УДК 517.983

МНОГОМЕРНОЕ ОБЩЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ЯДРЕ

С.М. Ситник*, О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков*****
**Белгородский государственный национальный исследовательский университет (Россия)*
***Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
****Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Настоящая работа посвящена изучению свойств многомерного общего интегрального преобразования в весовых пространствах измеримых комплекснозначных функций.

Цель – построение теории рассматриваемого интегрального преобразования в весовых пространствах суммируемых функций.

Материал и методы. *Исследуется многомерное общее интегральное преобразование в весовых пространствах суммируемых функций в области* $R_{+}^{n} = R_{+}^{1} \times R_{+}^{1} \times \ldots \times R_{+}^{1}$*. При этом используются методы функционального анализа и интегральных уравнений.*

Результаты и их обсуждение. *В работе исследовано многомерное общее интегральное преобразование и построена его* $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *- теория. Приведены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних весовых пространств* $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, получены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования.*

Заключение. *Результаты исследований обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.*

Ключевые слова: *многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядрах, многомерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

MULTIDIMENSIONAL GENERAL INTEGRAL TRANSFORMATION WITH SPECIAL FUNCTIONS IN THE KERNEL

S.M. Sitnik*, O.V. Skoromnik, C.A. Shlapakov*****
**Belgorod State National Research University (Russia)*
***Educational Establishment «Polotsk State University»*
****Educational Establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»*

The paper dwells upon the study of the properties of the multidimensional general integral transformation in weight spaces of summable functions.

The research purpose is building up a theory of the considered integral transformation in weight spaces of summable functions.

Material and methods. *A multidimensional general integral transform on the space of summable functions on a domain* $R_{+\ldots+}^{n} = R_{+}^{1} \times R_{+}^{1} \times \ldots \times R_{+}^{1}$ *is considered. In the research the methods of functional analysis and integral equations are used.*

Findings and their discussion. $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *- theory of a multidimensional general integral transformation was studied and constructed. Conditions for the boundedness and one-to-one operator of such a transformation from one* $L_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *- space to another were given, an analogue of the integration formula in parts was proved, various integral representations for the transformation under consideration were established.*

Conclusion. *The research findings generalize the well know findings for corresponding one-dimensional integral transformation.*

Key words: *multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel, multidimensional Mellin transforms, the space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

В настоящей работе исследовано многомерное общее интегральное преобразование. Схема изучения аналогична процессу построения теории *H*-преобразования, центральное место в которой отведено вопросам ограниченного и взаимно однозначного действия соответствующего интегрального оператора в пространствах интегрируемых функций с весом, сосредоточенным в нуле и на бесконечности.

Цель – построение теории рассматриваемого интегрального преобразования в весовых пространствах суммируемых функций.

Материал и методы. В статье рассматривается многомерное общее интегральное преобразование. Исследуются функциональные и композиционные свойства интегрального преобразования в пространствах суммируемых функций. При решении поставленных задач используются в основном методы функционального анализа. Важная роль отводится также теории интегральных преобразований и специальных функций, включающей теорию дробных интегралов и производных.

Результаты и их обсуждение. Построена $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ - теория многомерного общего интегрального преобразования, даны условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования.

1. Введение. Используется многомерное интегральное преобразование:

$$\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{x})=\overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\,\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\quad(\mathrm{x}>0)\,, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$; $\mathrm{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in R^n$ – векторы; R^n – Евклидово n-мерное пространство; $\mathrm{x}\cdot\mathrm{t}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathrm{x}\cdot 1=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ для $1=\left(1,\ldots,1\right)$; $\mathrm{x}>\mathrm{t}$ означает $x_1>t_1,\ldots,\,x_n>t_n$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$ [1, §28.4]; ядро $\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)=\mathrm{k}(x_1t_1)\cdot\mathrm{k}(x_2t_2)\cdots k(x_nt_n)$ есть произведение некоторых специальных функций; $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in C^n$; $\overline{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)$, $h_1\in R\setminus\{0\},h_2\in R\setminus\{0\},\,\ldots,h_n\in R\setminus\{0\}$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}=\dfrac{d}{dx_1dx_2\cdots dx_n}$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}:=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}$; $N=\{1,2,\ldots\}$ – множество натуральных чисел, $N_0=N\cup\{0\}$, $N_0^n=N_0\times N_0\times\ldots\times N_0$, $R_+^n=\{\mathrm{x}\in R^n,\,\mathrm{x}>0\}$;

$k=\left(k_1,\ldots,k_n\right)\in N_0^n=N_0\times\ldots\times N_0$, где $k_i\in N_0\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ – мультииндекс с $k!=k_1!\ldots k_n!$ и $\left|k\right|=k_1+k_2+\ldots+k_n$;

$D^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1}(\partial x_2)^{k_2}\ldots(\partial x_n)^{k_n}}$; $d\,\mathrm{t}=d\,t_1\cdot d\,t_2\ldots d\,t_n$; $f(\mathbf{t})=(t_1,\,t_2,\ldots,t_n)$.

Настоящая работа посвящена изучению преобразования (1.1) в весовых пространствах $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in R^n$ $(\nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_n)$, $\overline{2}=(2,\ldots,2)$, интегрируемых функций $f(\mathrm{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ на $R^n_{+\cdots+}$, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}<\infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=\left\{\int\limits_{R_+^1}x_n^{\nu_n\cdot 2-1}\left\{\ldots\left\{\int\limits_{R_+^1}x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left\{\int\limits_{R_+^1}x_1^{\nu_1\cdot 2-1}\left|f(x_1,\ldots,x_n)\right|^2dx_1\right\}dx_2\right\}\ldots\right\}dx_n\right\}^{1/2}<\infty\,. \tag{1.2}$$

В исследованиях преобразований типа (1.1) используется технология многомерного преобразования Меллина

$$(\mathrm{M}f)(\mathbf{s})=f^{*}(\mathbf{s})=\int\limits_{R^n_{+\cdots+}}f(\mathrm{t})\,\mathrm{t}^{\mathbf{s}-1}d\,\mathrm{t}\ .$$

Для преобразований (1.1) имеет место аналог многомерного равенства Парсеваля в виде

$$\int_{0}^{\infty} k(\mathrm{x}\,\mathrm{t}) f(\mathrm{t})\, d\,\mathrm{t} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \dots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} (\mathrm{M}\,k)(\mathbf{s})(\mathrm{M} f)(1-\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\, d\mathbf{s}\,, \qquad (1.3)$$

где бесконечные контуры интегрирования $(c_k - i\infty, c_k + i\infty)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) начинаются в точках $c_k - i\infty$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ и заканчиваются в точках $c_k + i\infty$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, где $c_k \in R$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ – некоторые вещественные постоянные. Преобразование Меллина ядер гипергеометрического типа представляет собой отношение произведений гамма-функций Эйлера Г(z), асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга имеет степенно-экспоненциальный характер. Это в свою очередь позволяет изучать в совокупности данный класс интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций и получать формулы обращения непосредственно, исходя из равенства (1.3) и сверточной структуры класса преобразований (1.1) [2; 3].

Результаты исследований обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования [4, гл. 3].

2. Предварительные сведения. Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Через $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in R^n$, $\overline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, $1 < \overline{r} < \infty$, обозначим весовое пространство интегрируемых функций $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве $R^n_{+\dots+}$, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} = \left\{ \int_{R^1_+} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{R^1_+} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \left\{ \int_{R^1_+} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} \left| f(x_1, \dots, x_n) \right|^{r_1} dx_1 \right\}^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty\,. \qquad (2.1)$$

Для функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in R^n, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n, 1 \le \overline{r} \le 2)$ многомерное преобразование Меллина $(\mathrm{M}\ f)(\mathbf{s})$ определяется равенством

$$(\mathrm{M} f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R^n} f(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\tau}})\,\mathrm{e}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\tau}}\, d\boldsymbol{\tau}\,, \qquad (2.2)$$

$\mathbf{s} = \boldsymbol{\nu} + i\,\mathrm{t}; \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \mathrm{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$.

Если $f \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{r}} \bigcap \mathrm{L}_{\overline{\nu},1}$, то (2.1) совпадает с классическим многомерным преобразованием Меллина функции $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n_{+\dots+})$, определяемым формулой [5, формула 1.4.42]:

$$(\mathrm{M} f)(\mathbf{s}) = f^*(\mathbf{s}) = \int_{R^n_{+\dots+}} f(\mathrm{t})\,\mathrm{t}^{\mathbf{s}-1}\, d\,\mathrm{t}\,,\ \mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\nu}\,, \qquad (2.3)$$

$R^n_{+\dots+} = \left\{ \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n : t_j > 0\,(j = 1, 2, \dots, n) \right\}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n), s_j \in C\ (j = 1, 2, \dots, n)$.

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n_{+\dots+}$ дается формулой [5, формула (1.4.43)]; 6]:

$$(\mathrm{M}^{-1} g)(\mathrm{x}) = \mathrm{M}^{-1}\left[g(\mathbf{s})\right](\mathrm{x}) \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \cdots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\, g(\mathbf{s}) d\mathbf{s},\ \gamma_j = \mathrm{Re}(s_j)\,(j = 1, 2, \dots, n)\,. \qquad (2.4)$$

Нам понадобятся следующие пространства.

Через $L_{\overline{p}}(R^n)$, как обычно, обозначим пространство функций $f(\mathrm{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, для которых

$$\|f\|_{\overline{p}} = \left\{ \int\limits_{R^n} |f(\mathrm{x})|^{\overline{p}} \,\mathrm{d}\,\mathrm{x} \right\}^{1/\overline{p}} < \infty, \; \overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n), 1 \le \overline{p} < \infty. \tag{2.5}$$

При $\overline{p} = \infty$ пространство $L_\infty(R^n)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(R^n)} = ess\sup|f(\mathrm{x})|, \tag{2.6}$$

где $ess\sup|f(\mathrm{x})|$ – это так называемый существенный супремум функции $|f(\mathrm{x})|$ [7].

На основании утверждения 3.1 [4] непосредственно проверяется справедливость следующих свойств преобразования Меллина (2.2).

Лемма 2.1. *Справедливы следующие свойства преобразования Меллина (2.2):*

(a) преобразование (2.2) *есть унитарное отображение пространства* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$, *на пространство* $L_2(R^2)$;

(b) для $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$,

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \lim_{\substack{R_1\to\infty \\ R_2\to\infty \\ \cdots \\ R_n\to\infty}} \int\limits_{\nu_1 - iR_1}^{\nu_1 + iR_1} \int\limits_{\nu_2 - iR_2}^{\nu_2 + iR_2} \cdots \int\limits_{\nu_n - iR_n}^{\nu_n + iR_n} \left(\mathsf{M} f\right)(\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}\, d\mathbf{s}, \tag{2.7}$$

где предел берется в топологии пространства $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ ($\overline{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_n) \in R^n$), *и если* $F(\overline{\nu} + i\,\mathrm{t}) = F_1(\nu_1 + it_1)F_2(\nu_2 + it_2)\cdots F_n(\nu_n + it_n)$, $F_k(\nu_k + it_k) \in L_1(-R, R)$, $k = 1, 2, ..., n$, *то*

$$\int\limits_{\nu_1 - iR_1}^{\nu_1 + iR_1} \int\limits_{\nu_2 - iR_2}^{\nu_2 + iR_2} \cdots \int\limits_{\nu_n - iR_n}^{\nu_n + iR_n} F(\mathbf{s})d\mathbf{s} = i^n \int\limits_{-R_1}^{R_1} \int\limits_{-R_2}^{R_2} \cdots \int\limits_{-R_n}^{R_n} F(\overline{\nu} + i\,\mathrm{t})d\,\mathrm{t}. \tag{2.8}$$

(c) Для функции $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и функции* $g \in \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})d\,\mathrm{x} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\overline{\nu} - i\infty}^{\overline{\nu} + i\infty} \left(\mathsf{M} f\right)(\mathbf{s})\left(\mathsf{M} g\right)(1 - \mathbf{s})d\mathbf{s}. \tag{2.9}$$

Для функции f определим почти всюду в $R^n_{+\cdots+}$ элементарные операторы M_ξ, W_δ, $\mathbf{R}$ [5, формулы (1.4.52), (1.4.53), (1.3.6)] и оператор $\mathbf{C}_\nu$ [4, формула (3.2.4)]:

$$\left(\mathbf{M}_\xi f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^\xi f(\mathrm{x}) \quad (\mathrm{x} \in R^n, \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in C^n), \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{R}f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}} f\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \quad (\mathrm{x} \in R^2), \tag{2.11}$$

$$\left(\mathbf{W}_\delta f\right)(\mathrm{x}) = f\left(\frac{\mathrm{x}}{\delta}\right) \quad (\mathrm{x} \in R^n, \delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in R^n_{+\ldots+}), \tag{2.12}$$

$$\left(\mathbf{C}_\nu f\right)(\mathrm{x}) = \mathbf{e}^{\nu\,\mathrm{x}} f\left(\mathbf{e}^{\mathrm{x}}\right) = e^{\nu_1 x_1} \cdot e^{\nu_2 x_2} \cdots e^{\nu_n x_n} f\left(e^{x_1}, e^{x_2}, ..., e^{x_n}\right). \tag{2.13}$$

Известно, что преобразование Меллина (2.2) от преобразований $\mathbf{M}_\xi f$ и $\mathbf{R}f$ равно соответственно [5, формулы (1.4.44), (1.4.46)]:

$$(\mathsf{M}\,\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s}) = (\mathsf{M}\,f)(\mathbf{s} + \xi) \quad ((\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \mathrm{Re}(\xi)) : \mathrm{Re}(s_1) = \nu_1 - \mathrm{Re}(\xi_1), \mathrm{Re}(s_2) = \nu_2 - \mathrm{Re}(\xi_2)), \tag{2.14}$$

$$(\mathsf{M}\,\mathbf{R}f)(\mathbf{s}) = (\mathsf{M}\,f)(1 - \mathbf{s}) \quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \mathbf{v} : \mathrm{Re}(s_1) = \nu_1, \mathrm{Re}(s_2) = \nu_2). \tag{2.15}$$

С учетом леммы 3.1 [4], равенства (2.14), (2.15) [5, глава 1], а также леммы 2.1 [8–10] непосредственно проверяется, что операторы M_ξ, $\mathbf{R}$, W_δ, $\mathbf{C}_\nu$ обладают следующими свойствами.

Лемма 2.2. *Для* $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in R^n_{+\ldots+}$, $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n$, *и* $1 \le \overline{r} < \infty$ *верны следующие утверждения:*

(a) M_ξ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathsf{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi),\overline{r}}$; *если* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$, *то*

$$(\mathsf{M}\,\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s}) = (\mathsf{M}\,f)(\mathbf{s} + \xi) \quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \mathrm{Re}(\xi)); \tag{2.16}$$

(b) $\mathbf{R}$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{r}}$*; если* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$*, то*

$$(\mathrm{M}\ \mathbf{R}f)(\mathbf{s}) = (\mathrm{M}\ f)(1-\mathbf{s}) \quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu}); \tag{2.17}$$

(c) $\mathbf{W}_\delta$ *является ограниченным изоморфизмом* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на себя и если* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$*, то*

$$(\mathrm{M}\ \mathbf{W}_\delta f)(\mathbf{s}) = \delta^{\mathbf{s}}(\mathrm{M}\ f)(\mathbf{s}) \quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu}); \tag{2.18}$$

(d) $\mathbf{C}_\nu$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $L_{\overline{r}}(R^n)$.

3. $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ **- теория многомерного** $\mathrm{K}f$ **- преобразования.** Рассмотрим преобразование (1.1):

$$(\mathrm{K}f)(\mathrm{x}) = \overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathrm{x}} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_0^\infty \mathrm{k}(\mathrm{x}\,\mathrm{t}) f(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x} > 0),$$

где ядро $\mathrm{k} \in \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$; $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in C^n$; $\overline{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \in C^n$ и $h_1 \in R \setminus \{0\}$, $h_2 \in R \setminus \{0\}$, …, $h_n \in R \setminus \{0\}$.

Теорема *(а) Пусть оператор преобразования (1.1) удовлетворяет условию* $\mathrm{K} \in [\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$*, тогда ядро* $\mathrm{k} \in \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *в правой части (1.1). Если для* $\nu_1 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,…, $\nu_n \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$ *выполняется*

$$(\mathrm{M}\ \mathrm{k})(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathrm{t})}{\overline{\lambda}+1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\overline{h}}, \tag{3.1}$$

тогда $\boldsymbol{\omega} \in L_\infty(R^n)$*, и для функции* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *имеет место формула*

$$(\mathrm{M}\ \mathrm{K}f)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \omega(\mathrm{t})(\mathrm{M}\ f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t}). \tag{3.2}$$

(б) Обратно, для функции $\boldsymbol{\omega} \in L_\infty(R^n)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$ *и* $\overline{h} = (h_1, h_2, ..., h_n) \in R^n_{+....+}$ *существует преобразование* $\mathrm{K} \in [\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ *такое, что* (3.2) *выполняется для* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Более того, если* $\nu_1 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,…, $\nu_n \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$*, то преобразование* $\mathrm{K}f$ *дается* (1.1) *с ядром* k*, определяемым соотношением* (3.1).

(в) При выполнении условий (а) или (б) с $\boldsymbol{\omega} \ne 0$ *преобразование* K *взаимно однозначно действует из пространства* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *в пространство* $\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$*, если к тому же* $1/\boldsymbol{\omega} \in L_\infty(R^n)$*, то* K *отображает* $\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *и для функций* $f \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *выполняется равенство:*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})(\mathrm{K}g)(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} = \int_0^\infty (\mathrm{K}f)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\,\mathrm{x}. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Пусть $\mathrm{K} \in [\mathsf{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathsf{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$, где $\nu_1 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,…, $\nu_n \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$. Рассмотрим случай $\nu_1 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,…, $\nu_n > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$. Для действительных чисел $a_1 > 0$, $a_2 > 0$,…, $a_n > 0$ определим функцию

$$g_{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \mathrm{t}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}, & 0 < \mathrm{t} < \mathrm{a}; \\ 0, & \mathrm{t} > \mathrm{a}; \end{cases} = \tag{3.4}$$

$$= \begin{cases} t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1} t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1} \cdots t_n^{(\lambda_n+1)/hn-1}, & 0 < t_1 < a_1, 0 < t_2 < a_2, ..., 0 < t_n < a_n; \\ 0, & t_1 > a_1, t_2 > a_2, ..., t_n > a_n. \end{cases}$$

Тогда

$$\|g_{\mathrm{a}}\|_{\overline{\nu},\overline{2}} = \left\{ \int_0^{a_n} t_n^{\nu_n \cdot 2-1} ... \left[\int_0^{a_2} t_2^{\nu_2 \cdot 2-1} \left[\int_0^{a_1} t_1^{\nu_1 \cdot 2-1} \left| t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1} t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1} \cdots t_n^{(\lambda_n+1)/h_n-1} \right|^2 dt_1 \right] dt_2 \right] ... dt_n \right\}^{1/2} =$$

$$=\left\{\int\limits_0^{a_n} t_n^{2((\lambda_2+1)/h_2+\nu_2-1)-1}dt_n \cdots \int\limits_0^{a_1} t_1^{2((\lambda_1+1)/h_1+\nu_1-1)-1}dt_1\right\}^{1/2}=\left\{\int\limits_0^{a} \mathrm{t}^{2((\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\bar{\nu}-1)-1}\,\mathrm{d\,t}\right\}^{1/2}<\infty,$$

что означает $g_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})\in \mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Следовательно,

$$\left(\mathrm{K}\,g_1\right)(\mathrm{x})=\bar{h}\,\mathrm{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\mathrm{t}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\mathrm{d\,t}=$$

$$=\bar{h}\,\mathrm{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1}\ldots\int\limits_0^{1}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\mathrm{t}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\mathrm{d\,t}=$$

$$=h_1h_2\cdots h_n x_1^{1-(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{1-(\lambda_2+1)/h_1}\cdots x_n^{1-(\lambda_n+1)/h_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}x_1^{(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{(\lambda_2+1)/h_2}\cdots x_n^{(\lambda_n+1)/h_n}\times$$

$$\times\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1}\cdots\int\limits_0^{1}\mathrm{k}\left(x_1t_1\right)\cdot\mathrm{k}(x_2t_2)\cdots\mathrm{k}(x_nt_n)\,t_1^{(\lambda_1+1)/h_1-1}t_2^{(\lambda_2+1)/h_2-1}\cdots t_n^{(\lambda_n+1)/h_n-1}dt_1\,dt_2\cdots dt_n=$$

$$=\left[x_it_i=\tau_i,\ i=1,2,\ldots,n\right]=$$

$$=h_1h_2\cdots h_n x_1^{1-(\lambda_1+1)/h_1}x_2^{1-(\lambda_2+1)/h_1}\cdots x_n^{1-(\lambda_n+1)/h_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_0^{x_{n-1}}\ldots\int\limits_0^{x_1}\mathrm{k}\left(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\right)\tau^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\,\mathrm{d}\,\tau=\bar{h}\,\mathrm{k}(\mathrm{x}).$$

Таким образом, $\mathrm{K}\,g_1=\bar{h}\,\mathrm{k}$. Отсюда, так как $\mathrm{K}\in[\mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}},\mathrm{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$, то $\mathrm{k}\in\mathrm{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$.

Учитывая, что $f\in\mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $\mathrm{k}\in\mathrm{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$, с использованием неравенства Коши–Буняковского [11]:

$$\left|\int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x}\right|\le\left(\int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\left|f(\mathrm{x})\right|^2\mathrm{d\,x}\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\left|g(\mathrm{x})\right|^2\mathrm{d\,x}\right)^{1/2}\quad(-\infty\le\mathrm{a}<\mathrm{b}\le\infty),\tag{3.5}$$

будем иметь

$$\left|\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\right|=\left|\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int\limits_0^{\infty}\left\{\mathrm{t}^{1/2-\bar{\nu}}\,\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\right\}\left\{\mathrm{t}^{-1/2+\bar{\nu}}\,f(\mathrm{t})\right\}\mathrm{d\,t}\right|\le$$

$$\le\mathrm{x}^{(\mathrm{Re}(\bar{\lambda})+1)/\bar{h}}\left\{\int\limits_0^{\infty}\left|\mathrm{t}^{1-\bar{\nu}}\,\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)\right|^2\frac{\mathrm{d\,t}}{\mathrm{t}}\right\}^{1/2}\left\|f\right\|_{\bar{\nu},\bar{2}}=\mathrm{x}^{\bar{\nu}-1+(\mathrm{Re}(\bar{\lambda})+1)/\bar{h}}\left\|\mathrm{k}\right\|_{1-\bar{\nu},\bar{2}}\left\|f\right\|_{\bar{\nu},\bar{2}}=o(1)$$

при $x_1\to+0,x_2\to+0,\ldots,x_n\to+0$. Интегрируя обе части соотношения (1.1), получаем:

$$\int\limits_0^{\mathrm{x}}\mathrm{t}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{k}\left(\mathrm{x\,t}\right)f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}\quad(\mathrm{x}>0).\tag{3.6}$$

Для действительного $\mathrm{x}>0$ и $\mathrm{Re}(\mathbf{s})+\left[\mathrm{Re}(\bar{\lambda})+1\right]/\bar{h}>1$ получаем формулу преобразования Меллина (2.3) функции $g_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})$:

$$(\mathrm{M}\,g_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})=\frac{\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\mathbf{s}-1}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\mathbf{s})}.\tag{3.7}$$

Поскольку $f\in\mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $g_{\mathrm{x}}\in\mathrm{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, учитывая (2.9), получаем

$$\int\limits_0^{\mathrm{x}}\mathrm{t}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\int\limits_0^{\infty}g_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})\left(\mathrm{K}\,f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\bar{\nu}-i\infty}^{\bar{\nu}+i\infty}(\mathrm{M}\,g_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})(\mathrm{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s}=$$

$$=\frac{\bar{h}\,\mathrm{x}^{\bar{\nu}-1+(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}}}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}^{-i\,\mathrm{t}}\frac{(\mathrm{M}\ \mathrm{K}\,f)(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t})}{\bar{\lambda}+1-(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t})\bar{h}}\mathrm{d\,t}.\tag{3.8}$$

Аналогично из (2.9) и (2.18) находим

$$\bar h\, x^{(\bar\lambda+1)/\bar h}\int_0^\infty k(x\,t)\,f(t)\,dt=\bar h\, x^{(\bar\lambda+1)/\bar h}\int_0^\infty \left(W_{1/x}\,k\right)(t)\,f(t)\,dt=$$

$$=\frac{\bar h\, x^{(\bar\lambda+1)/\bar h}}{(2\pi i)^n}\int_{1-\bar\nu-i\infty}^{1-\bar\nu+i\infty} x^{-\mathbf{s}}(\mathcal{M}\ k)(s)(\mathcal{M}f)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s}=$$

$$=\frac{\bar h\, x^{\nu-1+(\bar\lambda+1)/\bar h}}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-i\,t}(\mathcal{M}\ k)(1-\bar\nu+i\,t)(\mathcal{M}f)(\bar\nu-i\,t)\,dt\,. \tag{3.9}$$

Подставляем (3.8) и (3.9) в (3.6), вводим обозначение:

$$F(t)=\frac{(\mathcal{M}\ K\,f)(1-\bar\nu+i\,t)}{\bar\lambda+1-(1-\bar\nu+i\,t)\bar h}-(\mathcal{M}\ k)(1-\bar\nu+i\,t)(\mathcal{M}f)(\bar\nu-i\,t)\,, \tag{3.10}$$

полагаем $x=e^{-y}$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,yt}\,F(t)\,dt=0,\quad y\in R^n\,. \tag{3.11}$$

Согласно свойству (а) леммы 2.1 преобразования Меллина (2.3) $\mathcal{M}\ \in\left[f\in \mathrm{L}_{\sigma,\bar 2}, L_{\bar 2}(R^n)\right]$ для любого $\sigma\in R^n$. Таким образом,

$$(\mathcal{M}\ K\,f)(1-\bar\nu+i\,t),\ (\mathcal{M}\,g_1)(\bar\nu-i\,t)=\frac{\bar h}{\bar\lambda+1-(1-\bar\nu+i\,t)\bar h},\ (\mathcal{M}\ k)(1-\bar\nu+i\,t),\ (\mathcal{M}f)(\bar\nu-i\,t)$$

принадлежат пространству $L_{\bar 2}(R^n)$. Значит, выражение в левой части (3.10) также принадлежит пространству $L_{\bar 2}(R^n)$. Далее равенство (3.11) означает, что $F(t)=0$. Определяя $\boldsymbol{\omega}$ через (3.1), с учетом (3.10), получаем (3.2).

Осталось показать, что $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$. Из (3.2) следует, что если $f\in \mathrm{L}_{\bar\nu,\bar 2}$, тогда $\omega(t)(\mathcal{M}f)(\bar\nu-i\,t)\ \in L_{\bar 2}(R^n)$. Согласно свойству (а) леммы 2.1 преобразование Меллина (2.2) отображает пространство $\mathrm{L}_{\bar\nu,\bar 2}$ $(\nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_n)$ на пространство $L_{\bar 2}(R^n)$ и, таким образом, $\boldsymbol{\omega}(t)\phi(t)\in L_{\bar 2}(R^n)$ для любой функции $\phi(t)\in L_{\bar 2}(R^n)$.

Таким образом, $\boldsymbol{\omega}\in L_\infty(R^n)$. Это завершает доказательство (а) для случая $\nu_1>1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2>1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2,\ldots,\ \nu_n>1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$.

Случай $\nu_1<1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2<1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2,\ldots,\ \nu_n<1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ доказывается аналогично после замены функции $g_a(t)$ в (3.4) функцией $h_a(t)$, определяемой для $a>0$, формулой

$$h_a(t)=\begin{cases}0, & 0<t<a;\\ t^{(\bar\lambda+1)/\bar h-1}, & t>a\,.\end{cases} \tag{3.12}$$

Докажем случай (b). Полагаем, что $\omega \in L_\infty(R^n)$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Из леммы 2.1 преобразование Меллина унитарно отображает пространство $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$ на пространство $L_2(R^n)$, поэтому существует единственная функция $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$, такая, что

$$(\mathfrak{M} g)(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \omega(\mathrm{t})(\mathfrak{M} f)(\bar{\nu}-i\,\mathrm{t}).$$

Мы определяем K как $\mathrm{K} f = g$. Тогда (3.2) выполняется. K является также линейным оператором, а именно, если $f_1 \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, $f_2 \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ и $\mathbf{c}_1 \in R^n$, $\mathbf{c}_2 \in R^n$, тогда

$$(\mathfrak{M}\ \mathrm{K}(\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2))(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \omega(\mathrm{t})(\mathfrak{M}\,(\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2))(\bar{\nu}-i\,\mathrm{t}) =$$

$$= c_1\omega(t)\,(\mathfrak{M}f_1)(\bar{\nu}-i\,t) + c_2\omega(t)\,(\mathfrak{M}f_2)(\bar{\nu}-i\,t) = \mathbf{c}_1(\mathfrak{M}\ f_1)(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t}) + \mathbf{c}_2(\mathfrak{M}\ f_2)(1-\bar{\nu}+i\,\mathrm{t}) =$$

$$= (\mathfrak{M}(c_1\,Kf_1 + c_2\,Kf_2))(1-\bar{\nu}+i\,t),$$

что означает выполнение равенства: $\mathrm{K}(\mathbf{c}_1 f_1 + \mathbf{c}_2 f_2) = \mathbf{c}_1\,\mathrm{K}\,f_1 + \mathbf{c}_2\,\mathrm{K}\,f_2$.

Далее из леммы 2.1 следует, что взяв в качестве $\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}(-\mathrm{t})$, получаем

$$\|\mathrm{K} f\|_{1-\bar{\nu},\bar{2}} = \|\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f\|_{\bar{2}} = \|\boldsymbol{\omega}^*\mathfrak{M}\ f\|_{\bar{2}} \le \|\boldsymbol{\omega}^*\|_\infty \|\mathfrak{M}\ f\|_{\bar{2}} = \|\boldsymbol{\omega}^*\|_\infty \|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}},$$

где $\|\omega\|_\infty$ есть норма $\boldsymbol{\omega}$ в пространстве $L_\infty(R^n)$ (2.6). Это означает, что $\mathrm{K} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$.

Пусть $\nu_1 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$, ..., $\nu_n \ne 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$; пусть $\mathrm{k}(\mathrm{t})$ определена в (3.1). Тогда $\mathrm{k} \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$ на основании (c) леммы 2.1, поскольку $\dfrac{1}{(\mathrm{p}+i\,\mathrm{t})} \in L_{\bar{2}}(R^n)$ для постоянного вектора $\mathrm{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_1 \ne 0, p_2 \ne 0, \ldots, p_n \ne 0$. Если $\nu_1 < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$, ..., $\nu_n < 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ и функция $h_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})$ дается (3.12), тогда

$$(\mathfrak{M}\ h_{\mathrm{x}})(\mathbf{s}) = \frac{-\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\mathbf{s}-1}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\mathbf{s})}. \tag{3.13}$$

Из (3.12), (2.9), (3.13), (3.2), (3.1) и (2.12), если $\mathrm{x} > 0$, аналогично (3.8), получаем

$$\int_{\mathrm{x}}^{\infty} \mathrm{t}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1}\big(\mathrm{K} f\big)(\mathrm{t})\,d\mathrm{t} = \int_0^{\infty} h_{\mathrm{x}}(\mathrm{t})\big(\mathrm{K} f\big)(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\bar{\nu}-i\infty}^{\bar{\nu}+i\infty} (\mathfrak{M}\,h_{\mathrm{x}})(\mathbf{s})(\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\bar{h}\,\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\bar{\nu}+i\,\mathrm{t}-1}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\bar{\nu}-i\,\mathrm{t})}(\mathfrak{M}\ \mathrm{K} f)(1-\bar{\nu}-i\,\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} =$$

$$= \frac{-\bar{h}}{(2\pi)^n}\mathrm{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}+\bar{\nu}-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{x}^{i\,\mathrm{t}}}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}(1-\bar{\nu}-i\,\mathrm{t})}\boldsymbol{\omega}^*(\mathrm{t})(\mathfrak{M} f)(\bar{\nu}+i\,\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi)^n} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\overline{\nu}-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}^{i\,\mathrm{t}} (\mathrm{M}\ \mathrm{k})(1-\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})(\mathrm{M}f)(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}+\overline{\nu}-1} \int\limits_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} \mathrm{x}^{1-\overline{\nu}-\mathbf{s}} (\mathrm{M}\ \mathrm{k})(\mathbf{s})(\mathrm{M}f)(1-\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\ \mathrm{W}_{1/\mathrm{x}}\mathrm{k})(\mathbf{s})(\mathrm{M}f)(1-\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} =$$

$$= \frac{-\overline{h}}{(2\pi i)^n} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\ \mathrm{k}(\mathrm{xt}))(\mathbf{s})(\mathrm{M}f)(1-\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = -\overline{h}\,\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{k}(\mathrm{xt}) f(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\,.$$

Дифференцируя левую и правую части последнего равенства, получаем (1.1). Аналогично для случая $\nu_1 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2 > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$,..., $\nu_n > 1-(\mathrm{Re}(\lambda_n)+1)/h_n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ используется формула (3.7) для функции $g_{\mathrm{a}}(\mathrm{t})$, определяемой в (3.4). Точные расчеты мы опускаем.

Докажем (c). Полагаем $\omega \neq 0$. Тогда из (3.2) при $f \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $\mathrm{K}f=0$ следует равенство $\omega(\mathrm{t})(\mathrm{M}f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})=0$, отсюда $(\mathrm{M}f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})=0$.

Это означает, что $f=0$, и преобразование $\mathrm{K}f$ взаимно однозначно. Мы полагаем, что $1/\omega \in L_\infty(R^n)$. На основании пункта (b) теоремы существует преобразование $\mathrm{T} \in [\mathrm{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}, \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}]$, такое, что если $g \in \mathrm{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$, то

$$(\mathrm{M}\ \mathrm{T}g)(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \frac{1}{\omega(-\mathrm{t})}(\mathrm{M}g)(1-\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})\cdot$$

На основании (3.2) мы имеем

$$(\mathrm{M}\ \mathrm{KT}g)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \omega(\mathrm{t})(\mathrm{M}\ \mathrm{T}g)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t}) = (\mathrm{M}g)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\,.$$

Таким образом, для всякой функции $g \in \mathrm{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ выполняется тождество $\mathrm{KT}g = g$, и значит, K отображает пространство $\mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ на $\mathrm{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$.

Далее, если функции $f \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $g \in \mathrm{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, то из (2.9) и (3.2) мы окончательно получаем

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x})\big(\mathrm{K}g\big)(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\overline{\nu}-i\infty}^{\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\ f)(\mathbf{s})(\mathrm{M}\ \mathrm{K}g)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\ f)(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})(\mathrm{M}\ \mathrm{K}g)(1-\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\ f)(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\,\omega(-\mathrm{t})(\mathrm{M}\ g)(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(\mathrm{t})(\mathrm{M}\ f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})(\mathrm{M}\ g)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{M}\ \mathrm{K}f)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})(\mathrm{M}\ g)(1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}))\,d\,\mathrm{t} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{1-\overline{\nu}-i\infty}^{1-\overline{\nu}+i\infty} (\mathrm{M}\ \mathrm{K}f)(\mathbf{s})(\mathrm{M}\ g)(1-\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int\limits_0^\infty (\mathrm{K}f)(\mathrm{x})\,g(\mathrm{x})\,d\,\mathrm{x}\,.$$

Теорема доказана.

Заключение. Итогом проделанных исследований являются результаты, обобщающие полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Ву Ким Туан. Композиционная структура интегральных преобразований / Ву Ким Туан, О.И. Маричев, С.Б. Якубович // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 4. – С. 786–790.
3. Маричев, О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) / О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 310 с.
4. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
5. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
6. Yu. A. Brychkov. Multidimensional Integral Transformations / H.-Y. Glaeske, A.P. Prudnikov, Vu Kim Tuan. – Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.
7. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 455 с.
8. Rooney, P.G. On integral transformations with *G*- function kernels / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1982/83. – Vol. 93. – P. 265–297.
9. Rooney, P.G. On the range of the integral transformation / P.G. Rooney // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, № 4. – P. 545–548.
10. Rooney, P.G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1995. – Vol. 125, № 3. – P. 449–463.
11. Ситник, С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств / С.М. Ситник // Исследования по математическому анализу. Сер., Математический форум / редкол.: Ю.В. Коробейник, А.Г. Кусраев. – Владикавказ: Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, 2009. – Т. 3. – С. 221–266.

R E F E R E N C E S

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Appendices], Mn.: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Voo Kim Tuan, Marichev O.I., Yakubovich S.B. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1986, 4(286), pp. 786–790.
3. Marichev O.I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsialnykh funktsii (teoriya i tablitsi formul)* [Method of Special Function Integral Calculation (Theory and Formula Tables)], Mn.: Nauka i tekhnika, 1978, 310 p.
4. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
5. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
6. Yu. A. Brychkov. Multidimensional Integral Transformations / H.-Y. Glaeske, A. P. Prudnikov, Vu Kim Tuan. – Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.
7. Nikolski S.M. *Problizheniye funktsii peremennykh i teoremy vlozheniya* [Nearing the Functions of Many Variables and Theorems of Inclusion], M.: Nauka, 1975, 455 p.
8. Rooney, P.G. On integral transformations with *G*- function kernels / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1982/83. – Vol. 93. – P. 265–297.
9. Rooney, P.G. On the range of the integral transformation / P.G. Rooney // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, № 4. – P. 545–548.
10. Rooney, P.G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations / P.G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1995. – Vol. 125, № 3. – P. 449–463.
11. Sitnik S.M. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu. Seriya: Matematicheski Forum.* [Mathematical Analysis Studies. Series: Mathematical Forum], Vladikavkaz: Yuzhni matematicheski institute Vladikavkazskogo nauchnogo tsentra RAN i Pravitelstva Respubliki Severnaya Osetiya-Alaniya, 2009, 3, pp. 221–266.

Поступила в редакцию 11.05.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.