ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ
ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Гаджиева Ф.С.,
студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Преобразование алгебры Ли $f:\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки, т.е. выполняется $[fX, fY] = f([X, Y])\ \forall X, Y\in\mathrm{G}$. Пусть в алгебре Ли G задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle,\rangle$. Тогда преобразование $f:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$ называется подобием с коэффициентом e^{μ}, если $\langle fX, fY\rangle = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle\ \forall X, Y\in\mathrm{G}$. В случае $\mu=0$ преобразование f называется изометрией.

Цель данной работы – найти подобия одной четырёхмерной алгебры, снабжённой лоренцевым скалярным произведением, которые одновременно являются автоморфизмами алгебры Ли. Мы будем называть такие преобразования алгебры Ли автоподобиями.

Материал и методы. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли $G = Hs\oplus\mathrm{R}$. Находится лоренцево скалярное произведение, при котором эта алгебра Ли допускает однопараметрическую группу автоподобий. При этом необходимо рассмотреть пять возможных случаев задания скалярного произведения; в трёх случаях автоподобия существуют. В исследовании применяются методы аналитической геометрии и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. В работе выпускника ВГУ Кравченко А.О. [1] найдены все автоподобия и автоизометрии алгебры Ли *Hs* группы Гейзенберга *Hs*. Результаты этой работы использованы научным руководителем в работе [2], где были найдены все автоподобия для группы Ли *Hs*, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тем самым, было доказано, что однородное лоренцево многообразие группы Ли *Hs* может быть самоподобным.

В данном исследовании мы рассматриваем алгебру Ли $G = Hs\oplus\mathrm{R}$, которая относится к подтипу VI_3 по классификации Бианки. Она состоит из матриц вида

$$X=\begin{pmatrix}0 & x^2 & x^1 & 0\\ 0 & 0 & x^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

с обычными операциями сложения и коммутатора матриц. В алгебре Ли G можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4), состоящий из матриц

$$E_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться одним равенством

$$[E_2, E_3] = E_1, \quad (1)$$

а остальные скобки Ли равны нулевому вектору. Алгебра Ли G содержит двумерный центр L, которой является линейной оболочкой векторов E_1 и E_4, а также одномерный центр $\mathrm{Z} = \boldsymbol{R}E_1$, который равен $\mathrm{G}^{(2)} = [\mathrm{G}, \mathrm{G}]$.

Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в G, относительно которого коммутационные соотношения задаются одним равенством $[V_2, V_3] = V_1$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе, верно что $\mathrm{L} = \langle V_1, V_4\rangle$ и $\mathrm{Z} = \boldsymbol{R}V_1$.

Теорема 1. *Пусть на алгебре Ли* $G = Hs\oplus\mathrm{R}$ *задано лоренцево скалярное произведение сигнатуры* $(+,+,+,-)$. *Тогда эта алгебра Ли допускает автоподобия в следующих трех случаях*.

Условие	*Матрица Грама в каноническом базисе*	*Матрица, задающая однопараметрическую группу автоподобий*
1. *На двумерном центре* L *индуцируется знаконеопределенное скалярное произведение и идеал* Z *изотропен.*	$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{2\mu t}&0&0&0\\0&e^{\mu t}\cos t&-e^{\mu t}\sin t&0\\0&e^{\mu t}\sin t&e^{\mu t}\cos t&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $t\in\boldsymbol{R}$.
2. *На двумерном центре* L *индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал* Z *изотропен.*	$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{3\mu t}&0&0&0\\0&e^{\mu t}&0&0\\0&0&e^{2\mu t}&0\\0&0&0&e^{2\mu t}\end{pmatrix}$, $t\in\boldsymbol{R}$.

3. *На двумерном центре* L *индуцируется вырожденное скалярное произведение и идеал* Z *не изотропен.*	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{\mu t}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&e^{\mu t}&0\\0&0&0&e^{2\mu t}\end{pmatrix}$, $t\in\boldsymbol{R}$.

Расположение базисных векторов в случаях 1 и 2 относительно конуса изотропных векторов показано на рисунках 1 и 2. В случае 3 необходимо поменять на рисунке 2 местами векторы V_1 и V_4.

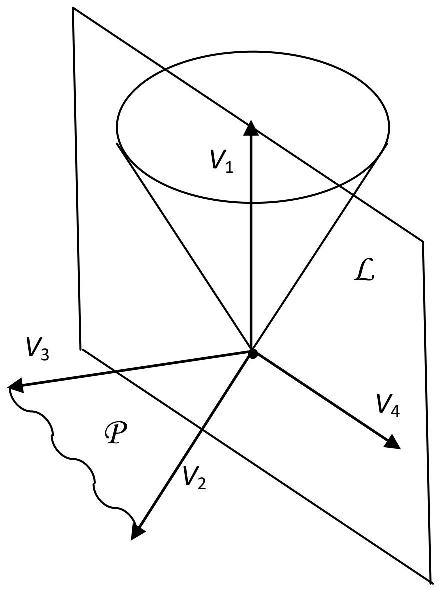

*рис.*1

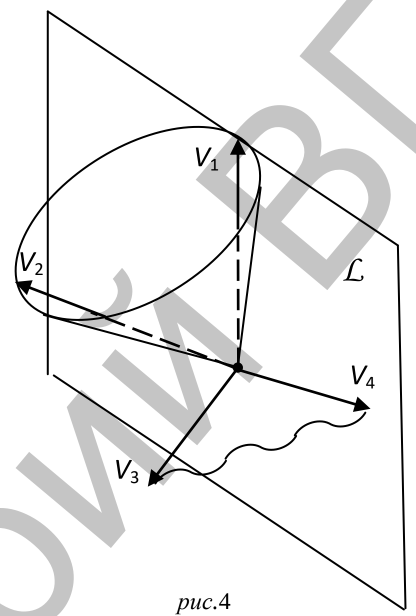

*рис.*4

Заключение. В данном исследовании мы нашли, что четырёхмерная алгебра Ли $G = Hs \oplus \mathrm{R}$, снабжённая лоренцевым скалярным произведением, допускает автоподобия в трёх различных случаях. Это фактически доказывает, что существует три самоподобных однородных лоренцевых многообразия группы Ли $Hs\times\boldsymbol{R}$, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой. Результаты этого исследования могут быть применены для построения таких однородных многообразий и для того, чтобы получить в явном виде формулы, по которым на них действуют однопараметрические группы гомотетий.

1. Кравченко А.О., Гомотетические автоморфизмы трёхмерной нильпотентной алгебры Ли / А.О. Кравченко // X (55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета, посвящённой 90-летию со дня рождения С.М. Машерова. Сборник статей / Витебск. – УО «ВГУ имени П.М. Машерова», 2008. – С.16-17.
2. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н. Подоксёнов // Вестник ВГУ.– 2011.– № 5.– С.10-15.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ LORA ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ LPWAN НА ТЕРРИТОРИИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Довгулевич Д.А.,
магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Краснобаев Е.А., канд. техн. наук, доцент

В настоящее время всё чаще на слуху такое понятие как Интернет вещей (Internet of Things) или сокращенно IoT. Это концепция, суть которой заключается во взаимодействии предметов, подключенных к единой сети, для взаимодействия между собой и внешним миром.

Изначально концепция планировалась для бытовых предметов и устройств, но на данном этапе она применима и в промышленности, особенно с развитием распределенных автоматизированных систем управления технологическими процессами [1].

Объединение устройств в единую сеть можно реализовать как посредством проводных каналов передачи данных, так и беспроводных.