МАТЭМАТЫКА

УДК 517.95

ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.Л. Гладков*, А.И. Никитин**
**Белорусский государственный университет*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Цель статьи – доказательство принципа сравнения решений начально-краевой задачи. Авторами используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Доказана теорема сравнения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями и неотрицательными начальными данными. Результаты работы могут быть использованы при изучении дифференциальных уравнений с частными производными.

Ключевые слова: *принцип сравнения, полулинейные уравнения, нелокальные граничные условия.*

SOLUTION COMPARISON PRINCIPLE OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

A.L. Gladkov*, A.I. Nikitin**
**Belarusian State University*
***Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

We consider the initial-boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions.

The aim of this work is to prove the comparison principle of solutions of initial-boundary value problem. In this paper we use the methods of the theory of partial differential equations. The comparison principle for solutions of initial-boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions and nonnegative initial data is proved. The finding can be used to study partial differential equations.

Key words: *comparison principle, semilinear equations, nonlocal boundary conditions.*

1. Введение. В данной работе рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, \ x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, \ x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, \ x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где *p, q, m, n* – положительные постоянные, *Ω* – ограниченная область в R^N, N≥1, с гладкой границей ∂Ω, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ – неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}, \ t \ge 0,$ $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неотрицательные непрерывные функции, определенные при $x \in \partial\Omega, y \in \overline{\Omega}, \ t \ge 0,$ $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям при *t*=0.

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями исследовались многими авторами (см., например, [1–12] и имеющуюся в них библиографию). В [9; 10] рассматривалась начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями Дирихле для полулинейного параболического уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t)u^p, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

где p, l – положительные постоянные, функции $c(x,t)$, $k(x,y,t)$, $u_0(x)$ удовлетворяют условиям, аналогичным условиям исходной задачи. Получен ряд утверждений о единственности решения, существовании и об отсутствии глобальных решений. В [11; 12] для задачи (2) доказано существование локального классического решения, получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений.

Цель статьи – доказательство принципа сравнения решений начально-краевой задачи (1).

Материалы и методы. При этом нами используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Принцип сравнения решений. Введем определение верхнего и нижнего решений задачи. Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T), \ S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Определение. *Пара неотрицательных функций (u(x,t),v(x,t)) называется нижним решением задачи (1) в Q_T, если* $u,v \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *и*

$$\begin{cases} u_t \le \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t \le \Delta v + c_2(x,t)u^q, \ (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) \le \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, \ x \in \partial\Omega, \ (x,t) \in S_T, \\ v(x,t) \le \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, \ x \in \partial\Omega, \ (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) \le u_0(x), v(x,0) \le v_0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Пара неотрицательных функций (u(x,t),v(x,t)) называется верхним решением задачи (1) в Q_T, если $u,v \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *и выполняется (3) с неравенствами противоположных знаков.*

Теорема. *Пусть* $(\overline{u},\overline{v})$ *и* $(\underline{u},\underline{v})$ *– верхнее и нижнее решения задачи (1) в Q_T, соответственно. Предполо-*

жим, что $\bar{u} > 0, \bar{v} > 0$ *или* $\underline{u} > 0, \underline{v} > 0$ *в* $\overline{Q}_T$ *при min(p,q,m,n)<1. Тогда* $\bar{u} \geq \underline{u}, \bar{v} \geq \underline{v}$ *в* $\overline{Q}_T$.

Доказательство. Пусть $w_1(x,t) = \bar{u}(x,t) - \underline{u}(x,t)$, $w_2(x,t) = \bar{v}(x,t) - \underline{v}(x,t)$. Тогда пара функций $(w_1(x,t), w_2(x,t))$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} w_{1t} \geq \Delta w_1 + c_1(x,t)\theta_1(x,t)w_2,\ (x,t) \in Q_T, \\ w_{2t} \geq \Delta w_2 + c_2(x,t)\theta_2(x,t)w_1,\ (x,t) \in Q_T, \\ w_1(x,t) \geq \int_\Omega k_1(x,y,t)\theta_3(y,t)w_1(y,t)dy,\ (x,t) \in S_T, \\ w_2(x,t) \geq \int_\Omega k_2(x,y,t)\theta_4(y,t)w_2(y,t)dy,\ (x,t) \in S_T, \\ w_1(x,0) \geq 0, w_2(x,0) \geq 0,\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

где $\theta_i(x,t)\ (i = \overline{1,4})$ – неотрицательные непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции в силу условий теоремы.

Допустим, что функция $\psi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} 0 < \psi(x) \leq 1 \text{ в } \overline{\Omega},\ \psi(x) \equiv 1 \text{ на } \partial\Omega, \\ \int_\Omega k_1(x,y,t)\theta_3(y,t)\psi(y)dy < 1 \text{ на } S_T, \\ \int_\Omega k_2(x,y,t)\theta_4(y,t)\psi(y)dy < 1 \text{ на } S_T. \end{gathered} \tag{5}$$

Положим $$f(x,t) = \frac{w_1(x,t)}{\psi(x)},\ g(x,t) = \frac{w_2(x,t)}{\psi(x)}.$$

Учитывая (4), получаем, что пара функций $(f(x,t), g(x,t))$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} f_t \geq \frac{\Delta\psi}{\psi} f + 2\frac{\nabla\psi}{\psi}\nabla f + \Delta f + c_1\theta_1 g,\ (x,t) \in Q_T, \\ g_t \geq \frac{\Delta\psi}{\psi} g + 2\frac{\nabla\psi}{\psi}\nabla g + \Delta g + c_2\theta_2 f,\ (x,t) \in Q_T, \\ f(x,t) \geq \int_\Omega k_1(x,y,t)\theta_3(y,t)\psi(y)f(y,t)dy,\ (x,t) \in S_T, \\ g(x,t) \geq \int_\Omega k_2(x,y,t)\theta_4(y,t)\psi(y)g(y,t)dy,\ (x,t) \in S_T, \\ f(x,0) \geq 0, g(x,0) \geq 0,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим следующие функции $\bar{f}(x,t) = f(x,t) + \varepsilon\exp(\alpha t),\ \bar{g}(x,t) = g(x,t) + \varepsilon\exp(\alpha t),$ (7)

где $$\alpha > \max_{\overline{Q}_T}\left(\frac{\Delta\psi}{\psi} + c_1\theta_1 + c_2\theta_2\right),\ \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Тогда, используя (5)–(8), легко показать, что пара функций $(\bar{f}(x,t), \bar{g}(x,t))$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} \overline{f}_t > \dfrac{\Delta\psi}{\psi}\overline{f} + 2\dfrac{\nabla\psi}{\psi}\nabla\overline{f} + \Delta\overline{f} + c_1\theta_1\overline{g},\ (x,t)\in Q_T, \\ \overline{g}_t > \dfrac{\Delta\psi}{\psi}\overline{g} + 2\dfrac{\nabla\psi}{\psi}\nabla\overline{g} + \Delta\overline{g} + c_2\theta_2\overline{f},\ (x,t)\in Q_T, \\ \overline{f}(x,t) > \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)\theta_3(y,t)\psi(y)\overline{f}(y,t)dy,\ (x,t)\in S_T, \\ \overline{g}(x,t) > \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)\theta_4(y,t)\psi(y)\overline{g}(y,t)dy,\ (x,t)\in S_T, \\ \overline{f}(x,0) > 0, \overline{g}(x,0) > 0,\ x\in\overline{\Omega}. \end{cases} \tag{9}$$

Докажем, что

$$\overline{f}(x,t) > 0,\ \overline{g}(x,t) > 0 \text{ в } Q_T \cup S_T. \tag{10}$$

Предположим, что (10) не верно для $\overline{f}(x,t)$. Тогда существует точка $(x_1,t_1)\in Q_T \cup S_T$ такая, что $\overline{f}(x_1,t_1)=0$ и $\overline{f}(x,t)>0,\ \overline{g}(x,t)>0$ при $t<t_1$. Если $x_1\in\Omega$, то $\overline{f}_t(x_1,t_1)=0,\ \nabla\overline{f}(x_1,t_1)=\vec{0},\ \Delta\overline{f}(x_1,t_1)\ge 0.$
Учитывая последние соотношения и (9), в точке (x_1,t_1) получим $0=\overline{f}_t > \Delta\overline{f} + c_1\theta_1\overline{g} \ge 0.$
Если $x_1\in\partial\Omega$, то из (5) и (9) следует, что

$$0=\overline{f}(x_1,t_1) > \int\limits_{\Omega} k_1(x_1,y,t_1)\theta_3(y,t_1)\psi(y)dy\,\overline{f}(x_1,t_1) = 0.$$

Полученные противоречия доказывают (10). Переходя в (10) к пределу при $\varepsilon\to 0$ имеем, что $f(x,t)\ge 0,\ g(x,t)\ge 0$, а следовательно, и $w_1(x,t)\ge 0, w_2(x,t)\ge 0$ в $Q_T\cup S_T$. Это доказывает утверждение теоремы в силу непрерывности функций $w_1(x,t),\ w_2(x,t)$ в $\overline{Q}_T$. Случай, когда (10) не выполняется для $\overline{g}(x,t)$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Заключение. Результаты работы могут быть использованы при изучении дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deng, K. Comparison principle for some nonlocal problems / K. Deng // Quarterly of Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 50, no. 3. – P. 517–522.
2. Chen, B. A quasilinear parabolic system with nonlocal boundary condition / B. Chen, Y. Mi, C. Mu // Boundary value problems. – 2011. – Article ID 750769. – 18 p.
3. Zheng, S. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system / S. Zheng, I. Kong // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2008. – Vol. 68. – P. 2406–2416.
4. Liu, D. Blowup properties for semilinear reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / D. Liu, C. Mu // Abstract and Applied Analysis. – 2010. – Article ID 148035. – 18 p.
5. Gladkov, A.L. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, M. Guedda // Nonlinear Analysis. – 2011. – Vol. 74. – P. 4573–4580.
6. Gladkov, A.L. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, M. Guedda // Applicable Analysis. – 2012. – Vol. 91, no. 12. – P. 2267–2276.
7. Cui, Z. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition / Z. Cui, Z. Yang, R. Zhang // Applied Mathematics and Computation. – 2013. – Vol. 224. – P. 1–8.
8. Ye, Z. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources / Z. Ye, X. Xu // Nonlinear Analysis. – 2013. – Vol. 82. – P. 115–126.
9. Gladkov, A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.
10. Gladkov, A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – Vol. 19, no. 1. – P. 39–49.
11. Gladkov, A.L. A reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // International Journal Partial Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–10.
12. Gladkov, A.L. On the existence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 467–482.

R E F E R E N C E S

1. Deng K. Comparison principle for some nonlocal problems / K. Deng // Quarterly of Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 50, no. 3. – P. 517–522.
2. Chen B. A quasilinear parabolic system with nonlocal boundary condition / B. Chen, Y. Mi, C. Mu // Boundary value problems. – 2011. – Article ID 750769. – 18 p.
3. Zheng S. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system / S. Zheng, I. Kong // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2008. – Vol. 68. – P. 2406–2416.
4. Liu D. Blowup properties for semilinear reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / D. Liu, C. Mu // Abstract and Applied Analysis. – 2010. – Article ID 148035. – 18 p.
5. Gladkov A.L. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, M. Guedda // Nonlinear Analysis. – 2011. – Vol. 74. – P. 4573–4580.
6. Gladkov A.L. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, M. Guedda // Applicable Analysis. – 2012. – Vol. 91, no. 12. – P. 2267–2276.
7. Cui Z. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition / Z. Cui, Z. Yang, R. Zhang // Applied Mathematics and Computation. – 2013. – Vol. 224. – P. 1–8.
8. Ye Z. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources / Z. Ye, X. Xu // Nonlinear Analysis. – 2013. – Vol. 82. – P. 115–126.
9. Gladkov A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.
10. Gladkov A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // Advances in Mathematical Sciences and Applications. – 2009. – Vol. 19, no. 1. – P. 39–49.
11. Gladkov A.L. A reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // International Journal Partial Differential Equations. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–10.
12. Gladkov A.L. On the existence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 467–482.

Поступила в редакцию 24.06.2019
Адрес для корреспонденции: e-mail: gladkoval@mail.ru – Гладков А.Л.