УДК 512.544

О ПРОИЗВЕДЕНИИ МНОЖЕСТВА ФИШЕРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ И КЛАССА ФИШЕРА

Н.Т. Воробьев, А.С. Войткевич
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Цель исследования – доказательство аналога теоремы Локетта о произведениях классов Фишера для множеств Фишера.

Множеством Фишера группы G называется множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G, которое удовлетворяет следующему свойству: если $K \trianglelefteq L$, $L \leq G$ и $L \in \mathcal{F}$ и если H/K является p-подгруппой L/K для некоторого простого числа p, то $H \in \mathcal{F}$.

Классом Фишера называется класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных групп G, который удовлетворяет условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и H – подгруппа группы G, которая содержит нормальную подгруппу K группы G такую, что H/K является p-группой для некоторого простого числа p, то $H \in \mathfrak{F}$.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\mathfrak{F}\odot\mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$, который является классом Фиттинга. Доказано, если $\mathcal{F}$ – множество Фишера и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является классом Фишера.

Ключевые слова: *класс Фиттинга, множество Фиттинга группы G, класс Фишера, множество Фишера группы G, произведение множества Фишера группы G на класс Фишера.*

ABOUT THE PRODUCT OF FISHER SET OF THE FINITE GROUP AND FISHER CLASS

N.T. Vorobyev, A.S. Voitkevich
Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

A class groups $\mathfrak{F}$ is a Fitting class, if it is closed with respect to normal subgroups and the product of normal $\mathfrak{F}$-subgroup.

The purpose of the research is the proof of the analogue of the Lockett theorem about the products of Fischer classes for Fischer sets.

A Fischer set of group G is a Fitting set $\mathcal{F}$ of G, satisfying the property: if K is a subgroup of $L \leq G$, $L \in \mathcal{F}$ and if H/K is a p-subgroup of L/K for some prime p, then $H \in \mathcal{F}$.

A Fischer class is a Fitting class $\mathfrak{F}$ of finite groups G that satisfies the condition: if $G \in \mathfrak{F}$ and H is a subgroup of G that contains a normal subgroup K of group G such that H/K is p-group for some prime p, then $H \in \mathfrak{F}$.

The product of Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is a class of groups $\mathfrak{F}\odot\mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$, which is a Fitting class. It is proved that if $\mathcal{F}$ – Fischer set, and $\mathfrak{X}$ – Fischer class, then the product $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ is a Fischer class.

Key words: *Fitting class, Fitting set of group G, Fischer class, Fischer set of group G, the product of Fischer set group G and Fischer class.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* [1], если выполняются следующие два условия:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

(2) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$;

Из (2) следует, что для любой группы G существует единственная максимальная нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Во многих случаях описание структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп связано с применением понятия произведения классов Фиттинга (см., например, главы IX и X [1]). *Произведением классов* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп: $\mathfrak{F}\odot\mathfrak{H} = (G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F}\odot\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга [1].

Репозиторий ВГУ

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера* [2], если выполняются следующие условия:

(1) $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга;

(2) если $G \in \mathfrak{F}$ и $K \trianglelefteq G, K \leq H \leq G$ и $H/K -$ p-группа для некоторого простого числа p, то $H \in \mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп известен результат Локетта [3] о том, что произведение классов Фишера является классом Фишера.

Используя понятие множество Фиттинга группы G, Дёрк и Хоукс [1] определили понятие множества Фишера G. Напомним, что непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга группы* G [1], если выполняются следующие три условия:

(1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

В [1] установлено, что каждому классу Фишера $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фишера $\mathcal{F}$ группы G – его след в группе G, т.е. множество $\mathcal{F} = \{H \leq G: H \in \mathfrak{F}\}$, хотя обратное в общем случае неверно.

Определение 0.1 [1]. *Множеством Фишера группы G называется множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G, которое удовлетворяет следующему свойству: если $L \leq G, K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$ и H/K является p-подгруппой L/K для некоторого простого числа p, то $H \in \mathcal{F}$.*

Мы будем использовать следующее понятие, которое было определено Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем и Яном Наньином в работе [4].

Определение 0.2 [4]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X} = (\mathrm{H} \leq \mathrm{G}: \mathrm{H}/\mathrm{H}_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X})$ подгрупп группы G называется произведением множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга.*

В [4] доказано, что множество $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G.

В связи с этим возникает задача нахождения аналога указанного выше результата Локетта [3] для множеств Фишера группы G. Решение ее – основная цель настоящей работы.

Доказана

Теорема 0.3. *Если $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фишера группы G.*

1. Предварительные сведения. Для доказательства основного результата мы будем использовать следующие известные утверждения, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 1.1 [1]. *Справедливы утверждения:*

1) если H и K подгруппы группы G и N нормализует K, то имеет место изоморфизм: $NK/K \cong N/N \cap K$;

2) если H и K нормальные подгруппы группы G и $K \leq H$, то имеет место изоморфизм: $(G/K)(H/K) \cong G/H$.

Лемма 1.2 [1]. *Пусть H, K, N – подгруппы группы G, причем $K \leq H$. Тогда справедливо следующее равенство: $H \cap KN = K(H \cap N)$.*

Лемма 1.3 [1]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа G. Тогда $N_{\mathcal{F}} = N \cap G_{\mathcal{F}}$.*

Лемма 1.4 (квази R_0-лемма) [1]. *Пусть N_1, N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$ и факторгруппа G/N_1N_2 – нильпотентная группа. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/N_2 \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.5 [4]. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Тогда произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G.*

Лемма 1.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фишера. Тогда для любого простого делителя p любой группы из $\mathfrak{F}$ справедливо включение $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{N}_p$ – класс Фиттинга всех p-групп.*

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой.

2. Доказательство теоремы 0.3. Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера. Тогда по лемме 1.5 их произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга G. Для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если H подгруппа группы G их $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ и K – ее нормальная подгруппа, $L \leq K \leq H$ и L/K является p-группой для некоторого простого p, то $L \in \mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$.

Репозиторий ВГУ

Доказательство разобьем на несколько шагов.

(1) Из $L/K \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $LH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_p$ и $H \cap G_{\mathcal{F}}/K \cap G_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_p$.

Так как $K \trianglelefteq H$, то $K \trianglelefteq L$. Следовательно, $LH_{\mathcal{F}} = LKH_{\mathcal{F}}$. По утверждению 1 леммы 1.1 имеем изоморфизм:

$$LH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}} = LKH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}} \cong L/L \cap KH_{\mathcal{F}}.$$

Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм:

$$(L/K)/((L \cap KH_{\mathcal{F}})/K) \cong L/L \cap KH_{\mathcal{F}}.$$

Так как по условию $L/K \in \mathfrak{N}_p$ и класс всех p-групп является формацией, то группа $(L/K)/((L \cap KH_{\mathcal{F}})/K)$ является p-группой. Следовательно, по определению класса групп фактор $L/L \cap KH_{\mathcal{F}}$ – p-группа. Отсюда ввиду изоморфизма $L/L \cap KH_{\mathcal{F}} \cong LH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}}$ следует, что $LH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}}$ является p-группой.

(2) $L \cap H_{\mathcal{F}}/K \cap H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_p$.

Так как $K \trianglelefteq L$, то

$$L \cap H_{\mathcal{F}}/K \cap H_{\mathcal{F}} = (L \cap H_{\mathcal{F}})/((L \cap H_{\mathcal{F}}) \cap K).$$

Используя утверждение 1 леммы 1.1, имеем изоморфизм:

$$L \cap H_{\mathcal{F}}/K \cap H_{\mathcal{F}} \cong (L \cap H_{\mathcal{F}})K/K.$$

Так как $(L \cap H_{\mathcal{F}})K/K$ – нормальная подгруппа p-группы, L/K – p-группа и класс всех p-групп – класс Фиттинга, то фактор $(L \cap H_{\mathcal{F}})K/K$ – p-группа. Следовательно, и фактор $L \cap H_{\mathcal{F}}/K \cap H_{\mathcal{F}}$ является p-группой.

(3) $L/L \cap H_{\mathcal{F}}$ – p-группа.

Введем обозначения $\widetilde{H} = H/H_{\mathcal{F}}$, $\widetilde{K} = KH_{\mathcal{F}}/H_{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{L} = LH_{\mathcal{F}}/H_{\mathcal{F}}$. Так как $H \in \mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$, то $\widetilde{H} \in \mathfrak{X}$. Кроме того, $\widetilde{K} \trianglelefteq \widetilde{H}$, и по утверждению 2 леммы 1.1 имеем изоморфизм: $\widetilde{H}/\widetilde{K} \cong LH_{\mathcal{F}}/KH_{\mathcal{F}}$. Таким образом, ввиду (1) $\widetilde{H} \in \mathfrak{X}, \widetilde{K} \trianglelefteq \widetilde{H}, \widetilde{K} \leq \widetilde{L} \leq \widetilde{H}$ и $\widetilde{L}/\widetilde{K}$ является p-группой. Поскольку по условию $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, $\widetilde{L} = LH_{\mathcal{F}}/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1, ввиду изоморфизма: $LH_{\mathcal{F}}/H_{\mathcal{F}} \cong L/L \cap H_{\mathcal{F}}$, группа $L/L \cap H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$. Утверждение (3) доказано.

(4) $L_{\mathcal{F}} \cap (L \cap H_{\mathcal{F}})K = L \cap H_{\mathcal{F}}$.

Так как $H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, $K \cap H_{\mathcal{F}} \trianglelefteq H_{\mathcal{F}}, K \cap H_{\mathcal{F}} \leq L \cap H_{\mathcal{F}} \leq H_{\mathcal{F}}$, то ввиду (1) следует, что: $L \cap H_{\mathcal{F}}/ K \cap H_{\mathcal{F}}$ – p-группа. Поскольку $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G, подгруппа $L \cap H_{\mathcal{F}}$ является $\mathcal{F}$-группой. Так как $L \cap H_{\mathcal{F}} \trianglelefteq L$ по определению $\mathcal{F}$-радикала группы L, получаем $L \cap H_{\mathcal{F}} \leq L_{\mathcal{F}}$. Следовательно, по лемме 1.2 справедливо равенство:

$$L_{\mathcal{F}} \cap (L \cap H_{\mathcal{F}})K = (L \cap H_{\mathcal{F}})(L_{\mathcal{F}} \cap K).$$

Поскольку $K \trianglelefteq L$, по лемме 1.3 $L_{\mathcal{F}} \cap K = K_{\mathcal{F}}$ и поэтому $L_{\mathcal{F}} \cap (L \cap H_{\mathcal{F}})K = (L \cap H_{\mathcal{F}})K_{\mathcal{F}}$. Кроме того, $K_{\mathcal{F}} \leq L \cap H_{\mathcal{F}}$. Следовательно, $L_{\mathcal{F}} \cap (L \cap H_{\mathcal{F}})K = L \cap H_{\mathcal{F}}$ и равенство (4) доказано.

(5) $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K$ является p-группой.

Так как фактор H/K является p-группой и класс всех p-групп – формация, то по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм:

$$(L/K)/((L \cap H_{\mathcal{F}})K/K) \cong L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K \text{ и } L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K - p\text{-группа}.$$

Кроме того, для порядков факторов справедливо равенство:

$$|L/(L \cap H_{\mathcal{F}})| = |(L/(L \cap H_{\mathcal{F}}))/((L \cap H_{\mathcal{F}})K/L \cap H_{\mathcal{F}})| \cdot |(L \cap H_{\mathcal{F}})K/L \cap H_{\mathcal{F}}|.$$

Отсюда следует, что множество всех простых делителей группы $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K$ является подмножеством множества всех простых делителей порядка группы $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})$. Ввиду (3) фактор $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})$ является p-группой. Так как по лемме 1.5 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}$, $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K \in \mathfrak{X}$.

(6) Заключительный шаг.

Пусть $\widetilde{H} = L/L \cap H_{\mathcal{F}}$, $\widetilde{K_1} = (L \cap H_{\mathcal{F}})K/L \cap H_{\mathcal{F}}$, $\widetilde{K_2} = L_{\mathcal{F}}/L \cap H_{\mathcal{F}}$.

Необходимо заметить, что $\widetilde{K_1} \trianglelefteq \widetilde{H}$, $\widetilde{K_2} \trianglelefteq \widetilde{H}$ и $\widetilde{K_1} \cap \widetilde{K_2} = ((L \cap H_{\mathcal{F}})K/L \cap H_{\mathcal{F}}) \cap (L_{\mathcal{F}}/L \cap H_{\mathcal{F}})$.

Следовательно, по утверждению (4)

$$\widetilde{K_1} \cap \widetilde{K_2} = (L_{\mathcal{F}} \cap (L \cap H_{\mathcal{F}})K)/(L \cap H_{\mathcal{F}}) = (L \cap H_{\mathcal{F}})/(L \cap H_{\mathcal{F}}) = 1.$$

Покажем, что фактор $\widetilde{H}/\widetilde{K_1}\,\widetilde{K_2}$ – нильпотентная группа. Используя обозначения, получаем равенство:

Репозиторий ВГУ

$$\widetilde{H}/\widetilde{K_1}\,\widetilde{K_2} = (L/L \cap H_{\mathcal{F}})/((L \cap H_{\mathcal{F}})K/(L \cap H_{\mathcal{F}})(L_{\mathcal{F}}/L \cap H_{\mathcal{F}})) =$$
$$= (L_{\mathcal{F}}/L \cap H_{\mathcal{F}})/((L \cap H_{\mathcal{F}})KL_{\mathcal{F}})/(L \cap H_{\mathcal{F}}).$$

Так как по утверждению (4) $L \cap H_{\mathcal{F}} \leq L_{\mathcal{F}}$, то по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм:

$$\widetilde{H}/\widetilde{K_1}\,\widetilde{K_2} = (L/L \cap H_{\mathcal{F}})/(L_{\mathcal{F}}K/L \cap H_{\mathcal{F}}) \cong L/L_{\mathcal{F}}K$$

и $\widetilde{H}/\widetilde{K_1}\,\widetilde{K_2}$ – p-группа и группа $\widetilde{H}/\widetilde{K_1}\,\widetilde{K_2}$ нильпотентна.

Докажем, что $\widetilde{H}/\widetilde{K_1}$ является p-группой. По утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм:

$$\widetilde{H}/\widetilde{K_1} = (L/L \cap H_{\mathcal{F}})/((L \cap H_{\mathcal{F}})K/L \cap H_{\mathcal{F}}) \cong L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K.$$

Тогда ввиду (5) $L/(L \cap H_{\mathcal{F}})K$ – $\mathfrak{X}$-группа и, следовательно, $\widetilde{H}/\widetilde{K_1}$– $\mathfrak{X}$-группа. Итак, мы установили, что для групп $\widetilde{H}, \widetilde{K_1}$ и $\widetilde{K_2}$ выполняются все условия квази-R_0-леммы, т.е. леммы 1.4. Так как ввиду (3) $\widetilde{H} \in \mathfrak{X}$, то по лемме 1.4 это эквивалентно тому, что фактор $\widetilde{H}/\widetilde{K_2} \in \mathfrak{X}$. Поскольку по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм:

$$(L/L \cap H_{\mathcal{F}})/(L_{\mathcal{F}}/L \cap H_{\mathcal{F}}) \cong L/L_{\mathcal{F}},\ L/L_{\mathcal{F}} -\ \mathfrak{X}\text{-группа и } L \in \mathcal{F}\odot\mathfrak{X}.$$

Это означает, что произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ – класс Фишера.

Теорема доказана.

Заключение. В работе описывается новый метод построения множеств Фишера конечной группы посредством произведения множества Фишера и класса Фишера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett // Ph.D. Thesis. – University of Warwick, 1971.
4. Vorob'ev, N.T. On F-injectors of Fitting set of a finite group / N.T. Vorob'ev, Nanying Yang, W. Guo // Com. in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

REFERENCES

1. Doerk, K. *Finite soluble groups* / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. Hartley, B. *On Fischer's dualization of formation theory* / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Lockett, F.P. *On the theory of Fitting classes of finite soluble groups* / F.P. Lockett // Ph.D. Thesis. – University of Warwick, 1971.
4. Vorob'ev N.T. *On* F-*injectors of Fitting set of a finite group* / N.T. Vorob'ev, Nanying Yang, W. Guo. – Com. in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

Поступила в редакцию 11.05.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: voytkevich.a0406@gmail.com – Войткевич А.С.

Репозиторий ВГУ