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

6. Исследуем функцию с помощью первой производной (найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции).

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная равна нулю при $x = 0$. Кроме того, сама функция и, следовательно, ее производная не существуют при $x = \pm 1$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1,$

0), (0, 1), (1, +∞). Найдем знаки производной на каждом из полученных интервалов, значение функции в точке $x = 0$, и запишем результаты в таблицу.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	не существ.	+	0	–	не существ.	–
$f(x)$	возрастает	не существ	возрастает	–1	убывает	не существ	убывает

В точке $x = 0$ производная меняет знак с "+" на "–", следовательно, это точка максимума.

7. Исследуем функцию с помощью второй производной (найдем промежутки выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба).

$$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль и не существует в точках $x = \pm 1$. Найдем знаки второй производной на промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	не существ.	–	не существ.	+
$f(x)$	вогнута	не существ	выпукла	не существ	вогнута

Из приведенной таблицы, очевидно, что график функции не имеет точек перегиба.

По полученным данным строим график функции.

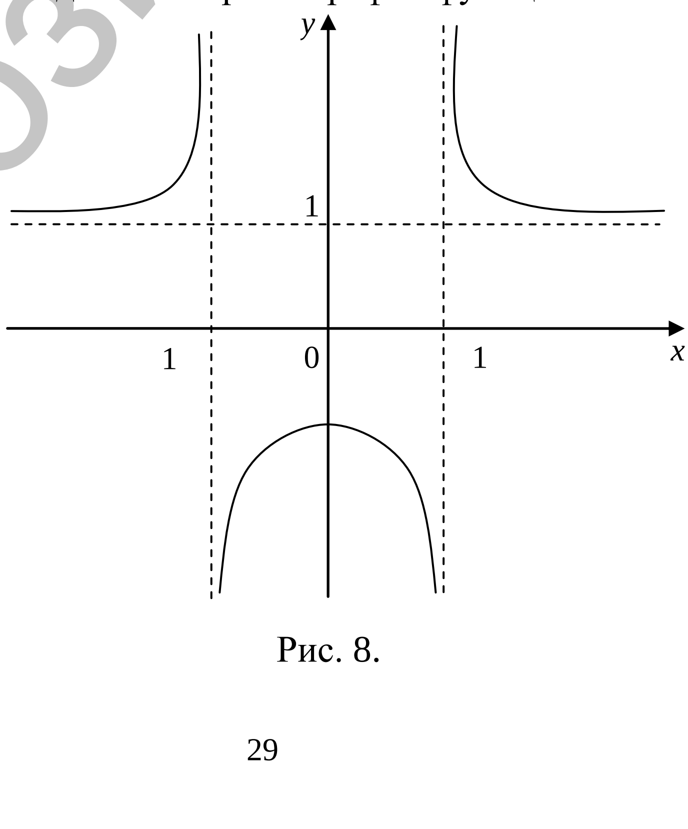


Рис. 8.

6. Наибольшее и наименьшее значение функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. По свойству непрерывных функций, эта функция достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке.

Наибольшее значение функция $f(x)$ может принимать или в точке максимума или на концах отрезка $[a, b]$, наименьшее – или в точке минимума, или на концах отрезка $[a, b]$. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке (a, b), необходимо:

1) найти критические точки функции $f(x)$, принадлежащие интервалу (a, b);
2) найти значения функции в этих критических точках и на концах отрезка;
3) сравнить полученные результаты.

Замечание. Если на отрезке (интервале) функция $f(x)$ имеет одну критическую точку, то функция в этой точке принимает наибольшее значение на данном интервале, если эта точка – точка максимума, и наименьшее значение в случае, если эта точка – точка минимума.

Пример 6. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение.

1. Находим критические точки функции

$$y'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

Точка $x_1 = 0$ принадлежит интервалу $(-2, 2)$. Точки $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$ совпадают с концами отрезка $[-2, 2]$.

2. Находим значения функции в этих точках:

$$y(0) = 3, \quad y(-2) = -13, \quad y(2) = -13$$

3. Сравниваем полученные значения.

Наибольшее значение функции равно 3 и достигается в точке $x_1 = 0$, наименьшее равно -13 и достигается в точках $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$.

К нахождению наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$ приводят многие прикладные задачи. Общая схема решения таких задач состоит в следующем: сначала устанавливается зависимость рассматриваемой величины y от некоторой независимой переменной x, из условия задачи определяется промежуток, в котором может изменяться переменная x. Далее находится наибольшее или наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 7. В окружность радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение.

Проведем координатные оси параллельно сторонам прямоугольника, так чтобы начало отсчета совпало с центром окружности (рисунок 9).

Тогда уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом равным R имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

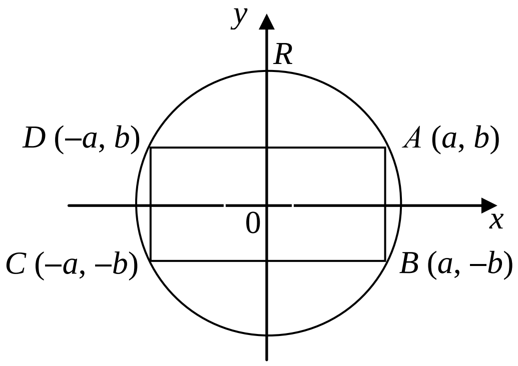


Рис. 9.

Пусть точки $A(a, b)$, $B(a, -b)$, $C(-a, -b)$, $D(-a, -b)$ ($a > 0$, $b > 0$) являются вершинами прямоугольника. Очевидно, что $AB = 2a$, $BC = 2b$, $S_{abcd} = AB \cdot BC = 4ab$. Так как прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность, то координаты его вершин удовлетворяют уравнению окружности, т.е. справедливо равенство $a^2 + b^2 = R^2$, значит $a = \sqrt{R^2 - b^2}$. Следовательно, площадь прямоугольника можно выразить через одну переменную b:

$$S(b) = 4b\sqrt{R^2 - b^2},\ 0 < b < R.$$

Найдем наибольшее значение функции $S(b)$ на интервале $(0, R)$.

$$S'(b) = 4\sqrt{R^2 - b^2} - \frac{4b^2}{\sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{4(R^2 - 2b^2)}{\sqrt{R^2 - b^2}}.$$

Тогда при $b = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ производная функции $S(b)$ обращается в нуль, кроме того, точка $b = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ является точкой максимума функции. Следовательно, наибольшее значение на интервале $(0, R)$ функция $S(b)$ принимает при $b = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. В этом случае $a = \sqrt{R^2 - b^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Значит прямоугольник, вписанный в окружность, имеет наибольшую площадь, если он является квадратом со стороной $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Площадь этого квадрата равна $\frac{R^2}{2}$.

II. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 2.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие первообразной и неопределённого интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b).

***Определение* 1.** *Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если функция $F(x)$ дифференцируема на этом интервале и*

$$F'(x) = f(x)$$

для всех $x \in (a, b)$.

Примеры.

а) Функция $F(x) = \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$ на всей числовой прямой, так как в любой точке

$$F'(x) = (\cos x)' = \sin x.$$

б) Функция $F(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ является первообразной для функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1, 1)$.

Очевидно, что если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной дляфункции $f(x)$ на интервале (a, b).

***Теорема* 1**. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то всюду на этом интервале*

$$F_1(x) = F_2(x) + C. \qquad (1)$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и докажем что $\Phi(x) = C$.

Действительно, так как $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируемые на интервале (a, b) функции, то и функция $\Phi(x)$ – дифференцируема на этом интервале и $\Phi'(x) = (F_1(x))' - (F_2(x))' = f'(x) - f'(x) = 0$, следовательно, $\Phi(x) = C$ (теорема 1, § 1.4). Значит,

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

□

Следствие. *Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$.*

Замечание. Легко видеть, что если функция $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x) = d(F(x) + C)$, т.е. для того, чтобы внести функцию под знак дифференциала, необходимо найти её первообразную.

Определение 2. *Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b), называется* ***неопределённым интегралом*** *от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx.$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (2)$$

2. Основные свойства неопределённого интеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$

Доказательство.

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Так как $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \qquad \square$$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$

Доказательство.

По определению 2, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Следовательно,

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)\,dx = f(x)\,dx. \qquad \square$$

3. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для функции $g(x)$, следовательно, $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$.

Так как $(F(x) \pm G(x))' = (F(x))' \pm (G(x))' = f(x) \pm g(x)$, то функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной для функции $f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = F(x) \pm G(x) + C =$$
$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,$$

где $C_1 \pm C_2 = C$. $\square$

Аналогично доказывается следующее свойство:

4. $\int A f(x)dx = A \int f(x)dx.$

3. Таблица основных неопределенных интегралов

Из формулы (2) и таблицы производных основных элементарных функций получим следующую таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\int 0\cdot dx = C.$
2. $\int 1\cdot dx = x + C.$
3. $\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1).$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0).$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z\right).$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ $(x \neq \pi n,\ \ n \in Z).$
9. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$

в частности, $\int e^x\, dx = e^x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$

или более общий случай: $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$ $(-1 < x < 1).$

или $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C. \end{cases}$ $(-a < x < a).$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right| + C,$ $\alpha > 0$

(в случае знака «–», $|x| > \sqrt{\alpha}$).

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C$ $(x \neq a).$

К этим формулам можно присоединить и соответствующие формулы для гиперболических функций.

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

15. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \ (x \neq 0).$

***Замечание* 1.** Формул, аналогичных формулам 12 и 13, в таблице производных нет, но они легко доказываются. Для этого достаточно убедиться, что производные выражений, стоящих в правых частях этих равенств равны подынтегральным функциям.

Пример 1. Используя свойства и таблицу неопределенных интегралов, найти следующие интегралы:

а) $\int \left(4x^3 + \dfrac{2}{\sqrt{x^3}} + 3(x+1)^2\right)dx;$

б) $\int \cos^2 \dfrac{x}{2}\, dx.$

Решение.

а) Используя свойства 3 и 4, а также формулы 2 и 3 из таблицы интегралов, найдем интеграл

$$\int \left(4x^3 + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 3(x+1)^2\right)dx = 4\int x^3\, dx + 2\int x^{-\frac{3}{2}}\, dx + 3\int (x^2 + 2x + 1)\, dx =$$

$$= 4\int x^3\, dx + 2\int x^{-\frac{3}{2}}\, dx + 3\int x^2\, dx + 6\int x\, dx + 3\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + 2(-2)x^{-\frac{1}{2}} + 3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^4 - \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3 + 3x^2 + 3x + C.$$

б) Воспользуемся формулой $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cos x + 1}{2}$, которая называется формулой понижения степени, и применим свойства 3 и 4 неопределенных интегралов, тогда

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{\cos x + 1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos x\, dx + \int dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x + x) + C = \frac{\sin x + x}{2} + C.$$

***Замечание* 2.** Производная любой элементарной функции является элементарной функцией. Однако интегралы от некоторых элементарных функций не являются элементарными функциями. Например, приведенные ниже интегралы являются неэлементарными функциями:

1. $\int e^{-x^2}\,dx$;

2. $\int \cos x^2\,dx$;

3. $\int \sin x^2\,dx$;

4. $\int \frac{dx}{\ln x}$;

5. $\int \frac{\cos x\,dx}{x}$;

6. $\int \frac{\sin x\,dx}{x}$.

Каждый из указанных интегралов – есть функция не являющаяся элементарной. Эти функции наряду с элементарными широко используются в различных разделах физики, теории вероятностей, статистике.

4. Интегрирование заменой переменной (метод подстановки)

Метод замены переменной – один из основных методов нахождения неопределенных интегралов.

Теорема 2. *Пусть функция* $t=\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на интервале* X *и множеством значений этой функции является интервал* T. *Пусть* $y=f(t)$ *определена на интервале* T, *тогда, если для* $f(t)$ *на этом интервале существует первообразная* $F(t)$, *то функция* $F(\varphi(x))$ *является первообразной для функции* $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ *на интервале* X *и выполняется равенство*

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C. \qquad (3)$$

Доказательство.

Найдём производную функции $F(\varphi(x))$, по правилу дифференцирования сложной функции

$$F(\varphi(x))' = F'(t)\cdot\varphi'(x) = f(t)\varphi(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),$$

следовательно, функция $F(\varphi(x))$ является одной из первообразных функции $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ на интервале X и выполняется равенство (3).□

***Замечание* 1.** На практике метод замены переменной используется следующим образом: пусть $\varphi(x)=t$, значит $\varphi'(x)\,dx = d(\varphi(x)) = dt$. Тогда

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Нахождение интегралов с помощью формулы (3) называется **методом подстановки** или **интегрированием с помощью замены переменной.**

Пример 1. Найти интеграл $\int \sin x\cos^3 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin x\cos^3 x\,dx = \int \sin x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = (\sin x)'dx = \\ = \cos x dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \int t(1-t^2)dt = \int tdt - \int t^3\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{\sin^4 t}{4} + C.$$

***Замечание* 2.** В простых случаях можно тождественно преобразовать подынтегральное выражение и выделить дифференциал новой переменной, внеся один из множителей подынтегрального выражения под знак дифференциала.

Учитывая, что $\varphi'(x)\,dx = d(\varphi(x)) = dt$, получим

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d(\varphi(x)) = |\varphi(x) = t| =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

При этом новую переменную t можно не вводить, а сразу писать

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Такой способ нахождения неопределенных интегралов называется **методом внесения под знак дифференциала.**

Пример 2. Найти интегралы:

$а)\ \int \frac{xdx}{x^2 + a^2}$;

$б)\ \int \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение.

$$а)\ \int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \int \frac{d\frac{x^2}{2}}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C.$$

При нахождении этого интеграла использовались свойства дифференциалов функций: $d(f(x) \pm C) = d(f(x))$, $d(Cf(x)) = Cd(f(x))$.

$$б)\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

***Замечание* 3.** Часто встречаются случай, когда сложная функции имеет вид $f(ax + b)$. Тогда

$$\int f(ax+b)\,dx = \left|\begin{matrix} t = ax + b \\ dt = adx \end{matrix}\right| = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Таким образом, справедлива формула

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (4)$$

Пример 3. Найти интегралы *а*) $\int \cos(2x+1)\,dx$, *б*) $\int e^{1-5x}\,dx$,

Решение.

Воспользуемся формулой (4).

а) $\int \cos(2x+1)\,dx = \dfrac{1}{2}\sin(2x+1)+C$;

б) $\int e^{1-5x}\,dx = -\dfrac{1}{5}e^{1-5x}+C.$

***Замечание* 4.** Часто при нахождении интеграла $\int f(x)\,dx$ целесообразно сделать подстановку $x=\varphi(t)$, тогда

$$\int f(x)\,dx = \left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \qquad (5)$$

где $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$.

Пример 4. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Решение.

Учитывая, что функция $x=a\sin t$ монотонна на интервале $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ и имеет на этом интервале обратную функцию $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$, получим

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=a\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ t=\arcsin\frac{x}{a} \\ dx=a\cos t\,dt \end{matrix}\right| = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,(a\cos t)\,dt =$$

$$= a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{2}\,\frac{1}{2}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}2\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}, \\ \cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}. \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\,\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Значит,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C. \qquad (6)$$

Аналогично, используя подстановку $x = \sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\,t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, можно найти

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C. \qquad (7)$$

4. Интегрирование по частям

Теорема 4. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале X, кроме того, на данном интервале существует первообразная для функции $u'(x)\cdot v(x)$. Тогда на интервале X существует первообразная и для функции $u(x)\cdot v'(x)$ и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (8)$$

Доказательство. Найдем производную функции $u(x)v(x)$:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Умножим полученное равенство на dx и проинтегрируем:

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int (u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x))\, dx.$$

Получим

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)\cdot v(x))\, dx + \int (u(x)\cdot v'(x))\, dx$$

или

$$\int (u(x)\cdot v'(x))\, dx = u(x)v(x) - \int (u'(x)\cdot v(x))\, dx. \ \square$$

Замечание. Обозначим $u(x) = u$, $v'(x)\, dx = dv(x) = dv$, $u'(x)\, dx = du(x) = du$. Тогда формула (8) примет вид

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (8')$$

Формулы (8) и (8′) называются формулами **интегрирования по частям**.

Формула интегрирования по частям имеет более ограниченное применение, чем метод подстановки. Но есть целые классы интегралов, которые находятся с помощью этого метода. Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях.

1. Подынтегральная функция содержит в качестве множителя функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$. Если в качестве $u(x)$ выбрать эти функции, то подынтегральное выражение vdu в новом интеграле обычно получается проще исходного.

2. Подынтегральная функция имеет вид $P(x)e^{\alpha x}$, $P(x)\sin\alpha x$, $P(x)\cos\alpha x$, где $P(x)$ – многочлен относительно переменной x. В этом случае в качестве $u(x)$ следует выбрать $P(x)$.

3. Подынтегральная функция имеет вид $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. После двукратного интегрирования по частям получается исходный интеграл с некоторым коэффициентом. Полученное равенство является линейным алгебраическим уравнением относительно исходного интеграла.

Пример 5. Найти интеграл $\int x\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int x\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = u,\ du = \dfrac{1}{x}dx, \\ xdx = dv,\quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ (α – const, β– const).

Решение.

Применим формулу (8′)

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{\alpha x}, & du = \alpha e^{\alpha x}, \\ dv = \sin\beta x\,dx, & v = -\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{\alpha x}, & du = \alpha e^{\alpha x}, \\ dv = \cos\beta x\,dx, & v = \dfrac{1}{\beta}\sin\beta x \end{array}\right|$$

$$=$$

$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Таким образом, после двукратного интегрирования по частям, мы получили уравнение, в котором в качестве неизвестной величины можно рассматривать интеграл $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$. Из этого уравнения находим

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x + C.$$

Замечание. Методом интегрирования по частям можно найти и интегралы (6) и (7).

§ 2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей

Рассмотрим рациональную функцию $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m относительно переменной x.

***Теорема* 1.** *Пусть* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь* ($n < m$), и *разложение многочлена* $Q_m(x)$ *на множители имеет вид*

$$Q_m(x) = (x - a)^{\alpha} \ldots (x - b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\delta} \ldots (x^2 + rx + s)^{\gamma},$$

где $a, \ldots, b, p, q, \ldots, r, s$ *– действительные числа,* $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \ldots$ *– натуральные числа,* $x^2 + p_1x + q_1, \ldots, x^2 + p_2x + q_2$ *– квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней.*

Тогда дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *представима виде суммы простейших дробей*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{M_{\delta}x + N_{\delta}}{(x^2+px+q)^{\delta}} +$$

$$+ \frac{M_{\delta-1}x + N_{\delta-1}}{(x^2+px+q)^{\delta-1}} + \ldots + \frac{M_1x + N_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{C_{\gamma}x + D_{\gamma}}{(x^2+rx+s)^{\gamma}} +$$

$$+ \frac{C_{\gamma-1}x + D_{\gamma-1}}{(x^2+rx+s)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{C_1x + D_1}{x^2+rx+s}, \qquad (1)$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i\ C_i, D_i$ *– действительные числа.*

Дроби, входящие в правую часть (1), называются **простейшими,** коэффициенты $A_i, B_i, M_i, N_i, C_i, D_i$ в знаменателях этих дробей являются неизвестными и называются **неопределенными коэффициентами**. Для их нахождения используют несколько методов.

Метод неопределенных коэффициентов. Чтобы определить коэффициенты A_i, B_i, M_i, N_i, дроби, стоящие в правой части равенства (1), приводят к общему знаменателю. После этого сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в числителе полученной дроби и в многочлене $P_n(x)$.

Рассмотрим этот метод на конкретном примере.

Пример 1. Разложить на сумму простейших дробей дробь

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Решение.

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней и на множители не раскладывается, тогда по теореме 1, записываем дробь в виде

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}. \quad (2)$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, M, N приведем к общему знаменателю сумму дробей, стоящих в правой части равенства (2)

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$\frac{A_1(x-1)(x^2+x+1)+A_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{A_1(x^3-1)+A_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{x^3(A_1+M)+x^2(A_2-2M+N)+x(A_2+M-2N)+(-A_1+A_2+N)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

В дробях, стоящих в левой и правой частях полученного равенства, равны знаменатели, а, следовательно, равны и числители

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 = x^3(A_1 + M) + x^2(A_2 - 2M + N) + x(A_2 + M - 2N) +$$
$$+(-A_1 + A_2 + N)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 + M = 2, \\ A_2 - 2M + N = 4, \\ A_2 + M - 2N = 1, \\ -A_1 + A_2 + N = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $M = 0$, $N = 1$. Тогда

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Замечание. Метод неопределенных коэффициентов всегда приводит к цели, но он довольно громоздкий. Поэтому, когда это возможно, коэффициенты в разложении находятся другим, более простым способом.

Метод вычеркивания. Пусть знаменатель $Q_m(x)$ дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ имеет действительный корень a кратности α, т.е. $Q_m(x)$ можно записать в виде $Q_m(x) = (x-a)^{\alpha}\varphi(x)$. Тогда данному корню в разложении (1) дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ соответствует цепочка простых дробей

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a_1}.$$

Для отыскания коэффициента A_α в этом разложении, надо в знаменателе исходной дроби $\dfrac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha\varphi(x)}$ вычеркнуть $(x-a)^\alpha$ и в оставшейся дроби положить $x = a$, т.е.

$$A_\alpha = \frac{P_n(a)}{\varphi(a)}. \tag{3}$$

Формула (3) получится, если умножить левую и правую части равенства (1) на $(x-a)^\alpha$ и в получившемся равенстве положить $x = a$.

Метод вычеркивания особенно эффективен, если

$$Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m).$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m},$$

где коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть вычислены методом вычеркивания.

Пример 2. Найти разложение дроби $\dfrac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$ на сумму простейших дробей.

Решение.

Согласно теореме 1, имеем

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Для отыскания A вычеркнем в знаменателе исходной дроби множитель x и в полученное выражение подставим $x = 0$. Тогда

$$A = \frac{0+1}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим $B = -2$, $C = \dfrac{3}{2}$.

Следовательно,

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{2(x-2)}.$$

Замечание. В случае, если дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является неправильной ($n > m$), то ее можно представить в виде $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ ($k < m$), или, как говорят, выделить целую часть $P_{n-m}(x)$ ($P_{n-m}(x)$ – многочлен степени $n-m$).

2. Интегрирование простейших рациональных дробей

Любую неправильную рациональную дробь можно свести к сумме многочлена и правильной рациональной дроби, а правильная рациональная дробь раскладывается на сумму простейших дробей следующих четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}.$$

(Здесь m = 2, 3, …, n = 2, 3, …; A, M, N, b, p, и q – некоторые действительные числа, $p^2 - 4q < 0$).

Рассмотрим интегралы от этих дробей.

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} = \left|\text{по формуле } 4\right| = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-n)}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

Рассмотрим интегралы от дробей вида 3). Для нахождения таких интегралов, в знаменателе дроби выделим полный квадрат: $x^2 + px + q = \;= \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \;+ \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)$ и сделаем подстановку $t = x + \dfrac{p}{2}$. Тогда $x = t - \dfrac{p}{2}$, $dx = dt$. Обозначим $\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}} = a$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\,dx =$$

$$\int \frac{M(t-p/2)+N}{t^2+(q-p^2/4)}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}\,dt + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Замечание. Таким же образом можно находить и интеграл $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ в случае, если выполняется неравенство, $p^2-4q>0$, но тогда в результате выделения полного квадрата и подстановки $t = x + \frac{p}{2}$ этот интеграл сведется к интегралу вида $\int \frac{dt}{t^2-a^2} =$ $= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right| + C$, где $a = \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Прежде чем находить интеграл от дроби вида 4) рассмотрим интеграл $K_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n \ge 2)$ и выведем рекуррентную формулу, позволяющую свести нахождение интеграла K_{n+1} к нахождению интеграла K_n.

$$K_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, & du = -n\frac{2x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx - 2n\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nK_n - 2na^2K_{n+1}.$$

Из полученного равенства выражаем K_{n+1}

$$2na^2K_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + K_n(2n-1),$$

$$K_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}K_n \quad (n \ge 1). \qquad (4)$$

Найдем интеграл от дроби вида 4). Выделим полный квадрат в знаменателе дроби и воспользуемся обозначениями $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^m}dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Найдем полученные интегралы $I_m = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}$ и $K_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$.

$$I_m = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}.$$

Для нахождения интеграла K_m воспользуемся формулой (4), где $n = m-1$,

$$K_m = \frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2}K_{m-1},$$

и табличным интегралом $K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$. Зная, чему равен интеграл K_1, полагая в формуле $m = 2$, найдем интеграл K_2, затем K_3, и так мы можем вычислить интеграл K_m для любого m.

Пример 3. Найти следующие интегралы:

а) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$;

б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

а) Для нахождения интеграла $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$ выделим полный квадрат в знаменателе дроби

$$x^2+x+1 = x^2+2\frac{1}{2}x+1 = x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

и сделаем подстановку $x + \frac{1}{2} = t$, тогда $x = t - \frac{1}{2}$, $dx = dt$. Получим

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}+1\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = I_1 + \frac{1}{2} I_2.$$

Интеграл I_1 находится аналогично интегралу *а*) в примере 2, § 2.1, следовательно, $\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + C_1$.

Интеграл $I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C_2$.

Тогда, учитывая, что $t = x + \frac{1}{2}$, получим

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $C = C_1 + C_2$.

б) Для нахождения интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ используем формулу (4), где $n = 1$, $a = 1$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Рассмотрим примеры нахождения интегралов от рациональных функций.

Пример 4. Найти следующие интегралы:

а) $\int \dfrac{2x^4-7x^3+7x^2-x+1}{x^3-3x^2+2x}\,dx;$

б) $\int \dfrac{3x^4+2x^3+2x^2+3x-3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$

Решение.

а) Дробь $\dfrac{2x^4-7x^3+7x^2-x+1}{x^3-3x^2+2x}$ является неправильной. Выделим целую часть этой дроби посредством деления числителя на знаменатель «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,2x^4-7x^3+7x^2-x+1 & x^3-3x^2+2x \\ \cline{2-2}
\quad 2x^4-6x^3+4x^2 & 2x-1 \\ \cline{1-1}
\_\,-x^3+3x^2-x & \\
\quad -x^3+3x^2-2x & \\ \cline{1-1}
\text{остаток}\qquad\qquad x+1 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\frac{2x^4-7x^3+7x^2-x+1}{x^3-3x^2+2x}=2x-1+\frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}=2x-1+\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}.$$

$$\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-x+1}{x^3-3x^2+2x}\,dx=\int(2x-1)\,dx+\int\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}\,dx.$$

Дробь, стоящая под знаком второго интеграла – правильная, следовательно, по теореме 1, представима в виде суммы простых дробей (см. пример 2), значит

$$\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-x+1}{x^3-3x^2+2x}\,dx=\int(2x-1)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=x^2-x+\frac{1}{2}\ln x-2\ln(x-1)+\frac{3}{2}\ln(x-2)+C.$$

б) Рассмотрим интеграл $\int \dfrac{3x^4+2x^3+2x^2+3x-3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$

Так как квадратный трехчлен x^2+1 не имеет действительных корней, то, по теореме 1, разложение подынтегральной дроби на простые дроби имеет вид

$$\frac{3x^4+2x^3+2x^2+3x-3}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Правую часть равенства приводим к общему знаменателю и приравниваем числители полученных дробей.

$$3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = x^4(A + M_1) + x^3(-2M_1 + N_1) +$$
$$+ x^2(2A + M_1 - 2N_1 + M_2) + x(-2M_1 + N_1 - 2M_2 + N_2) + (A - 2N_1 - 2N_2)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A + M_1 = 3, \\ -2M_1 + N_1 = 2, \\ 2A + M_1 - 2N_1 + M_2 = 2, \\ -2M_1 + N_1 - 2M_2 + N_2 = 3, \\ A - 2N_1 - 2N_2 = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $A = 3$, $M_1 = 0$, $N_1 = 2$, $M_2 = 0$, $N_2 = 1$. Следовательно,

$$\frac{3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 3}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Учитывая результаты примера 3 *б*), получим

$$\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = 3\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= 3\ln(x-2) + 2\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= 3\ln(x-2) + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 2.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Интегрирование тригонометрических выражений

Будем обозначать символом $R(x, y)$ рациональную функцию от двух аргументов x и y (т.е. выражение вида $\frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$, где $P_n(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ – многочлены степеней n и m от x и y).

Рассмотрим $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$. Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$. Действительно, так как

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \ \ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \tag{1}$$

то

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Интеграл, стоящий в правой части данного равенства является интегралом от рациональной дроби.

Подстановка $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ (a и b – некоторые положительные действительные числа).

Решение.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$. Учитывая формулы (1), получим

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \int \frac{1}{a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{a(1-t^2)+2bt} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{at^2 - 2bt - a} = -2\int \frac{dt}{a\left(t^2 - 2\frac{b}{a}t - 1\right)} = -\frac{2}{a}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2+a^2}{a^2}}.$$

Обозначим: $u = t - \frac{b}{a}$, $\alpha^2 = \frac{b^2+a^2}{a^2}$. Получим интеграл

$$\frac{2}{a}\int \frac{dt}{\alpha^2 - u^2} = \frac{2}{a}\,\frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{\alpha+u}{\alpha-u}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2+a^2} + a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - b}{\sqrt{b^2+a^2} - a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + b}\right| + C.$$

С помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ интеграл от любой функции вида $R(\cos x,\ \sin x)$ сводится к интегралу от рациональной функции, но часто такая подстановка приводит к громоздким вычислениям, поэтому для некоторых интегралов удобнее применять другие подстановки.

1) Если $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то делаем подстановку $t = \cos x$ или интеграл от такой функции удобно находить внесением под знак дифференциала множителя $\sin x$;

2) Если $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, то делаем подстановку $t = \sin x$ или интеграл находится внесением под знак дифференциала множителя $\cos x$;

3) Если $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, то делаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, тогда

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$x = \operatorname{arctg} t,\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad (2)$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x+1}$;

б) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \sin 5x \cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}dx$.

Решение.

а) Подынтегральная функция $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+1}$ относится к виду 1). Поэтому сделаем подстановку $t = \cos x$, найдем $dt = -\sin x\,dx$, и учитывая, что $\sin^2 x = \ = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$, получим

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x+1} = -\int \frac{dt}{1-t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2-2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

Этот интеграл можно найти с помощью внесения под знак дифференциала функции $\sin x$, так как $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x+1} = -\int \frac{d(\cos x)}{\sin^2 x+1} = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x+1} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

б) Подынтегральная функция относится к виду 2), поэтому внесем под знак дифференциала функцию $\cos x$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \cos^2 x\,d(\sin x) = \int (1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

в) Воспользуемся формулой $\sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x)$, тогда

$$\int \sin 5x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 6x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

г) Для нахождения этого интеграла сделаем подстановку $t = \operatorname{tg} x$, тогда, по формулам (2)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt =$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 4\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

2. Интегрирование иррациональных выражений вида $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \tag{3}$$

где m – натуральное, a, b, c, d – действительные числа. Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ t^m = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{t^m d - b}{a - ct^m}. \tag{4}$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3}}$.

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию, умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt[3]{(x+1)}$, получим $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\,\dfrac{dx}{x+1}$.

Пусть $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, $x + 1 = \dfrac{2t^3}{t^3-1}$, $dx = -\dfrac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$, тогда

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = -\int t\frac{(t^3-1)}{2t^3}\,\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2} = -3\int \frac{dt}{t^3-1} =$$

$$= -3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Разложим дробь на простые дроби методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+2t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{t^2(A+M)+t(A-M+N)+(A-N)}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Приравняв числители дробей, стоящих в левой и правой частях равенства и коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+M=0, \\ A-M+N=0, \\ A-N=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A=\dfrac{1}{3}$, $M=-\dfrac{1}{3}$, $N=-\dfrac{2}{3}$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = -3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt = -\ln|t-1| + \int \frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \left|\begin{matrix} t+\dfrac{1}{2}=u \\ dt=du \end{matrix}\right| =$$

$$= -\ln|t-1| + \int \frac{u\,du}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\frac{3}{4}\right| +$$

$$+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left|u^2+\frac{3}{4}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(t^2+t+1) + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx, \qquad (5)$$

где $\dfrac{p_i}{q_i}$ – рациональные дроби, a, b, c, d – действительные числа. Интеграл (5) сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $t^m = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где m – наименьший общий знаменатель дробей $\dfrac{p_i}{q_i}$.

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Решение.

Этот интеграл является интегралом типа (5). Сделаем подстановку $t^6 = x$, тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5dt$.

$$\int \frac{dx}{x(2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5dt}{t^6(2t^3+t^2)} = 6\int \frac{dt}{t^3(2t+1)} =$$

$$= 24\int \frac{dt}{t} - 12\int \frac{dt}{t^2} + 6\int \frac{dt}{t^3} - 48\int \frac{dt}{2t+1} =$$

$$= 24\ln|t| + \frac{12}{t} - \frac{3}{t^2} - 24\ln|2t+1| + C =$$

$$= 24\ln\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[6]{x+1}}\right) + \frac{12}{\sqrt[6]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$$

3. Интегрирование биноминальных дифференциалов

Биноминальным дифференциалом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где a и b – любые постоянные, а показатели степеней m, n и p – некоторые рациональные числа. Изучим вопрос об интегрируемости в элементарных функциях биноминальных дифференциалов. Рассмотрим случаи, при которых возможно интегралы от биноминальных дифференциалов свести к интегралам от рациональных функций.

1. Пусть p – целое число, $m = \frac{r_1}{s_1}$, $n = \frac{r_2}{s_2}$ – рациональные числа. Тогда интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$ рационализируется с помощью подстановки $t = \sqrt[s]{x}$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1}$ и $\frac{r_2}{s_2}$.

2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ – целое число. В этом случае сделаем подстановку $z = x^n$, тогда $x = z^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$. Получим

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a + bz)^p\,dz = \frac{1}{n}\int z^q(a + bz)^p\,dz.$$

Так как $q = \frac{m+1}{n} - 1$ – целое, $p = \frac{r}{s}$ – рациональное числа, то интеграл $\int z^q(a + bz)^p\,dz$ приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $t = \sqrt[s]{a+bz}$.

3. Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, $p = \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку $z = x^n$ и получим интеграл

$$\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a + bz)^p\,dz = \int z^{\frac{m+1}{n}+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz.$$

Последний интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{ax^{-n}+b}.$$

Пример 4. Найти интегралы:

$а)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx;$

$б)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

Решение.

$а)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx$, это интеграл от биноминального дифференциала, где $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{m+1}{n} = 2$

$\in Z$, то имеет место случай 2. Сделаем подстановку: $x^{\frac{1}{4}} = z$,
$dx = 4z^3dz, \quad x = z^4$. Тогда

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\, dx = 4\int z(1 + z)^{\frac{1}{3}}dz = \left| \begin{array}{c} (1+z)^{\frac{1}{3}} = t, \\ z = t^3 - 1, \\ dz = 3t^2dt, \end{array} \right| =$$

$$= 12\int (t^3 - 1)t^3\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dt = 12\frac{t^7}{7} - 12\frac{t^4}{4} + C =$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4} + C.$$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1 + x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$

Здесь $m = 0$, $n = 4$, $p = -\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$, т.е. имеем случай 3).

Сделаем подстановку

$$t = \sqrt[4]{x^{-4}+1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, \quad x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}}dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

4. Интегрирование выражений содержащих квадратный трехчлен под знаком корня

В простейших случаях интеграл $\int R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ можно найти с помощью выделения полного квадрата в трехчлене $ax^2 + bx + c$. Этот метод подробно описан в п. 2, § 2.2.

Пример 5. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

Решение.

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2+x+2=x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4},$$

затем введем новую переменную $t=x+\dfrac{1}{2}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}}=\left|\begin{matrix}x+\frac{1}{2}=t,\ x=t-\frac{1}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+\frac{7}{4}}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{7}{4}}}=\frac{1}{2}\int\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{7}{4}}}=$$

$$=\sqrt{t^2+\frac{7}{4}}-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{7}{4}}\right|+C=\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+x+2}\right|+C.$$

В более сложных случаях интеграл $\int R\,(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,dx$ можно свести к интегралу от рациональной функции с помощью одной из подстановок, которые называются **подстановками Эйлера**:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\,t(x-x_1)$, или $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\,t(x-x_2)$, если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два различных действительных корня x_1 и x_2.

Пример 6. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение.

Трехчлен x^2+x+1 не имеет действительных корней. Здесь можно сделать подстановки 1) и 2). Пусть $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$, тогда $t=\sqrt{x^2+x+1}+x$. Возведем в квадрат обе части последнего равенства: $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$ или $x+1=t^2-2tx$, значит

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ \ dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt.$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right)dt.$$

Неопределенные коэффициенты находятся аналогично приведенным выше примерам: $A = 2$, $B = -3$, $C = -3$. Подставим найденные коэффициенты в интеграл сумму трех интегралов

$$2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{1+2t} - 3\int \frac{dt}{(1+2t)^2} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| +$$

$$+ \frac{3}{2(1+2t)} + C = 2\ln|\sqrt{x^2+x+1} + x| - \frac{3}{2}\ln|1 + 2\sqrt{x^2+x+1}$$

$$+ 2x| +$$

$$+ \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C.$$

Замечание. Подстановки Эйлера всегда приводят к интегралу от рациональной функции, но часто в результате получается громоздкое выражение, поэтому, если возможно, пользуются другими способами интегрирования, например, методом выделения полного квадрата (пример 5). В частных случаях удобно также **пользоваться тригонометрическими подстановками** (см. пример 4, п.4, §2.1). С помощью метода выделения полного квадрата интеграл вида $R(x, \sqrt{px^2+qx+r})$ сводится к одному из интегралов $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$, $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$, $R(x, \sqrt{x^2+a^2})$. Если в полученном интеграле подынтегральная функция имеет вид:

1) $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$, тогда $x = a\sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ или $x = a\cos t$ $(0 \le t \le \pi)$;

2) $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$, тогда $x = \dfrac{a}{\cos t}$ $(0 \le t < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < t \le \pi)$ или $x = \dfrac{a}{\sin t}$ $(-\frac{\pi}{2} \le t < 0, 0 < t \le \frac{\pi}{2})$;

3) $R(x, \sqrt{x^2+a^2})$, тогда $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$.

III. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

§ 3.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции

Пусть $y = f(x)$ – положительная и непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим фигуру $aABb$ (рис. 1), ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$. Такая фигура называется **криволинейной трапецией.** Найдем площадь этой фигуры.

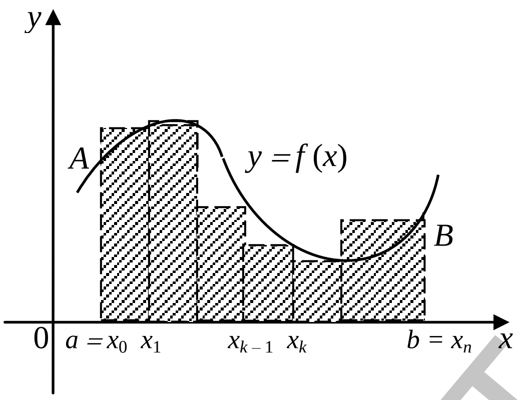


Рис. 1.

Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. Построим прямоугольники, основанием которых служат отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, а высотой – значение функции $f(x)$ в одной из точек этих отрезков, например в точке x_k. Таким образом, вместо криволинейной трапеции будем рассматривать ступенчатую фигуру, составленную из таких прямоугольников.

Площадь P криволинейной трапеции приблизительно равна площади построенной ступенчатой фигуры, а та в свою очередь равна сумме площадей всех прямоугольников из которых она состоит, т.е.

$$P \approx S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k, \qquad (1)$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Погрешность этого вычисления убывает при уменьшении длин отрезков разбиения (при этом число слагаемых в сумме (1) будет неограниченно возрастать). Точное значение площади P можно найти перейдя в равенстве (1) к пределу при $\Delta \to 0$ (Δ – длина наибольшего из отрезков разбиения)

$$P = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Замечание. Для обозначения суммы вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ (вернее сказать – предельного значения этой суммы) Лейбниц ввел символ $\int f(x)\,dx$. Позднее стали писать $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ стали называть определенным интегралом.

2. Интегральные суммы. Понятие определенного интеграла

Перейдем к введению точного понятия определенного интеграла. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем данный отрезок произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. На каждом из отрезков разбиения выберем произвольным образом точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Составим сумму:

$$I(\xi_k; x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,, \tag{3}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Сумма (3) называется ***интегральной суммой.*** Она зависит от выбора точек ξ_k и способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части.

Обозначим через Δ длину наибольшего из отрезков данного разбиения. Будем строить различные интегральные суммы, разбивая отрезок $[a, b]$, так чтобы первому разбиению соответствовало $\Delta = \Delta_1$, второму – $\Delta = \Delta_2$, и т.д. При этом выполнялось бы условие $\Delta_n < \Delta_{n-1}$. Построим последовательность $\{\Delta_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n = 0$.

Определение* 1.** Число I называется ***пределом интегральных сумм $I(\xi_k; x_k)$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$, при котором $\Delta < \delta$, выполняется неравенство

$$|I(\xi_k; x_k) - I| < \varepsilon$$

независимо от выбора точек ξ_k.

Обозначим

$$I = \lim_{\Delta\to 0} I(\xi_k; x_k). \tag{4}$$

Определение* 2.** Предел (4), если он существует и конечен, называется ***определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

В этом случае функция $y = f(x)$ называется ***интегрируемой*** функцией.

Часто определенный интеграл (5) называется интегралом Римана, а функция $f(x)$ – интегрируемой по Риману.

***Теорема* 1**. *Неограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция не интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство.

Пусть функция $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда при всяком фиксированном разбиении T отрезка $[a, b]$, найдется такой частичный отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором функция также будет неограниченна. Следовательно, для любого сколь угодно большого числа A можно выбрать точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, такую, что $|f(\xi_k)| > A$. Значит, интегральную сумму $I(\xi_k; x_k)$, подбирая точки ξ_k, можно сделать тоже сколь угодно большой по абсолютной величине. Следовательно, интегральные суммы, отвечающие любому разбиению T не ограниченны, и поэтому не существует конечного предела интегральных сумм. □

Следствие. *Для того, чтобы функция была интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, *необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке.*

3. Суммы Дарбу

Введем в рассмотрение наряду с интегральными суммами сходные с ними, но более простые суммы, которые получили название сумм Дарбу.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем данный отрезок произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть m_k и M_k, соответственно, точная нижняя и точная верхняя границы функции $f(x)$ на k-том отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$. Составим следующие суммы:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k ; \qquad S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k . \tag{6}$$

Суммы (6) называются ***нижней и верхней суммами Дарбу***. Суммы s и S зависят только от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и для каждого фиксированного разбиения существует только одна верхняя и одна нижняя суммы Дарбу.

Так как на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ для любой точки ξ_k данного отрезка, по определению верхней и нижней граней функции, $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, то для всех интегральных сумм данного разбиения выполняется неравенство

$$s \le I(\xi_k; x_k) \le S . \tag{7}$$

Кроме того, легко доказать, что суммы s и S при заданном разбиении являются точной верхней и точной нижней границами интегральных сумм этого разбиения.

Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции суммы s и S можно рассматривать, как интегральные суммы.

Свойства сумм Дарбу.

1. *Если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то сумма s может только увеличиться, а сумма S – только уменьшиться.*

Доказательство.

Добавим к существующему разбиению еще одну точку $x' \in [x_{k-1}, x_k]$. Пусть S – верхняя сумма Дарбу старого разбиения:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_k \Delta x_k + \ldots + M_n \Delta x_n .$$

Пусть S' – верхняя сумма Дарбу нового разбиения:

$$S' = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_k^{'}(x' - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - x') + \ldots + M_n \Delta x_n .$$

Видим, что сумма S отличается от суммы S' только слагаемым $M_k \Delta x_k$, которое в сумме S'заменяется слагаемым $M_k^{'}(x' - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - x')$. Поскольку $M_k \geq M_k^{'}$ и $M_k \geq M_k^{''}$, то

$$M_k^{'}(x' - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - x') \leq M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') \leq M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Следовательно, $S' \leq S$.

Аналогично доказывается, что если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то $s' \geq s$. □

2. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому разбиению промежутка.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части и составим для этого разбиения суммы Дарбу s_1 и S_1. Рассмотрим теперь другое, не связанное с первым, разбиение отрезка $[a, b]$, которому соответствуют суммы s_2 и S_2. Докажем, что $s_1 \leq S_2$.

Объединим точки деления первого и второго разбиения и получим третье, вспомогательное, разбиение, которому будут отвечать суммы s_3 и S_3. На основании свойства 1, имеем $s_1 \leq s_3$. Сопоставив второе и третье разбиение, получим: $S_3 \leq S_2$. Кроме того, $s_3 \leq S_3$.

Следовательно, $s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$, что и требовалось доказать. □

Следствие. Множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу ограничено сверху любой верхней суммой Дарбу. Значит, это множество имеет точную верхнюю грань I_* ($I_* = \sup\{s\}$). Аналогично, множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу ограничено снизу любой нижней суммой и, значит, имеет точную нижнюю грань I^*($I^* = \inf\{S\}$).

При этом, очевидно, что $I_* \leq I^*$. Значит,

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S \tag{8}$$

для любых нижних и верхних сумм Дарбу.

4. Условие существования определенного интеграла

***Теорема* 2.** (*необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла*). *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0. \qquad (9)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть для функции $f(x)$ существует интеграл (5)

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Тогда, из построения определенного интеграла, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при любом разбиении отрезка $[a, b]$, при котором $\Delta < \delta$, выполняется неравенство

$$| I(\xi_k; x_k) - I | < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad (*)$$

независимо от выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ при котором $\Delta < \delta$. Тогда для всех интегральных сумм данного разбиения выполняется неравенство (*).

С другой стороны, так как при данном разбиении сумма s является точной нижней границей множества всех интегральных сумм этого разбиения, то, по определению нижней границы множества,

1) $s \le I(\xi_k; x_k)$, где $I(\xi_k; x_k)$ – произвольная интегральная сумма рассматриваемого разбиения;

2) для любого $\varepsilon > 0$, существует такая точка ξ'_k, что

$$I(\xi'_k; x_k) - \frac{\varepsilon}{4} \le s.$$

Аналогично, для суммы S и для интегральных сумм выбранного разбиения, по определению верхней границы множества,

1) $S \ge I(\xi_k; x_k)$, где $I(\xi_k; x_k)$ – произвольная интегральная сумма рассматриваемого разбиения;

2) для любого $\varepsilon > 0$, существуют такие точки ξ''_k, что

$$I(\xi''_k, x_k) + \frac{\varepsilon}{4} \ge S.$$

Рассмотрим разность

$$|S - s| = |S - I(\xi''_k; x_k) + I(\xi''_k; x_k) - I + I - I(\xi'_k; x_k) + I(\xi'_k; x_k) - s| \le$$

$$\le |S - I(\xi''_k; x_k)| + |I(\xi''_k; x_k) - I| + |I - I(\xi'_k; x_k)| + |I(\xi'_k; x_k) - s| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Следовательно, по определению предела,

$$\lim_{\Delta\to 0} (S - s) = 0.$$

Достаточность. Пусть выполняется условие (9). Обозначим: $I_* = \sup \{s\}$, $I^* = \inf \{S\}$. Так как для любого разбиения отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство (8), и, согласно (9), для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при любом разбиении T для которого $\Delta < \delta$, верхняя и нижняя суммы Дарбу данного разбиения удовлетворяют неравенству $S - s < \varepsilon$, то $I_* - I^* < \varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $I_* = I^* = I$ и $s \le I \le S$.

Докажем теперь, что I является пределом интегральных сумм функции $f(x)$. Для этого рассмотрим произвольную интегральную сумму $I(\xi_k, x_k)$, отвечающую разбиению T. На основании (7), для верхней и нижней сумм Дарбу данного разбиения выполняется неравенство $s \le I(\xi_k, x_k) \le S$.

Тогда, для выбранного нами ε, при разбиении T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $|I - I(\xi_k; x_k)| \le S - s < \varepsilon$. Следовательно,

$$I = \lim_{\Delta\to 0} I(\xi_k, x_k),$$

т.е. существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx = I$. □

***Замечание* 1.** Если обозначить через $\omega_k = M_k - m_k$ – колебание функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k .$$

Тогда условие существования определенного интеграла может быть записано следующим образом:

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0. \qquad (10)$$

***Замечание* 2.** Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\Delta\to 0} S = \lim_{\Delta\to 0} s = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (11)$$

5. Классы интегрируемых функций

Рассмотрим, в каком случае функция $f(x)$ будет интегрируема на отрезке $[a, b]$.

***Теорема* 3.** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$.

Тогда, по свойству равномерно непрерывных на отрезке функций, для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ всегда найдется такое $\delta > 0$, что, разбив отрезок $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$ длина которых $\Delta x_k < \delta$, получим, что для колебаний функции $f(x)$ на каждом частичном отрезке выполняется неравенство $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$. Из замечания 1 теоремы 2 следует, что функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

***Теорема* 4.** *Если ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $y = f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*

***Теорема* 5.** *Монотонная, ограниченная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $y = f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

Замечание. Изменение значений интегрируемой функции в конечном числе точек не отразится на величине определенного интеграла. Действительно, так как данное изменение коснется не более чем k членов суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$, то при $\Delta \to 0$ сумма по прежнему будет стремиться к нулю, значит, функция по прежнему будет интегрируема. Так как точки ξ_k при построении интегральных сумм можно выбирать так, чтобы они не совпали с точками, в которых значения функции будут изменены, то, и значение определенного интеграла останется прежним.

§ 3.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Свойства, выраженные равенствами

Рассмотрим следующие свойства определенного интеграла. Пусть $a < b$, тогда справедливы следующие равенства:

1. $\int\limits_{a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

2. $\int\limits_{a}^{b} dx = b - a.$

3. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx.$

Свойства 1, 2 и 3 следуют из построения определенного интеграла. Первую формулу можно рассматривать как распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины. Вторая формула непосредственно вытекает из построения определенного интеграла для функции $f(x) \equiv 1$ на отрезке $[a, b]$. Третья формула представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай, когда отрезок $[a, b]$ пробегается в направлении от b к a. В этом случае в интегральной сумме все разности $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ имеют отрицательный знак.

4. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на* $[a, b]$, *то и функции* $f(x) \pm g(x)$, $kg(x)$ *также интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, *и выполняются равенства*

$$а)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$б)\ \int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство.

Докажем равенство а). Разобьем отрезок $[a, b]$, произвольным образом на n частей и на каждом из частичных отрезков разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку точки ξ_k. Составим суммы

$$I_1(\xi_k; x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\,,\quad I_2(\xi_k; x_k) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k\,,$$

$$I_3(\xi_k; x_k) = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k =$$
$$= I_1(\xi_k; x_k) \pm I_2(\xi_k; x_k).$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, следовательно, существуют конечные пределы сумм I_1 и I_2 при $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta\to 0} I_1(\xi_k; x_k) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{\Delta\to 0} I_2(\xi_k; x_k) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Тогда, по свойствам пределов функций,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \lim_{\Delta\to 0} I_3(\xi_k; x_k) = \lim_{\Delta\to 0} (I_1(\xi_k; x_k) \pm I_2(\xi_k; x_k)) =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} I_1(\xi_k; x_k) \pm \lim_{\Delta\to 0} I_2(\xi_k; x_k) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается равенство *б*). □

5. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на наибольшем из промежутков* $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$. *Тогда она интегрируема и на двух других промежутках, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство.

Предположим сначала, что $a < c < b$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части так, чтобы точка c была одной из точек деления, тогда

$$\sum_a^b \omega_k \Delta x_k = \sum_a^c \omega_k \Delta x_k + \sum_c^b \omega_k \Delta x_k.$$

Так как функция $f(x)$ – интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_a^b \omega_k \Delta x_k = 0,$$

и

$$\lim_{\Delta\to 0} \left(\sum_a^c \omega_k \Delta x_k + \sum_c^b \omega_k \Delta x_k\right) = 0.$$

Слагаемые, стоящие под знаком предела, положительные, значит:

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_a^c \omega_k \Delta x_k = 0 \text{ и } \lim_{\Delta\to 0} \sum_c^b \omega_k \Delta x_k = 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$**.**

Кроме того, очевидно,

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в данном равенстве к пределу при $\Delta \to 0$, мы получим равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Пусть $a < b < c$, тогда, по только что доказанному,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

и

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается случай $a < c < b$. □

Следствие. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[c, d]$, включенном в $[a, b]$.

2. Свойства, выраженные неравенствами

Рассмотрим теперь свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.

6. *Если функция* $f(x) \geq 0$ *на отрезке* $[a, b]$ ($a < b$) *и интегрируема на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Доказательство.

Действительно, каждая интегральная сумма такой функции неотрицательна, следовательно, и предел $I = \int_a^b f(x)\,dx$ интегральных сумм также неотрицателен.

7. *Если функции* $f(x)$ *и* (x) *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$ $(a < b)$ *и на этом отрезке* $f(x) \geq g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Это свойство следует из свойства 6, так как $f(x) - g(x) \geq 0$.

8. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ $(a < b)$, *тогда и функция* $|f(x)|$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и выполняется неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство.

Докажем сначала, что функция $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим через m_k и M_k точную нижнюю и точную верхнюю границы функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, а через m_k' и M_k' точную нижнюю и точную верхнюю границы функции $|f(x)|$ на этом отрезке. Очевидно, что $M_k' - m_k' \leq M_k - m_k$, следовательно, для нижних и верхних сумм Дарбу функций $f(x)$ и $|f(x)|$ выполняется аналогичное неравенство $S' - s' \leq S - s$. Пусть для некоторого разбиения $S - s \leq \varepsilon$, тогда $S' - s' \leq S - s \leq \varepsilon$, т.е для функции $|f(x)|$ выполняется необходимое и достаточное условие интегрируемости функции и функция $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Докажем теперь, что выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, тогда, по свойству 7, $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq$ $\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, а это и означает, что $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

9. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ $(a < b)$ *и ограничена на этом отрезке, т.е. существуют такие действительные числа* m *и* M, *что*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

тогда

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

Доказательство.

Для интегральной суммы функции $f(x)$ справедливы неравенства

$$m\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \le M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k.$$

Перейдем в неравенствах к пределу при $\Delta \to 0$. Тогда, учитывая определение интеграла и свойство 2, получим

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \qquad \square$$

3. Теоремы о среднем

***Теорема* 1.** *Пусть*

1) *функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ ($a < b$),*
2) *$m \le f(x) \le M$,*
3) *функция $g(x)$ на всем промежутке не меняет знак ($g(x) \ge 0$, или $g(x) \le 0$),*

тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \le \mu \le M$, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \le \mu \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (1)$$

Доказательство.

Пусть $g(x) \ge 0$. Умножим неравенства $m \le f(x) \le M$ на $g(x)$:

$$m\,g(x) \le f(x)\cdot g(x) \le M\,g(x).$$

Из этого неравенства, на основании свойств 4 и 7 следует, что

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (2)$$

Если $g(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, то и функция $f(x)\cdot g(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, тогда из построения определенного интеграла следует, что $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$ и теорема доказана.

Пусть $g(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, тогда, по свойству 6, определенных интегралов $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Разделим неравенство (2) на данный интеграл, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M. \qquad (3)$$

Обозначим

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}. \quad (4)$$

Тогда, на основании (3), $m \le \mu \le M$ и, на основании (4),

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Аналогично доказывается теорема для $g(x) \le 0$. □

Замечание. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = \mu$. В этом случае формула (1) имеет вид

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \le f(c) \int_a^b g(x)\, dx. \quad (5)$$

Частным случаем теоремы 1 в случае $g(x) = 1$ является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, и пусть m и M – точные границы функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \le \mu \le M$, что*

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \mu\, (b - a). \quad (6)$$

В случае непрерывной функции формула (6) имеет вид

$$\int_a^b f(x)\, dx \le f(c)\, (b - a). \quad (7)$$

§ 3.3. НАХОЖДЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Интегралы с переменным верхним пределом

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим произвольную точку $x \in [a, b]$. Тогда функция $y = f(x)$ интегрируема также и на отрезке $[a, x]$, следовательно, существует определенный интеграл $\int_a^x f(t)\, dt$. Этот интеграл зависит от выбора точки x, следовательно, является функцией от переменной x:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \quad (1)$$

Функция $\Phi(x)$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

***Теорема* 1** *(теорема Барроу). Любая непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет первообразную на этом отрезке. Одной из первообразных функции* $f(x)$ *является функция* (1).

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Выберем произвольную точку x принадлежащую данному отрезку и придадим ей приращение Δx, так чтобы точка $x + \Delta x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию $\Phi(x)$, определенную формулой (1), и найдем производную этой функции

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

Применим к интегралу $\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx$ теорему о среднем для непрерывной функции

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f(\xi)\,\Delta x,$$

где точка ξ лежит между точками x и $x + \Delta x$. Очевидно, $\xi \to x$ при $\Delta x \to 0$, значит

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Это означает, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. □

Замечание. *Так как функция* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *является первообразной для функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x). \qquad (2)$$

***Теорема* 2.** *Если функция* $y = f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то интеграл с переменным верхним пределом представляет собой непрерывную на отрезке* $[a, b]$ *функцию от верхнего предела.*

Доказательство.

Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$ в произвольной точке x отрезка $[a, b]$

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

где Δx выбирается таким образом, чтобы точка $x + \Delta x$ также принадлежала отрезку $[a, b]$.

Воспользуемся теоремой о среднем для интегрируемой на отрезке $[x, x + \Delta x]$ функции, тогда

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu\,\Delta x,$$

где число μ заключено между точной нижней и точной верхней границами функции $f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Из этой формулы следует, что $\Delta\Phi(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это означает, что функция $\Phi(x)$ непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$. □

Интеграл с переменным верхним пределом используется для определения новых функций.

Первообразные для некоторых элементарных функций не является элементарными функциями. К числу таких функций относятся, например, следующие функции:

1. $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$;
2. $\int_a^x \frac{dt}{\ln t}$;
3. $\int_a^x \cos t^2\,dt$;
4. $\int_a^x \sin t^2\,dt$;
5. $\int_a^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;
6. $\int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt$;

Интеграл 1 носит название интеграла Пуассона, интегралы 3 и 4 – интегралов Френеля, интегралы 2, 5 и 6 называются интегральным логарифмом, синусом и косинусом соответственно.

2. Формула Ньютона–Лейбница

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$. Одной из первообразных этой функции будет функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда произвольная первообразная функции имеет вид $F(x) = \Phi(x) + C$, где C некоторая постоянная.

Пусть $x = a$, тогда $F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t)\,dt + C = C.$

Пусть $x = b$, тогда $F(b) = \Phi(b) + C = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(t)\,dt + F(a).$

Из этих равенств вытекает соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Эта формула называется **формулой Ньютона–Лейбница**.

Таким образом, для нахождения определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$, необходимо найти первообразную для данной функции на отрезке $[a, b]$ и разность значений первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Заметим, что разность справа в формуле (3) обычно обозначается символом $F(x)\Big|_a^b$ и формулу пишут в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Найти интеграл $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$

3. Формула замены переменной в определенном интеграле

***Теорема* 3.** *Пусть*

1) *функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;

2) *функция* $x = \varphi(t)$ *имеет непрерывную на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *производную и множество значений функции есть отрезок* $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (4)$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $y = f(x)$, тогда по формуле (3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Так как функции $F(x)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы на соответствующих отрезках, то сложная функция $F(\varphi(t))$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$. Найдем производную этой функции

$$\frac{d\,F(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, функция $F(\varphi(t))$, определенная на отрезке $[\alpha, \beta]$, является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Поэтому, согласно формуле (3),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \qquad \square$$

Формула (4) называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Замечание. Как уже отмечалось, при рассмотрении неопределенных интегралов можно применять не только подстановку $x = \varphi(t)$, но и подстановку $t = \psi(x)$.

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$; *б*) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$.

Решение.

$$а)\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} x-1=t^2, \\ x=t^2+1, \\ dx=2t\,dt, \\ 0 \le t \le 1. \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = (2t - 2\,\mathrm{arctg}\,t)\Big|_0^1 =$$

$$= 2 - 2\mathrm{arctg}\,1 = 2 - 2\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$б)\ \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,a\cos t|\,dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = a\sin t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a.$$

4. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Определенный интеграл, также как и неопределенный, можно находить методом интегрирования по частям.

Теорема 4. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$. *Тогда имеет место следующая формула* ***интегрирования по частям*** *для определенного интеграла*:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \qquad (5)$$

Доказательство.

Так как первообразной для непрерывной функции $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ является функция $u(x)v(x)$, то по формуле (3) имеем

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b .$$

Тогда, по свойству 4 определенных интегралов (п.1, § 3.2) получим формулу (5). □

Замечание. Обозначим $u(x) = u,\ v'(x)\,dx = dv(x) = dv,\ u'(x)\,dx = d\,u(x) = = du$. Тогда формула (8) примет вид

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (5')$$

Пример 2. Найти интеграл $\int_1^2 \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{dx}{x} = (x\ln x - x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2\ln 2 - 2) - (\ln 1 - 1) = 2\ln 2 - 1.$$

§ 3.4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственный интеграл первого рода

Несобственный интеграл первого рода является обобщением понятия определенного интеграла на случай бесконечного промежутка.

***Определение* 1.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на промежутке* $[a, +\infty)$ *и интегрируема на любом отрезке* $[a, R]$, *где* $R > a$. *Величина*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,dx \qquad (1)$$

называется ***несобственным интегралом первого рода*** *от функции* $f(x)$ *по промежутку* $[a, +\infty)$.

Несобственный интеграл первого рода называется **сходящимся**, если предел (1) существует и конечен. Если предел (1) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется **расходящимся**.

Пример 1. Найти несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$a)\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; $\qquad$ $b)\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение.

a) Функция $\frac{1}{1+x^2}$ интегрируема на любом конечном промежутке $[0, R]$ $(R > 0)$, причем имеем $\int\limits_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^R = \operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg} 0 =$ $= \operatorname{arctg} R$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty}\operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2}.$$

b) Рассмотрим

$$\int\limits_1^R\frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases}\left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^R, & \text{если} \quad \alpha\neq1,\\ \ln x\Big|_1^R, & \text{если} \quad \alpha=1\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha\neq1,\\ \ln R\ , & \text{если} \quad \alpha=1.\end{cases}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{R\to+\infty}\ln R = +\infty$, кроме того, при $\alpha > 1$ $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{1-\alpha} = 0$, при $\alpha < 1$ $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{1-\alpha} = +\infty$, получим, что

при $\alpha > 1$ $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_1^R\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$,

при $\alpha \le 1$ данный интеграл расходится.

Аналогично (1) определяются несобственные интегралы от функции $y = f(x)$ на промежутках $(-\infty, a]$ и $(-\infty, +\infty)$. Первый из этих интегралов определяется как предел

$$\lim_{R\to-\infty}\int\limits_R^b f(x)\,dx$$

и обозначается $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$. Второй интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется как предел

$$\lim_{\substack{R_2\to+\infty\\ R_1\to-\infty}}\int\limits_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx,$$

где R_1 и R_2 стремятся к $-\infty$ и $+\infty$ независимо друг от друга. Из данных определений следует, что если для некоторого независимого числа a сходится каждый из несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 2. Найти несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$/

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R_1 \to -\infty} \int\limits_{R_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} +$$

$$\lim_{R_2 \to +\infty} \int\limits_{0}^{R_2} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\lim_{R_1 \to -\infty} \operatorname{arctg} R_1 + \lim_{R_2 \to +\infty} \operatorname{arctg} R_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2. Несобственный интеграл второго рода

***Определение* 2.** *Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Величина*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (2)$$

*называется **несобственным интегралом второго рода** от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b)$.*

В случае существования конечного предела (2) интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**. Точка b называется **особой точкой**.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $(a, b]$ и не ограничена в окрестности точки a, то несобственным интегралом второго рода называется величина

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Пример 3. Найти, при каких значениях параметра α сходится интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение.

Подынтегральная функция $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ не ограничена при $x \to 0$. Рассмотрим

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^{1}, & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}, & \text{если} \quad \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ -\ln \varepsilon, & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha < 1$ $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \dfrac{1}{1-\alpha}$, следовательно, интеграл сходится, при $\alpha \geq 1$ $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \infty$, следовательно, данный интеграл расходится.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b]$, за исключением точки $c \in (a, b)$, и интегрируема на любых отрезках $[a, c-\varepsilon)$, $(c+\varepsilon, b]$, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяется как предел

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to +0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx.$$

Если оба интеграла в правой части существуют и конечны, то интеграл называют сходящимся и

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 4.1. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1. Понятие длины дуги кривой

Рассмотрим на плоскости кривую L, заданную параметрически

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции, причем различным значениям параметра t соответствуют различные точки (x, y) плоскости. Такую кривую называют **простой незамкнутой кривой**.

Будем считать, что точка A соответствует значению параметра $t = \alpha$, а точка B – значению параметра $t = \beta$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2, < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta.$$

Ему соответствует разбиение кривой L точками

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k, \ldots, A_n = B,$$

где $A_k = A(\varphi(t_k), \psi(t_k))$. Впишем в кривую L ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_{k-1}A_k\ldots A_n$. Периметр данной ломаной зависит от способа разбиения кривой L на части, а, следовательно, и от способа разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$. Обозначим через $p(A_k)$ периметр этой ломаной, через Δ – наибольшую из длин отрезков $[t_{k-1}, t_k]$. Будем рассматривать произвольные последовательности таких разбиений, удовлетворяющие условиям: $\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

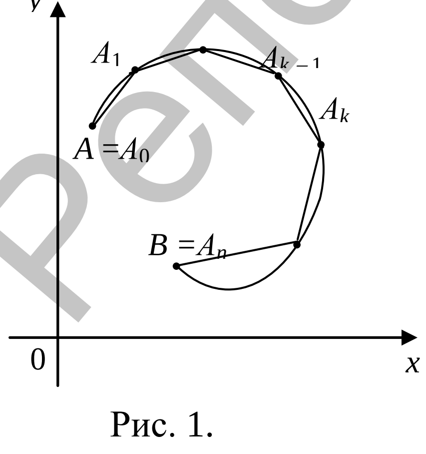


Рис. 1.

***Определение* 1.** *Число l называется **пределом длин ломаных** $p(A_k)$ при $\Delta \to 0$, если для любого действительного $\varepsilon > 0$, существует такое действительное число $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $0 \le l - p(A_k) < \varepsilon$.*

$$l = \lim_{\Delta\to 0} p(A_k). \tag{2}$$

Замечание. Содержание этого определения можно объяснить следующим образом. Рассмотрим произвольную последовательность разбиений отрезка $[\alpha, \beta]$, удовлетворяющих условиям: $\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$. Найдем периметры ломаных, соответствующих каждому из полученных разбиений, которые образуют последовательность $\{p_n(A_k)\}$,. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(A_k) = l$.

Определение 2. *Если предел* (2) *существует, то кривая L называется* ***спрямляемой***, *а число l −* ***длиной кривой*** *L.*

Важным свойством длины дуги является **аддитивность**.

Теорема 1. *Если на дуге AB взять точку C, то из спрямляемости дуги AB следует спрямляемость обеих дуг AC и CB, причем*

$$\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{CB}.$$

В случае **замкнутой кривой**, для которой точки A и B совпадают (но кратных точек все же нет, т.е. каждой отличной от $A \equiv B$ точке соответствует единственное значение параметра t) приведенное выше определение длины дуги может быть неверно. В этом случае можно построить ломаную, удовлетворяющую определению, но такую, что при стремлении длины всех ее звеньев к нулю, ее периметр также будет стремиться к нулю (рис. 2). В этом случае разобьем замкнутую кривую произвольно взятой на ней точкой C на две незамкнутые кривые, сумму длин которых (если эти кривые спрямляемы назовем длиной всей кривой.

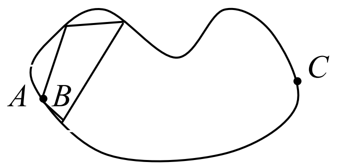


Рис. 2.

Замечание. Существуют кривые, которые не являются спрямляемыми. С примером такой кривой можно познакомиться, например, в дополнении к главе 11 [1].

2. Нахождение длины дуги кривой

Теорема 2. *Пусть кривая L − незамкнутая кривая, заданная параметрически уравнениями* (1), *причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные. Тогда кривая L − спрямляема, а ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (3)$$

Замечание 1. Формула (3) распространяется и на случай замкнутой кривой. В этом случае возьмем произвольное значение параметра $t' \in (\alpha, \beta)$, которому соответствует точка C на кривой. Разобьем данную замкнутую кривую (1) на две незамкнутые кривые AC и CB, и к каждой в отдельности применим формулу (3):

$$l_1 = \overset{\smile}{AC} = \int_{\alpha}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt, \qquad l_2 = \overset{\smile}{CB} = \int_{t_1}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Тогда,

$$\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB} = l_1 + l_2 = \int_{\alpha}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt + \int_{t_1}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

По свойству 4 определенных интегралов, получим

$$\breve{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

***Замечание* 2.** Частным случаем кривой, заданной параметрически является кривая, заданная уравнением $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$. Эту кривую можно задать параметрически с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases} \qquad a \le t \le b.$$

Теорему 1 в этом случае можно сформулировать следующим образом.

***Теорема* 2.** *Пусть кривая L является графиком функции* $y = f(x)$ *определенной на отрезке* $[a, b]$, *которая имеет на данном отрезке непрерывную производную* $f'(x)$. *Тогда кривая L является спрямляемой, а ее длина находится по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (3)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на части длины $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$. Этим значениям x отвечают вершины ломаной $A_0A_1 \ldots A_{k-1}A_k \ldots A_n$, вписанной в дугу $\breve{AB}$, где $A_0 = A(a, f(a))$, $A_n = B(b, f(b))$ (рис. 3). Пусть Δy_k − приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда длина l_k звена $A_{k-1}A_k$ ломаной находится по формуле

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

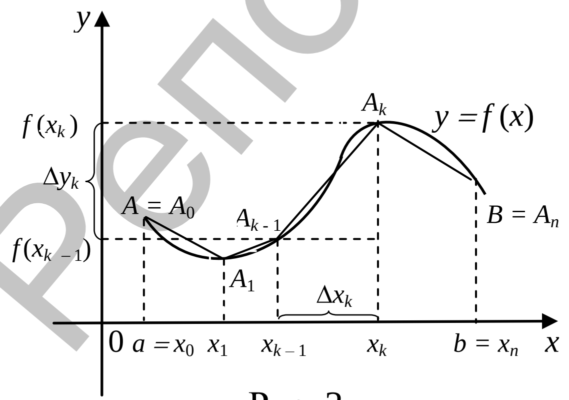


Рис. 3.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа (теорема 3, § 1.1) на отрезке $[a, b]$, а следовательно, и на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда, по этой теореме, существует такая точка $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, что $\Delta y_k = f'(c)\, \Delta x_k$, значит

$$l_k = \sqrt{1 + f'^2(c_k)}\, \Delta x_k.$$

Длина $p(A_k)$ всей ломаной равна сумме длин всех ее звеньев

$$p(A_k) = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_k)}\, \Delta x_k. \qquad (4)$$

В то же время сумма (4) представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1+f'(x)}$, которая определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а значит, интегрируема на этом отрезке. Тогда, из определения 2 § 3.1 следует, что

$$l = \lim_{\Delta \to 0} p(A_k) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_k)}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx,$$

где $\Delta = \max \Delta x_k$. Следовательно, по определению 2, кривая L является спрямляемой и ее длина находится по формуле (3). □

***Замечание* 3.** Если кривая L определяется полярным уравнением $r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$ и функция $r(\theta)$ имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, то кривая L спрямляема и ее длина находится по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta. \qquad (5)$$

Для доказательства воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta.$$

Видим, что кривая L задана параметрически, причем функции

$$\varphi(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \quad \psi(\theta) = r(\theta)\sin\theta$$

удовлетворяют условиям теоремы 1. Подставив в (2) указанные значения φ и ψ, мы получим формулу (5).

Пример 1. Найти длину

а) параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 2$;

б) одной «арки» циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 < t \le 2\pi)$;

в) кривой, заданной уравнением $r = a\varphi$ $0 < \varphi \le 2\pi$ (спираль Архимеда).

Решение.

а) По формуле (3) получим

$$l = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx = \left(x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{1+4x^2}|\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{17}).$$

б) По формуле (2) находим

$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\, dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

в) По формуле (5) получим $\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(a\varphi)^2+a^2}\,d\varphi =$

$$= a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = a\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}|\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}|\right).$$

3. Случай пространственной кривой

По отношению к пространственной кривой L, заданной уравнениями

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad z = \gamma(t)\quad \alpha \le t \le \beta,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\gamma(t)$ – непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции, определение длины дуги может быть введено, так же как и для кривой, заданной на плоскости. На этот случай переносится, почти без изменений все, что было сказано для плоской кривой. Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\gamma(t)$ имеют непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ производные, то длина дуги L находится по формуле

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\gamma'^2(t)}\,dt. \qquad (6)$$

§ 4.2. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

1. Понятие площади фигуры

Рассмотрим на плоскости произвольную **плоскую фигуру** (P), представляющую собой часть плоскости, ограниченную простой замкнутой кривой (K). При этом кривую (K) мы будем называть границей фигуры (P).

Понятие площади **многоугольника**, т.е. части плоскости, ограниченной простой замкнутой ломаной, было рассмотрено в школьном курсе математики. Мы будем говорить, что **многоугольник вписан в фигуру** (P), если каждая точка многоугольника принадлежит фигуре (P) или ее границе. Если все точки фигуры (P) и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то такой многоугольник называется **описанным** вокруг данной фигуры.

Будем рассматривать различные многоугольники (A), вписанные в фигуру (P), и различные многоугольники (B), описанные вокруг фигуры (P). Пусть A и B соответственно площади многоугольников (A) и (B). Тогда $A \le B$.

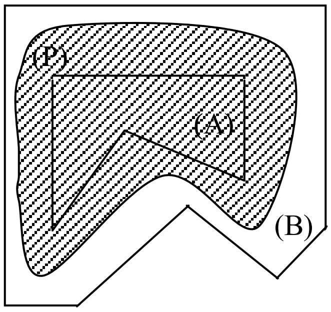


Рис. 1.

Рассмотрим два числовых множества: множество $\{A\}$ площадей вписанных в фигуру (P) многоугольников, и множество $\{B\}$ площадей описанных около фигуры (P) многоугольников. Множество $\{A\}$ ограничено сверху любым элементом B множества $\{B\}$, следовательно, имеет точную верхнюю границу P_* ($P_* = \sup\{A\}$). Точно также, множество $\{B\}$ ограничено снизу любым элементом A множества $\{A\}$, следовательно, имеет точную нижнюю границу P^* ($P^* = \inf\{B\}$). При этом справедливо неравенство $P_* \le P^*$.

***Определение* 1.** *Если обе границы P_* и P^* совпадают, то фигура (P) называется **квадрируемой.** При этом число $P = P_* = P^*$ называется **площадью фигуры**.*

***Теорема* 1**. *Для существования площади фигуры (P) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось два таких многоугольника (A) и (B) (многоугольник (A) – вписанный в фигуру (P), многоугольник (B) – описанный около фигуры (P)), для площадей которых выполнялось бы неравенство $B - A < \varepsilon$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом ε.

Необходимость. Пусть $P_* = \sup\{A\}$ и $P^* = \inf\{B\}$. Тогда, если площадь P фигуры (P) существует, то $P_* = P^* = P$. По определению точной верхней и точной нижней граней, найдутся вписанный и описанный многоугольники (A) и (B), что $A > P_* - \frac{\varepsilon}{2} = P - \frac{\varepsilon}{2}$ и $B < P^* + \frac{\varepsilon}{2} = P + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $B - A < (P + \frac{\varepsilon}{2}) - (P - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$.

Достаточность. Пусть для выбранного нами ε существуют два таких многоугольника (A) и (B), для площадей которых выполняется неравенство $B - A < \varepsilon$. Тогда, так как $A \le P_* \le P^* \le B$, то в силу произвольности выбора числа ε, по свойству действительных чисел $P_* = P^*$).□

***Определение* 2.** *Замкнутая или незамкнутая кривая называется **кривой, имеющей площадь равную нуль**, если ее можно покрыть многоугольником с произвольно малой площадью.*

Легко показать, что данным свойством обладает любая непрерывная кривая, задаваемая явным уравнением вида $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ или $x = g(y)$ $(c \le y \le d)$, где $f(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции.

***Следствие из теоремы* 1.** *Для того чтобы фигура* (P) *была квадрируемой необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена кривой, имеющей площадь равную нулю.*

Условие квадрируемости, сформулированное в теореме 1 можно сформулировать и следующим образом.

***Теорема* 2**. *Для того, чтобы фигура* (P) *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали две такие последовательности многоугольников* $\{(A_n)\}$ *и* $\{(B_n)\}$, *соответственно вписанных в* (P) *и описанных около* (P), *площади которых имеют общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P.$$

В этом случае площадь фигуры (P) будет равна P.

***Теорема* 3**. *Для того, чтобы фигура* (P) *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали две такие последовательности квадрируемых фигур* $\{(X_n)\}$ *и* $\{(Y_n)\}$, *соответственно вписанных в* (P) *и описанных около* (P), *площади которых имеют общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = P.$$

В этом случае площадь фигуры (P) равна P.

***Теорема* 4 (*свойство аддитивности площади*)**. *Пусть фигура* (P) *каким либо образом разделена на две фигуры* (P_1) *и* (P_2), *тогда из квадрируемости двух из трех фигур* (P), (P_1) *и* (P_2) *следует квадрируемость третьей фигуры, и выполняется равенство*

$$P = P_1 + P_2 .$$

2. Площадь криволинейной трапеции

Пусть $y = f(x)$ – положительная и непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графиком данной функции, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$.

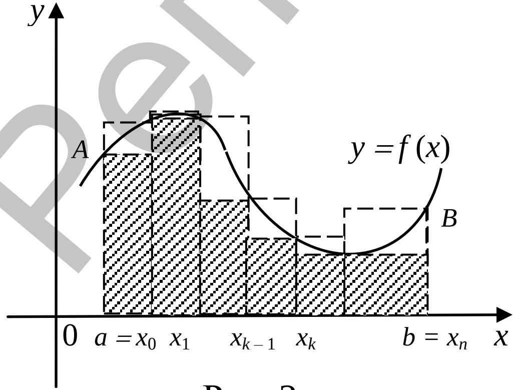


Рис. 2.

Докажем, что криволинейная трапеция $aABb$ – квадрируемая фигура и найдем площадь этой фигуры.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть m_k – наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, M_k – наибольшее значение функции на этом отрезке. Составим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k ; \qquad S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Так как непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема, то по теореме 2, § 3.1, $\lim\limits_{\Delta \to 0} (S - s) = 0$, или

$$\lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\Delta \to 0} s = \int_a^b f(x)\, dx,$$

где $\Delta = \max \Delta x_k$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при разбиении отрезка $[a, b]$ на части, длины которых меньше δ, выполняется неравенство $S - s < 0$.

В то же время, сумма s представляет собой площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников, построенных на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ с высотой m_k. Эта фигура вписана в трапецию $aABb$. Аналогично, S – площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников, построенных на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ с высотой M_k, которая описана около трапеции $aABb$ (см. рисунок 2). Тогда, по теореме 1, криволинейная трапеция квадрируема, и площадь P данной трапеции удовлетворяет неравенству

$$s < P < S.$$

Но обе суммы s и S при $\Delta \to 0$ имеют своим пределом интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$, следовательно, ему равна и искомая площадь.

$$P = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1)$$

□

***Замечание* 1.** Если функция $f(x)$ непрерывна и неположительна на отрезке $[a, b]$, то значение интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ равно взятой с отрицательным знаком площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком данной функции и прямыми $x = a$, $x = b$. В этом случае справедлива формула

$$P = -\int_a^b f(x)\, dx. \qquad (3)$$

***Замечание* 2.** Рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную графиками функ-

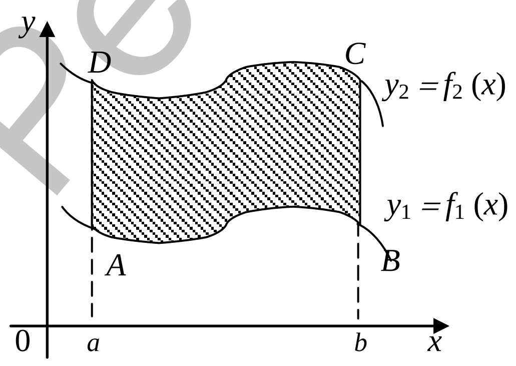


Рис. 3.

ций $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 3). Ее площадь равна разности площадей двух фигур $aDCb$ и $aABb$:

$$P_{aDCb} - P_{aABb} = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

или

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \qquad (4)$$

3. Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис. 4), причем функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть **криволинейным сектором.**

Докажем, что криволинейный сектор является квадрируемой фигурой, площадь которой находится по формуле

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (5)$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

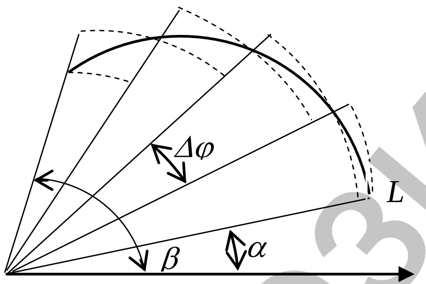


Рис. 4.

Это вызовет разбиение криволинейного сектора на частичные сектора лучами, соответствующими углам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Обозначим через m_k и M_k наименьшее и наибольшее значение функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$. На каждом частичном криволинейном секторе построим круговые сектора с радиусами m_k и M_k. Получим две веерообразные фигуры, одна из которых вписана в криволинейный сектор, а вторая описана около него.

Площади круговых секторов, соответствующих отрезку $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ равны $s_k = \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k$ и $S_k = \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k$. Тогда площади веерообразных фигур равны

$$s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta\varphi_k, \quad S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Очевидно, что первая из указанных сумм является нижней суммой Дарбу для функции $r = \frac{1}{2} r^2(\varphi)$, а вторая – верхней суммой Дарбу для этой функции. Так как функция $r = \frac{1}{2} r^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то она интегрируема на этом отрезке, тогда из теоремы 2, § 3.1 и теоремы 3 этого параграфа, а также из определения предела функции по Гейне, следует, что

$$P = \lim_{\Delta \to 0} S = \lim_{\Delta \to 0} s = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi,$$

где Δ – наибольшая из длин отрезков разбиения.

(Для того, чтобы получить, упоминающиеся в теореме 3 последовательности, можно построить различные разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на части так, чтобы выполнялись условия

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \ldots < \Delta_{n-1} < \Delta_n < \ldots, \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} \Delta_n = 0,$$

где Δ_n – наибольшая из длин отрезков n – го разбиения). □

4. Примеры нахождения площадей

Пример 1. Найти площадь P фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 5).

Решение.

Найдем точки пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Для этого решим уравнение $x^2 = \sqrt{x}$. Корнями этого уравнения являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, значит графики функций пересекаются в точках $O\,(0, 0)$ и $M\,(1, 1)$. Тогда по формуле (4)

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь P фигуры, ограниченной кривой $r = a \cos 2\varphi$ (рис. 6).

Решение.

Найдем область определения функции $r = a \cos 2\varphi$. Так как $r \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$, тогда $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \bigcup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$. Из рисунка (6) видно, что площадь этой фигуры равна увеличенной в четыре раза площади заштрихованной части, которая соответствует изменению угла φ в пределах $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. По формуле (5) получим,

$$P = 4 \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\, d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = a^2 \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} a^2.$$

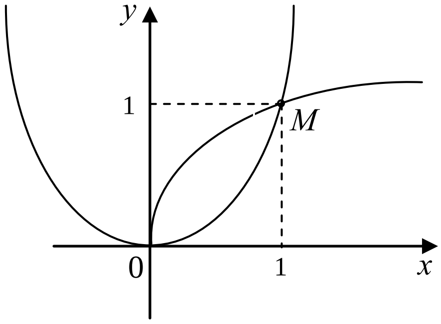


Рис. 5.

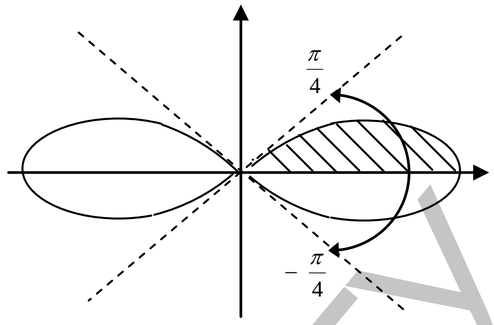


Рис. 6.

§ 4.3. ОБЪЕМ ТЕЛ
И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Понятие объема тел. Кубируемые тела

Пусть дано тело (V) произвольной формы, т.е. ограниченная замкнутая область в трехмерном пространстве. Пусть границей (S) тела (V) служит замкнутая поверхность (или несколько замкнутых поверхностей).Введем понятие объема этого тела, опираясь на понятие объема многогранников.

Вписанным в тело (V) **многогранником** будем называть многогранник, все точки которого принадлежат телу (V) или его границе. **Описанным** около тела (V) **многогранником** будем называть многогранник, которому принадлежат все точки тела (V) и его границы.

Будем рассматривать многогранники (X) объема X, вписанные в тело (V), и многогранники ($У$) объема $У$, описанные около тела (V). Множество $\{X\}$ объемов X ограничено сверху, следовательно, существует точная верхняя граница V_* этого множества. Аналогично, существует точная нижняя граница V^* множества $\{Y\}$ объемов $У$. При этом, выполняется неравенство $V_* \le V^*$.

***Определение* 1.** *Если обе величины* $V_* = \sup\{X\}$ *и* $V^* = \inf\{Y\}$ *совпадают, т.е.*

$$V_* = V^* = V, \tag{1}$$

то их общее значение V называется объемом тела (V).
В этом случае тело (V) называется **кубируемым**.

Справедлива следующая теорема.

***Теорема* 1.** *Для того, чтобы тело* (V) *было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлись такие два многогранника* (X) *и* ($У$) (*соответственно вписанный в тело* (V) *и описанный около тела* (V)), *для объемов которых выполнялось бы неравенство* $У - X < \varepsilon$.

Теорема доказывается аналогично теореме 1 § 4.2.

Для объемов формулируются теоремы, аналогичные теоремам 2, 3, 4 предыдущего параграфа.

***Теорема* 2**. *Для того, чтобы тело* (V) *было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовали две такие последовательности многогранников* $\{(X_n)\}$ *и* $\{(Y_n)\}$, *соответственно вписанных в* (V) *и описанных около* (V), *объемы которых имеют общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = V.$$

В этом случае объем тела (V) равен V.

***Теорема* 3**. *Для того, чтобы тело* (V) *было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовали две такие последовательности кубируемых тел* $\{(Q_n)\}$ *и* $\{(R_n)\}$, *соответственно вписанных в* (V) *и описанных около* (V), *объемы которых имеют общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} R_n = V.$$

В этом случае объем тела (V) равен V.

***Теорема* 4 (*свойство аддитивности объема*)**. *Пусть тело* (V) *каким либо образом разделено на два тела* (V_1) *и* (V_2), *тогда из кубируемости двух из трех тел* (V), (V_1) *и* (V_2) *следует кубируемость третьего тела, и выполняется равенство*

$$V = V_1 + V_2.$$

2. Нахождение объемов тел

Объем цилиндрических и ступенчатых тел. Будем называть **цилиндрическим** тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Эти плоскости, пересекаясь с цилиндрической поверхностью, образуют плоские фигуры, которые называются **основаниями** цилиндрического тела, а расстояние H между основаниями называется **высотой** цилиндрического тела.

Рассмотрим цилиндрическое тело, основанием которого служит квадрируемая фигура (P). Докажем, что это тело является кубируемым и его объем находится по формуле

$$V = HP, \tag{2}$$

где H – высота цилиндрического тела, P – площадь основания.

Доказательство. Так как фигура (P) квадрируема, то существуют две последовательности многоугольников $\{(A_n)\}$ и $\{(B_n)\}$, вписанных и описанных около фигуры (P), для площадей которых выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P$$

(теорема 2, § 4.2).

Построим на этих многоугольниках прямые призмы (X_n) и ($У_n$) высоты H, тогда их объемы находятся по формулам

$$X_n = A_n H \text{ и } У_n = У_n H.$$

Рассмотрим пределы

$$\lim_{n\to\infty} X_n = H\lim_{n\to\infty} A_n = HP \text{ и } \lim_{n\to\infty} У_n = H\lim_{n\to\infty} B_n = HP.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} У_n = HP$, то, то по теореме 3 этого параграфа, рассмотренное нами цилиндрическое тело является квадрируемой фигурой и его объем находится по формуле (2).

Из доказанного утверждения вытекает кубируемость **ступенчатых тел**, т.е тел, полученных объединением конечного числа цилиндров, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего цилиндра находится в одной плоскости с нижним основанием каждого последующего.

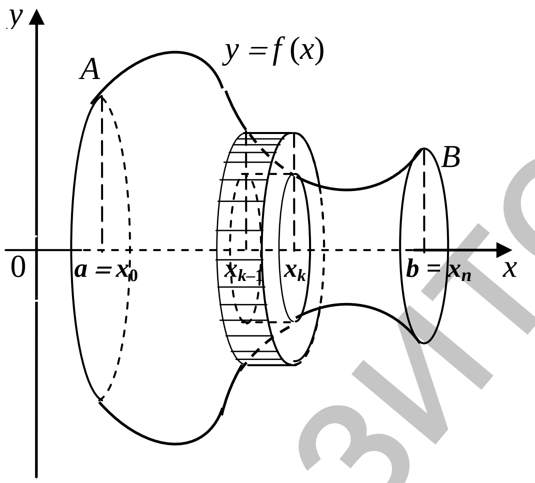


Рис. 7.

Объем тел вращения. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тело (V), образованное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX, называется **телом вращения (**рис 7). Докажем, что это тело кубируемо и его объем можно найти по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. На каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ найдем наибольшее M_k и наименьшее m_k значение функции $y = f(x)$. Обозначим эти значения через M_k и m_k соответственно. На каждом из этих отрезков построим два прямоугольника с высотами M_k и m_k (на рис. 7 изображены прямоугольники только на одном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$). Мы получили две ступенчатых фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, а вторая описана около нее. При вращении криволинейной трапеции и этих ступенчатых фигур вокруг оси OX получим тело (V) и два ступенчатых тела (Q) и (R), одно из которых вписано в тело (V), а другое описано около тела (V). Объемы этих ступенчатых тел находятся по формулам

$$Q = \pi\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \, \Delta x_k; \quad R = \pi\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \, \Delta x_k.$$

Очевидно, эти выражения представляют собой верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$. Так как эта функция интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при разбиении отрезка $[a, b]$ на части длина которых меньше δ, выполняется неравенство $Q - R < \varepsilon$ (теорема 2, § 3.1) и, следовательно,

$$\lim_{\Delta\to 0} Q = \lim_{\Delta\to 0} R = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где $\Delta = \max \Delta x_k$. Тогда по теореме 3, тело (V) кубируемо, и его объем находится по формуле (3). □

3. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим поверхность (Π) образованную вращением вокруг оси OX графика функции $y = f(x)$ заданной на отрезке $[a, b]$. Определим понятие квадрируемой поверхности вращения (Π). Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{k-1}, x_k]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть точки A_0, A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_k, …, A_n – соответствующие точки графика функции $f(x)$. Построим ломаную $A_0 A_1 \ldots A_n$. При вращении этой ломаной вокруг оси OX получим поверхность (P), составленную из боковых поверхностей усеченных конусов. Обозначим через $P(x_k)$ площадь поверхности (P). Если $y_k = f(x_k)$, а l_k – длина звена $A_{k-1} A_k$ ломаной $A_0 A_1 \ldots A_n$, то

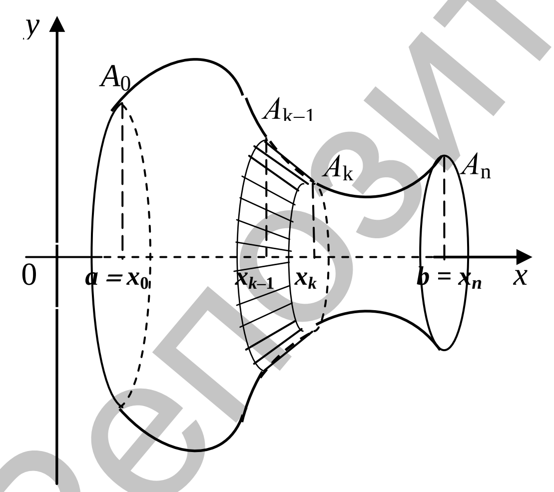


Рис. 8.

$$P(x_k) = \pi\sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} + y_k)\, l_k. \quad (4)$$

Сформулируем следующие определения.

***Определение* 2.** *Число Π называется пределом площадей $P(x_k)$ при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_k$),, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$, для которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $|P(x_k) - \Pi| < \varepsilon$.*

$$\Pi = \lim_{\Delta\to 0} P(x_k).$$

Определение* 3.** *Поверхность (Π) называется* ***квадрируемой, *если существует конечный предел Π площадей $P(x_k)$. При этом число Π называется площадью поверхности (Π).*

***Теорема* 5.** *Если на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет непрерывную производную* $f'(x)$, *то поверхность* (*П*), *образованная вращением графика этой функции вокруг оси OX, является квадрируемой, и ее площадь может быть вычислена по формуле*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{5}$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на части длины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Этим точкам отвечают вершины ломаной $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, A_k, \ldots, A_n$.

Пусть Δy_k – приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда, длина l_k звена $A_{k-1}A_k$ ломаной $A_0A_1...A_{k-1}A_k\ldots A_n$, вписанной в дугу $\overset{\cup}{AB}$, равна $l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то по теореме Лагранжа существует такая точка $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, что $\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$ и значит

$$l_k = \sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

Тогда, согласно (4),

$$P(x_k) = \pi \sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} + y_k)\, l_k =$$

$$= \pi \sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} - f(c_k) + y_k - f(c_k) + 2f(c_k))\, l_k =$$

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k +$$

$$+\pi \sum_{k=1}^{n} ((y_{k-1} - f(c_k)) + (y_k - f(c_k)))\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

Первая сумма в правой части этого равенства представляет собой интегральную сумму функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$, которая является непрерывной, а, следовательно, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. Тогда предел этой суммы при $\Delta \to 0$, равен $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. Докажем, что вторая сумма правой части имеет предел, равный нулю. Пусть ε – произвольное положительное число. Так как функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по данному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $\Delta < \delta$ выполняются неравенства $|y_{k-1} - f(c_k)| < \varepsilon$ и $|y_k - f(c_k)| < \varepsilon$. Так как функция $\sqrt{1+f'^2(x)}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке. Пусть M – наибольшее значение этой функции на отрезке, тогда сумма

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \left((y_{k-1} - f(c_k)) + (y_k - f(c_k))\right)\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k\right| <$$

$$< 2M\varepsilon\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2M(b-a)\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ предел указанного выражения равен нулю. Следовательно $\lim\limits_{\Delta\to 0} P(x_k) = P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$ □

Замечание. Если поверхность (Π) получается при вращении вокруг оси OX кривой L, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$), то площадь этой поверхности может быть найдена по формуле

$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\,\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX графика функции $y = \sin x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

По теореме (5) получим

$$P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,d\cos x =$$

$$= -2\pi\left(\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

§ 4.4. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННГО ИНТЕГРАЛА

1. Масса и центр тяжести

Масса неоднородного стержня и неоднородной кривой. Рассмотрим неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a, b]$ оси OX. Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность стержня. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на части длины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k и предположим, что стержень на этом отрезке имеет постоянную плотность $\rho(\xi_k)$, тогда масса части стержня на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ равна $\rho(\xi_k)\,\Delta x_k$. Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой приближенное значение массы стержня. Точное значение массы стержня M находится как предел таких сумм при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_k$). Если $\rho(x)$ – интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой для этой функции и

$$M = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b \rho(x)\,dx. \qquad (1)$$

Замечание. Пусть простая кривая L задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ и пусть $\rho(x, y) = \rho(\varphi(t), \psi(t))$ – линейная плотность кривой в точке $(x, y) \in L$. Тогда масса кривой L находится по формуле

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (2)$$

Если кривая L задана уравнением в декартовых координатах $y = f(x)$ $(x \in [a, b])$, то масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x, f(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \qquad (3)$$

Центр тяжести неоднородного стержня. Для нахождения центра тяжести неоднородного стержня воспользуемся формулой для координат центра тяжести системы $\{m_k(x_k)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ материальных точек, имеющих массы m_k и расположенных в точках x_k оси OX. Координата x_c центра тяжести системы может быть найдена по формуле

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (4)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на части и найдем массу m_k части стержня на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. По формуле (1) $m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx$. Пусть $\rho(x)$ – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, По теореме о среднем $m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \rho(\xi_k)\Delta x_k$. Считая, что масса m_k сосредоточена в точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, мы можем рассматривать неоднородный стержень как систему материальных точек с массами m_k, расположенных в точках ξ_k отрезка $[a, b]$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\,dx = M,$$

то по формуле (2) найдем приближенное значение для координаты x_c центра тяжести неоднородного стержня

$$x_0 \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k)\Delta x_k}{M}.$$

Сумма $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой интегральную сумму для функции $x\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$. Эта функция непрерывна, следовательно, интегрируема на этом отрезке, тогда $\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k)\Delta x_k$ = $\int_a^b x\rho(x)\,dx$. В этом случае координаты центра тяжести неоднородного стержня находятся по формуле

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{M}. \tag{5}$$

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской кривой.

Статические моменты кривой L, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$), относительно координатных осей в случае постоянной линейной плотности $\rho \equiv 1$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \text{ (момент относительно оси } OX), \\ M_y &= \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt \text{ (момент относительно оси } OУ). \end{aligned} \tag{6}$$

Если кривая L задана в декартовых координатах $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$), то

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \qquad M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Координаты центра тяжести кривой L находятся по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{l}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{l},$$

где l – длина кривой L.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1983. – Ч. 1.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В.К. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – Т. 1.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1990. – Т. 1.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – Т. 1.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Физматгиз, 1960. – Т. 1.

Дополнительная литература

1. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
2. Данко П.Е. [и др.]. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1986.
3. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.: Физматгиз, 2001.
4. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
5. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2005. – Ч. 1.

Ж.В. Иванова
Т.Л. Сурин
С.В. Шерегов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

- **ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**
- **ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

2009