УДК 519.6

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Т.В. Никонова
Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения часто встречаются в гидромеханике, химических реакциях, популяционной генетике. Ввиду того, что эти уравнения содержат малый параметр множителем при старшей производной, процесс отыскания их решения сопряжен с определенными трудностями.

Цель статьи – предложение численного метода решения и разработка прикладной программы, позволяющей решить нелинейную краевую задачу для сингулярно-возмущенного уравнения второго порядка.

***Материал и методы.** Материалом исследования являлась нелинейная краевая задача для сингулярно-возмущенного уравнения второго порядка. При этом использовались численные методы стрельбы, Ньютона, Рунге–Кутты.*

***Результаты и их обсуждение.** Предложен метод для отыскания решения нелинейной краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения, включающий в себя применение таких численных методов как метод стрельбы, Ньютона, Рунге–Кутты, приведены необходимые для расчетов рекуррентные соотношения. Данный метод расчета реализован в виде прикладной программы, позволяющей по выбранному виду метода Рунге–Кутты, задав необходимые параметры, найти решение поставленной задачи, построить его график с заданным шагом.*

***Заключение.** Результаты могут быть использованы при рассмотрении практических задач в электро- и радиотехнике, механике, гидро- и аэродинамике, связанных с необходимостью решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений.*

***Ключевые слова:** сингулярно-возмущенное уравнение, нелинейная краевая задача, численные методы.*

NONLINEAR EDGE PROBLEM FOR SINGULAR DISTURBANCE EQUATION OF THE SECOND ORDER

T.V. Nikonova
Educational Establishment «Vitebsk State Technological University»

Singular disturbance differential equations are often present in hydromechanics, chemical reactions, population genetics. Since these equations contain a small parameter by multiplier with the older derivative the process of finding their solution is connected with some difficulties.

The purpose of the article is suggesting a numerical method of the solution as well as the development of an applied program which makes it possible to solve the nonlinear edge problem for a singular disturbance equation of the second order.

***Material and methods.** The research material is the nonlinear edge problem for a singular disturbance equation of the second order. Numerical methods of shooting by Newton, Runge–Kutty are used in the research.*

***Findings and their discussion.** A method for finding a solution of the nonlinear edge problem for a singular disturbance equation which involves the use of such numerical methods as the method of shooting by Newton, Runge–Kutty is offered; recurrent correlations necessary for the calculations are given. The suggested estimation method is implemented in the form of an applied program which makes it possible according to the selected method by Runge–Kutty and after giving certain parameters to find the solution of the problem, to build its graph with the necessary step.*

***Conclusion.** The findings can be used while considering practical problems in electro and radio technology, mechanics, hydro and aero dynamics which are connected with the necessity to solve singular disturbance differential equations.*

***Key words:** singular disturbance equation, nonlinear edge problem, numerical methods.*

При рассмотрении практических задач в механике деформируемого твердого тела, теории колебаний, электротехнике, химии часто приходится сталкиваться с необходимостью решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения содержат малый параметр множителем при старшей производной. Процесс отыскания решения такого уравнения сопряжен с определенными трудностями. Решение уравнения содержит нескольких экспонент: быстро убывающих и относительно медленно изменяющихся, а это, в свою очередь, приводит к трудностям при выборе шага интегрирования. Характерные времена для исследуемых процессов могут различаться более чем в 10^{10} раз. Для корректного решения задачи следует спектр матрицы Якоби разделить на жесткий и мягкий, что помогает в дальнейшем найти пограничный слой и квазистационарный режим, в которых происходят быстрое и медленное, соответственно, изменения для найденного решения.

В этом случае проблема обеспечения эффективного и качественно правильного решения задачи Коши является весьма актуальной. Одновременно необходимо выявить характер задачи и предложить наиболее подходящий метод решения. Полученное численное решение должно быть устойчивым и иметь удовлетворительную точность.

Цель статьи – предложение численного метода решения, отвечающего указанным требованиям, и разработка прикладной программы, позволяющей решить нелинейную краевую задачу для сингулярно-возмущенных уравнений.

Материал и методы. Материалом исследования являлось сингулярно-возмущенное уравнение второго порядка. Вследствие того, что такие уравнения характерны для гидромеханики, химических реакций, популяционной генетики, имеется значительное количество публикаций, посвященных их изучению. Применение метода координатных преобразований на адаптивных сетках для отыскания численного решения сингулярно-возмущенных уравнений рассмотрено в [1]. Предлагаемый метод является слиянием аналитического и численного подходов, рассмотрен широкий круг задач. Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом описан в [2]. Для того чтобы найти все возможные решения уравнения с заданной точностью, описано использование таких методов, как метод Лаэя и метод продолжения по наилучшему параметру. Вопросам применения явных адаптивных методов численного решения жестких систем посвящена публикация [3]. Предложен адаптивный метод с расчетными формулами, настраивающимися на решаемую задачу и использующими оценки параметров.

Рассмотрим нелинейное сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение [4]:

$$\varepsilon y'' = y - y^3, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(a)=A, \quad y(b)=B, \quad |A| < \sqrt{2}, \quad |B| < \sqrt{2}, \tag{2}$$

где ε – малый параметр, $[a, b]$ – отрезок интегрирования, A, B – значения функции на концах отрезка интегрирования.

Приняв $\varepsilon=0$, получим из (1) вырожденное уравнение

$$y - y^3 = 0. \tag{3}$$

Полученное уравнение, в отличие от (1), является алгебраическим и имеет следующие решения:

$$y_1(x) = -1, \quad y_2(x) = 0, \quad y_3(x) = 1. \tag{4}$$

Так как для функции $h(y)=y-y^3$ производные $h'(y_2)>0$, а $h'(y_1)=h'(y_3)<0$, то устойчивым является только решение $y_2(x)$.

Далее будем рассматривать невырожденный случай. Выполним переход от дифференциального уравнения (1) второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \varepsilon^{-1}(y - y^3), \end{cases} \tag{5}$$

с краевыми условиями (2). Первое уравнение этой системы определяет медленное движение, а второе – быстрое движение решения краевой задачи.

Результаты и их обсуждение. Для решения системы (1) с краевыми условиями (2) будем использовать один из численных методов семейства Рунге–Кутты [5]. Рассмотрим сначала явный метод первого порядка точности, еще называемый методом Эйлера. Итерационные соотношения в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + hf(z_n), \\ &z_{n+1} = z_n + hg(y_n), \\ &y_0 = A, \quad z_0 = p, \end{aligned} \tag{6}$$

где $f(z)=z$, $g(y)=\varepsilon^{-1}(y-y^3)$, h – шаг приращения аргумента, p – пока неизвестное значение, для определения которого в дальнейшем будет применен другой численный метод.

Явный метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности будет определяться следующими соотношениями:

$$
\begin{array}{ll}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), & z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{6}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4), \\
k_1 = f(z_n), & l_1 = g(y_n), \\
k_2 = f(z_n + \dfrac{h}{2}k_1), & l_2 = g(y_n + \dfrac{h}{2}l_1), \\
k_3 = f(z_n + \dfrac{h}{2}k_2), & l_3 = g(y_n + \dfrac{h}{2}l_2), \\
k_4 = f(z_n + hk_3), & l_4 = g(y_n + hl_3), \\
y_0 = A, & z_0 = p.
\end{array} \tag{7}
$$

Неявные методы Рунге–Кутты обладают большей устойчивостью по сравнению с явными методами того же семейства. Для получения соотношений для неявного метода первого порядка необходимо значение производной каждой из функций y и z заменить отношением приращения функции к соответствующему приращению аргумента. Система уравнений (5) в этом случае примет вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = z_{n+1}, \\
\dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = \varepsilon^{-1}(y_{n+1} - y_{n+1}^3).
\end{cases} \tag{8}
$$

Выразив z_{n+1} из второго уравнения системы (8) и подставив полученное значение в первое уравнение той же системы, будем иметь

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = hz_n + y_n + \varepsilon^{-1}h^2(y_{n+1} - y_{n+1}^3), \\
z_{n+1} = z_n + \varepsilon^{-1}h(y_{n+1} - y_{n+1}^3).
\end{cases} \tag{9}
$$

Первое уравнение системы (9) является нелинейным относительно y_{n+1} и позволяет найти его решение по известным значениям y_n и z_n. Вторые уравнение помогает по найденному значению y_{n+1} вычислить значение z_{n+1}. Для решения полученного уравнения, содержащего неизвестную y_{n+1}, может быть применен один из методов решения нелинейных алгебраических уравнений, например, такой как метод простой итерации или метод Ньютона. Нами отдано предпочтение использованию метода Ньютона, так как он обладает квадратичной сходимостью. Подробное описание применения этого метода к решению другого нелинейного уравнения будет рассмотрено ниже.

Неявные методы Рунге–Кутты более высокого порядка аппроксимации задаются формулами:

$$
y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \qquad k_i = f\left(x_n + c_i h, \quad y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right), \qquad j = 1..s, \tag{10}
$$

где b_i, c_i, a_{ij} – соответствующие коэффициенты таблицы Батчера. При этом диагонально неявные методы (SDIRK) более простые в использовании, так как у этих методов матрица A является нижнетреугольной. В том случае, если у такой матрицы A совпадают все диагональные элементы, то это позволяет выполнять единственное LU-разложение на шаге интегрирования и это еще больше упрощает процесс. Эти методы называются однократно диагонально неявными (SDIRK), описание их применения подробно описано в работе [6]. В данной статье будут приведены только необходимые краткие сведения.

(s+1)-стадийный метод (DIRK) с матрицей коэффициентов

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & \gamma & & & \\
\dots & \dots & \dots & \gamma & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & \gamma & \\
1 & b_1 & b_2 & \dots & b_s & \gamma \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s & \gamma
\end{array}
$$

по проведению вычислений равносилен *s*-стадийному методу (SDIRK), так как его первая стадия совпадает с последней на предыдущем шаге. Такие методы еще носят название (FSAL).

Вычисления проводились при γ=1/4, при этом схема вычислений имела вид [6]:

0	0					
1/2	1/4	1/4				
1/4	1/16	-1/16	1/4			
3/4	1/16	-1/16	1/2	1/4		
1	-9/62	-77/124	143/124	45/124	1/4	
1	7/90	2/15	16/45	16/45	-31/180	1/4
y_1	7/90	2/15	16/45	16/45	-31/180	1/4
	0	-1/3	2/3	2/3	0	0

При проведении вычислений с применением неявных методов приходится большое внимание уделять вопросам выбора начальных приближений методов Ньютона, определять критерий окончания итераций, обновления матрицы Якоби, при необходимости менять шаг вычислений, контролировать погрешность вычислений.

Для корректной работы любого метода Рунге–Кутты требуется задание значения $y'(a)=z(a)$. Однако в постановке задачи (5), (2) это значение не задано, вместо него в (2) имеется значение $y(b)=B$. Краевых условий (2) достаточно, чтобы разрешить задачу. Для отыскания значения $z(a)=p$ будем использовать для задачи (5), (2) метод стрельбы [7]. Параметр p называется пристрелочным, из геометрического смысла производной следует, что он равен tgα, где α – угол, образованный касательной, проведенной к графику функции $y(x)$ в точке $x=a$, и положительным направлением оси Ox. Таким образом, необходимо найти такой параметр p, при котором кривая $y(x)$, вышедшая из точки (a, A), попадет в точку (b, B). Метод стрельбы заключается в сведении решения краевой задачи (5), (2) к решению последовательности задач Коши для той же системы с начальными условиями

$$y(a)=A, \quad z(a)=p. \tag{11}$$

Пусть функция $F(p)$ определяет отклонение, полученное в результате решения задачи Коши, значения $y(b)$ от значения B. Тогда имеем уравнение для отыскания параметра p:

$$F(p)=y(b, p)-B=0. \tag{12}$$

Для решения уравнения можно использовать такие методы решения нелинейных уравнений, как метод Ньютона, метод деления отрезка пополам, метод простой итерации. Так как для вычисления каждого нового значения функции $F(p)$ приходится интегрировать задачу (5), (10) методом Рунге–Кутты, то для решения нелинейного уравнения (12) отдадим предпочтение методу Ньютона, имеющему квадратичную сходимость. Геометрическая интерпретация метода Ньютона заключается в том, что график функции $F(p)$ заменяется касательной к нему в точке (p_k, $F(p_k)$), а за (k+1) приближение принимается абсцисса точки пересечения этой касательной с осью абсцисс.

Итерационные соотношения при этом будут иметь вид:

$$\begin{aligned} p^{(k+1)} &= p^{(k)} - \frac{F(p^{(k)})}{F'(p^{(k)})}, \\ p^{(0)} &= p_0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $p^{(k)}$ – значение p на k-й итерации, $F'(p^{(k)})$ – значение производной функции $F(p)$ в точке $p^{(k)}$.

Так как уравнение (12) задано не аналитическим выражением для функции $F(p)$, а только определяется алгоритмом численного решения задачи (11), то получить точное значение производной $F'(p^{(k)})$ невозможно, и ее следует заменить приближенным отношением приращения функции $F(p^{(k)})$- $F(p^{(k-1)})$ к соответствующему приращению аргумента $p^{(k)}$-$p^{(k-1)}$:

$$F'(p^{(k)}) = \frac{F(p^{(k)}) - F(p^{(k-1)})}{p^{(k)} - p^{(k-1)}}. \tag{14}$$

С учетом (14) из (13) будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - F(p^{(k)}) \cdot \frac{p^{(k)} - p^{(k-1)}}{F(p^{(k)}) - F(p^{(k-1)})}, \qquad p^{(0)} = p_0. \tag{14}$$

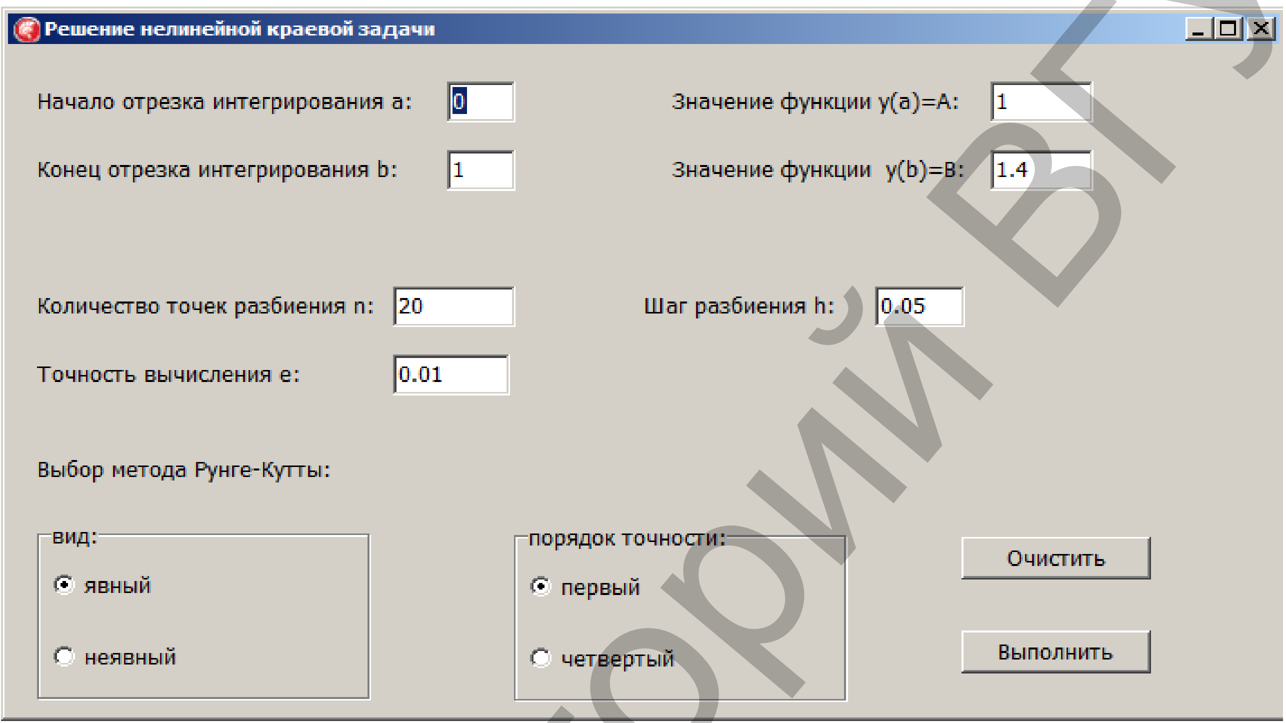

Рис. 1. **Рабочее окно программы при вводе данных**

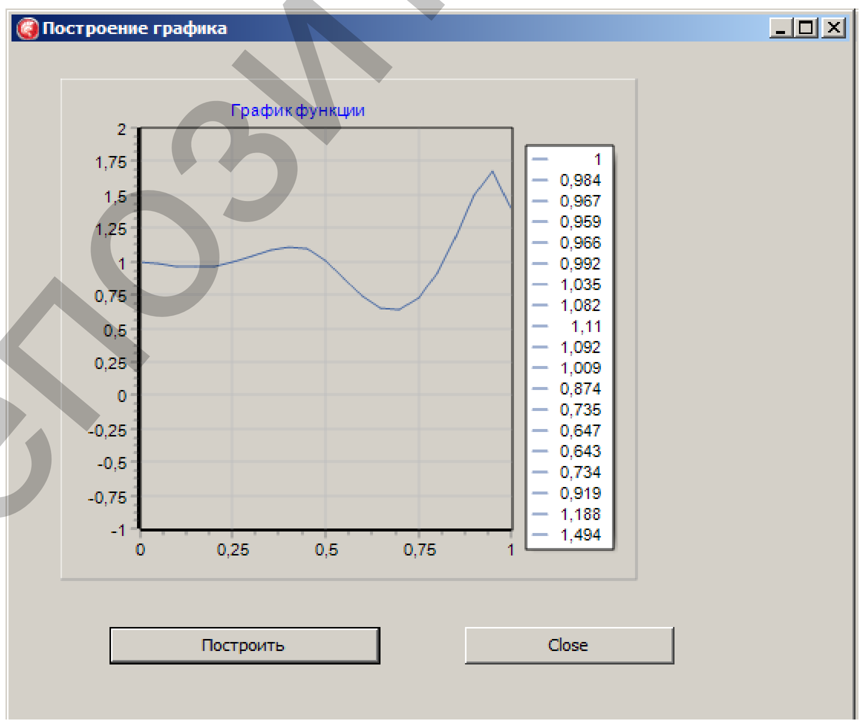

Рис. 2. **Рабочее окно программы с построенным графиком *y*(*x*)**

При выполнении первой итерации требуется задать два начальных значения $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$. Лучше эти значения выбирать недалеко друг от друга. При этом выбор начального приближения существенно влияет на сходимость метода Ньютона. Следует отметить, что встречаются некоторые значения, при которых сходимость может вообще не наступить.

Предложенный метод отыскания решения нелинейной краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения был реализован в виде прикладной программы. Работа программы осуществлена в виде диалога с пользователем. При запуске программы предлагается выбрать порядок и вид метода Рунге–Кутты (явный или неявный), выбрать шаг интегрирования, точность и ввести исходные значения функции на краях для проведения расчетов (рис. 1). При вводе параметров предусмотрена защита от некорректного ввода данных пользователем, при этом предусмотрена и процедура очистки полученных результатов при повторном задании других параметров расчета. Полученное решение краевой задачи отображается на второй форме пользователя в виде графика, а также в виде последовательности значений функции с заданным шагом (рис. 2). Наилучшие результаты при решении нелинейной краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения дают неявные методы семейства Рунге–Кутты. Полученное решение является устойчивым и обладает большей точностью, но проводимые вычисления значительно более сложны и приводят к возрастанию временных затрат.

Заключение. Таким образом, предложен метод для отыскания решения нелинейной краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения (1) с краевыми условиями (2). Решение поставленной задачи сведено к последовательности решения задач Коши одним из методов семейства Рунге–Кутты. Для определения значения параметра *p* для каждой из задач Коши применяется метод стрельбы. Полученное при этом нелинейное уравнение решается методом Ньютона. Предложенный метод расчета реализован в виде прикладной программы, позволяющей по выбранному виду метода Рунге–Кутты, задав необходимые параметры, найти решение поставленной задачи, построить его график, проанализировать полученное решение. Выбор порядка метода помогает выполнять расчеты с требуемой точностью и определенным количеством итераций. Изменение количества шагов разбиения отрезка интегрирования, значений функции на краях, дает возможность исследовать влияние этих параметров задачи на устойчивость полученного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисейкин, В.Д. Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно-возмущенных задач / В.Д. Лисейкин, Ю.В. Лиханова, Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 2007. – 312 с.
2. Афанасьева, М.Н. Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / М.Н. Афанасьева, Е.Б. Кузнецов // Труды МАИ. – 2016. – Вып. 88. – С. 1–16.
3. Скворцов, Л.М. Явные адаптивные методы численного решения жестких систем / Л.М. Скворцов // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 12. – С. 97–107.
4. Чанг, К. Нелинейные сингулярно-возмущенные краевые задачи. Теория и приложения / К. Чанг, Ф. Хауэс. – М.: Мир, 1988. – 247 с.
5. Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 288 с.
6. Скворцов, Л.М. Диагонально неявные FSAL-методы для жестких и дифференциально-алгебраических систем / Л.М. Скворцов // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14, № 2. – С. 3–17.
7. Петров, И.Б. Лекции по вычислительной математике / И.Б. Петров. – М.: БИНОМ, 2006. – 523 с.

REFERENCES

1. Liseikin V.D., Likhanova Yu.V., Sholin Yu.I. *Raznostniye setki i koordinatniye preobrazovaniya dlia chislennogo resheniya singuliarno-vozmushchennykh zadach* [Difference Nets and Coordinate Transformations for the Numerical Decision of Singular Disturbance Problems], Novosibirsk: Nauka, 2007, 312 p.
2. Afanasyeva M.N., Kuznetsov E.B. *Trudi MAI* [Papers of MAI], 2016, 88, pp. 1–16.
3. Skvortsov L.M. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Modeling], 2000, 12(12), pp. 97–107.
4. Chang K., Haues F. *Nelineiniye singuliarno-vozmushchenniye zadachi. Teoriya i prilozheniya* [Nonlinear Singular Disturbance Edge Problems. Theory and Appendices], M.: Mir, 1988, 247 p.
5. Samarski A.A. *Vvedeniye v chislenniye metody* [Introduction into Numerical Methods], SPb.: Izdatelstvo «Lan», 2005, 288 p.
6. Skvortsov L.M. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Modeling], 2002, 14(2), pp. 3–17.
7. Petrov I.B. *Lektsii po vychislitelnoi matematike* [Lectures on Numerical Mathematics], M.: BINOM, 2006, 523 p.

Поступила в редакцию 20.06.2019
Адрес для корреспонденции: e-mail: st.rubon@mail.ru – Никонова Т.В.