ОБ УСЛОВИЯХ ПРЕДСТАВИМОСТИ ПОЛИНОМА ВОСЬМОЙ СТЕПЕНИ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ТРЕХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ

Жгиров В.С.,
магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Трубников Ю.В., доктор физ.-мат. наук, профессор

Актуальность данной работы заключается в том, чтобы получить наиболее удобный метод решения специального класса алгебраических уравнений, и ответить на вопрос разрешимо ли данное уравнение в радикалах.

Цель работы – сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия представимости алгебраического полинома восьмой степени в виде суперпозиции квадратичных полиномов, как следствие получить достаточное условие разрешимости в радикалах уравнения восьмой степени.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраический полином восьмой степени с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8,$$

а также представление этого полинома в виде суперпозиции трёх квадратичных полиномов.

А в качестве методов исследования были использованы методы алгебры, математического анализа и система компьютерной математики Maple 2017.

Результаты и их обсуждение. Пусть алгебраическое уравнение имеет вид:

$$P_8(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8 = 0, \tag{1}$$

где $P_8(z)$ – полином восьмой степени, который является суперпозицией трёх квадратичных полиномов. То есть имеет следующий вид:

$$P_8(z) = f_3\{f_2[f_1(z)]\}, \tag{2}$$

где $f_1(z) = z^2 + b_1 z + b_2,\ f_2(z) = z^2 + c_1 z + c_2,\ f_3(z) = z^2 + d_1 z + d_2.$

Рассмотрим задачу для полинома восьмой степени. Так как

$$\begin{gathered}
f_3\{f_2[f_1(z)]\} = z^8 + 4b_1 z^7 + 2\left(3b_1^2 + 2b_2 + c_1\right)z^6 + 2b_1\left(c_1 + 2b_2 + \right. \\
\left. + 2\left(b_1^2 + 2b_2 + c_1\right)\right)z^5 + \left[d_1 + 2b_2c_1 + 2b_2^2 + 2c_2 + 4b_1^2\left(c_1 + 2b_2\right) + \left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right)^2\right]z^4 + \\
+ \left[2b_1d_1 + 4b_1\left(b_2c_1 + b_2^2 + c_2\right) + 2b_1\left(c_1 + 2b_2\right)\left(b_1 + c_1 + 2b_2\right)\right]z^3 + \\
+ \left[d_1\left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right) + 2\left(b_2c_1 + b_2^2 + c_2\right)\left(b_1^2 + c_1 + 2b_2\right) + b_1^2\left(c_1 + 2b_2\right)\right]z^2 + \\
+ b_1\left[d_1\left(c_1 + 2b_2\right) + 2\left(b_2c_1 + b_2^2 + c_2\right)\left(c_1 + 2b_2\right)\right]z + d_1\left(b_2c_1 + b_2^2 + c_2\right) + \\
+ \left(b_2c_1 + b_2^2 + c_2\right)^2 + d_2,
\end{gathered}$$

то приравнивая коэффициенты полученного полинома и полинома (1) получаем систему уравнений и проведя анализ этой системы, получаем равенства:

$$a_3 = -\frac{7}{32}a_1^3 + \frac{3}{4}a_1a_2; \tag{3}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{256}\left(7a_1^4 - 20a_1^2a_2 + 128a_4\right); \tag{4}$$

$$a_6 = -\frac{7}{4096}a_1^6 + \frac{1}{256}a_1^4a_2 + \frac{3}{64}a_1^2a_2^2 - \frac{1}{8}a_1^2a_4 + \frac{1}{2}a_2a_4 - \frac{1}{8}a_2^3; \tag{5}$$

$$a_7 = -\frac{a_1}{2048}\left(3a_1^2 - 8a_2\right)\left(a_1^4 - 8a_2^2 + 32a_4\right), \tag{6}$$

Пусть $f_1(z) = z^2 + (a_1/4)z + b_2,\ f_2[f_1(z)] = f_1^2(z) + c_1 f_1(z) + c_2,$

$$f_3\{f_2[f_1(z)]\} = \{f_2[f_1(z)]\}^2 + d_1\{f_2[f_1(z)]\} + d_2,$$

где $c_1 = \dfrac{a_2}{2} - \dfrac{3a_1^2}{16} - 2b_2,\ \ d_1 = a_4 + \dfrac{a_1^4}{32} + \dfrac{3a_1^2b_2}{8} - \dfrac{a_2^2}{4} - a_2b_2 + 2b_2^2 - 2c_2,$

$$d_2 = a_8 + \frac{a_2^3b_2}{8} + \frac{3a_1^6b_2}{512} + a_4b_2^2 - a_4c_2 - \frac{a_1^4c_2}{32} + \frac{a_2^2c_2}{4} - \frac{a_2a_4b_2}{2} - \frac{a_1^4a_2b_2}{64} +$$

$$+\frac{3a_1^2a_4b_2}{16}-\frac{3a_1^2a_2^2b_2}{64}-a_2b_2^3+\frac{17}{256}a_1^4b_2^2+\frac{3a_1^2b_2^3}{8}+a_2b_2c_2-\frac{3a_1^2a_2b_2^2}{16}-$$

$$-\frac{3a_1^2b_2c_2}{8}+b_2^4+c_2^2-2b_2^2c_2.$$

При вычислении с такими коэффициентами выражения $f_3\left\{f_2\left[f_1(z)\right]\right\}$ получаем тождество

$$f_3\left\{f_2\left[f_1(z)\right]\right\}=z^8+a_1z^7+a_2z^6+a_3z^5+a_4z^4+a_5z^3+a_6z^2+a_7z+a_8, \tag{7}$$

в котором коэффициенты a_3, a_5, a_6, a_7 выражаются равенствами (3)-(6). Таким образом, доказана

Теорема. Необходимым и достаточным условием представления полинома $P_8(z)$ в виде $f_3\left\{f_2\left[f_1(z)\right]\right\}$ являются равенства (3)-(6).

Следствие. Равенства (3)-(6) являются достаточными условиями разрешимости уравнения $P_8(z)=0$ в радикалах.

Рассмотрим пример, в котором $a_1=16,\ a_2=32,\ a_4=7,\ a_8=8,$ т.е.

$$P_8(z)=z^8+16z^7+32z^6-512z^5+7z^4+18488z^3-12400z^2-230272z+8. \tag{8}$$

Корнями полинома (8) являются числа:

$$z_1=-2-\frac{1}{2}\sqrt{80-2\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574}},\ z_{2,3}=-2\pm\frac{1}{2}\sqrt{80\mp2\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574}},$$

$$z_4=-2+\frac{1}{2}\sqrt{80+2\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574}},\ z_{5,6}=-2\mp\frac{1}{2}\sqrt{80-2i\sqrt{2\sqrt{3236369}+2574}},$$

$$z_{7,8}=-2\mp\frac{1}{2}\sqrt{80+2i\sqrt{2\sqrt{3236369}+2574}},$$

Найти эти корни можно при помощи следующего алгоритма. Назовём корнями третьего уровня корни уравнения

$$q^2+d_1q+d_2=0.$$

В данном примере, считая, что $b_2=c_2=0,$ получаем $d_1=1799,\ d_2=8.$ Обозначив эти корни через $q_{13},\ q_{23}$ (второй индекс обозначает номер уровня) получаем, что

$$q_{13}=\frac{1}{2}\left(-1799+\sqrt{3236369}\right);\quad q_{23}=-\frac{1}{2}\left(1799+\sqrt{3236369}\right).$$

Корнями второго уровня назовём корни уравнений

$$q^2+c_1q+c_2=q_{13},\quad q^2+c_1q+c_2=q_{23}.$$

В нашем случае $c_1=-32,\ c_2=0.$ И, таким образом, корнями второго уровня являются корни

$$q_{12}=16+\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574},\quad q_{22}=16-\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574},$$

$$q_{32}=16+\frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369}+2574},\quad q_{12}=16-\frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{3236369}-2574}.$$

Корнями первого уровня будем считать корни первоначального полинома $P_8(z)$. Они находятся из уравнений

$$q^2+b_1q+b_2=q_{12},\quad q^2+b_1q+b_2=q_{22},$$

$$q^2+b_1q+b_2=q_{32},\quad q^2+b_1q+b_2=q_{42}.$$

Заключение. В результате проделанного исследования найдены необходимые и достаточные условия представления полинома восьмой степени, в виде суперпозиции трёх полиномов второй степени.

ОРГАНИЗАЦИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В 6–7 КЛАССАХ

Исаченко В.А, Слабко А.В.,

студентки 4 курса МГУ имени А.А. Кулешова, г. Могилев, Республика Беларусь

Научный руководитель – Романович Л.А.

В настоящее время важно в процессе обучения развивать задатки и способности учеников, которые обеспечили бы их устойчивое саморазвитие в жизни. В современных школах по ряду причин не в полной мере реализуется эта задача. Компенсировать этот пробел возможно за счет организации дополнительного обучения отдельным учебным предметам.