МАТЕМАТИКА:
УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, ФУНКЦИИ, ВЕЛИЧИНЫ

Методические рекомендации для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета

2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М34

Составители: доценты кафедры алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидаты педагогических наук **А.В. Виноградова, В.В. Устименко**

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры начального образования УО «ВГУ им. П.М. Машерова»,
кандидат педагогических наук *З.К. Левчук*

Данное учебное издание написано в соответствии с действующей программой по математике и предназначено для студентов дневного и заочного отделений педагогического факультета. Кратко изложен необходимый теоретический материал, приведены разобранные примеры, даются задания для самостоятельного решения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики призван дать студентам педагогического факультета подготовку, необходимую для успешного обучения математике учащихся начальных классов.

Как известно, одними из основных понятий курса математики являются действительные числа и действия над ними, величины и их измерение. Существующие в настоящее время трактовки понятий числа и величины требуют от студентов овладения рядом понятий математики, таких, как «числовое выражение», «уравнение», «неравенство», «функция» и др. Освоить курс математики, приобрести необходимые умения и навыки можно лишь в процессе решения задач. Предлагаемое учебное издание призвано оказать помощь студентам педагогического факультета в достижении этой цели.

В методических рекомендациях большое внимание уделяется вопросам совершенствования логической грамотности учителя, формированию у него в процессе решения задач таких умений, как умение разграничивать математический и методический материал, умение анализировать задания из учебников математики начальных классов с точки зрения используемых при их выполнении теоретических положений и др.

В данное издание включены такие темы, как «Числовые выражения, равенства и неравенства», «Уравнения, неравенства, их системы и совокупности», «Величины и зависимости между ними», «Текстовые задачи» и пр. Все темы хорошо проиллюстрированы.

Учебное издание содержит задачи с решениями и обоснованиями по данным темам, задания для самостоятельной работы студентов факультета начального образования. Данные задания предполагают развитие культуры мышления студентов и умения пользоваться языком математики.

Структура методических рекомендаций такова: материал разбит на темы, некоторые темы – на пункты. Выделение пунктов – небольших по объему порций теоретического материала и задач, должно помочь студентам не только лучше овладеть необходимыми знаниями, но и более четко организовать свою самостоятельную учебную деятельность. Приведенные задания для самостоятельной работы должны способствовать формированию и закреплению умений и навыков студентов по изученным темам, а также оказать помощь в подготовке к экзаменам и зачетам.

I. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА

С помощью цифр, знаков операций и скобок можно составить различные ***числовые выражения***. Например, 5 – 3 или (6 + 12): 3. Как правило, каждому числовому выражению соответствует числовое значение этого выражения – число, получаемое в результате последовательного выполнения операций. Про выражение, не имеющее числового значения, говорят, что оно не имеет смысла.

Если два числовых выражения соединить знаком равенства, то получим высказывание, называемое ***числовым равенством.*** Они могут быть истинными, если значения выражений в левой и правой частях равны, и ложными, если значения не равны.

Числовые равенства обладают следующими свойствами:

1) если к правой и левой части прибавить или вычесть одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое равенство;

2) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое равенство;

Если два числовых выражения соединить знаком « < » или « > », то получим высказывание, называемое ***числовым неравенством***. Они так же могут быть истинными или ложными.

Числовые неравенства обладают следующими свойствами:

1) если к правой и левой части прибавить или вычесть одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое неравенство;

2) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, имеющее положительное значение, и знак неравенства оставить без изменения, то получим истинное числовое равенство;

3) если правую и левую части умножить или разделить на одно и то же числовое выражение, имеющее отрицательное значение, и знак неравенства изменить на противоположный, то получим истинное числовое равенство.

Неравенство вида $a > b > c$ представляет собой конъюнкцию ($\wedge$) числовых неравенств $a > b$ и $b > c$.

Неравенство $a \geq b (a \leq b)$ представляет собой дизъюнкцию ($\vee$) числового неравенства $a > b$ $(a < b)$ и числового равенства $a = b$. **Например,** $5 > 3 > 1 \Leftrightarrow (5>3) \wedge (3>1)$ – истинно.

Задача. Определить, какие записи являются числовыми выражениями, числовыми равенствами, числовыми неравенствами:

а) 32; б) (43 + 13) + 7; в) 76 – 6 = 70;
г) 45 + d – 5; д) 3x + 5 = 34 : 2; е) 24 : 3 > 7 – 1.

Решение: а) 32 – числовое выражение, как и всякое другое число.

б) (43 + 13) + 7 – числовое выражение, так как оно состоит чисел, знаков операций и скобок;

в) 76 – 6 = 70 – не является числовым выражением, так как содержит знак « = », это числовое равенство;

г) 45 + d – 5 – не является числовым выражением, так как содержит букву;

д) 3x + 5 = 34 : 2 не является числовым выражением и числовым равенством, так как содержит букву;

е) 24 : 3 > 7 – 1 – числовое неравенство

Задача. Какие из следующих числовых выражений имеют смысл на множестве R, и какие не имеют:

$$a)\ (\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}):0,8+0,2; \qquad b)\ \frac{8,3\cdot 1,2+4,2}{(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15})\cdot 5-7\frac{2}{3}}.$$

Решение:

$$a)\ (\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}):0,8+0,2=(\frac{5}{30}+\frac{3}{30}-1\frac{2}{30}):\frac{8}{10}+\frac{2}{10}=-\frac{24}{30}\cdot\frac{10}{8}+\frac{2}{10}=-\frac{4}{5}.$$

Так как данное выражение имеет численное значение $\frac{4}{5}\in R$, то оно имеет смысл на множестве *R;*

$$b)\ \frac{8,3\cdot 1,2+4,2}{(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15})\cdot 5-7\frac{2}{3}}=\frac{9,96+4,2}{1\frac{8}{15}\cdot 5-7\frac{2}{3}}=\frac{14,16}{7\frac{2}{3}-7\frac{2}{3}}=\frac{14,16}{0}.$$

Так как получили выражение, в знаменатели которого стоит нуль, а на нуль делить нельзя, то данное выражение не имеет смысла.

Задача. Определите, что больше, *A* или *B,* и во сколько раз:

$$A=(0,2\cdot 15-2\frac{2}{5}:2):\frac{5}{9}, \qquad B=(1:\frac{6}{11}-2\frac{3}{4}\cdot 0,5)\cdot 4\frac{4}{11}.$$

Решение:

$$A=(0,2\cdot 15-2\frac{2}{5}:2):\frac{5}{9}=(3-2,4:2):\frac{5}{9}=(3-1,2)\cdot\frac{9}{5}=\frac{18}{10}\cdot\frac{9}{5}=3,24$$

$$B=(1:\frac{6}{11}-2\frac{3}{4}\cdot 0,5)\cdot 4\frac{4}{11}=(\frac{11}{6}-1\frac{3}{8})\cdot\frac{48}{11}=$$

$$=(1\frac{5}{6}-1\frac{3}{8})\cdot\frac{48}{11}=(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})\cdot 48=$$

$$=(\frac{4}{24}-\frac{3}{24})\cdot 48=\frac{1}{24}\cdot 48=2$$

B < A, A : B = 3,24 : 2 = 1,62. Значит *A* больше *B* в *1,62* раза.

Задача. Выполните действия: $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9}$.

Решение: $\frac{2^6 \cdot 6^{18}}{2^{25} \cdot 9^9} = \frac{2^6 \cdot (2 \cdot 3)^{18}}{2^{25} \cdot (3^2)^9} = \frac{2^6 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18}}{2^{25} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{24}}{2^{25}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Задача. Выполнить действия: $\sqrt{\frac{4\frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot 2,7}{0,05}}$.

Решение:

$$\sqrt{\frac{4\frac{1}{2} \cdot 0,12 \cdot 2,7}{0,05}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0,12 \cdot 2,7}{0,05 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0,04 \cdot 3 \cdot 0,9 \cdot 3}{0,1}} = 3 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 3 = 5,4 \cdot$$

Упражнения для самостоятельной работы:

1) Вычислите: $\frac{8 \cdot 2^6 - 19 \cdot 2^4}{5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^8}$; $\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

2) Решите: $\frac{10}{\frac{1}{24} + \frac{1}{11} + \frac{1}{9}}$; $\sqrt{36^2 + 48^2}$

3) Сравните значения числовых выражений и поставьте соответствующий знак «<», «>» или «=»: $32,8 : 0,5 + 17\frac{1}{3}$ и $53,8 + 12,6 - (17,3 - 4,21)$

4) Найдите значение выражения $1\frac{32}{49} : (4\frac{15}{49} - 2\frac{13}{14}) + \frac{2}{3}(4,254 - 1,134 : 0,28) + 1,114$.

5) Имеет ли данное выражение значение на множестве R: $\frac{16\frac{2}{3} : 0,25 - 38\frac{1}{6}}{7\frac{1}{3} \cdot 2,4 - 15\frac{7}{15}}$.

6) Представьте следующие высказывания в виде конъюнкции или дизъюнкции высказываний и найдите их значения истинности: а) $16 \geq -11$; б) $32, 24 < 48$; в) $17 \leq 17$; г) $52 \geq 35 > 33$.

II. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ. ТОЖДЕСТВО

В выражения с переменной могут входить буквы, числа, знаки операции, скобки. Так, $4x + 3$, $x + 2y - 2$, $(y + 4) : x$ – ***выражения с переменными.***

Областью определения выражения с переменной называется множество значений переменной, при которых это значение имеет смысл. Если дано выражение с двумя переменными x и y, то областью его определения является множество пар чисел (x, y), при которых это выражение имеет смысл.

Два выражения называются тождественно равными на множестве, если они на этом множестве имеют смысл и все их соответственные значения равны.

Равенство, в котором левая и правая части – тождественно равные выражения, называется ***тождеством.***

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называется ***тождественным преобразованием выражения.***

Задача. Найти область определения выражения $\frac{4x+6}{x^2-9}$.

Решение. Так как выражение $\frac{4x+6}{x^2-9}$ представляет собой дробь, то для нахождения его области определения нужно найти те значения переменной x, при которых знаменатель обращается в нуль, и исключить их. Решив уравнение $x^2 - 9 = 0$, находим, что $x = -3$ и $x = 3$. Следовательно, область определения данного выражения состоит из всех чисел, отличных от –3 и от 3. Если обозначить ее через X, то можно записать:

$X = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

Задача. Являются ли выражения $\frac{x^2-2x}{x}$ и $x-2$ тождественно равными: а) на множестве R; б) на множестве целых чисел, отличных от нуля?

Решение. а) На множестве R эти выражения не являются тождественно равными, так как при $x = 0$ выражение $\frac{x^2-2x}{x}$ не имеет значения, а выражение $x - 2$ имеет значение –2.

б) На множестве целых чисел, отличных от нуля, эти выражения являются тождественно равными, так как $\frac{x^2-2x}{x} = \frac{x(x-2)}{x} = x-2$.

Задача. При каких значениях x являются тождествами следующие равенства:

а) $4x-3 = 4x-3+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}$; б) $x = \sqrt{x^2}$.

Решение. а) Равенство является тождеством, если $x \neq 2$;

б) Равенство является тождеством, если $x \geq 0$.

Задача. Разложить на множители: $a^2 - 18a - b^2 + 81$.

Решение: $a^2 - 18a - b^2 + 81 = a^2 - 9 \cdot 2 \cdot a + 81 - b^2 = (a-9)^2 - b^2 = (a - 9 - b)(a - 9 + b)$.

Задача. Докажите тождество: $\frac{25-x}{4} - \frac{x+1}{6} = \frac{13-2x}{3} + \frac{7+x}{4}$

Решение: Перенесем левую часть равенства в правую с противоположным знаком и покажем, что эта разность будет равно нулю.

$$\frac{25-x}{4} - \frac{x+1}{6} - \frac{13-2x}{3} - \frac{7+x}{4} = \frac{18-2x}{4} - \frac{x+1}{6} - \frac{26-4x}{6} =$$

$$= \frac{9-x}{2} - \frac{27-3x}{6} = \frac{9-x}{2} - \frac{9-x}{2} = 0.$$

Таким образом, разность обеих частей равенства равна нулю, т.е. равенство справедливо.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Укажите область определения выражений:

а) $-5x + 6$; б) $x^3 + 4x^2 - 7x$; в) $\frac{x-5}{x+4}$; г) $\frac{x^2+9}{x^2-9}$;

д) $\frac{9}{(x-3)(x+2)}$; е) $\frac{6x^3-x}{x^2+x-2}$; ж) $\frac{4x-5}{x^2-6x+9}$.

2. Являются ли на множестве *R*, на множестве *N* тождественно равными следующие выражения:

а) $\frac{x^2-x}{x}$ и $x - 1$; б) $x^2 + x - 2$ и $(x - 2)(x - 1)$;

в) $\frac{x+3}{x^2+6x+9}$ и $x + 3$; г) $4x = \sqrt{16x^2}$?

3. При каких значениях x являются тождествами следующие равенства:

а) $4x + 7 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = 4x + 7$; б) $\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x + 3$;

в) $\dfrac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}$?

4. Докажите тождество:

а) $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(b^2 + a^2)$; б) $(a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$.

5. Разложите на множители:

а) $m(a - b) - 3(a - b) - 7d(b - a)$; б) $(a+b)^2 - 2(a^2 - b^2) + (a-b)^2$.

III. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R. Множество X называют ***областью определения функции***. Функции обозначают буквами f, g, h и др. Если f – функция, заданная на множестве X, то действительное число y, соответствующее числу x их множества X, часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$.Переменную x при этом называют аргументом. Множество чисел вида $f(x)$ называют ***областью значений функции***

Функцию задают при помощи формулы. Например, $y = 2x - 2$. Если при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается, то полагают, что областью определения функции является область определения выражения $f(x)$.

Например. Если функция задана формулой $y = \dfrac{6}{x-2}$, то ее область определения – есть множество действительных чисел, исключая число 2 (если $x = 2$, то знаменатель данной дроби обращается в нуль).

Числовые функции можно представлять наглядно с помощью графика на координатной плоскости. Графиком является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X. Так, графиком функции $y = x + 2$, заданной на множестве R, является прямая (рис. 1), а графиком функции $y = x^2$, заданной на этом же множестве, – парабола (рис. 2).

Для построения графика можно воспользоваться таблицей соответствующих значений x и y:

x	0	1	-1	-2
y	2	3	1	0

1) для функции $y = x + 2$

x	0	1	-1	2
y	0	1	1	4

2) для функции $y = x^2$

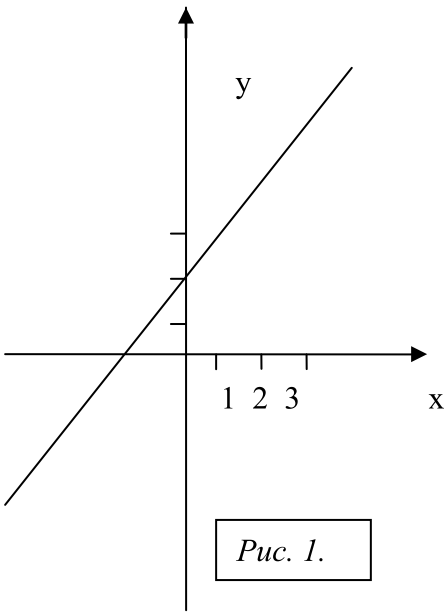


Рис. 1.

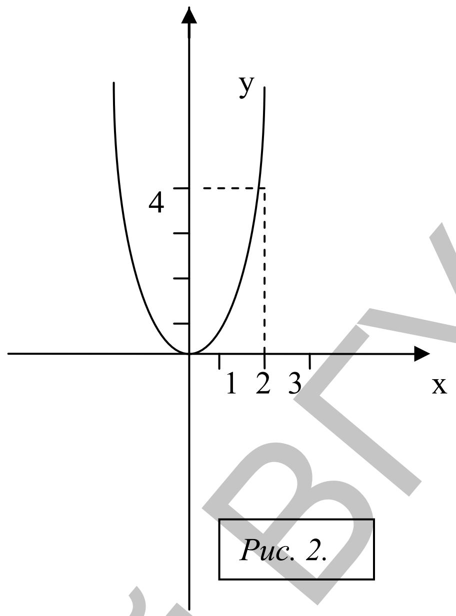


Рис. 2.

Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции. Так как при каждом значении аргумента из области определения функция должна иметь одно лишь значение, то любая прямая, параллельная оси ординат, или совсем не пересекает график функции, или пересекает его лишь в одной точке. Если это условие не выполняется, то множество точек координатной плоскости график функции не задает.

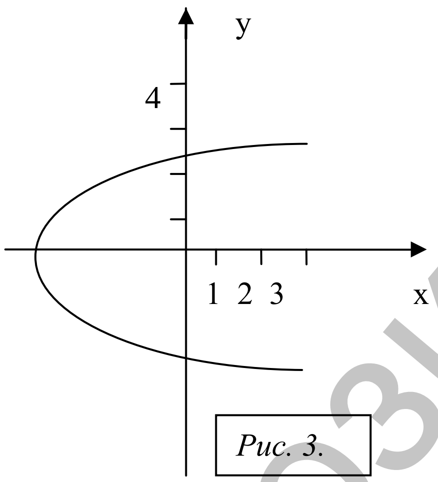


Рис. 3.

Например, кривая на рис. 3.

Функции можно задавать и при помощи графика, и при помощи таблицы. Например, таблица, приведенная ниже, описывает зависимость температуры воздуха от времени суток. Эта зависимость – функция, так как каждому значению времени t соответствует единственное значение температуры воздуха p.

t (в часах)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	0
p (в градусах)	-3	-7	-5	0	2	4	2	1	-3	-3

Числовые функции обладают многими свойствами:

1. Функция называется ***монотонной*** на некотором промежутке А, если она на этом промежутке возрастает или убывает

2. Функция называется ***возрастающей*** на некотором промежутке А, если для любых чисел x_1, x_2 их множества А выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

График возрастающей функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку *A* ординаты точек графика увеличиваются (рис. 4).

3. Функция называется ***убывающей*** на некотором промежутке *A*, если для любых чисел x_1, x_2 их множества *A* выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

График убывающей функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку *A* ординаты точек графика уменьшаются (рис. 4).

4. Функция называется ***четной*** на некотором множестве *X,* если выполняется условие: $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 2).

5. Функция называется ***нечетной*** на некотором множестве *X,* если выполняется условие: $f(x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2).

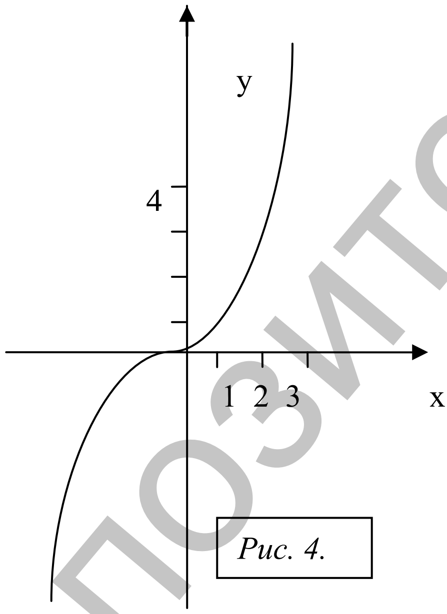


Рис. 4.

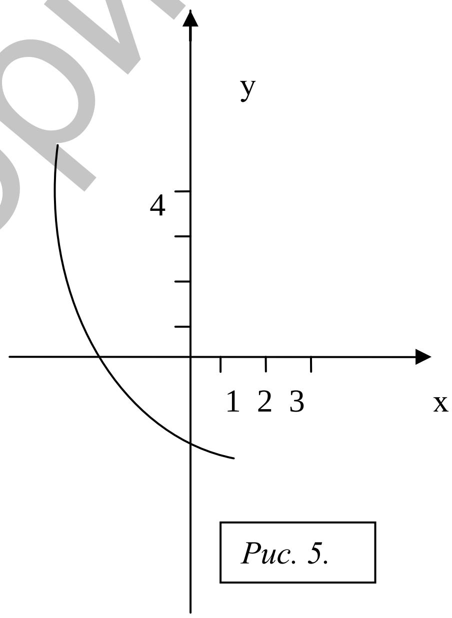


Рис. 5.

6. Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$,то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает ***наименьшее значение*** $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$ (рис. 2, функция $y = x^2$ принимает наименьшее значение в точке с координатами (0;0)).

7. Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует такое $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$,то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает ***наибольшее значе-***

ние $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$ (рис. 4, функция не имеет наибольшего и наименьшего значений).

Если для данной функции $y = f(x)$ изучены все перечисленные свойства, то говорят, что проведено *исследование* функции.

Рассмотри некоторые виды функций.

Линейная функция: $\boldsymbol{y = kx + b}$.

Свойства этой функции:

1) область определения $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; +\infty)$;

3) функция не ограничена ни сверху, ни снизу;

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция не является ни четной, ни не четной;

6) функция возрастает на всем промежутке, если $k > 0$, и убывает, если $k < 0$;

7) точки пересечения с осями координат $(0; b)$ и $(\frac{-b}{k}; 0)$;

8) график функции есть прямая, причем, если $k = 0$, то график расположен параллельно оси OX (рис. 1)

Частным случаем линейной функции является **прямая пропорциональность**: $\boldsymbol{y = kx}$.

Свойства этой функции:

1) область определения $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; +\infty)$;

3) функция не ограничена ни сверху, ни снизу;

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция является не четной;

6) функция возрастает на всем промежутке, если $k > 0$, и убывает, если $k < 0$;

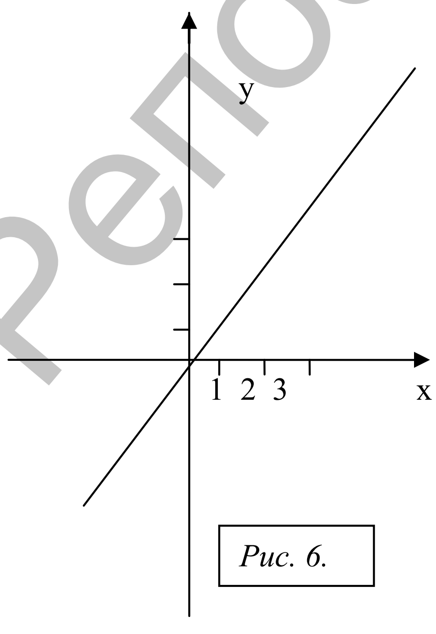


Рис. 6.

7) проходит через начало координат;

8) график функции есть прямая, расположенная в первой и третей четвертях, если $k > 0$ и во второй и четвертой, если $k < 0$ (рис. 6) и является биссектрисой этих углов.

Коэффициент $k = \frac{y}{x} \neq 0$ называют коэффициентом пропорциональности. Прямая пропорциональность обладает особым свойством. Если $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ пары соответственных значений переменных x и y и $x_2 \neq 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$: с увеличением (уменьшением) значения переменной *x* в несколько раз соответствующее значение переменной *y* увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Обратная пропорциональность: $y = \dfrac{k}{x}$.

Свойства этой функции:

1) область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

3) функция имеет разрыв в точке (0; 0)

4) не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция не является не четной;

6) функция убывает на всем промежутке, если $k > 0$, и возрастает, если $k < 0$;

7) точки пересечения с осями координат нет;

8) график функции есть гипербола, причем, если $k > 0$, то график расположен 1-ой и 3-ей четвертях, если $k < 0$, то график расположен во второй и четвертой четвертях (рис. 7a; 7b).

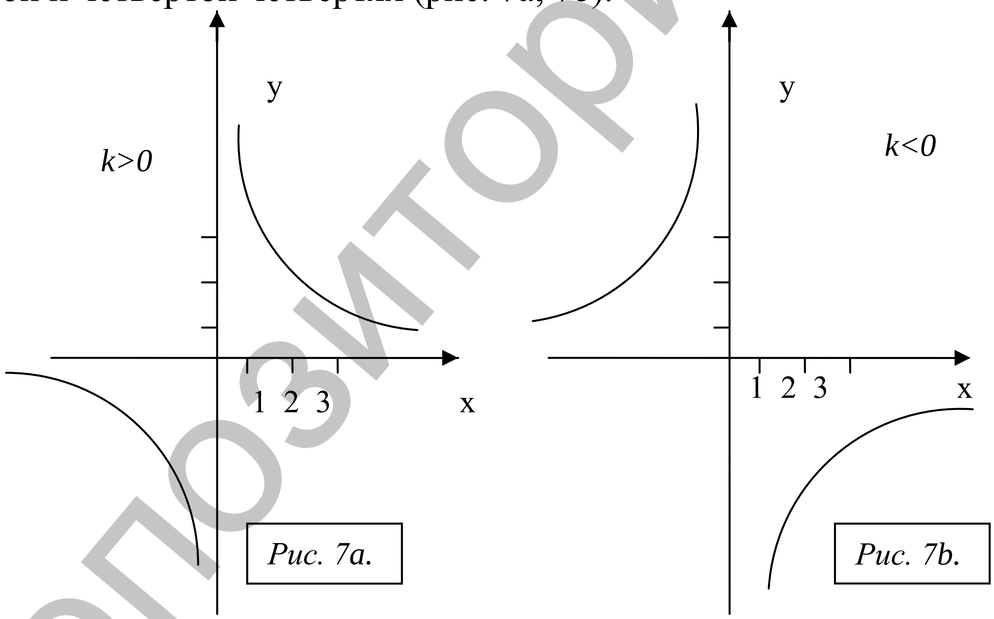


Рис. 7a. *Рис. 7b.*

Коэффициент $k = x{\cdot}y \neq 0$ называют коэффициентом пропорциональности. Прямая пропорциональность обладает особым свойством. Если $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ пары соответственных значений переменных *x* и *y* и $x_2 \neq 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{y_1}$. Т.е., с увеличением (уменьшением) значения переменной *x* в несколько раз соответствующее значение переменной *y* уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Квадратичная функция: $y = ax^2 + bx + c$; частный случай, выражающий квадратичную зависимость: $y = kx^2$.

Свойства функции $y = kx^2$:

1) область определения $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; 0)$,если $k < 0$ и $(0; +\infty)$, если $k > 0$;

3) функция ограничена сверху если $k < 0$, снизу если $k > 0$;

4) принимает наибольшее значение в точке (0; 0), если $k < 0$, и наименьшее значение в точке (0; 0), если $k > 0$;

5) функция является четной;

6) функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$; и убывает на промежутке $(-\infty; 0)$, если $k > 0$; возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает $(0; +\infty)$, если $k < 0$,

7) проходит через начало координат;

8) график функции есть квадратичная парабола (рис. 8a,8b).

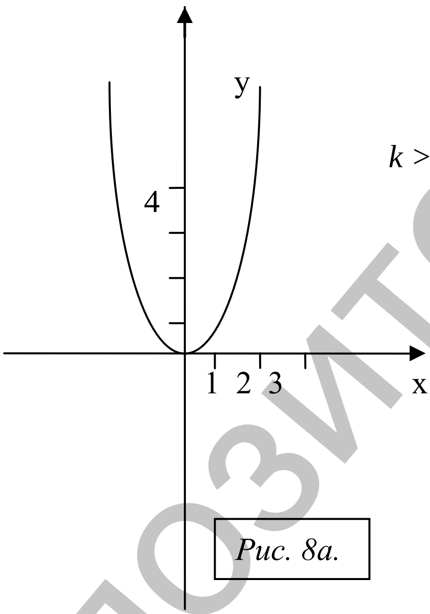


Рис. 8а.

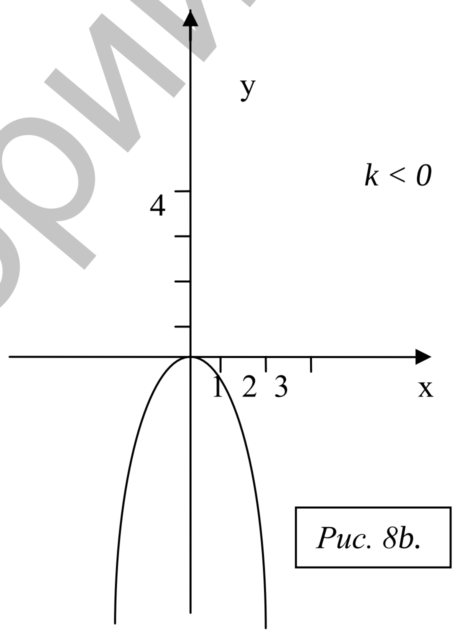


Рис. 8b.

Степенная функция $\boldsymbol{y = kx^n}$; частный случай, когда $n = 3$, получаем кубическую функцию $\boldsymbol{y = k\,x^3}$.

Свойства функции $\boldsymbol{y = k\,x^3}$:

1) область определения $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений $(-\infty; +\infty)$;

3) функция не ограничена сверху и снизу;

4) не принимает наибольшее и наименьшее значение;

5) функция является не четной;

6) функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, если $k > 0$; и убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, если $k < 0$,

7) проходит через начало координат;

8) график функции есть кубическая парабола (рис. 9a, 9b).

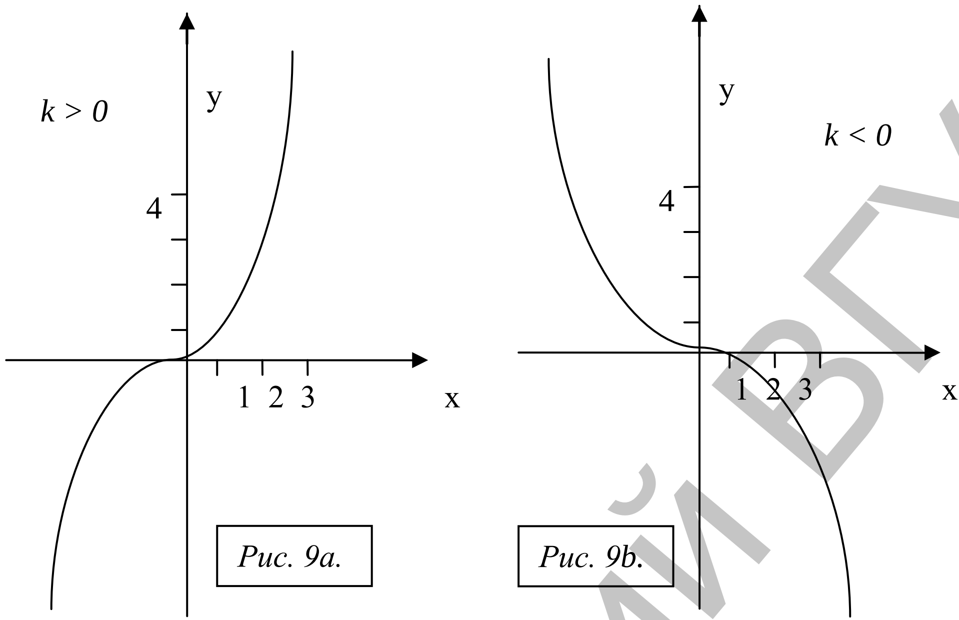


Рис. 9a. *Рис. 9b.*

Каждая функция представляет собой различную функциональную зависимость, которой пользуются при решении различных математических и текстовых задач

Задача. Найти область определения функции:

а) $y = 5x^2 - 4$, б) $y = \dfrac{3}{x-5}$, в) $y = \dfrac{1}{2}x$,

г) $y = x - 4$, д) $y = \sqrt{1-x}$.

Решение. Область определения функции *D(y)* – это множество допустимых значений переменной *x*.

В случае а) переменная *x* может принимать любое значение из множества *R*.

В случае б) переменная *x* находится в знаменателе дроби. Значит, $x - 5 \neq 0$ и $x \neq 5$. Т.е., областью определения данной функции будет множество действительных чисел, кроме 5.

В случае в), г) переменная *x* может принимать любое численное значение, следовательно, и область определения данной функции есть множество *R*.

В случае д) выражение под корнем должно быть больше или равно нулю, поэтому $1 - x \geq 0$. А это значит, что область определения данной функции $(-\infty; 1)$.

Задача. Указать область значений следующих функций: $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$; $y = (x + 5)^2 - 3$.

Решение: Для первой функции имеем: $\dfrac{1}{x-3} \neq 0$; $\quad \dfrac{1}{x-3} + 2 \neq 2$. Значит областью значений будут являться все действительные числа, кроме 2: $E(y) = (-\infty;\, 2) \cup (2;\, +\infty)$.

Для второй функции: $(x + 5)^2 \geq 0$; $\quad (x + 5)^2 - 3 \geq -3$. Значит, область значений должна быть больше или равна –3, т.е. $E(y) = (-3;\, +\infty)$.

Задача. Указать, какие из данных формул задают на множестве R действительных чисел функцию: $y = 4x$; $\; y = \dfrac{4}{x}$; $\; x + y = 4$; $\; x^2 > 1$.

Решение: Формула задает функцию, если в ней (формуле) указывается, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Первая и вторая формулы задают такую функцию, т.к. каждому действительному числу x можно, произведя указанные действия, поставить в соответствие единственное значение y, чего нельзя сказать про третий и четвертый случай.

Задача. Определить, являются ли графиками функций следующие кривые на рис. 10 (a, b, c, d, e), и почему:

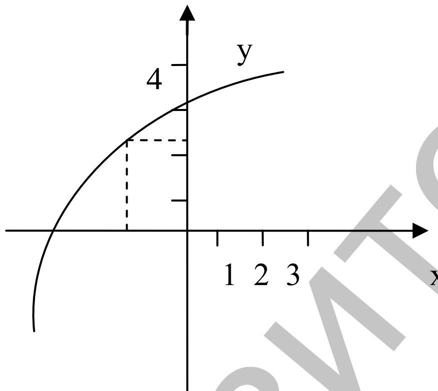


Рис. 10a.

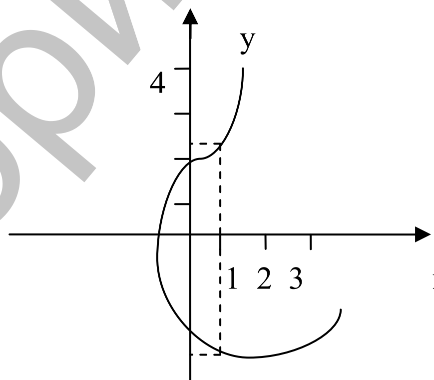


Рис. 10b.

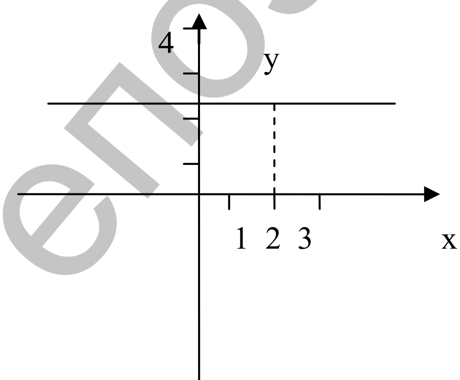


Рис. 10d.

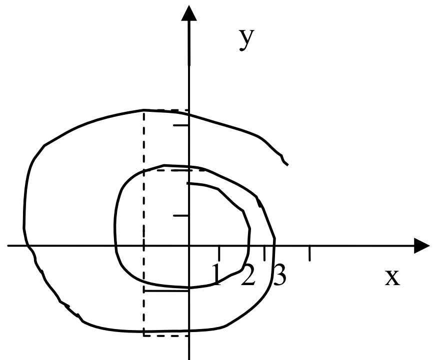


Рис. 10c.

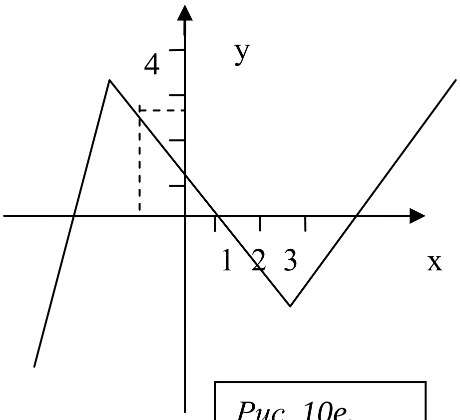


Рис. 10e.

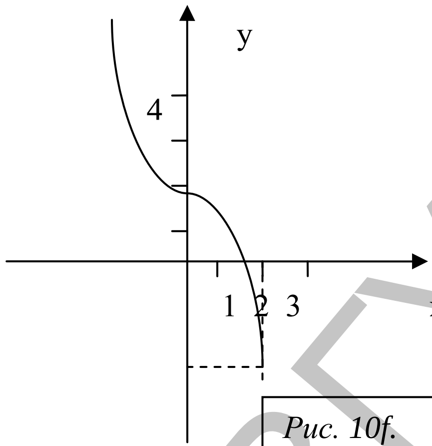


Рис. 10f.

Решение: Графиком функции является кривая, если каждому значению переменной *x* соответствует единственному значению переменной *y*. Этому условию подчиняются кривые на рис. 10 (*a, d, e, f*). Остальные кривые не являются графиками функций.

Задача. Определить, какой формулой задана функция, если она задана табличным способом.

x	2	4	6	8	…
y	14	28	42	56	…

x	-4	-2	-1	2	4	…
y	-2,25	-4,5	-9	4,5	2,25	…

x	2	3	4	5	6	…
y	4	9	16	25	36	…

Решение: В первой таблице с увеличением значения переменной *x* в 2 раза, увеличивается и значение переменной *y* тоже в 2 раза. Значит, функция представляет собой прямую пропорциональность. Чтобы получить значение переменной *y*, необходимо значение переменной *x* умножить на 7. Например, $2 \cdot 7 = 14$. Значит, коэффициент прямой пропорциональности $k = 7$. Функция задается формулой $y = 7x$.

Во второй таблице с увеличением значения переменной *x* в 2 раза, значение переменной *y* уменьшается в *2* раза как на множестве отрицательных чисел, так на множестве положительных. Значит, функция представляет собой обратную пропорциональность. Чтобы найти коэффициент *k* обратной пропорциональности необходимо $x \cdot y$, например, $-1 \cdot (-9) = 9$. Функция задастся формулой $y = \frac{9}{x}$. Для третьей таблицы характерна квадратичная зависимость, так как при возведении значения переменной x в квадрат получаем заданное значение переменной y.

Значит, данной таблицей задана функция $y = x^2$.

Задача. Задать формулой функции, изображенные на рис. 11(a, b).

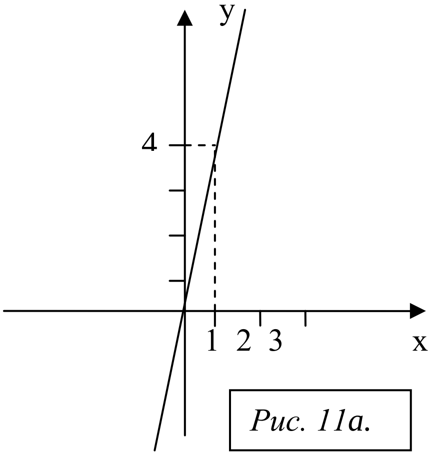


Рис. 11a.

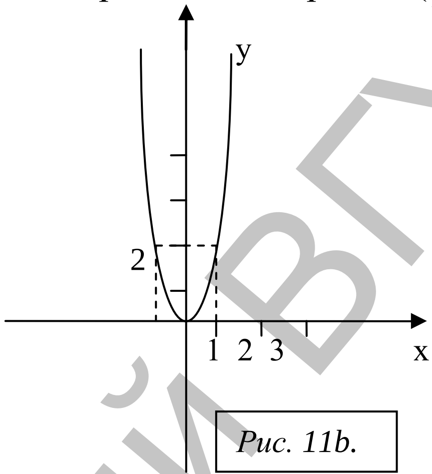


Рис. 11b.

Решение: На рисунке 11a изображена прямая, проходящая через начало координат. Эта прямая является графиком прямой пропорциональности. Чтобы определить коэффициент данной пропорциональности, можно рассмотреть точку, принадлежащую прямой, с координатой *(1; 4)*. Чтобы получить заданное значение $y = 4$, необходимо $1 \cdot 4$. Значит, $k = 4$, и функция будет задаваться формулой вида $y = 4x$.

На рисунке 11 b изображена парабола, которая является графиком квадратичной функции. Чтобы определить зависимость переменной y от переменной x, необходимо данное на графике значение x возвести в квадрат, и умножить на *2*. Значит, получим формулу $y = 2x^2$.

Задача. Построить графики функций $y = 3x - 6$ и $y = \frac{1}{2}x^2$

Решение: Для построения графиков функций воспользуемся их свойствами и таблицей.

Составим таблицу для первой функции, которая является линейной и ее график – прямая. Для построения прямой, из курса геометрии известно, необходимо 2 точки. Так как $k > 0$, то прямая расположена в 1 и 3 четвертях (рис. 12).

x	1	3
y	-3	3

Вторая функция квадратичная, графиком ее является парабола, поэтому возьмем несколько значений. Так как $k > 0$, то ветви параболы расположены вверх и ее вершина находится в точке *(0; 0)* (рис. 13).

x	0	2	-2	3	-3
y	0	2	2	4,5	-4,5

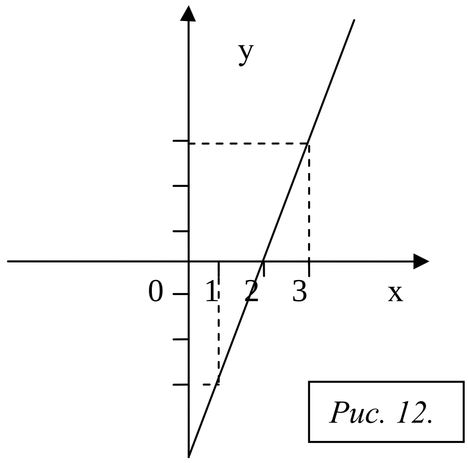


Рис. 12.

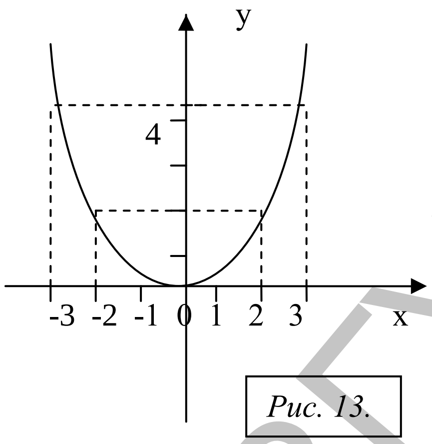


Рис. 13.

Задача. Построить график функции $y = |x|$.

Решение: Функцию $y = |x|$ можно рассматривать как сумму двух функций: $y = x$, если $x \geq 0$ *и* $y = -x$, если $x < 0$. Графиком этих функций являются прямые, проходящие через начало координат, причем, для первой функции прямая расположена в 1 и 3 четвертях, для второй – во 2 и 4 четвертях. Область определения данной функции есть множество действительных чисел, область значений – есть промежуток *(0; + ∞)* (значение модуля, т.е. значение *у*, всегда положительно). Функция четная. Имеет наименьшее значение в точке *(0; 0)* и не имеет наибольшего. Поэтому нам достаточно построить части прямых, расположенных в 1 и 2 четвертях и проходящих через начало координат (рис. 14).

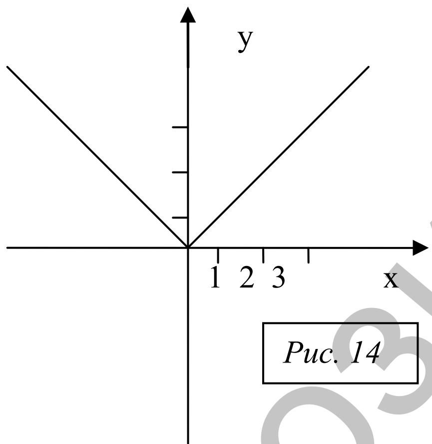


Рис. 14

Задача. Постройте график функции $y = \sqrt{x+1}$ и определить ее свойства.

Решение: Найдем область определения: $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$. Значит область определения есть промежуток (–1; +∞). Так как значение корня не может быть отрицательным, то область значений функции есть промежуток (0; +∞). Функция не является четной и не четной. Имеет наименьшее значение в точке (–1; 0) и не имеет наибольшего.

Составим таблицу соответствующих значений x и *y*:

x	-1	3	8
y	0	2	3

С увеличением значения переменной *х,* значение переменной *у* так же увеличивается, значит, функция возрастает. Строим график (рис. 15).

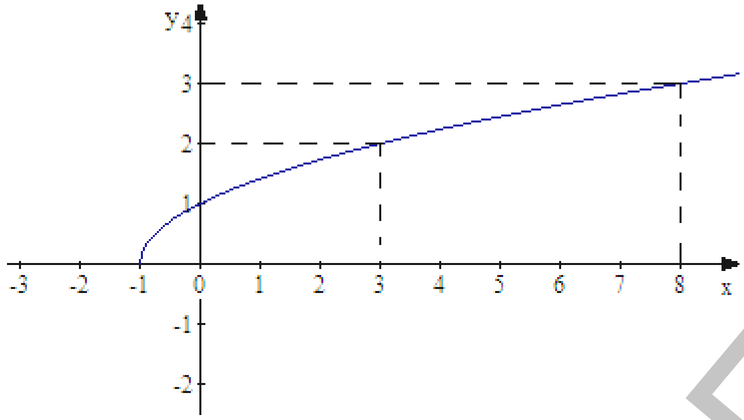


Рис. 15.

Задача. Постройте график функции $y = x^2 + 2x + c$, если известно, что точка $A(3;\ 7)$ принадлежит этому графику.

Решение: Точка A принадлежит графику функции, значит ее координаты удовлетворяют данной формуле: $7 = 3^2 + 2 \cdot 3 + c$, откуда $c = -8$.

Получаем $y = x^2 + 2x - 8$.

Графиком функции является парабола с вершиной в точке (–1; –9). Функция имеет в этой точке наименьшее значение и не имеет наибольшего.

На промежутке (–∞; –1) убывает и на промежутке (–1; +∞) возрастает. Не является четной и не нечетной.

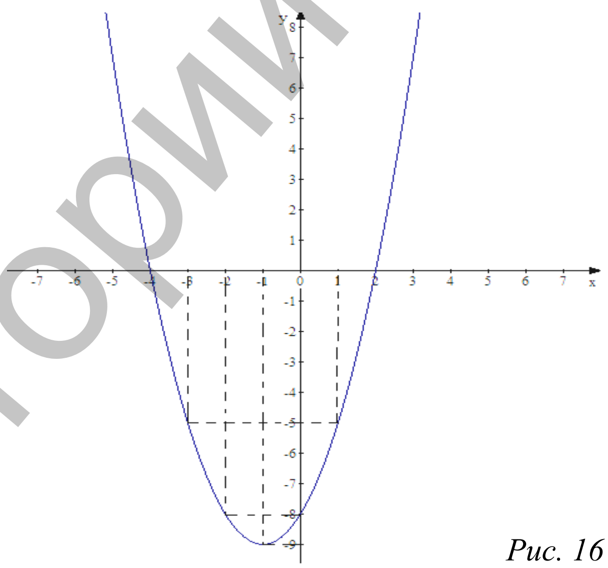


Рис. 16

Составим таблицу значений и построим график (рис. 16).

x	2	0	1	-1	-3	-2	-4
y	0	-8	-5	-9	-5	-8	0

Задача. Из квадрата со стороной *10 см* вырезали прямоугольник со сторонами 8 см и *x* см. Обозначив площадь оставшейся части через *y*, выразите зависимость *y* от *x* формулой. Найдите значение зависимой переменной, если значение аргумента равно 2,5; 4; 10. Найдите значение независимой переменной, если значение функции равно 20; 36; 88.

Решение: Площадь квадрата равна 10·10 = 100. Площадь прямоугольника равна $8x$. Значит площадь оставшейся части $y = 100 - 8x$.

Найдем значение зависимой переменной: $y = 100 - 8 \cdot 2{,}5 = 80$; $y = 100 - 8 \cdot 4 = 68$; $y = 100 - 8 \cdot 10 = 20$.

Найдем значение независимой переменной: $20 = 100 - 8x$, $x = 10$; $36 = 100 - 8x$, $x = 8$; $88 = 100 - 8x$, $x = 1{,}5$.

Упражнения для самостоятельной работы

1) Построить графики функций и определите их свойства

$y = 4x$; $y = 2x^2$; $y = |x-1|$; $y = \dfrac{4}{x+2}$; $y = \sqrt{x} + 1$.

2) Функция задана при помощи таблицы. Укажите ее область определения и область значений. Задайте формулой. Постройте график. Докажите, что функция возрастает.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

3) Найти область определения и область значений функций:

$y = \dfrac{1}{x-4}$; $y = (x + 3)^2$; $y = \sqrt{x+6}$; $y = 5x - 2$.

4) Постройте график функции $y = 2x - 3$ с областью определения $D = [-3; 2]$.

5) Известно, что график функции $y = 2x + b$ проходит через точку (1; 4). Пройдет ли он через точку (3; 8)? Постройте этот график.

6) Лена купила x карандашей, а Катя в 2 раза больше. Обозначьте число карандашей, купленных Катей, через y и выразите y через x. Постройте график установленного соответствия при условии, что $x \leq 5$. Является это соответствие функцией? Какова ее область определения и область значений?

IV. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательная форма вида $f(x) = g(x)$ называется ***уравнением с одной переменной.***

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется ***корнем уравнения*** (или его решением). ***Решить уравнение*** – это значит найти множество его корней.

Множество значений переменной, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл, называется ***областью определения уравнения*** $f(x) = g(x)$. *Множество решений уравнения является подмножеством области его определения.*

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т.д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называются равносильными.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется ***преобразованием.***

Преобразования, позволяющие получать равносильные уравнения, могут быть следующими:

1. Если к обеим частям уравнения $f(x) = g(x)$, определенного на множестве X, прибавить одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл на множестве X, то получится уравнение $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$, равносильное данному.

Из данного утверждения вытекают ***следствия***, которые используются при решении уравнений:

1) Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$, определенного на множестве X, умножить на одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл на множестве X и не обращающееся на нем в нуль, то получится уравнение $f(x)\cdot h(x) = g(x)\cdot h(x)$, равносильное данному.

Из этого утверждения вытекает *следствие:*

Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

Задача. Установить, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел:

а) $x^2 - 9 = 0$ и $(2x + 6)(x - 3) = 0$;

б) $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$ и $x^2 + 1 = 0$;

в) $x^2 - x - 2 = 0$ и $(x - 1)(x + 2) = 0$;

Решение. а) уравнения равносильны, так как оба имеют своими корнями числа 3 и –3; б) уравнения равносильны, так как оба не имеют корней, т.е. множества их решений совпадают; в) уравнения не являются равносильными, так как корнями первого уравнения являются числа –1 и 2, а второго – числа 1 и –2.

Задача. Решить уравнение $1-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}$ и обосновать все преобразования, которые будут выполняться в процессе решения.

Решение.

Преобразования	**Обоснование преобразований**
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6}=\frac{x}{6}$.	Выполнили тождественное преобра-зование выражения в левой части уравнения.
2. Отбросим общий знаменатель: $6 - 2x = x$.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное данному.
3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения с противоположным знаком: $6 = x + 2x$.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
4. Приводим подобные члены в правой части уравнения: $6 = 3x$.	Выполнили тождественное преобра-зование выражения.
5. Разделим обе части уравнения на 3: $x = 2$.	Воспользовались следствием из теоремы 2, получили уравнение, равносильное предыдущему, а значит, и данному.

Так как все преобразования, которые мы выполняли, решая данное уравнение, были равносильными, то можно утверждать, что 2 – корень этого уравнения.

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия теорем 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни. Поэтому важно, осуществляя преобразования уравнения с целью получения более простого, следить за тем, чтобы они приводили к уравнению, равносильному данному.

Рассмотрим, например, уравнение $x\ (x – 1) = 2x$, $x \in R$. Разделим обе части на x, получим уравнение $x – 1 = 2$, откуда $x = 3$, т.е. данное уравнение имеет единственный корень – число 3. Но верно ли это? Нетрудно видеть, что если в данное уравнение вместо переменной x подставить 0, оно обратится в истинное числовое равенство $0 \cdot (0 – 1) = 2 \cdot 0$. А это означает, что 0 – корень данного уравнения, который мы потеряли, выполняя преобразования. Проанализируем их. Первое, что мы сделали, – это разделили обе части уравнения на x, то есть умножили на выражение $\frac{1}{x}$, но при $x = 0$ оно не имеет смысла. Следовательно, мы не выполнили условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Чтобы убедиться в том, что множество корней данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, приведем другое решение. Перенесем выражение $2x$ из правой части в левую: $x\ (x – 1) – 2x = 0$. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: $x\ (x – 3) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому $x = 0$ или $x – 3 = 0$. Отсюда получаем, что корни данного уравнения – 0 и 3.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

Задача. Решить уравнение $(x \cdot 9) : 24 = 3$, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

Решение. Так как неизвестное находится в делимом, то, чтобы найти делимое, надо делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$, или $x \cdot 9 = 72$. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: $x = 72 : 9$, или $x = 8$, следовательно, корнем данного уравнения является число 8.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Уравнение $2x^4 + 4x^2 – 6 = 0$ задано на множестве натуральных чисел. Объясните, почему число 1 является корнем этого уравнение, а 2 и –1 не являются его корнями.

2. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве R:

а) $3 + 7x = –4$ и $2(3 + 7x) = –8$; в) $3 + 7x = –4$ и $x + 2 = 0$.
б) $3 + 7x = –4$ и $6 + 7x = –1$;

3. Решите уравнения и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их упрощения:

а) $\frac{7x+4}{2}-x=\frac{3x-5}{2}$; б) $x-\frac{3x-2}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$; в) $(2-x)\cdot 2-x(x+1{,}5)=4$.

4. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

а) $(x+70)\cdot 4=328$; в) $(85x+765):170=98$;

б) $560:(x+9)=56$; г) $(x-13581):709=306$.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Под алгебраическим уравнением принято понимать уравнение, которое может быть записано в виде $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, где a_n, a_{n-1}, … , a_0 – заданные числа, x – неизвестное. n – наибольшую степень неизвестного – называют степенью алгебраического уравнения.

1. Линейные уравнения $ax = b$ решаются следующим образом:

если $a \neq 0$ и $b \in R$, то $x=\frac{b}{a}$;

если $a = 0$ и $b = 0$, то $x \in R$;

если $a = 0$ и $b \neq 0$, то $x \in \varnothing$.

2. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ решаются по готовой формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или используется ***теорема Виета***: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

3. Дробно-рациональные уравнения решаются по следующей схеме:

а) перенести все члены уравнения в левую часть;

б) все члены уравнения в левой части привести к общему знаменателю, т.е. уравнение записать в виде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$;

в) решить уравнение $f_1(x) = 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

Задача. Решить уравнение $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}=1$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть, получим: $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}-1=0$. Приведем все члены уравнения к общему знаменателю, получим: $\frac{2x+x+2-x^2-2x}{x(x+2)}=0$. Приведем подобные слагаемые в числителе, получим: $\frac{-x^2+x+2}{x(x+2)}=0$. Решаем уравнение $-x^2 + x + 2 = 0$ при условии $x(x + 2) \neq 0$. Получим: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; $x \neq 0$. $x \neq 2$.

Ответ: –1; 2.

4. Метод группировки. Путем группировки слагаемых, применяя формулы сокращенного умножения, привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких множителей, а справа – нуль. Затем приравниваем к нулю каждый из множителей.

Задача. Решить уравнение $x^3 -3x +2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение, учитывая , что $-3x = - x - 2x$:

$x^3 - x - 2x +2 = 0$.

Группируем: $x (x^2 - 1) - 2 (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1) (x (x + 1) - 2) = 0$ $\Rightarrow x - 1 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$. Получаем, что $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Ответ: 0: 1; –2.

5. Метод подстановки. Ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно обозначить.

Задача. Решить уравнение $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Решение. С помощью подстановки $\frac{x^2+x-5}{x}=t$ получаем $t+\frac{3}{t}+4=0$. Далее решаем его как дробно-рациональное уравнение: $\frac{t^4+4t+3}{t}=0$; $t^2 + 4t + 3 = 0$ и $t \neq 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = -1$.

Тогда $\frac{x^2+x-5}{x}=-3$ и $\frac{x^2+x-5}{x}=-1$.

Решаем получившиеся уравнения:

$\frac{x^2+x-5+3x}{x}=0$	$\frac{x^2+x-5+x}{x}=0$
$x^2 + 4x - 5 = 0$	$x^2 + 2x - 5 = 0$
$x_1 = -5$, $x_2 = 1$; $x \neq 0$	$x_3 = -1-\sqrt{6}$, $x_4 = -1+\sqrt{6}$ 1; $x \neq 0$

Ответ: –5; 1; $-1\pm\sqrt{6}$.

В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований.

Задача. Решить уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Решение. Переписав уравнение иначе, а именно

$(x^2 + 2x)^2 - (x + 2x + 1) = 55$, сразу увидим подстановку $x + 2x = t$. Имеем $t^2 - t - 56 = 0$, $t_1 = -7$, $t_2 = 8$. Осталось решить $x^2 + 2x = -7$ и

$x^2 + 2x = 8$. В результате получаем, что первое уравнение не имеет корней, а у второго $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

6. Метод подбора: при решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения $a_4x^4 + a_{4-1}x^{4-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ ищем в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель a_0, q – делитель a_n, p и q взаимно просты, $p \in Z$, $q \in N$.

Задача. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$.

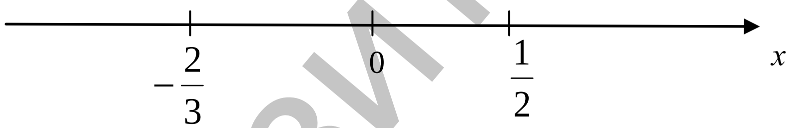
Решение. Здесь $a_n = 1$, $a_0 = 6$. Поэтому, если данное уравнение имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: ±1, ±2, ±3, ±6. Проверкой убеждаемся, что $x = 3$, т.к. $27 - 9 - 24 + 6 = 0$. Делим $x^3 - x^2 - 8x + 6$ на $x - 3$, получаем $x^2 + 2x - 2$. Тогда данное уравнение можно представить в виде $(x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0$. Отсюда находим, что $x_1 = 3$ – решение, найденное подбором, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$ – из уравнения $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Ответ: $3;\ -1 \pm \sqrt{3}$.

7. Уравнения, содержащие модуль. При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов.

Задача. Решить уравнение $|1 - 2x| + |3x + 2| + |x| = 5$.

Решение. Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отмечаем на числовой оси полученные значения, исследуем уравнение в каждом из полученных интервалов:



а) если $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, то $1 - 2x > 0$, $3x + 2 < 0$, $x < 0$ и уравнение переписывается так: $1 - 2x - 3x - 2 - x = 5$, т.е. $-6x = 6$, $x = -1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

б) если $x \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right)$, то $1 - 2x > 0$, $3x + 2 \geq 0$, $x < 0$ и поэтому имеем $1 - 2x + 3x + 2 - x = 5$, и т.к. $3 \neq 5$, то в промежутке $\left[-\frac{2}{3}; 0\right)$ корней нет;

в) если $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, то получаем $1 - 2x + 3x + 2 + x = 5$, т.е. $2x = 2$, $x = 1 \notin \left[0; \frac{1}{2}\right)$;

г) если $x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right)$, то $-1 + 2x + 3x + 2 + x = 5$, $6x = 4$, $x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2};\infty\right)$.

Ответ: -1; $\frac{2}{3}$.

Задача. Решить уравнение $|x^2 - 14| = |x^2 - 4|$.

Решение. Так как $|x^2 - 14| \geq 0$ и $|x^2 - 4| \geq 0$, то, возведя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $(x^2 - 14)^2 = = (x^2 - 4)^2$, т.е. $x^4 - 28x^2 + 196 = x^4 - 8x^2 + 16$, т.е. $20x^2 = 180$, $x^2 = 9$, $x_{1,2} = \pm 3$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Решите уравнения:

а) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;

б) $x\,(x + 2) = 2x + 1$;

г) $\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

д) $\frac{2x-1}{x+2} + 2 = \frac{4x+3}{2x+1}$.

2. Решите уравнения методом группировки:

а) $x^3 - 8 + x - 2 = 0$;

б) $x^3 + x + 2 = 0$;

в) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0$;

г) $x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 16 = 0$.

3. Решите уравнения методом подстановки:

а) $6 - \frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 4x - x^2$;

б) $\frac{x-3}{x^2-4x+10} + \frac{x^2+4x+9}{x-3} = 2$;

в) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;

г) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.

4. Решите уравнения методом подбора:

а) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^4 - x^3 + 35x^2 + 57x + 90 = 0$;

в) $4x^3 + 6x^2 - 2x - 2 = 0$;

г) $2x^3 + 6x^2 - 9 = 0$.

5. Решите уравнения:

а) $|5x + 2| = 3 - 3x$; б) $|x| + |x - 1| = 1$;

в) $|x - 2| = |2x + 1|$; г) $x^2 + |x| - 2 = 0$.

3. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Предикат вида $f(x;y) = g(x;y)$ называют ***уравнением с двумя переменными.***

Любая пара $(a;b)$ значений переменных, обращающая уравнение $f(x;y) = g(x;y)$ в истинное числовое равенство, называется ***решением*** этого ***уравнения,*** а множество всех таких пар – ***множеством решений*** этого уравнения.

Задача. Определить, являются ли пары (1; 5) и (–2; 7) решениями уравнения $x + 2y = 12$, и записать множество решений данного уравнения.

Решение. Если $x = 1$, а $y = 5$, то уравнение $x + 2y = 12$ обращается в неверное числовое равенство $1 + 2\cdot5 = 12$. Следовательно, пара (1; 5) не является решением уравнения.

Если $x = –2$, а $y = 7$, то данное уравнение обращается в верное равенство $–2 + 2\cdot7 = 12$. Следовательно, пара (–2, 7) является решением уравнения $x + 2y = 12$.

Данное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для записи этого множества удобно выразить одну переменную через другую, например, x через y. Получим: $x = 12 – 2y$. Тогда множество T решений этого уравнения можно записать так: $T = \{(12 – 2y : y) \mid y \in R\}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Путем подбора найдите несколько решений каждого из следующих уравнений:

а) $x – y = 5$; б) $y = 3x$; в) $3x – 2y = 16$.

2. Найдите три решения уравнения $x + 2y = 7$ и запишите множество решений этого уравнения.

3. Найдите пары чисел, разность которых равна 10. Сколько решений имеет задача?

4. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пусть даны два уравнения $f_1(x,y) = g_1(x,y)$. ***Система уравнений представляет*** собой ***конъюнкцию этих уравнений***. Записывают систему так: $\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y). \end{cases}$

Решением этой системы является любая пара чисел $(a;b)$, обращающая каждое из уравнений системы в верное числовое равенство. *Множество таких пар есть пересечение множества решений первого уравнения с множеством решений второго.*

Поиск решения осуществляется ***преобразованиями*** уравнений системы, при которых множество ее решений не изменяется. Система, получаемая в результате таких преобразований, и исходная система называются ***равносильными.***

Равносильную систему можно получить, если: 1) Каждое из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение; 2) одно из уравнений системы заменить на сумму, разность, произведение или частное двух уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_2(x;y) = g_2(x;y). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y) \pm f_2(x;y) = g_1(x;y) \pm g_2(x;y). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ f_1(x;y)\cdot f_2(x;y) = g_1(x;y)\cdot g_2(x;y), \\ g_2(x;y) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y), \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)}, \\ g_2(x;y) \neq 0. \end{cases}$$

Основные методы решения систем уравнений:

1. *Метод подстановки*: из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другое и подставляем во второе уравнение системы.

Задача. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 6x + 2y = 3. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения системы выражаем *y* через *x* и подставляем во второе уравнение системы. Получим систему $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ 6x + 2(2 - 2x) = 3 \end{cases}$ равносильную исходной.

После приведения подобных членов система примет вид: $\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ 2x = -1. \end{cases}$

Из второго уравнения находим: $x = -\dfrac{1}{2}$. Подставив это значение в уравнение $y = 2 - 2x$, получим $y = 3$. Следовательно, решением данной системы является пара чисел $\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$.

2. *Метод алгебраического сложения*: путем сложения двух уравнений получить уравнение с одной переменной.

Задача. Решить систему уравнение:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

Решение. Умножив обе части второго уравнения на 2, получим систему $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 2x - 4y = 8, \end{cases}$ равносильную исходной. Сложив два уравнения этой системы, придем к системе $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ (3x + 4) + (2x - 4y) = 5 + 8. \end{cases}$

После приведения подобных членов данная система примет вид: $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 5x = 13. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x = \dfrac{13}{5}$. Подставив это значение в уравнение $3x + 4y = 5$, получим $3\cdot\frac{13}{5}+4y=5$, откуда $y=-\frac{7}{10}$.

Следовательно, решением данной системы является пара чисел $\left(\frac{13}{5};\frac{7}{10}\right)$.

3. *Метод введения новых переменных*: ищем в системе некоторые повторяющиеся выражения, которые обозначим новыми переменными, тем самым упрощая вид системы.

Задача. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy+x+y=5, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему иначе: $\begin{cases} xy+x+y=5, \\ xy(x+y)=6. \end{cases}$

Пусть $x + y = u$, $xy = v$. Тогда получим систему $\begin{cases} u+v=5, \\ u\cdot v=6. \end{cases}$

Решим ее методом подстановки. Из первого уравнения системы выразим u через v и подставим во второе уравнение системы. Получим систему $\begin{cases} u=5-v, \\ (5-v)\cdot v=6, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} u=5-v, \\ v^2-5v+6=0. \end{cases}$

Из второго уравнение системы находим $v_1 = 2$, $v_2 = 3$.

Подставив эти значения в уравнение $u = 5 - v$, получим $u_1 = 3$, $u_2 = 2$. Тогда имеем две системы $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$

Решая первую систему, получим две пары чисел (1; 2), (2; 1). Вторая система решений не имеет.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Решить системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 3x=y+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+y=2, \\ 6x+2y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ x+5y=-6. \end{cases}$

2. Решить систему уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} 2x+5y=-1, \\ 5x+y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 4x+3y=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2-y=-2, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений методом введения новых переменных:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}(x+y-2)=\frac{2}{3}, \\ \frac{y}{x}(x+y-1)=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{7}{x-7}-\frac{4}{y-6}=\frac{5}{3}, \\ \frac{5}{x-7}+\frac{3}{y+6}=\frac{13}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

V. НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

1. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется ***неравенством с одной переменной***. Множество X называется ***областью его определения.***

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его ***решением.*** Решить неравенство – это значит найти множество его решений.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называются ***равносильными,*** если их множества решений равны.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств.

Теорема 1. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекают ***следствия,*** которые часто используют при решении неравенств:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.

2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множествеX.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает ***следствие:*** если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Задача. Является ли число $x = 5$ решением неравенства $2x + 7 > 10 - x$, $x \in R$? Найти множество решений этого неравенства.

Решение. Число $x = 5$ является решением неравенства $2x + 7 > 10 - x$, так как $2 \cdot 5 + 7 > 10 - 5$ – истинное числовое неравенство. А множество его решений – это промежуток $(1; \infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства $2x + 7 > 10 - x \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$.

Задача. Решить неравенство $5x - 5 < 2x + 16$ и обосновать все преобразования, которые будут выполняться в процессе решения.

Решение.

Преобразования	**Обоснование преобразований**
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$.	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства – они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty; 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty; 7)$.

Задача. Равносильны ли неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$?

Решение. Данные неравенства равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Являются ли числа 3 и 4,25 решениями неравенства $6(2x + 7) < 15(x + 2)$?

2. Равносильны ли на множестве R следующие пары неравенств:

а) $-17x < -51$ и $x > 3$;

б) $\frac{3x-1}{4} > 0$ и $3x - 1 > 0$;

в) $6 - 5x > -4$ и $x < 2$;

г) $\frac{2x+3}{5} > 1$ и $2x + 3 > 0$?

3. Решите неравенства и обоснуйте преобразования, которые будете при этом выполнять:

а) $4 - \frac{3}{2}x > \frac{13}{8} - \frac{1}{6}(4x-3)$;

б) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{7}{12}x - 0{,}3\right) < 5{,}8 - \left(\frac{2}{3}x + 0{,}6\right)$;

в) $(0{,}4x - 2) - (1{,}5x + 1) \geq 3{,}6 + (-4x - 0{,}8)$;

г) $\frac{7-9x}{4} + \frac{3}{2}x - 6 < \frac{x-1}{8} + 2$.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

1. ***Линейные неравенства***, т.е. неравенства вида $ax > b$, где a и b – действительные числа, а x – неизвестное.

В зависимости от коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть либо неограниченный промежуток, либо вся числовая прямая, либо пустое множество.

Задача. Решить неравенство $4x + 5 > 2(2x - 3)$.

Решение. $4x + 5 > 2(2x - 3) \Leftrightarrow 4x + 5 > 4x - 6 \Leftrightarrow 4x + 5 - 4x + 6 > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 11 > 0 \Rightarrow x \in R$.

2. Квадратные неравенства имеют вид $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $a \neq 0$.

Решение квадратных неравенств основано на применении свойств квадратичной функции, которые допускают наглядную геометрическую интерпретацию, а также методом интервалов.

Задача. Решить неравенство $3x^2 - 7x + 2 > 0$.

Решение. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 2$: $D = 49 - 24 = 25$. Вычислим его корни: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Схематично выполним соответствующий рисунок параболы:

По рисунку найдем решение данного неравенства:

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; \infty)$.

3. Алгебраические неравенства высших степеней, т.е. неравенства вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0 > 0$ (< 0), $n > 2$.

С помощью методов решения алгебраических уравнений многочлен степени $n > 2$ разложить на множители, т.е. неравенство записать в виде

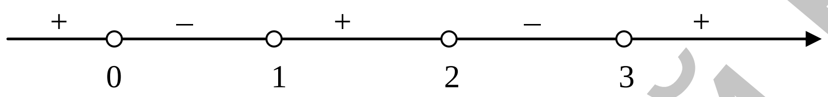
$a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0 \ (< 0)$.

При этом следует сокращать на заведомо положительные выражения или отрицательные (в последнем случае знак неравенства менять на противоположный). Затем методом интервалов найти решение.

Задача. Решить неравенство $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$.

Решение. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) < 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 - 5x + 6) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$.

Используем метод интервалов:



По рисунку запишем решение данного неравенства $x \in (0; 1) \cup (2; 3)$.

4. Дробно-рациональные неравенства. При решении таких неравенств можно придерживаться следующей схемы: перенести все члены неравенства в левую часть; все члены неравенства в левой части привести к общему знаменателю, т.е. неравенство записать в виде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0 \ (< 0)$; решить полученное уравнение методом интервалов.

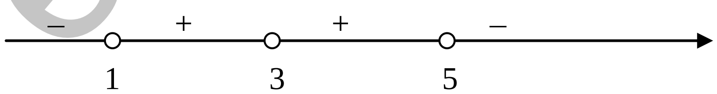
Задача. Решить неравенство $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x}$.

Решение. $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{4 - x}{x - 5} - \frac{1}{1 - x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4 - x - 4x + x^2 - x + 5}{(x - 5)(1 - x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{(x - 5)(1 - x)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x - 3)^2}{(x - 5)(1 - x)} > 0$.

Используем метод интервалов:

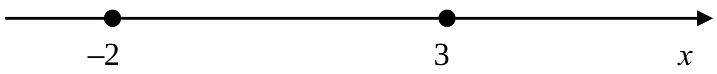


По рисунку запишем решение неравенства: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

5. Неравенства с модулем. При решении неравенств с неизвестными под знаком модуля пользуются определением модуля, его свойствами, методом промежутков.

Задача. Решить неравенство $|x - 3| + |x + 2| - x > 5$.

Решение. На числовой оси отметим значения, при которых $x - 3 = 0$ и $x + 2 = 0$.



Рассмотрим неравенство на каждом из полученных промежутков.

а) Если $x < 2$, то неравенство принимает вид $-x + 3 - x - 2 - x > 5$, т.е. $-3x > 4$, $x < -\frac{4}{3}$.

Из соотношений $x < -2$ и $x > -\frac{4}{3}$ следует, что $x < -2$ является решением данного неравенства.

б) Если $-2 \le x < 3$, то неравенство примет вид $-x + 3 + x + 2 - x > 5$, т.е. $-x > 0$, $x < 0$.

Из соотношений $-2 \le x < 3$ и $x < 0$ следует, что $-2 \le x < 3$ является решением данного неравенства.

в) Если $x \ge 3$, то $x - 3 + x + 2 - x > 5$, т.е. $x > 6$, является решением данного неравенства.

Объединим найденные решения данного неравенства на различных промежутках и получим окончательное решение $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$.

Задача. Решить неравенство $|x + 2| \ge |x|$.

Решение. Так как обе части неравенства неотрицательны при любых $x \in R$, то можно выстроить «цепочку» равносильных неравенств:

$|x + 2| \ge |x| \Leftrightarrow (x + 2)^2 \ge x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow 4x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow 4x \ge -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \ge -1$.

Полученное решение и будет решением данного неравенства.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Решите неравенства:

а) $x - \frac{x}{4} > \frac{3x}{2} + 12$; в) $\frac{1{,}3 - 3x}{2} + \frac{5x - 0{,}4}{0{,}3} \le \frac{1{,}8 - 8x}{1{,}2}$;

б) $x + \frac{x}{3} < \frac{x}{6} + 14$; г) $\left(\frac{5}{2}x - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{4} - \frac{x}{3}\right) < \frac{69}{8} + x + 1$.

2. Решите неравенства:

а) $1 + x - 2x^2 < 0$; в) $3x^2 - 7x + 5 \le 0$;

б) $3x^2 - 12x + 12 \le 0$; г) $2x^2 - 12x + 18 > 0$.

3. Решите неравенства:

а) $(5x - 1)(2 - 3x)(x + 3) > 0$; в) $(x - 3)(x - 1)^2(3x - 6 - x^2) < 0$;

б) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \le 0$; г) $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \ge 0$.

4. Решите неравенства:

а) $\frac{(3-x)(2x+1)}{(x-2)(x+1)} < 0$; в) $x + \frac{6}{x} < 7$;

б) $\frac{x+2}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \le \frac{1-2x}{x^3+1}$.

5. Решите неравенства:

а) $|x + 1| + |x - 1| < 4$; в) $|x + 3| < |x - 1|$;

б) $|x| + |x - 1| > 1$; г) $|x^2 - 14| > |x^2 - 4|$.

3. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть даны два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$. ***Система неравенств*** представляет ***собой конъюнкцию этих неравенств***. Записывают систему так: $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$

Решением этой системы является всякое значение переменной x, которое обращает каждое из неравенств в истинное числовое неравенство. *Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений неравенств, образующих данную систему.*

Неравенство $|x| < a$, где $a > 0$, равносильно системе $\begin{cases} x < a, \\ x > -a \end{cases}$ или двойному неравенству $-a < x < a$.

Совокупность неравенств $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ ***представляет*** собой ***дизъюнкцию этих неравенств***.

Записывают совокупность так: $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{array}\right.$

Решением этой совокупности является всякое значение переменной x, которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств совокупности. *Множество решений совокупности есть объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.*

Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$

Задача. Найти множество решений системы неравенств: $\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases}$

Решение. Найдем множества решений каждого из неравенств системы, а затем – их пересечение. Преобразуем каждое из неравенств к виду $x > a$ или $x < a$.

$$\begin{cases} 5(x+1)-9x-3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x-2(x-8). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+5-9x-3 > -6x-12, \\ 9+6x < 7x-2x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-9x+6x > -12-5+3, \\ 6x-7x+2x < 16-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -14, \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x < 7. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $x > -7$ есть числовой промежуток $(-7; \infty)$, а множество решений неравенства $x < 7$ – промежуток $(-\infty; 7)$. Найдем их пересечение: $(-7; \infty) \cap (-\infty; 7) = (-7; 7)$. Таким образом, множеством решений данной системы является промежуток $(-7; 7)$.

Задача. Решить неравенство $|x + 3| \le 4$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-4 \le x + 3 \le 4$. Решая его, находим, что $-7 \le x \le 1$, т.е $x \in [-7; 1]$.

Задача. Найти множество решений совокупности $\left[\begin{aligned} &2x-3 > x-1, \\ &4x+3 > 8-x. \end{aligned}\right.$

Решение. Найдем сначала множества решений каждого из неравенств совокупности, а затем их объединение.

Преобразуем каждое из неравенств совокупности, заменяя его равносильным: $\left[\begin{aligned} &2x-3 > x-1, \\ &4x+3 > 8-x \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2x-x > 3-1, \\ &4x+x > 8-3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x > 2, \\ &5x > 5 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x > 2, \\ &x > 1. \end{aligned}\right.$

Множество решений неравенства $x > 2$ есть числовой промежуток $(2; \infty)$, а множество решений неравенства $x > 1$ – промежуток $(1; \infty)$. Найдем их объединение: $(2; \infty) \cup (1; \infty) = (1; \infty)$. Следовательно, множество решений совокупности есть числовой промежуток $(1; \infty)$.

Задача. Решить неравенство $|x + 3| > 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &x+3 > 5, \\ &x+3 < -5 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x > 2, \\ &x < 8. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, решением полученной совокупности является числовой промежуток $(-\infty; -8) \cup (2; \infty)$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите множества истинности следующих конъюнкций неравенств и изобразите их на числовой прямой:

а) $(x > 3) \wedge (x > 5)$;
б) $(x < 3) \wedge (x < 5)$;
в) $(x \ge -4) \wedge (x \le -2)$;
г) $(x \ge -7) \wedge (x \ge -9)$;
д) $(x > 4) \wedge (x \le -2)$;
е) $(x \ge -6) \wedge (x < 11)$.

2. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-5>23-4x, \\ 7x+3<9x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x-2\ge 2x+1, \\ 2x+3>18x-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{5-x}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7, \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}3x-4+x<7{,}2-8x, \\ 2x-7-0{,}2x\le(8x-5)\cdot 0{,}3. \end{cases}$

3. Найдите множества решений неравенств:

а) $|x-6|<13$; в) $|3x-6|\le 0$;

б) $|5-2x|\le 3$; г) $|3x-8|<-1$.

4. Найдите множества истинности следующих дизъюнкций неравенств:

а) $(x>-9)\vee(x>1)\vee(x>6)$; г) $(x<2)\vee(x>8)$;

б) $(x\le-3)\vee(x<7)\vee(x\le 0)$; д) $(x<10)\vee(x>7)$;

в) $(x\le 4)\vee(x<6)\vee(x\ge 8)$; е) $(x<12)\vee(x>5)$.

5. Решите следующие совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x+1>3x-4, \\ 5x+3<8x+21; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} 3-0{,}5x\le 7+1{,}6x, \\ 1{,}4+8x\le 3-x; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x-1\ge 2x-3, \\ 4x+5>x+17; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} 0{,}4x+7{,}8>3x-9{,}6, \\ 9x-6>1{,}1(x+3). \end{array}\right.$

6. Найдите множества решений неравенств:

а) $|x|>6$; г) $|3x+8|>0$;

б) $|2x-3|\ge 7$; д) $|2x+4|\ge 0$;

в) $|3-7x|>5$; е) $|9x-18|>-1$.

7. Решите системы и совокупности неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-5>3-x, \\ x^2+x-2>0; \end{cases}$ в) $\left[\begin{array}{l} 2x-6\ge 3-x, \\ x^2+2x-8<0; \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} x^2-5x-6\le 0, \\ x^2+x-6>0; \end{cases}$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2+5x-14\le 0, \\ x^2+9x+8\le 0. \end{array}\right.$

4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ И СОВОКУПНОСТЕЙ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пусть *f(x, y)* и *g(x, y)* – два выражения с переменными *x* и *y* и областью определения *X*. Тогда неравенства вида *f(x, y) > g(x, y)* или *f(x, y) < g(x, y)* называется ***неравенством с двумя переменными***.

Значение переменных *x, y* из множества *X*, при которых неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его ***решением*** и обозначается *(x, y)*. ***Решить неравенство*** – это значит найти множество таких пар.

Если каждой паре чисел *(x, y)* из множества решений неравенства поставить в соответствие точку *M(x, y)*, получим множество точек на плоскости, задаваемое этим неравенством. Его называют ***графиком данного неравенства***. График неравенства обычно является областью на плоскости.

Чтобы изобразить множество решений неравенства $f(x, y) > g(x, y)$, поступают следующим образом. Сначала заменяют знак неравенства знаком равенства и находят линию, имеющую уравнение $f(x,y) = g(x,y)$. Эта линия делит плоскость на несколько частей. После этого достаточно взять в каждой части по одной точке и проверить, выполняется ли в этой точке неравенство $f(x, y) > g(x, y)$. Если оно выполняется в этой точке, то оно будет выполняться и во всей части, где лежит эта точка. Объединяя такие части, получаем множество решений.

Задача. Решить графически неравенство $y > x$.

Решение. Сначала заменим знак неравенства знаком равенства и построим в прямоугольной системе координат линию, имеющую уравнение $y = x$.

Эта линия делит плоскость на две части. После этого возьмем в каждой части по одной точке и проверим, выполняется ли в этой точке неравенство $y > x$.

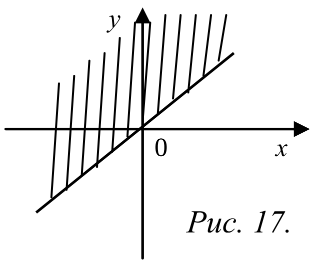


Рис. 17.

Задача. Решить графически неравенство $x^2 + y^2 \leq 25$.

Решение. Сначала заменим знак неравенства знаком равенства и проведем линию $x^2 + y^2 = 25$. Это окружность с центром в начале координат и радиусом 5. Полученная окружность делит плоскость на две части. Проверяя выполнимость неравенства $x^2 + y^2 \leq 25$ в каждой части, получаем, что графиком является множество точек окружности и части плоскости внутри окружности.

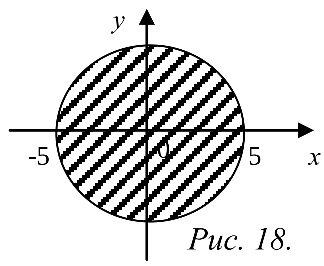


Рис. 18.

Пусть даны два неравенства $f_1(x, y) > g_1(x, y)$ и $f_2(x, y) > g_2(x, y)$.

Система неравенств представляет собой ***конъюнкцию этих неравенств. Решением системы*** является всякое значение (x, y), которое обращает каждое из неравенств в истинное числовое неравенство. ***Множество решений системы*** неравенств есть пересечение множеств решений неравенств, образующих данную систему.

Совокупность неравенств представляет собой ***дизъюнкцию этих неравенств. Решением совокупности*** является всякое значение (x, y), которое обращает в истинное числовое неравенство хотя бы одно из неравенств совокупности. ***Множество решений совокупности*** есть объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Задача. Решить графически систему неравенств $\begin{cases} y \geq x, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$

Решение. Сначала заменяем знак неравенства знаком равенства и проводим в одной системе координат линии $y = x$ и $x^2 + y^2 = 25$. Решаем каждое неравенство системы.

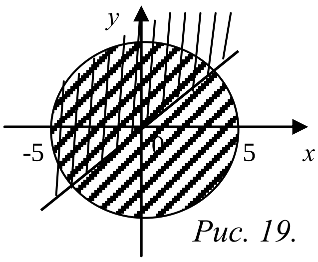


Рис. 19.

Графиком системы будет множество точек плоскости, являющихся пересечением (двойная штриховка) множеств решений первого и второго неравенств.

Задача. Решить графически совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} y \leq x + 4, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{array}\right.$

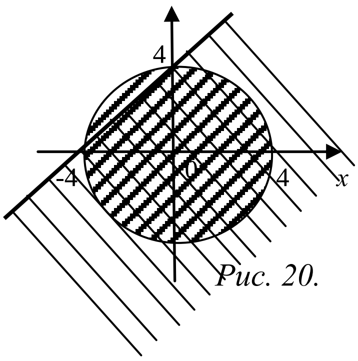


Рис. 20.

Решение. Сначала заменяем знак неравенства знаком равенства и проводим в одной системе координат линии $y = x + 4$ и $x^2 + y^2 = 16$. Решаем каждое неравенство совокупности. Графиком совокупности будет множество точек плоскости, являющихся объединением множеств решений первого и второго неравенств.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Решите графически неравенства: а) $y > 2x$; б) $y < 2x + 3$; в) $x^2 + y^2 > 9$; г) $x^2 + y^2 \leq 4$.

2. Решите графически системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \leq 2x + 2, \\ y \geq 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ x^2 + y^2 \geq 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq 3x, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x^2 + y^2 \geq 25. \end{cases}$

3. Решите графически совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} y \geq -x + 2, \\ y < -x; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x^2 + y^2 \geq 25; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} y \leq x + 3, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 16, \\ x^2 + y^2 \geq 4. \end{array}\right.$

VI. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

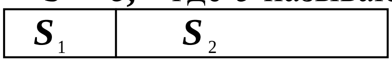
Величины – это особые свойства реальных объектов или явлений. Например, свойство предметов иметь протяженность называется длиной. Это же слово мы употребляем, когда говорим о протяженности конкретных объектов.

Величины бывают однородные и разнородные. ***Однородные величины*** выражают одно и тоже свойство объектов некоторого множества. Например, длина дома и длина пути. ***Разнородные*** выражают различные свойства предметов. Например, длина комнаты и площадь комнаты.

Величины обладают следующими ***свойствами:***

1. В пределах системы всех однородных величин устанавливается отношение неравенства: две величины $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одного и того же рода или совпадают ($\boldsymbol{a = b}$), или первая меньше второй ($\boldsymbol{a < b}$), или вторая меньше первой ($\boldsymbol{b > a}$). **Например**, длина гипотенузы больше длины катета, масса одного апельсина меньше массы одного арбуза, площадь детской комнаты равна площади спальни и т.д.

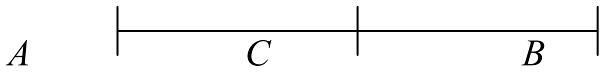
2. Величины одного и того же рода можно складывать. В результате получается величина того же рода: $\boldsymbol{a + b = c}$, где $\boldsymbol{c}$ называют суммой величин. **Например,** $\boldsymbol{S_1 + S_2 = S}$



3. Величину можно умножать на действительное число, получая величину того же рода: $\boldsymbol{b = x \cdot a}$, где величина $\boldsymbol{b}$ называется произведением. **Например,** длину отрезка $AB = a$ умножим на 5. Получим новый отрезок $AC = 5a$.

4. Величины одного и того же рода вычитают: $\boldsymbol{c = a - b}$, т.е. $\boldsymbol{c}$ такая величина, что $\boldsymbol{a = b + c}$. **Например,** масса яблок и груш равна $\boldsymbol{a}$, масса яблок – $\boldsymbol{b}$, тогда масса груш определится как $\boldsymbol{a - b = c}$.

5. Величины одного и того же рода делят: $\boldsymbol{c = a : b}$, где $\boldsymbol{c}$ – частное, т.е. $\boldsymbol{c}$ такая величина, что $\boldsymbol{a = b \cdot c}$. **Например**, отношение длины отрезка $\boldsymbol{AB = a}$ к длине отрезка $\boldsymbol{AC = c}$ равно ***2.***



6. Некоторые величины разного рода умножают и делят, получая в результате величину третьего рода. **Например**, $\boldsymbol{S = v \cdot t}$, $\boldsymbol{S_{òð} = \frac{1}{2} a \cdot h}$.

Измерение заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. В результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице. Если дана величина $\boldsymbol{a}$ и выбрана единица величины $\boldsymbol{e}$, то в результате измерения величины $\boldsymbol{a}$ находят такое действительное число ***x,*** что ***a = xe***. Это число ***x*** называют *численным значением величины* ***a*** при единице величины ***e:*** $\boldsymbol{x = m_e(a)}$.

Например, *5 кг* = $5 \cdot 1$*кг,* 10 *м* = $10 \cdot 1$*м.*

При этом считают, что 1) равным величинам при одной и той же величине соответствуют равные числовые значения; 2) большей величине соответствует большее числовое значение при одной и той же единице ***e***; 3) числовое значение суммы величин при одной и той же единице ***e*** равно сумме числовых значений слагаемых величин.

Используя определение умножения величины на число, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Например, $\frac{1}{12}$*ч* $= \frac{1}{12} \cdot 1$*ч,* а 1*ч* = 60 *мин.* Следовательно, $\frac{1}{12}$*ч* $= \frac{1}{12} \cdot 60$ *мин* = 5 *мин.*

Операции над величинами сводятся к операциям над числами.

1. Если величины ***a*** и ***b*** измерены при помощи единицы величины ***e***, то отношения между величинами ***a*** и ***b*** будут такими же, как и отношения между их численными значениями: $\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)}$

$\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)}$ $\boldsymbol{a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)}$.

Например, 9 *м* > 5 *м*, так как 9 > 5.

2. Если величины ***a*** и ***b*** таковы, что ***b = xa***, где ***x*** – положительное число и величина ***a*** измерена при помощи единицы ***e***, то чтобы найти численное значение величины ***b*** при единице ***e***, достаточно число ***x*** умножить на число $\boldsymbol{m_e(a)}$: $\boldsymbol{b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)}$.

Например, если масса ***b*** в 3 раза больше массы а, т.е. *b* = 3*a* и *a* = 5 *кг*, то *b* = 3*a* = 3 · (5*кг*) = (3 · 5) *кг* = 15 *кг*.

3. Если величины ***a*** и ***b*** измерены при помощи единицы ***e***, то чтобы найти численное значение суммы ***a + b***, достаточно сложить численные значения **a** и ***b***: $\boldsymbol{a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)}$.

Например, *a* = 10 *см, b* = 20 *см*, тогда *a* + *b* = 10 *см* + 20 *см* = (10 + 20) *см* = 30 *см.*

Величины, которые определяются через длину, массу и время, называют ***производными величинами.*** Например, единица площади – квадратный метр ($м^2$), единица объема – кубический метр ($м^3$), литр (л), единица скорости – метр в секунду (м/с) и пр., для массы разрешается применение такой единицы, как тонна (т); для времени – минута (мин), час (ч), сутки, неделя, месяц, год, век; для площади – гектар (га); для температуры – градус Цельсия (^{0}С).

Из основных единиц образуют другие единицы – кратные и дольные, которые образованы из основных с помощью приставок:

Наименование приставки	*Обозначение приставки*	*множитель*
мега	М	10^6
кило	к	10^3
гекто	г	10^2
дека	да	10
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
макро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}

Назовем ***длиной отрезка*** положительную величину такую, что

1) равные отрезки будут иметь равные длины
2) если отрезок разбить на конечное число отрезков, то его длина будет равна сумме длин этих отрезков.

Основные свойства длин отрезков:

1) При выбранной единице длина отрезка выражается положительным действительным числом. И для каждого действительного числа существует отрезок, длина которого выражена этим числом.

2) Если два отрезка равны, то численные значения их длин т.ж. равны и обратно, при равенстве численных значений длин двух отрезков получаем равенство самих отрезков.

3) Если данный отрезок есть сумма нескольких отрезков, то численное значения его длины равно сумме численных значений длин отрезков слагаемых. Если численное значение длины отрезка = сумме численных значений нескольких значений, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков: $c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b)$

4) Если длины отрезков a и b таковы, что $b = x \cdot a$, где x– положительное действительное число, и длина a измерена при помощи единицы e , то, чтобы найти численное значение длины b при единице e, достаточно число x умножить на численное значение длины a:

$$b = x \cdot a, \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$$

5) При замене единицы длины численное значение длины увеличивается(уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

6) Если длина отрезка a больше длины отрезка b, то численное значение отрезка a больше численного значения отрезка b при выбранной единице e : $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$

7) Если данный отрезок есть разница двух отрезков, то численное значение его длины равно разности численных значений длин отрезков, составляющих разность и обратно: $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$

8) Положительное число x есть отношение длин отрезков a и b при выбранной единице e: $x = a : b \Leftrightarrow x = m_e(a) : m_e(b)$

Единицы измерения длины: сантиметр, дециметр, метр, километр, миллиметр.

Площадью фигуры называют положительную величину, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. равные фигуры имеют равные площади,
2. если фигура разбивается на части, то площадь этой фигуры равна сумме площадей этих частей.

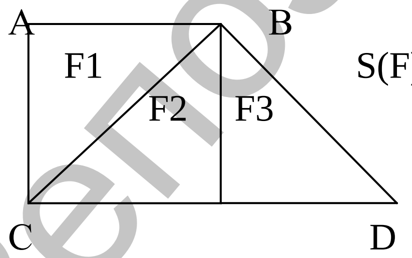
Площадь характеризуется теми же свойствами, что и длина, но заданы они на разных множествах: длина – на множестве отрезков, а площадь – на множестве плоских фигур. Условимся обозначать площадь $S(F)$.

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, это площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку e: $S = e^2$. Например, если длина стороны единичного квадрата a, то его площадь a^2.

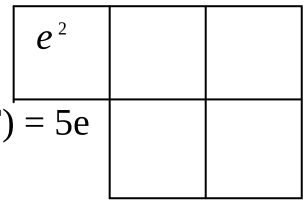
Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата e^2. Результатом этого сравнения является такое число x, что $S(F)=x\,e^2$. Число x называют численным значением площади при выбранной единице площади.

Например, площадь квадрата со стороной 4 единицы равна $4^2=16$ единиц квадратных, если единицей площади является $см^2$, то площадь фигуры равна 4 $см^2$.

Рассмотрим некоторые приемы измерения площадей фигур.



S(F) = S(F1) + S(F2) + S(F3)

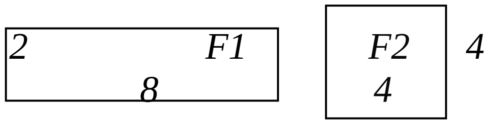


S(F) = 5e

Правила сравнения площадей и действий над ними.

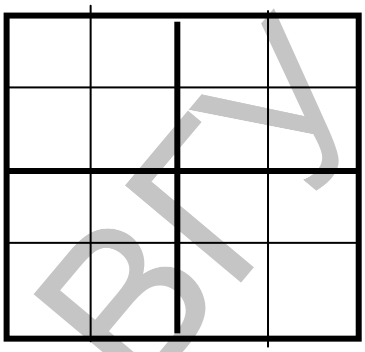
1. Если фигуры равны, то равны и численные значения их площадей. Но если площади фигур равны, то фигуры не будут равными.

Фигуры, у которых площади равны, называют *равновеликими.*

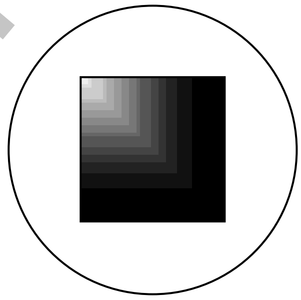


$S(F1) = 16e^2$, $S(F2) = 16e^2$

Если фигура F состоит из фигур *F1, F2, F3, …Fn,* то численное значение площади этой фигуры $S(F) = S(F1) + S(F2) + … + S(Fn)$ при одной и той же единице площади. Например: пусть площадь единичного квадрата равна 1 см^2. Тогда площадь данной фигуры будет следующей: $S(F) = 16 \cdot (1$ см$)^2 = 16$ см^2; $S(F) = 4 \cdot S(F1) = 4 \cdot (4$ см$)^2 = 16$ см^2; $S(F) = S(F1) + 3 \cdot S(F2) = 4$ см$^2 + 3 \cdot (4$ см$)^2 =$ $= 16$ см^2.

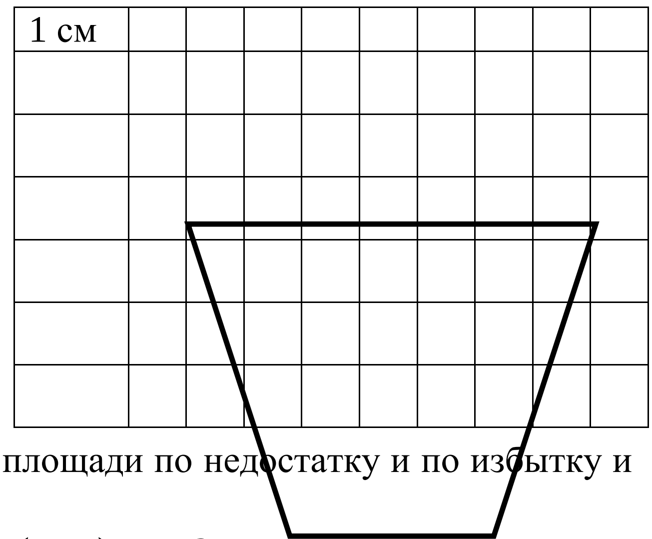


2. При замене единицы площади численное значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во *сколько новая единица меньше (больше) старой. Например:* 7 *см*^{2} выразим в дециметрах. 1 дм = 10 см. Значит, 1 см^2 = 0,01 дм^2. Следовательно, 7 см^2 = $= 7 \cdot 0{,}01$ дм$^2 = 0{,}07$ дм^2.



В начальной школе понятие площади фигуры формируется на основе сравнения фигур: так как квадрат помещается внутри круга, то его площадь меньше площади круга.

Площадь фигуры, учащиеся определяют с помощью палетки: 1) считают число квадратов, которые лежат полностью внутри фигуры; 2) считают число квадратов, через которые проходит контур фигуры. В результате получают приближенное значение площади. Если *n* – число целых квадратов, *p* – число квадратов, через которые прошел контур, то площадь фигуры может быть представлена так: $n \cdot e^2 < S(F) < (n + p) \cdot e^2$. Тогда, чтобы найти приближенное значение площади фигуры F, достаточно сложить полученные численные значения площади по недостатку и по избытку и разделить эту сумму пополам.



$$S(F) \approx \frac{ne^2 + (n+p)e^2}{2} = \frac{n + (n+p)}{2} \cdot e^2 = \frac{2n+p}{2} \cdot e^2 = (n + \frac{p}{2}) \cdot e^2 .$$

Например, оказалось, что полных квадратов 12, квадратов, через которые прошел контур фигуры – 20. В результате получаем значение площади фигуры*:* $12 + 20 : 2 \approx 12 + 10 = 22$. Значит $S(F) = 22$ см^2

Единицы площади: 1 см^2 = 100 мм^2, 1 дм^2 = 100 см^2, 1 м^2 = = 100 дм^2, 1а=100 м^2, 1га=100а, 1км^2=100га (а – ар – сотка, га – S квадрата со стороной 100м).

Для простых тел ***объем –*** это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами: 1) равные тела имеют равные объемы, 2) если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем данного тела равен сумме объемов его частей. Объем тела Т обозначают **V(T).**

Чтобы измерить объем, нужно иметь единицу объема. Как правило, за такую единицу принимают объем куба, ребро которого равно единице длины *e,* т.е e^3.

Чтобы сравнить объемы двух сосудов, можно наполнить один из них водой (песком) и перелить во второй. Если второй сосуд окажется заполненным и воды в первом не останется, то V1 = V2, если второй не заполнится весь, то V1 < V2, если же в первом останется вода, то V1 > V2.

Если тело разбить на части и потом сложить их по иному, то объем полученного тела будет равен объему исходного. Этим правилом пользуются для отыскания формул объемов различных тел. Например, наклонный параллелепипед можно разбить на части и переложить так, что получится прямоугольный параллелепипед. Следовательно, объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (так же как и прямоугольного).

Единицы измерения объемов: 1 см^3 = 1000 м^3, 1 дм^3 = 1000 см^3, 1 м^3 = 1000 дм^3, 1 км^3 =1000 000 000 м^3.

Масса – одна из основных физических величин. **Вес** – это сила с которой тело притягивается землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. **Например,** он различен на разных широтах: на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе. Однако при своей изменчивости вес обладает особенностью: отношения весов двух тел в любых условиях остается неизменным.

С математической точки зрения **масса –** это такая положительная величина, которая обладает свойствами: 1) масса одинакова у тел, уравновешивающих друг друга на весах. 2) масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.

Измерение массы производится с так же помощью весов. При этом выбирается единичное тело *e,* масса которого принимается за единицу. Можно взять и доли этой массы. На одну чашу весов кладут тело, которое измеряют, на другую _ тела, выбранные в качестве единицы массы (гири). Гирь должно быть столько, чтобы они уравновешивали первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела. Это значение приближенное. **Например,** m = 15 кг 240 г. Число 15240 следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела при единице массы – грамм: 1 г = 1/1000 кг.

Если сравнивать данное выше определение массы с определения длины, площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины. Т.е., сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над их численными значениями при одной и той же единице массы.

Единицы измерения массы: 1 т = 1000 кг, 1 ц = 100 кг, 1 т = = 10 ц, 1 кг = 1000 г. Основная единица массы – килограмм, из нее и образуются другие единицы.

Понятие ***времени*** более сложное, чем понятие длины и массы. В обыденной жизни время – это то, что отделяет одно событие от другого. В математике и физике время рассматривают как скалярную величину, потому что промежутки времени обладают свойствами, похожими на свойства длины, площади, массы.

1) Промежутки времени можно сравнивать. Например, на один и тот же путь пешеход затратит времени больше, чем велосипедист.

2) Промежутки времени можно складывать. Например, лекция в вузе длится столько, сколько два урока в школе.

3) Промежутки времени можно вычитать. Так, например, можно найти разницу во времени движения лодки по течению и против течения.

4) Промежутки времени можно умножать на положительное число. Например, автомобиль проедет 60 км за 1 час, а 120 км за 2 часа (1 час $\cdot$ 2).

4) Промежутки времени измеряют. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Для измерения длины можно многократно использовать линейку, перемещая ее от точки к точке. Промежуток времени, принятый за единицу, может быть использован лишь один раз. Поэтому единицей времени может быть регулярно повторяющийся процесс. Такой единицей в Международной системе единиц названа секунда.

Единицы измерения времени: секунда, минута, час, сутки, год, неделя, месяц, век.

Рассмотрим, какие **зависимости между величинами** существуют.

Например, рассмотрим величины, связанные с равномерным прямолинейным движением: время (t), скорость (ϑ), расстояние (S). Зависимость между ними выражается следующей формулой: $S = \vartheta \cdot t$. Если при этом скорость принимает одно и то же значение, то зависимость между расстоянием S и временем t прямопропорциональна. Если же не меняется расстояние, то скорость ϑ и время t оказываются связанными обратно пропорционально: $\vartheta = S / t$ либо $t = S / \vartheta$.

Прямопропорциональная зависимость между временем и расстоянием обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) время, во столько же раз увеличивается (уменьшается) пройденное расстояние.

Обратно пропорциональная зависимость выражается так: во сколько раз во сколько раз увеличивается (уменьшается) время (скорость), во столько же раз уменьшается (увеличивается) скорость (время).

Многообразные зависимости существуют и между другими величинами: объемом и массой; стоимостью товара, количеством и ценой; объемом работы, временем работы и производительностью труда; количеством ткани, количеством изделий и расходом ткани на одно изделие и пр.

Рассмотрим зависимости между другими величинами.

Цена – стоимость в деньгах. Например, цена билета. Стоимость – это выраженная в деньгах ценность чего-нибудь или величина затрат на что-нибудь. Цена отражает уровень общественно необходимых затрат труда. Стоимость определяется общественно необходимым рабочим временем. Зависимость между этими величинами может быть такой: *стоимость = количество товара · на цену.*

Задача. Выразить в сантиметрах 9 дм 6 см, 8 см 79 мм: так как 1 дм = 10 см, а 1 см = 10 мм, то 9 дм 6 см = 90 см + 6 см = 96 см; 8 см 79 мм = 8 см + 7 см + 0,9 см = 15,9 см.

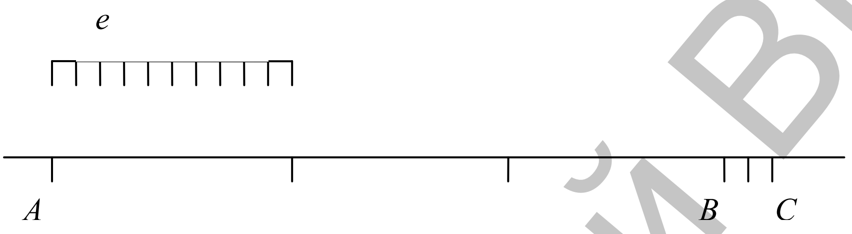
Выразить метрах 2 км 300 м, 2 км 10 дм 5 мм. В 1 км содержится 1000 м, в 1 м – 10 дм, 1 м = 1000 мм, то 2 км 300 м = 2000 м + 300 м = = 2300 м; 2 км 10 дм 5 мм = 2000 м + 1 м + 0,005 м = 2001,005 м.

Выразить в килограммах: 750 г, 3 т 7 ц. Так как в 1 кг содержится 1000 г, а в 1т – 1000 кг, в 1 ц – 100 кг, то 750 г = 0,75 кг, 3 т 7 ц = = 3000 кг + 700 кг = 3700 кг.

Выразить в минутах: 8 ч 12 с, 4 ч 25 мин. Так как 1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 с, то 8 ч 12 с = 8 · 60 мин + 12: 60 (мин) = 480 мин + 0,2 мин = 480,2 мин, 4 ч 25 мин = 4 · 60 мин + 25 мин = 240мин + 25 мин = = 265 мин.

Задача. Построить отрезок, длина которого 3,2*е*. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины *е* увеличить в 3 раза?

Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую и отметим на ней точку *А* и отложим от нее 3 таких единичных отрезка. Получим отрезок *АВ*, длина которого равна *3е.* Чтобы получить отрезок длиной 3,2*е*, надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок е надо разбить на 10 равных частей. Поскольку 0,2 =1/5, то от точки В отложим отрезок, равный 1/5 единичного и длина отрезка *АС* будет равна 3,2*е.*



Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством, согласно которому при увеличении единицы длины в *3* раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим 3,2 на 3 и получим 16/15. Таким образом, при единице длины 3е численное значение построенного отрезка АС будет равно $\frac{16}{15}$.

Задача. Из пункта А в пункт В вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от В будет он находиться через 2 часа и через 4 часа, если расстояние АВ = 20 км?

Решение: Пусть t – время движения, S – расстояние от пункта В. Тогда за t часов пешеход пройдет 4 км и будет находиться от В на расстоянии $S = 20 - 4t$. Т.о. зависимость между пройденным расстоянием и временем движения имеет вид линейной функции: $S = S_0 - \mathcal{V} \cdot t$, где S_0 - расстояние между пунктами А и В. Если t = 2 ч, то S = 12 км, если t = 4 ч, то S = 4 км.

Задача. Скорость машины 60 км/ч, скорость велосипедиста в 5 раз меньше. Велосипедист проехал расстояние от села до станции за 2 ч. За сколько минут можно проехать это расстояние на машине?

Решение: В задаче идет речь о трех величинах: скорости, времени и расстоянии. Две из них – скорость и время – принимают различные значения, а третья величина – расстояние – постоянна. Зависимость между скоростью и временем обратно пропорциональна и может быть выражена формулой $t = S / \mathcal{V}$.

Поскольку скорость машины в 5 раз больше скорости велосипедиста, то времени для машины надо в 5 раз меньше, т.е. 2 ч = 2 · 60 мин = 120 мин и 120 мин : 5 = 24 мин.

Задача. Стальной брусок объемом 60 $см^3$ имеет массу 468 г. Какова масса стального бруска, объемом 25 $см^3$?

Решение: В задаче рассматриваются величины: объем бруска и его масса. Зависимость между ними прямопропорциональная, т.к. может быть выражена формулой $m = k \cdot V$, где m – масса, V – объем, k – коэффициент, означающий массу 1 $см^3$ бруска. Воспользуемся свойством прямой пропорциональности. Установим, во сколько раз объем первого бруска больше объема второго: 60 $см^3$: 25 $см^3$ = 2,4 (раза). Так как зависимость прямопропорциональная, то масса первого бруска в 2,4 раза больше массы второго. Разделим массу первого бруска на 2,4 и найдем массу второго бруска, объемом 25 $см^3$. 468 : 2,4 = 195 (г).

Задача. Цена одного карандаша 300 рублей. Запишем формулу, выражающую зависимость стоимости (***y*** *руб*) от количества (***x*** *штук кар*): $\boldsymbol{y} = 300 \cdot \boldsymbol{x}$ – прямопропорциональная зависимость.

Пусть за все карандаши заплатили 1200 рублей. Запишем формулу, выражающую зависимость количества карандашей (***x*** *штук*) от их цены (***z*** *коп*): $\boldsymbol{z} = 1200 / \boldsymbol{x}$, что представляет собой обратно пропорциональную зависимость.

Задача. Как изменится площадь прямоугольника, если основание и высоту его увеличить в 3 раза; основание увеличить в 3 раза, а высоту уменьшить в 3 раза?

Решение: Пусть основание прямоугольника – a, высота c. Тогда его площадь S будет выражаться $a{\cdot}c$. Если основание увеличить в 3 раза, то будет $3a$, высоту 3 раза – $3c$. Тогда $S = 3a{\cdot}3c = 6ac$. Следовательно, площадь прямоугольника увеличится в 6 раз. Если же основание увеличить в *3* раза, а высоту уменьшить в *3* раза, то $S = 3a{\cdot}(c:3) = ac$ и площадь никак не изменится.

Задача. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить на 25%?

Решение: Пусть площадь квадрата $S = x^2 = 100\%$. Если увеличить каждую сторону квадрата на 25%, то она станет равной $x + x \cdot 1/4$. Тогда пложадь квадрата станет равной $S = (x + x \cdot 1/4)^2 = x^2 + x{\cdot}1/2 + {} + x^2 \cdot 1/16 = x^2 + (x{\cdot}1/2 + x^2 \cdot 1/16) = S + (x{\cdot}1/2 + x^2 \cdot 1/16)$. Так как 1/16 составляет 6,25%, 1/2 составляет 50%, то площадь увеличится на 6,25% + 50% = 56,25%. С другой стороны, если взять сторону квадрата за *1*, то при увеличении на 25% она станет равной 1 + 1/4 = 5/4. Тогда площадь квадрата нового будет равна 25/16 от старой, что составляет 56,25%.

Ответ: На 56,25% увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить на 25%.

Задача. Установим, в какой зависимости находятся величины, рассматриваемые в данной задаче, и приведем различные способы ее решения: Для перевозки груза нужно 15 трехтонных машин. Сколько потребуется для перевозки этого же груза пятитонных машин?

Решение: В задаче рассматриваются величины: Грузоподъемность одной машины и количество машин. Масса всего груза постоянна. Зависимость между данными величинами обратно пропорциональная, так как может быть выражена уравнением $y = k/x$, где x – грузоподъемность одной машины, y – количество машин, нужных для перевозки груза, k – масса этого груза. В задаче даны два значения грузоподъемности машин и одно – количества машин. Чтобы найти второе значение количества машин , соответствующее грузоподъемности 5 т, то нужно либо найти массу всего груза, либо воспользоваться свойством обратной пропорциональности: во сколько раз увеличивается (уменьшается) одна величина, во столько же раз уменьшается (увеличивается) другая.

Отсюда вытекает два способа решения данной задачи.

1 способ. Найдем массу всего груза, который надо перевезти. Умножим грузоподъемность трехтонной машины на количество таких машин: 15·3=45(т). Чтобы узнать количество пятитонных машин, разделим массу груза на грузоподъемность этих машин: 4 :5 = 9(машин).

2 способ. Узнаем, во сколько раз пятитонная машина перевозит больше груза: 5:3=5/3(раза). Так как зависимость между грузоподъемностью машин и их количеством обратно пропорциональная, то для перевозки того же груза пятитонных машин понадобится в 5/3 раза меньше, чем трехтонных: 15: 5/3=9(машин).

Ответ: для перевозки груза потребуется 9 пятитонных машин.

Задача. Сравните площади квадрата и прямоугольника, у которого одна сторона длиннее, другая короче стороны квадрата на четверть его длины.

Решение. Пусть a (см) – сторона квадрата. Тогда $1\frac{1}{4}a$ (см) – длина прямоугольника, $\frac{3}{4}a$ (см) – ширина. Площадь кадрата $S_{кв} = a^2$. Площадь прямоугольника $S_{пр} = 1\frac{1}{4}\cdot a\cdot\frac{3}{4}a = \frac{5}{4}\cdot a\cdot\frac{3}{4}\cdot a = \frac{15}{16}a^2$. Следовательно, сравнивая площади квадрата и прямоугольника, имеем: $S_{кв} < S_{пр}$.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Выясните, какие операции над величинами выполняются в процессе решения следующих задач:

а) В бочку входит 0,3 т бензина. Войдет ли в три такие бочки 850 кг бензина?

б) Занятия начались в 8 ч 30 мин и продолжались 6 уроков по 45 мин. Между уроками были две перемены по 10 мин и две перемены по 20 мин. Когда окончились занятия?

в) Геологи проехали 512км. Сначала ехали 3 ч на машинах со скоростью 60 км/ч, затем остальной путь на лошадях. Сколько километров они проехали на лошадях?

2. Дан единичный отрезок е. Постройте отрезки, длины которых равны: 3е; 0,6е; 1,75е.

3. Основание прямоугольника на 20% меньше его высоты. Площадь прямоугольника равна 2000 $м^2$. Найдите высоту прямоугольника.

4. Установите, какие зависимости между величинами рассматриваются в задаче и приведите различные способы решения задач:

а) При нагревании воды в течении 7,5 мин температура ее повысилась на 30°. На сколько градусов повысится температура в том же сосуде за 12,5 мин?

в) Из города в поселок, находящийся от него на расстоянии 480 км, вылетел вертолет со скоростью 120 км/ч. На каком расстоянии от поселка будет вертолет через t ч?

5. Высота прямоугольника 2 м, основание х м. Запишите уравнение, выражающее зависимость площади прямоугольника, от его основания и постройте график этой зависимости.

6. Изменится ли цена на товар и если да, то как изменится, если его цену снизить на 20%, а затем новую цену повысить на 20%?

VII. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Так как текстовые задачи есть словесная модель явления, то, как и во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны и количественные характеристики.

Формулировка любой задачи состоит из нескольких утверждений и требований. ***Утверждения*** называют условием. ***Требование*** – это вопрос, на который надо найти ответ, опираясь на условия, которые указаны в задаче. Условия и требования связаны. Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи.

Пример. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной *5 см* и *12 см*. Найти катеты треугольника.

В данной задаче можно выделить такие элементарные *условия:*

1) треугольник, о котором идет речь в задаче, прямоугольный;

2) в этот треугольник вписана окружность;

3) точка касания окружности с гипотенузой делит ее на два отрезка;

4) длина одного отрезка равна 5 см;

5) длина другого отрезка равна 12 см.

Требование этой задачи можно расчленить на два элементарных:

1) найти длину одного катета;

2) найти длину другого катета треугольника.

Текстовые ***задачи различаются*** и ***характером своих объектов***. В одних задачах объектами являются реальные предметы, в других – все объекты математические (числа, геометрические фигуры, функции и пр.). Первые задачи, в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются ***практическими,*** вторые – ***математическими задачами***.

Текстовые ***задачи можно классифицировать по содержанию:*** задачи на движение; задачи на работу и производительность труда; задачи на концентрацию и процентное содержание; задачи на проценты и процентный прирост; задачи с целочисленными неизвестными; задачи на части.

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи получаем то, что требуется найти – ответ.

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический метод, а так же комбинированный.

Решить задачу ***арифметическим методом*** – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над данными в задаче числами. Одну и туже задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений в процессе решения задачи.

Решить задачу ***алгебраическим методом*** – значит найти ответ на требование задачи путем составления и решения уравнения или системы уравнений.

Текстовые задачи алгебраическим методом решают по следующей **схеме:**

1) выделяют величины, о которых идет речь в тексте задачи, и устанавливают зависимость между ними;
2) вводят переменные (обозначают буквами неизвестные величины);
3) с помощью введенных переменных и данных задачи составляют уравнение или систему уравнений;
4) решают полученное уравнение или систему;
5) проверяют найденные значения по условию задачи и записывают ответ.

Комбинированный метод решения включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

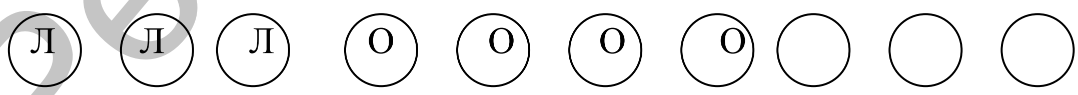
В начальной школе ***задачи делят по количеству действий*** при решении на простые и составные. Задачи, в которых для ответа на вопрос нужно выполнить только одно действие, называют ***простыми.*** Если для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два и более действий, то такие задачи называют ***составными.***

Составную задачу, тек же как и простую, можно решить, используя различные способы.

Задача. Рыбак поймал 10 рыб. Из них 3 леща, 4 окуня, остальные – щуки. Сколько щук поймал рыбак?

Практический способ.

Обозначим каждую рыбу кругом. Нарисуем *10* кругов и обозначим пойманных рыб.



Для ответа на вопрос задачи можно не выполнять арифметические действия, так как количество пойманных щук соответствует не обозначенным кругам – их три.

Арифметический способ.

1) 3+4=7(р) – пойманные рыбы;
2) 10 – 7 = 3(р) – пойманные щуки.

Алгебраический способ.

Пусть х – пойманные щуки. Тогда количество всех рыб можно записать выражением: 3 + 4 + х. По условию задачи известно, что рыбак поймал всего 10 рыб. Значит: 3 + 4 + х = 10. Решив это уравнение, получим х = 3 и тем самым ответим на вопрос задачи.

Графический способ.

Этот способ, так же как и практический, позволят ответить на вопрос задачи, не выполняя арифметических действий.

В математике общепринято следующее ***деление процесса решения задач***:

1) анализ текста задачи, схематическая запись задачи, исследование задачи;
2) поиск способа решения задачи и составление плана решения;
3) осуществление найденного плана;
4) анализ найденного решения задачи, проверка.

Методы поиска решения задачи можно назвать следующие:

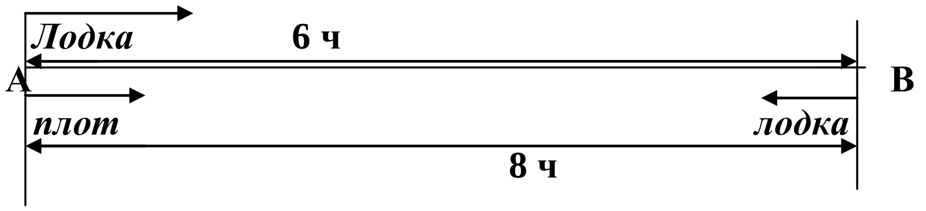
1) Анализ: а) когда в рассуждениях двигаются от искомых к данным задачи; б) когда целое расчленяют на части;
2) Синтез: а) когда двигаются от данных задачи к искомым; б) когда элементы объединяют в целое;
3) Переформулировка задачи (четко формулировать промежуточные задания, возникающие по ходу поиска решения);
4) Индуктивный метод решения задачи: на основе точного чертежа усмотреть свойства фигуры, сделать выводы и доказать их;
5) Применение аналогии (вспомнить аналогичную задачу);
6) Прогнозирование – предвидение тех результатов, к которым может привести поиск.

Рассмотрим более подробно *процесс решения задачи*:

Задача на движение. Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 ч, а обратно – за 8ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

Анализ задачи. В задаче речь идет о двух объектах: лодка и плот. Лодка имеет собственную скорость, а плот и река, по которой плывут лодка и плот, имеет определенную скорость течения. Именно поэтому лодка совершает путь по течению реки за меньшее время *(6ч)*, чем против течения *(8ч)*. Но эти скорости в задаче не даны, так же как неизвестно и расстояние между пристанями. Однако требуется найти не эти неизвестные, а время, за которое плот проплывет это расстояние.

Схематическая запись:



Поиск способа решения задачи. Нужно найти время, за которое плот проплывет расстояние между пристанями *А* и В. Для того, чтобы найти это время, надо знать расстояние *АВ* и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние АВ буквой *S (км),*а скорость течения *а км/ч.*Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи, нужно знать собственную скорость лодки. Она тоже неизвестна, положим, она равна *V км/ч.* Отсюда возникает план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

Осуществление решения задачи. Пусть расстояние равно *S (км),* скорость течения реки *а км/ч,* собственная скорость лодки *V км/ч*, а искомое время движения плота равно *х ч.*

Тогда скорость лодки по течению реки равна *(V+a) км/ч.* За *6ч* лодка, идя с этой скоростью, прошла расстояние в *S (км).* Следовательно, $6(V + a) = S$ (1). Против течения эта лодка идет со скоростью $(V - a)$ *км/ч* и данный путь она проходит за *8 ч*, поэтому $8(V - a) = S$ (2). Плот, плывя со скоростью течения реки *а км/ч,* проплыл расстояние *S (км)* за *х ч,* следовательно, $ax = S$ (3).

Полученные уравнения образуют систему уравнений относительно неизвестных *a, x, S, V*. Так как требуется найти лишь *x*, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем: $V + a = \frac{S}{6}$, $V - a = \frac{S}{8}$. Вычитая из первого уравнения второе, получим: $2a = \frac{S}{6} - \frac{S}{8}$. Отсюда $a = \frac{S}{48}$. Подставим найденное выражение в уравнение (3): $\frac{S}{48} \times x = \frac{S}{48}$. Откуда x=48 .

Проверка решения. Мы нашли, что плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч. Следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна $\frac{S}{48}$. Скорость же лодки по течению реки равна $\frac{S}{6}$ *км/ч,* а против течения $\frac{S}{8}$ *км/ч.* Для того, чтобы убедиться в правильности решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные двумя способами: $\frac{S}{8} + \frac{S}{48}$ и $\frac{S}{6} - \frac{S}{48}$. Произведя вычисления, получим верное равенство: $\frac{7S}{48} = \frac{7S}{48}$. Значит, задача решена правильно.

Ответ: плот проплывет расстояние между пристанями за 48 часов.

Анализ решения. Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти надо было одно неизвестное. Поэтому возникает мысль, что данное решение не самое удачное, хотя и простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что лодка проплыла расстояние АВ по течению реки за 6ч, а против – за 8ч, найдем, что в 1ч лодка, идя по течению реки проходит $\frac{1}{6}$ часть этого расстояния, а против течения $\frac{1}{8}$. Тогда разность между ними $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ есть удвоенная часть расстояния АВ, проплываемая плотом за 1ч. Значит. Плот за 1ч проплывет $\frac{1}{48}$ часть расстояния АВ, следовательно, все расстояние АВ он проплывет за 48 ч.

При таком решении нам не понадобилось составлять систему уравнений. Однако это решение сложнее приведенного выше (не всякий догадается найти разность скоростей лодки по течению и против течения реки).

Далее при решении задач мы опустим анализ задачи, поиск решения, проверку.

Задача на движение: с турбазы в город, находящийся от нее на расстоянии *24* км, вышел турист со скоростью *4 км/ч*. Через *2 ч* вслед за ним отправился второй турист. С какой скоростью он должен идти, чтобы догнать первого туриста до его прихода в город?

Решение: Так как первый турист шел со скоростью 4 км/ч и прошел расстояние 24 км, то можно определить время его пути: $\frac{24}{4} = 6$(ч). Пусть скорость второго туриста x км/ч. Тогда его время определится как $\frac{24}{x}$. Но чтобы догнать первого туриста (т.е. быть в пути как минимум 6 ч), ему необходимо еще 2 часа (те, на которые он позже вышел). Значит, можно составить уравнение: $\frac{24}{x} + 2 = 6$, откуда $x = 6$. Следовательно, второй турист должен идти со скоростью 6 км/ч, чтобы догнать первого туриста.

Ответ: 6 км/ч.

Задача на работу и производительность труда: несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше, и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше, и каждый работал бы на 1 час дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих, и сколько часов в день они работали?

Решение: Пусть a – число рабочих, x – число часов их работы в день. Введем единицу работы, равную всей работе и пусть у – производительность в час каждого рабочего.

Тогда один рабочий за x часов выполняет xy единиц работы. Согласно условию $14axy = 1$.

Аналогично, если рабочих стало $a + 4$ и они работают каждый день $x + 1$ час: $10(a + 4)(x + 1)y = 1$.

Для случая, когда рабочих еще на 6 человек больше ($a + 10$) и они работают еще на 1 час дольше ($x + 2$) каждый день, получаем уравнение $7(a + 10)(x + 2)y = 1$.

Из данных уравнений получаем систему с тремя неизвестными. Решая ее, получим $x = 6$, $a = 20$.

Ответ: рабочих было 20 человек и они работали 6 часов в день.

Задача на концентрацию и процентное содержание: морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг морской, чтобы содержание соли в смеси было 2%?

Решение: Пусть необходимо прибавить x кг пресной воды. Тогда масса смеси будет $(x + 40)$ кг. По условию в ней содержится 2% соли, т.е $((x + 40) \times \frac{2}{100})$ кг. В 40 кг морской же воды по условию было $(40 \times \frac{5}{100})$ кг соли. Так как количество соли в морской воде и смеси одно и тоже, то можно составить уравнение: $(40 + x) \times 0{,}02 = 40 \times 0{,}05$. Решая его, найдем, что $x = 60$. Проверкой убеждаемся, что число 60 удовлетворяет условию.

Ответ: к 40 кг морской воды необходимо добавить 60 кг пресной, чтобы содержание соли в смеси было 2%.

Задача на проценты и процентный прирост: после сушки 200 кг зерна с 16% влажностью его масса уменьшилась на 20 кг. Вычислите с точностью до 0,1%, какой стала влажность зерна.

Решение: масса зерна уменьшилась на 20 кг, значит, она стала 200 – 20 = 180 (кг). Так как влажность 200 кг зерна составляла 16%, а влажность 180 кг зерна предположим составит $x\%$, то можно составить пропорциональную зависимость: 200 (кг) – 16%
180 (кг) – x%.

Решая пропорцию, получим уравнение: $x = \frac{16 \times 180}{200}$; откуда $x = 14{,}4$. Значит, влажность зерна стала 14,4%.

Ответ: 14,4%.

Задача с целочисленными неизвестными: произведение двузначного числа и суммы его цифр равно 144. Найдите это число, если в нем вторая цифра больше первой на 2.

Решение: Пусть $\overline{ав}$ – данное число. Тогда это число можно представить в виде $\overline{ав} = 10а+в$. Сумма цифр будет представлена как $а+в$. По условию произведение этого двузначного числа и суммы его цифр равно 144. Значит, получим уравнение: $(10а+в)(а+в)=144$. Из второго условия имеем, что вторая цифра в данном числе больше первой на 2, т.е. $в=а+2$. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (10a+b)(a+b)=144, \\ b=a+2. \end{cases}$$

Решая эту систему получим уравнение с одной переменной: $11а^2+13а-70=0$, откуда $а=2$, $в=4$. Значит, искомое число есть 24.

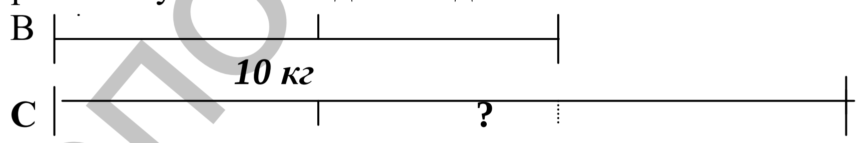
Ответ: 24.

Задачи на части. Само название вида задач говорит о том, что рассматриваемые в них величины состоят из частей**.** В некоторых из них части представлены явно, в других надо суметь выделить, приняв подходящую величину за 1 часть и определив, из скольких таких частей состоят другие величины, о которых идет речь в задаче.

Задача 1. Для варки варенья из вишни на 2 части ягод берут 3 части сахара. Сколько сахара надо взять на 10 кг ягод?

Решение: В задаче идет речь о массе ягод и массе сахара, необходимых для варки варенья. Известно, что всего ягод 10 кг и что на 2 части ягод надо брать 3 части сахара. Требуется найти массу сахара, чтобы сварить варенье из 10 кг ягод.

Изобразим при помощи отрезка массу ягод. Тогда половина отрезка представляет собой массу ягод, которая приходиться на 1 часть. Сахара же по условию задачи надо 3 таких части.



Запишем решение по действиям с пояснениями:

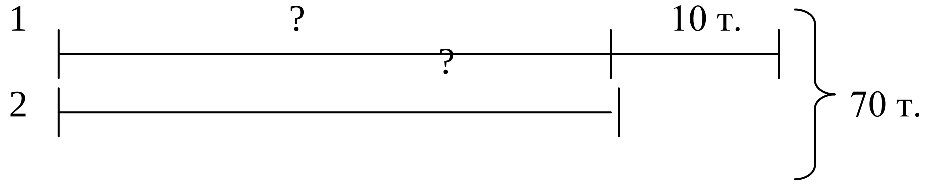
1) 10 : 2 = 5 (кг) – столько кг ягод приходится на каждую часть;
2) $5 \times 3 = 15$ (кг) – столько надо взять сахара.

Ответ: необходимо взять 15 кг сахара.

Задача 2. В первой пачке было на 10 тетрадей больше, чем во второй. Всего было 70 тетрадей. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

Решение: В задаче рассматриваются две пачки тетрадей. Всего тетрадей 70. В одной пачке на 10 тетрадей больше. Требуется узнать количество тетрадей в каждой пачке.

Изобразим при помощи отрезка количество тетрадей в первой и во второй пачке.



По чертежу видно, что если тетради во второй пачке составляют 1 часть всех тетрадей, то тетради в первой пачке составляют 1 часть и еще 10 тетрадей.

Если эти 10 тетрадей убрать из первой пачки, то в пачках станет поровну. Запишем решение по действиям.

1) 70 – 10 = 60 (т) – столько тетрадей приходится на 2 равные части, или столько было бы тетрадей в двух пачках, если бы их было поровну;

2) 60 : 2 = 30 (т) – столько тетрадей приходится на 1 часть, или столько тетрадей было во второй пачке;

3) 30 + 10 = 40 (т) – столько тетрадей было в первой пачке.

Мы использовали при решении вспомогательную модель – чертеж, которая показывает и второй способ решения. Если за 1 часть принять тетради в первой пачке, то чтобы во второй стало столько же, надо к ней прибавить 10 тетрадей:

2) 70 + 10 = 80 (т.)

3) 80 : 2 = 40 (т.)

4) 40 – 10 = 30 (т.)

Существует и третий арифметический способ решения данной задачи:

1) 10 : 2 = 5(т.) – столько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы в них стало поровну;

2) 70 : 2 = 35 (т.) – столько тетрадей в каждой пачке, если из первой переложить во вторую 5 тетрадей;

3) 35 + 5 = 40 (т.) – столько тетрадей в первой пачке;

4) 35 – 5 = 30 (т.) – столько тетрадей во второй пачке.

Ответ: в первой пачке 40 тетрадей, во второй – 30 тетрадей.

Задача. В новом книжном шкафу на каждой полке разместилось на 8 книг больше, чем в старом. Поэтому, в новом шкафу на 5 полках укладывается столько книг, сколько в старом на 7. Сколько книг размещается на одной полке нового шкафа?

Решение: Пусть x книг – на одной полке в новом шкафу. Тогда $(x - 8)$ книг – в старом шкафу. $5x$ (книг) – на пяти полках в новом шкафу. $7(x - 8)$ (книг) – на семи полках старого шкафа. Получим уравнение: $5x = 7(x - 8)$. Решаем его. $5x = 7x - 56$; $x = 28$.

Ответ: 28 книг в новом шкафу.

Задача. В двух бидонах 28 л краски. Когда из первого израсходовали 3 л, а во второй долили 2 л, то в первом бидоне стало на 7 л больше, чем во втором. Сколько краски было в начале в каждом бидоне?

Решение: Пусть было x л краски в первом бидоне, $(28 - x)$ л – во втором. Тогда, после того, как израсходовали краску из первого бидона, в нем стало на 7 л больше чем во втором: $(x - 3) - 7 = 28 - x + 2$. Решаем уравнение*:* $2x = 40$*;* $x = 20$. Значит, 20л было в первом бидоне. А во втором было $28 - x = 8$(л).

Ответ: В первом бидоне было 20 л краски, во втором – 8 л.

Задача. Комбайнер в первый день убрал пшеницу с 5/18 площади участка, во второй – с 7/13 оставшейся площади, а в третий – с последних 9,5 га. Сколько пшеницы было собрано со всего участка, если средняя урожайность со всего поля составила 30 ц с гектара?

Решение. 1) 5/15 + 7/13 = 191/234 – было собрано пшеницы;

2) 1 – 192/234 = 43/234 – осталось собрать;

3) 9,5 ·234/43 = 51,7 (га) – площадь всего участка.

4) 30·51, 7 = 1550 (ц) – собрано всего.

Ответ: было собрано 1550 ц пшеницы.

Задача. Пятипроцентный раствор кислоты смешали с 40% раствором и получили 140 г 30% раствора. Сколько граммов каждого раствора в полученной смеси?

Решение: Пусть х (г) – было 5% раствора. Тогда *у (г)* – было 40% раствора и $x + y = 140$. Так как 5 % = 0,05х, 40% = 0,4*у,* а 30% = = 0,3· 140, то получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0,05x + 0,4y = 0,3 \cdot 140 \end{cases}$$

Решаем систему. Выразим x из первого уравнения: $x = 140 - y$, подставим его во второе и получим $7 - 0,05y + 0,4y = 42$. Откуда $y = 100$, а $x = 40$.

Ответ: 100(г) – 40% раствора, 40(г) – 5% раствора.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Турист, проплыв по течению реки на плоту 12 км, обратно возвратился на лодке, скорость которой в стоячей воде равна 5 км/ч, затратив на все путешествие 10 ч. Найдите скорость течения реки.

2. Одна мастерская должна сшить 810 костюмов, другая за этот же срок – 900 костюмов. Первая закончила выполнение заказов за 3 дня, а вторая за 6 дней до срока. Сколько костюмов в день шила каждая мастерская, если вторая шила в день на 4 костюма больше первой?

3. Два поезда выехали навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми равно 400 км. Через 4 часа расстояние меж-

ду ними сократилось до 40 км. Если бы один из поездов вышел на 1 час раньше другого, то их встреча произошла бы на середине пути. Определите скорости поездов.

4. На одном складе 500 т угля, а на другом – 600 т. Первый склад ежедневно отпускает 9 т, а второй – 11 т угля. Через сколько дней угля на складах станет поровну?

5. Вкладчик взял из сбербанка 25 % своих денег, а потом 64 000рублей. После чего осталось на счету 35 % всех денег. Какой был вклад?

6. Произведение двузначного числа и его суммы цифр равно 144. Найдите это число, если в нем вторая цифра больше первой на 2.

7. Решите следующие задачи арифметическим методом:

а) На путь по течению реки моторная лодка затратила 6 ч, а на обратный путь – 10 ч. Скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч. Какова скорость течения реки?

в) Длина прямоугольного поля 1536 м, а ширина 625 м. Один тракторист может вспахать это поле за 16 дней, а другой за 12 дней. Какую площадь вспашут оба тракториста, работая в течении 5 дней?

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.

2. Задачник-практикум по математике / под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1977.

3. Лаврова Н.Н. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.

4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М.: Просвещение, 1988.

5. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Academa, 1999.

МАТЕМАТИКА:

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, ФУНКЦИИ, ВЕЛИЧИНЫ

2009