МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.32

НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ф.Е. Ломовцев, В.В. Лысенко
Белорусский государственный университет

Модификацией метода характеристик выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения линейной смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с нехарактеристическими и нестационарными вторыми частными производными в граничном режиме. Введено понятие характеристических вторых производных на границе. Нехарактеристичность вторых производных означает, что они направлены не вдоль критической характеристики уравнения. Их нестационарность означает, что их коэффициенты зависят от времени. Предложен новый метод погружения в решения с фиксированными значениями, упрощающий решение систем дифференциальных уравнений.

Цель работы – явное решение и исследование корректности смешанной задачи по Адамару во множестве классических решений.

Материал и методы. *Материалом служит линейная смешанная задача для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нехарактеристических вторых производных и зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме. Нахождение классического решения и исследование корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) во множестве классических решений смешанной задачи проводится модификацией известного метода характеристик (распространяющихся волн) и предложенным в настоящей работе методом погружения в решения с фиксированными значениями.*

Результаты и их обсуждение. *Выведена явная формула единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи для общего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных и нехарактеристических вторых производных в граничном режиме. Единственность решения обеспечивается алгоритмом его поиска. Устойчивость (непрерывная зависимость) классического решения от исходных данных (правой части уравнения, начальных данных и граничного данного) следует из теоремы Банаха о замкнутом графике. Установлен критерий корректности во множестве классических решений искомой смешанной задачи. Этот критерий состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и условия согласования между ними для однозначной и устойчивой везде разрешимости во множестве классических решений. Дано понятие характеристических вторых производных в граничном режиме. Предложен метод погружения в решения с фиксированными значениями. Приведен пример задачи, подтверждающий утверждение доказанной теоремы. Полученные результаты дают полное и окончательное решение и исследование смешанной задачи.*

Заключение. *Доказана теорема с явной формулой классического решения и критерием корректности по Адамару смешанной задачи при нехарактеристических вторых производных и зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме. Эта теорема имеет характер глобальной теоремы, потому что в ней исходные данные задачи не продолжаются вне множеств их задания, и ее результаты являются полными и окончательными.*

Ключевые слова: *смешанная задача, нестационарный граничный режим, характеристические вторые производные, метод погружения в решения с фиксированными значениями, критерий корректности.*

NON-CHARACTERISTIC MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE WITH NON-STATIONARY BOUNDARY SECOND DERIVATIVES

F.E. Lomovtsev, V.V. Lysenko
Belarusian State University

A modification of the characteristic method yields an explicit formula for a unique and stable classical solution of a linear mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-characteristic and non-stationary second partial derivatives in the boundary mode. The concept of characteristic second derivatives on the boundary is introduced. The non-characteristic nature of the second derivatives means that they are not directed along the critical characteristic of the equation. Their non-stationary nature means that their coefficients depend on time. An immersion method in solutions with fixed values, simplifying the solution of systems of differential equations is proposed.

The goal of the work is an explicit solution and the study of its Hadamard correctness according to the set of classical solutions.

Material and methods. *The material of the work is a linear mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-characteristic second derivatives and time-dependent coefficients in the boundary mode. Finding a classical solution and studying Hadamard correctness (existence, uniqueness and stability) in the set of classical solutions of mixed problem is carried out by modifying the well-known characteristic method (propagating waves) and the method of immersion in solutions with fixed values proposed in this paper.*

Findings and their discussion. *An explicit formula for a unique and stable classical solution of a mixed problem for a general inhomogeneous oscillation equation of a semi-bounded string with non-stationary and non-characteristic second derivatives in the boundary mode is derived. The uniqueness of the solution is provided by the algorithm of its search. The stability (continuous dependence) of the classical solution on the original data (the right-hand side of the equation, the initial data and the boundary data) follows the Banach theorem on a closed graph. The correctness criterion is established in the set of classical solutions of the desired mixed problem. This correctness criterion consists of the necessary and sufficient smoothness requirements for the right-hand side of the equation, the initial data and the boundary data, and the matching condition between them for the unique and stable everywhere solvability in the set of classical solutions. The concept of characteristic second derivatives in the boundary mode is given. An immersion method in solutions with fixed values is proposed. An example of a problem confirming the statement of the proved theorem is given. The obtained findings give a complete and final resolution and investigation of the mixed problem.*

Conclusion. *A theorem is proved with an explicit formula for a classical solution and a Hadamard correctness criterion for a mixed problem with non-characteristic second derivatives and time-dependent coefficients in the boundary mode. This theorem has the character of a global theorem, because in it the original data of the problem does not continue outside the sets of their tasks and its results are complete and final.*

Key words: *mixed problem, non-stationary boundary regime, characteristic second derivatives, immersion method in solutions with fixed values, correctness criterion.*

Настоящая работа посвящена выводу явной формулы классического решения и критерия корректности (существования, единственности и устойчивости решения) смешанной (начально-краевой) задачи для общего уравнения вынужденных колебаний струны при нестационарном дифференциальном граничном режиме со всеми частными производными до второго порядка включительно. В граничном режиме направления вторых частных производных не являются характеристическими для любого момента времени. Этой смешанной задачей моделируются колебания упругой полуограниченной струны, которые порождены суперпозицией прямой и обратной волн, распространяющихся с разными скоростями в движущейся в упругой среде за счет вынуждающей силы, начального смещения, начальной скорости и нестационарного граничного режима. Граничный режим и дифференциальное уравнение последовательно содержат слагаемые, указывающие на сопротивление или содействие среды пропорционально ускорению, касательному напряжению, кривизне, скорости, натяжению и смещению струны соответственно. Формула единственного классического решения получена модификацией известного метода характеристик (распространяющихся волн) [1], но без продолжений исходных данных (правой части, начальных данных и граничного данного) вне множеств их задания. Во множестве классических решений этим же методом выводится критерий ее корректности, т.е. необходимые и достаточные требования гладкости и условие согласования исходных данных задачи. Дважды непрерывная дифференцируемость частного решения неоднородного общего уравнения колебаний струны и необходимые (минимальные) требования гладкости на правую часть уравнения установлены с помощью задачи Гурса для канонического вида уравнения методом корректировки, предложенным Ф.Е. Ломовцевым [2]. Устойчивость классического решения по исходным данным выводится из его существования и единственности по теореме Банаха о замкнутом графике [3, с. 116]. Формула единственного и устойчивого классического решения и критерий корректности смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний струны в четверти плоскости с первыми частными и второй частной производными по пространственной переменной в граничном режиме указаны в [4].

Смешанная задача для простейшего уравнения колебаний струны в четверти плоскости с не- характеристической первой косой производной в граничном режиме решалась и исследовалась в случае однородного уравнения в [5], где получены достаточные требования гладкости и условия согласования на начальные данные и граничное данное, а в случае неоднородного уравнения в [6], где найден критерий корректности на правую часть уравнения, – начальные данные и граничное данное. В последней работе дважды непрерывная дифференцируемость частного решения неоднородного простейшего уравнения колебаний струны и необходимые требования гладкости на правую часть уравнения установлены без корректировки с помощью явных формул и энергетического неравенства классических решений второй смешанной задачи [7]. Такой способ обоснования не проходит и не приводит к минимальным требованиям гладкости правой части в случае рассматриваемого нами общего уравнения колебаний струны.

Материал и методы. В линейной первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,\infty[\times]0,\infty[$ ставится смешанная задача для общего факторизованного волнового уравнения

$$\left(\partial_t - a_2\partial_x + b_2\right)\left(\partial_t + a_1\partial_x + b_1\right)u(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\}\in\dot{G}_\infty, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \partial_t u\big|_{t=0} = \psi(x),\ \ x\in]0,\infty[, \tag{2}$$

и зависящем от времени $t\in]0,\infty[$ граничном режиме

$$[\Gamma(t)u]\big|_{x=0} \equiv \left[\zeta(t)\partial_{tt}u + \xi(t)\partial_{tx}u + \theta(t)\partial_{xx}u + \alpha(t)\partial_t u + \beta(t)\partial_x u + \gamma(t)u\right]\big|_{x=0} = \mu(t), \tag{3}$$

где частные производные $\partial_t = \partial/\partial t,\ \partial_x = \partial/\partial x,\ \partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2,\ \ \partial_{xt} = \partial^2/\partial x\partial t,\ \partial_{xx} = \partial^2/\partial x^2$; $f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu,$ $\zeta,\ \xi,\ \theta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные ограниченные функции указанных выше независимых переменных x и t; $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ b_1,\ b_2$ – вещественные постоянные.

Известно, что уравнение (1) имеет два различных семейства характеристик: $x - a_1 t = C_1,\ x + a_2 t = C_2$ $\forall C_1,\ C_2 \in \mathrm{R} =]-\infty,+\infty[$. Предполагается, что в граничном условии (3) вторые производные не являются характеристическими, т.е. направления вторых производных не совпадают с направлением характеристики $x = a_1 t$ для всех $t > 0$.

Определение 1. *Характеристика* $x = a_1 t$, *где* $a_1 > 0$, *называется критической для уравнения* (1) *в первой четверти плоскости*.

Чтобы математически выразить характеристичность вторых частных производных в граничном режиме (3), сначала вычисляем вторую производную по направлению $\vec{\nu} = \{1, a_1\}$ вдоль критической характеристики $x = a_1 t$ в плоскости Otx от функции u:

$$(a_1^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2} = \sqrt{a_1^2+1}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\partial_t u + a_1\partial_x u\right) = \left(\overrightarrow{grad}(\partial_t u + a_1\partial_x u), \vec{\nu}\right) =$$

$$= \left(\{\partial_{tt}u + a_1\partial_{xt}u, \partial_{tx}u + a_1\partial_{xx}u\}, \{1, a_1\}\right) = \partial_{tt}u + a_1\partial_{xt}u + a_1\partial_{tx}u + a_1^2\partial_{xx}u. \tag{4}$$

Затем приравниваем к нулю значения характеристического определителя:

$$\Delta_\chi(t) \equiv \begin{vmatrix} \zeta(t) & \xi(t) & \theta(t) \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1^2 \end{vmatrix} = a_1\left(a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t)\right) = 0,\ t\in]0,\infty[, \tag{5}$$

первой строкой которого служат коэффициенты при вторых производных в граничном режиме (3) и двух следующих строк – коэффициенты при соответствующих вторых производных во второй производной по направлению вектора $\vec{\nu} = \{1, a_1\}$ из (4).

Определение 2. *Определитель* Δ_χ *в левой части равенств* (5) *назовем характеристическим для граничного режима* (3) *и уравнения* (1), *граничный режим* (3), *для которого определитель* $\Delta_\chi(t)$ *обращается в ноль при всех* $t > 0$, *– характеристическим и вторые частные производные в граничном режиме* (3) *– характеристическими*.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω, $C(\Omega)$ – множество всех непрерывных функций на $\Omega \subset \mathrm{R}^2$, $\mathrm{R} =]-\infty, \infty[$.

Определение 3. *Классическим решением задачи* (1)–(3) *называется функция* $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0, \infty[\times [0, \infty[$, *удовлетворяющая уравнению* (1) *в обычном смысле, а начальным условиям* (2) *и граничному режиму* (3) *в смысле соответствующих пределов ее значений во внутренних точках для указанных в них граничных точек множества* G_∞.

Модификацией метода характеристик найдем классическое решение смешанной задачи (1)–(3), установим критерий корректности (необходимые и достаточные условия) на правую часть f, начальные φ, ψ и граничное μ данные без их продолжений вне множеств задания для ее корректности по Адамару (однозначной и устойчивой везде разрешимости). Этот критерий корректности будет состоять из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть f, начальные φ, ψ, граничное μ данные и условия согласования между ними. Предложим новый метод погружения в решения с фиксированными значениями для решения систем уравнений.

Результаты и их обсуждение. Критическая характеристика $x = a_1 t,\ a_1 > 0$, делит множество $G_\infty = [0, \infty[\times [0, \infty[$ на два множества $G_- = \{\{x,t\} \in G_\infty : x > a_1 t, t > 0\}$ и $G_+ = \{\{x,t\} \in G_\infty : x \le a_1 t, x \ge 0\}$. Для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ из уравнения (1), условий (2) и режима (3) вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$f \in C(G_\infty), \varphi \in C^2[0, \infty[, \psi \in C^1[0, \infty[, \ \mu \in C[0, \infty[. \tag{6}$$

Ниже нами будут выведены дополнительные не столь очевидные необходимые требования гладкости на правую часть f. Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3) и вычисляя значения следов слагаемых с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = 0,\ t = 0$, находим необходимое условие согласования

$$Y \equiv \zeta(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0) - (b_2 + b_1)\psi(0) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varphi'(0) -$$

$$- b_2 b_1 \varphi(0)] + \xi(0)\psi'(0) + \theta(0)\varphi''(0) + \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{7}$$

где одним и двумя штрихами сверху обозначены первая и вторая производные функций.

Справедлива следующая теорема, в доказательстве которой используются

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\{a_1 \varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{B(x + a_2 t)}\varphi(0) + \int_0^{x + a_2 t} e^{B(x + a_2 t - s)}[A\varphi(s) + \psi(s)]ds\},$$

$$F_i(x,t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2}\left[\int_0^{t_i(x)} \int_{x_i(t,\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(s,\tau) ds d\tau + \int_{t_i(x)}^{t} \int_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(s,\tau) ds d\tau\right], \tag{8}$$

$$A = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2},\ B = \frac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2},\ t_1(x) = \frac{x}{a_1} - t \quad \forall \{x,t\} \in G_-,\ t_2(x) = t - \frac{x}{a_1} \quad \forall \{x,t\} \in G_+,$$

$$x_i(t,\tau)=\left[\frac{a_2}{a_1}+1-(-1)^i\right](-1)^i(a_1t-x)-a_2\tau,\quad P(t)=\mu(t)-[\Gamma(t)(e^{-b_2t}\Phi(x,t)+F_2(x,t))]|_{x=0},$$

$$\chi(a,b)=\exp\left\{-a_1\int_a^b\sigma(s)ds\right\},\quad \sigma(t)=\frac{2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)}{a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)}.$$

Теорема 1. *Пусть непрерывны коэффициенты:* $\zeta,\ \xi,\ \theta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in C[0,\infty[$, *граничный режим (3) не является характеристическим:* $a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)\neq 0,\ t\in[0,\infty[$, *и существует некоторое решение* $v\in C^2[0,\infty[,\ v(\rho)\neq 0,\ v'(\rho)\neq 0,\ \rho\in[0,\infty[$, *уравнения*

$$[a_1^2\zeta(\rho/a_1)-a_1\xi(\rho/a_1)+\theta(\rho/a_1)]v''(\rho)-[2a_1b_1\zeta(\rho/a_1)-b_1\xi(\rho/a_1)-$$
$$-a_1\alpha(\rho/a_1)+\beta(\rho/a_1)]v'(\rho)+[b_1^2\zeta(\rho/a_1)-b_1\alpha(\rho/a_1)+\gamma(\rho/a_1)]v(\rho)=0. \qquad (9)$$

Задача (1)–(3) в $\dot G_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* f,φ,ψ,μ *классическое решение* $u\in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия (6), (7),*

$$J_1(x,t)\equiv\int_0^t f(x+a_2(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(G_\infty),$$
$$J_2(x,t)\equiv\left(\frac{a_2}{a_1}+2\right)\int_0^{t_1(x)} f(x_1(t,\tau),\tau)d\tau+\int_{t_1(x)}^t f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(G_-), \qquad (10)$$
$$J_3(x,t)\equiv-\frac{a_2}{a_1}\int_0^{t_2(x)} f(x_2(t,\tau),\tau)d\tau+\int_{t_2(x)}^t f(x-a_1(t-\tau),\tau)d\tau\in C^1(G_+)$$

и первые частные производные от функций J_2 *и* J_3 *непрерывны на* $x=a_1t$. *Этим классическим решением смешанной задачи (1)–(3) является функция*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Big\{a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t)+a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t)+$$
$$+\int_{x-a_1t}^{x+a_2t}e^{B(x-s)-At}\big[A\varphi(s)+\psi(s)\big]ds\Big\}+F(x,t),\quad \{x,t\}\in G_-, \qquad (11)$$

$$u_+(x,t)=e^{-b_2t}\Phi(x,t)+e^{-b_1t}v(a_1t-x)\Bigg\{\int_0^{t_2(x)}\frac{a_1^2}{v^2(a_1s)}\int_0^s\frac{e^{b_1\tau}v(a_1\tau)\chi(s,\tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau)-a_1\xi(\tau)+\theta(\tau)}d\tau ds+$$
$$+\frac{a_1v(0)[b_2\varphi(0)+\psi(0)-a_2\varphi'(0)]}{a_1+a_2}\int_0^{t_2(x)}\frac{\chi(s,0)}{v^2(a_1s)}ds\Bigg\}+F_2(x,t),\quad \{x,t\}\in G_+, \qquad (12)$$

где известное решение уравнения (1) на G_- *задается ниже формулой (14).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частные классические решения (8) позволяют свести нахождение всех классических решений неоднородного уравнения (1) в G_∞ к поиску всех классических решений однородного уравнения (1) в G_∞. Поэтому методом характеристик легко находится общий интеграл уравнения (1) в G_∞, как множество классических решений

$$\tilde u(x,t)=e^{-b_1t}g(x-a_1t)+e^{-b_2t}h(x+a_2t)+\mathbf{F}(x,t), \qquad (13)$$

где $g = g(\xi)$, $h = h(\eta)$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$, а функция F равна функции F_1 на G_-, функции F_2 на G_+ и дважды непрерывно дифференцируема на $x = a_1 t$ по предположениям нашей теоремы 1. Эти F_1 на G_- и F_2 на G_+ вида (8) при $i = 1$ и $i = 2$ мы взяли соответственно из формул (34) при $k = (a_2 / a_1) + 2$ и (2) теорем 3 и 1 работы [2]. В доказываемой теореме 1 необходимые требования гладкости (10) на функции $J_1 - J_3$ получаются как производные вдоль характеристик уравнения (1) от решений (8).

1. В G_- обобщенная формула Даламбера–Эйлера (11) единственного классического решения смешанной задачи (1)–(3) и достаточность требований гладкости на φ, ψ, f в (6) и (10) не вызывают сомнений [6; 8]. Отличие интегральных требований гладкости (10) от аналогичных интегральных требований гладкости диссертации [6] и статьи [8] состоит в отсутствии у нас под интегралами соответствующих множителей $\exp\{b_p \tau\},\ p = 1,2,$ которые не влияют на гладкость интегралов в (10) и, значит, правой части f в малых окрестностях конечных точек $\{x,t\} \in G_-$. Необходимость требований гладкости на φ, ψ, f в (6) для классического решения (11) показана перед формулировкой теоремы 1. Благодаря существованию и единственности классического решения из теоремы Банаха о замкнутом графике $\forall T > 0$ выводится непрерывная зависимость решения (11) в банаховом пространстве $C^2(G_T^-)$, $G_T^- = ([0,\infty[\times[0,T]) \cap G_-$, с нормой

$$\|u\|_{C^2(G_T^-)} = \sup_{\{x,t\} \in G_T^-} \sum_{0 \le m+l \le 2} \left| \partial_x^m \partial_t^l u(x,t) \right|$$

от исходных данных f, φ и ψ в произведении банаховых пространств $\hat{C}(G_T^-)$, $C^2[0,\infty[$, $C^1[0,\infty[$ соответственно с нормами

$$\|f\|_{\hat{C}(G_T^-)} = \sup_{\{x,t\} \in G_T^-} \left[|f(x,t)| + \sum_{p=1}^{2} \sum_{m+l=1} |\partial_x^m \partial_t^l J_p(x,t)| \right],\ \partial_x^m \partial_t^l = \partial^{m+l} / \partial_x^m \partial_t^l,$$

$$\|\varphi\|_{C^2[0,\infty[} = \sup_{0 \le x < \infty} [|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + |\varphi''(x)|],\ \|\psi\|_{C^1[0,\infty[} = \sup_{0 \le x < \infty} [|\psi(x)| + |\psi'(x)|].$$

Эта устойчивость на языке «$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon, T) > 0 \ldots$» выведена из (11) при $a_1 = a_2$ в [6].

2. В G_+ решения задачи (1)–(3) находим, как классические решения задачи Пикара для уравнения (1) при граничном режиме (3) и требованиях совпадения значений этих решений и их первых частных производных соответственно с предельными значениями функции u_- и ее первых частных производных на критической характеристике.

В работе [2] предложенным *методом корректировки* из пробного решения

$$F(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau - Bs} f(|s|, \tau) ds\, d\tau \tag{14}$$

с завышенной (не минимальной) дополнительной гладкостью правой части f уравнения (1) на G_+ для $a_2 \ge a_1$ выводится его частное классическое решение (8) при $i = 2$ с минимальной дополнительной к $f \in C(G_\infty)$ гладкостью f из (10) на G_+ и для $a_1 \ge a_2$ другое классическое решение (см. теоремы 1 и 2 в [2]). В [2] функция (14) называется пробным решением уравнения (1), так как она $F \in C^2(G_+)$ для всех более гладких правых частей $f \in C^1(G_\infty)$ и служит его обобщенным решением $F \in C^1(G_\infty)$ для всех менее гладких $f \in C(G_\infty)$. В этой работе коррекция пробных решений проводится посредством корректирующей задачи Гурса в три этапа:

а) постановка и решение корректирующей задачи Гурса для канонического вида неоднородного уравнения (1) в соответствующем образе $\tilde{G}_\infty$ четверти плоскости G_∞;

б) анализ гладкости слагаемых решения данной задачи Гурса и его корректировка до классического решения этого неоднородного уравнения канонического вида в $\tilde{G}_\infty$;

в) вычисление классического решения неоднородного уравнения (1) в G_∞ обратной невырожденной заменой переменных в полученном скорректированном решении.

В итоге для $f \in C(G_\infty)$ из неклассического решения $F \in C^1(G_+)$ вида (14) неоднородного уравнения (1) в G_+ вычитается соответствующее неклассическое решение $F_0 \in C^1(G_+)$ однородного уравнения (1) в G_+ и получается классическое решение $F_2 = F - F_0 \in C^2(G_+)$ вида (8) при $i = 2$ в G_+. Существует бесконечное число частных классических решений уравнения (1) с минимальной гладкостью правой части f. Отметим также, что и для $a_1 \geq a_2$ можно использовать частное классическое решение F_2 для $a_2 \geq a_1$ с минимальной дополнительной гладкостью f из (10). В работе [2] также доказано, что если функция f не зависит от x или t, то для всех $a_1 > 0, a_2 > 0$ непрерывности $f \in C[0,\infty[$ по этой переменной необходимо и достаточно для классического решения F_2 неоднородного уравнения (1) в G_+ (см. следствие 2).

Решения (13) на G_+ должны совпадать с непрерывным продолжением решения (11) из G_- на критическую характеристику $x = a_1 t$ и должны удовлетворять граничному условию (3). В результате приходим к системе уравнений

$$e^{-b_1 t} g(0) + e^{-b_2 t} h((a_1 + a_2)t) =$$

$$= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 t} \varphi((a_1 + a_2)t) + a_2 e^{-b_1 t} \varphi(0) + e^{-b_1 t} \int_0^{(a_1 + a_2)t} e^{-Bs} [A\varphi(s) + \psi(s)] ds \right\},$$

$$[\Gamma(t)(e^{-b_1 t} g(x - a_1 t))]|_{x=0} = \mu(t) - [\Gamma(t)(e^{-b_2 t} h(x + a_2 t) + F_1(x,t))]\Big|_{x=0}. \quad (15)$$

Ради упрощения вычислений мы будем решать эту систему не только известным методом подстановки, как, например, в [4], а еще и способом, который назовем *«методом погружения в решения с фиксированными значениями»* для общего интеграла (13). Для всех непрерывных функций $g = g(y)$, $h = h(z)$ справедливы преобразования

$$e^{-b_1 t} g(x - a_1 t) + e^{-b_2 t} h(x + a_2 t) =$$

$$= e^{-b_1 t} g(x - a_1 t) - e^{Bx - At} g(0) + e^{-b_2 t} h(x + a_2 t) + e^{Bx - At} g(0) =$$

$$= e^{-b_1 t} \Big[g(x - a_1 t) - e^{B(x - a_1 t)} g(0) \Big] + e^{-b_2 t} \Big[h(x + a_2 t) + e^{B(x + a_2 t)} g(0) \Big].$$

Следовательно, множество всех классических решений (13) на G_+ не шире множества

$$u(x,t) = e^{-b_1 t} \tilde{g}(x - a_1 t) + e^{-b_2 t} \tilde{h}(x + a_2 t) + F_2(x,t) \quad (16)$$

для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ вида

$$\tilde{g}(z) = g(z) - e^{Bz} g(0), \quad \tilde{h}(y) = h(y) + e^{By} g(0) \in C^2(\mathbb{R}). \quad (17)$$

Поэтому для решения указанной выше задачи Пикара можно использовать общий интеграл (16) вместо общего интеграла (13). В первом уравнении системы (15) меняем функции g и h соответственно на функции $\tilde{g}$ и $\tilde{h},$ делаем замену $y=(a_1+a_2)t \geq 0$ и благодаря равенству $\tilde{g}(0)=0$, которое вытекает из значений (17), находим функцию

$$\tilde{h}(y)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\varphi(y)+a_2 e^{By}\varphi(0)+\int_0^y e^{B(y-s)}[A\varphi(s)+\psi(s)]ds\right\}. \tag{18}$$

Если во втором уравнении системы (15) поменять функции g и h соответственно на функции $\tilde{g}$ и $\tilde{h},$ подставить в них функцию (18) при $y=x+a_2t$, то приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$[a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]\tilde{g}''(-a_1t)+[2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)]\tilde{g}'(-a_1t)+$$
$$+[b_1^2\zeta(t)-b_1\alpha(t)+\gamma(t)]\tilde{g}(-a_1t)=e^{b_1t}P(t). \tag{19}$$

Решения этого уравнения ищем в форме произведения

$$\tilde{g}(-a_1t)=v(a_1t)w(a_1t). \tag{20}$$

В силу представления (20) уравнение (19) приводится перегруппировкой к виду

$$[a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]v(a_1t)w''(a_1t)+$$
$$+\{2[a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]v'(a_1t)-[2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)]v(a_1t)\}w'(a_1t)+$$
$$+\{[a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]v''(a_1t)-[2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)]v'(a_1t)+$$
$$+[b_1^2\zeta(t)-b_1\alpha(t)+\gamma(t)]v(a_1t)\}w(a_1t)=e^{b_1t}P(t).$$

Если $v(\rho)\neq 0$ – частное классическое решение обыкновенного дифференциального уравнения (9), то это уравнение становится уравнением

$$[a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]v(a_1t)w''(a_1t)+\{2[(a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)]v'(a_1t)-$$
$$-[2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)]v(a_1t)\}w'(a_1t)=e^{b_1t}P(t). \tag{21}$$

В нем делаем замену $y=a_1t,$ умножаем на интегрирующий множитель

$$\eta(y)=\exp\{\int_0^y M(s)ds\}, M(s)=2\left[v'(s)/v(s)\right]-\sigma(s),$$

и получаем дифференциальное уравнение

$$[a_1^2\zeta(y/a_1)-a_1\xi(y/a_1)+\theta(y/a_1)]v(y)(\eta(y)w'(y))'_y=e^{b_1y/a_1}\eta(y)P(y/a_1).$$

Проинтегрировав дважды по y это уравнение, мы имеем решения уравнения (21)

$$w(y)=\int_0^y\int_0^c\frac{e^{b_1\nu/a_1}\eta(\nu)P(\nu/a_1)}{[a_1^2\zeta(\nu/a_1)-a_1\xi(\nu/a_1)+\theta(\nu/a_1)]v(\nu)\eta(c)}d\nu dc+C_1\int_0^y\frac{dc}{\eta(c)}+C_2, \tag{22}$$

где $C_1,\, C_2\in \mathrm{R}$. В этих решениях и их первых производных по y полагаем $y=0$ и вычисляем значения постоянных $C_2=w(0),$ $C_1=w'(0),$ которые в силу представления (20) равны

$C_1 = -(\tilde{g}'(0)/v(0)) - (v'(0)\tilde{g}(0)/v^2(0))$, $C_2 = \tilde{g}(0)/v(0)$. В решения (22) подставляем эти значения постоянных, учитываем $\tilde{g}(0) = 0$ и приходим к решениям

$$w(y) = \int_0^y \int_0^\varrho \frac{e^{b_1\nu/a_1}\eta(\nu)P(\nu/a_1)}{[a_1^2\zeta(\nu/a_1) - a_1\xi(\nu/a_1) + \theta(\nu/a_1)]v(\nu)\eta(\varrho)} d\nu d\varrho - \frac{\tilde{g}'(0)}{v(0)} \int_0^y \frac{d\varrho}{\eta(\varrho)} d\varrho.$$

Используя известную формулу [4]: $\exp\{2\int_0^t [v'(s)/v(s)]ds\} = v^2(t)/v^2(0)$ и замены переменных: $\nu = a_1\tau$, $c = a_1\varsigma$, $s = a_1\delta$, отсюда получаем выражение

$$w(y) = a_1^2 \int_0^{y/a_1} \int_0^\varsigma \frac{e^{b_1\tau}v(a_1\tau)\chi(\varsigma,\tau)P(\tau)}{[a_1^2\zeta(\tau) - a_1\xi(\tau) + \theta(\tau)]v^2(a_1\varsigma)} d\tau d\varsigma - a_1 v(0)\tilde{g}'(0) \int_0^{y/a_1} \frac{\chi(\varsigma,0)}{v^2(a_1\varsigma)} d\varsigma. \quad (23)$$

Для уравнения (19) из выражений (20) и (23) при $z = -a_1 t \le 0$ находим решения

$$\tilde{g}(z) = v(-z)\{a_1^2 \int_0^{-z/a_1} \int_0^\varsigma \frac{e^{b_1\tau}v(a_1\tau)\chi(\varsigma,\tau)P(\tau)}{[a_1^2\zeta(\tau) - a_1\xi(\tau) + \theta(\tau)]v^2(a_1\varsigma)} d\tau d\varsigma - a_1 v(0)\tilde{g}(0) \int_0^{-z/a_1} \frac{\chi(\varsigma,0)}{v^2(a_1\varsigma)} d\varsigma\} \quad (24)$$

Подставив функции $\tilde{h}$ вида (18) и $\tilde{g}$ вида (24) в общий интеграл (16), имеем решения

$$u_+(x,t) = e^{-b_2 t}\Phi(x,t) + e^{-b_1 t}v(a_1 t - x)\left\{\int_0^{t_2(x)} \frac{a_1^2}{v^2(a_1\varsigma)} \int_0^\varsigma \frac{e^{b_1\tau}v(a_1\tau)\chi(\varsigma,\tau)P(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau) - a_1\xi(\tau) + \theta(\tau)} d\tau d\varsigma - \right.$$

$$\left. - a_1 v(0)\tilde{g}'(0) \int_0^{t_2(x)} \frac{\chi(\varsigma,0)}{v^2(a_1\varsigma)} d\varsigma \right\} + F_2(x,t).$$

Мы склеиваем функции u_- и u_+ на $x = a_1 t$, используя значения f, φ, ψ, μ и их некоторых производных в начале координат $\{0,0\}$ и в том числе условие согласования (7). По определению 3 эти значения понимаются как соответствующие пределы значений дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(\dot{x},\dot{t})$ для внутренних точек $\{\dot{x},\dot{t}\} \in \dot{G}_\infty$, в которых как $\dot{x} \le a_1\dot{t}$, так и $\dot{x} > a_1\dot{t}$. Поэтому полученные выше решения u_+ должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми не только на G_+, но еще и в некоторой бесконечно малой окрестности характеристики $x = a_1 t$.

В задаче Пикара из требования совпадения значений частных производных первого порядка от решений u_+ из множества G_+ и предельных значений частных производных первого порядка от решения u_- из множества G_- на характеристике $x = a_1 t$:

$$\left.\frac{\partial u_+}{\partial t}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial u_-}{\partial t}\right|_{x=a_1 t} = -a_1 e^{-b_1 t} \frac{b_2\varphi(0) + \psi(0) + (a_1 + a_2)\tilde{g}'(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2},$$

$$\left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=a_1 t} - \left.\frac{\partial u_-}{\partial x}\right|_{x=a_1 t} = e^{-b_1 t} \frac{b_2\varphi(0) + \psi(0) + (a_1 + a_2)\tilde{g}'(0) - a_2\varphi'(0)}{a_1 + a_2}$$

однозначно находится значение постоянных $\tilde{g}'(0) = [a_2\varphi'(0) - b_2\varphi(0) - \psi(0)]/(a_1 + a_2)$. Отсюда видим, что на множестве G_+ исходная задача (1)–(3) имеет решение (12). Для его дважды непрерывной дифференцируемости на G_+ достаточно требований (6), (10).

Единственность решения (12) в G_+ обеспечивается алгоритмом его поиска: из сужений на G_+ всех классических решений (13) в G_∞ только решение (12) определено на G_+ и удовлетворяет всем граничным условиям поставленной выше задачи Пикара. Доказательство независимости единственности решения (12) от решений $v(\varsigma)$ уравнения (9) аналогично доказательству независимости соответствующего решения в [4].

Для любого $T>0$ обозначим ограниченные трапеции $G^T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x+a_2t\le(a_1+a_2)T,$ $0\le t\le T\}$ и ограниченные треугольники $G_T^+=G^T\cap G_+$. По теореме Банаха о замкнутом графике имеет место устойчивость классического решения (12) в пространстве $C^2(G_T^+)$ по данным f,φ,ψ,μ из произведения банаховых пространств $\hat{C}(G^T)$, $C^2[0,(a_1+a_2)T]$, $C^1[0,(a_1+a_2)T]$, $C[0,T]$ соответственно с нормами

$$\|u\|_{C^2(G_T^+)}=\max_{\{x,t\}\in G_T^+}\sum_{0\le m+l\le 2}\left|\partial_x^m\partial_t^l u(x,t)\right|,$$

$$\|f\|_{\hat{C}(G^T)}=\max_{\{x,t\}\in G^T}\left\{|f(x,t)|+\sum_{p=1}^{2}\sum_{m+l=1}|\partial_x^m\partial_t^l J_p(x,t)|\right\},$$

$$\|\varphi\|_{C^2[0,(a_1+a_2)T]}=\max_{0\le x\le(a_1+a_2)T}\left[|\varphi(x)|+|\varphi'(x)|+|\varphi''(x)|\right],$$

$$\|\psi\|_{C^1[0,(a_1+a_2)T]}=\max_{0\le x\le(a_1+a_2)T}[|\psi(x)|+|\psi'(x)|],\ \|\mu\|_{C[0,T]}=\max_{0\le t\le T}|\mu(t)|.$$

Эту устойчивость на языке «$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon,T)>0\ldots$» можно вывести и из формулы (12).

Для существования единственного классического решения на G_∞ остается убедиться в совпадении значений частных производных второго порядка от единственного решения u_+ из множества G_+ и предельных значений частных производных второго порядка от единственного решения u_- из множества G_- на характеристике $x=a_1t$:

$$\left.\frac{\partial^2u_+}{\partial t^2}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2u_-}{\partial t^2}\right|_{x=a_1t}=a_1^2e^{-b_1t}\frac{\mu(0)-Y}{a_1^2\zeta(0)-a_1\xi(0)+\theta(0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2u_+}{\partial x^2}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2u_-}{\partial x^2}\right|_{x=a_1t}=e^{-b_1t}\frac{\mu(0)-Y}{a_1^2\zeta(0)-a_1\xi(0)+\theta(0)},$$

$$\left.\frac{\partial^2u_+}{\partial x\partial t}\right|_{x=a_1t}-\left.\frac{\partial^2u_-}{\partial x\partial t}\right|_{x=a_1t}=a_1e^{-b_1t}\frac{Y-\mu(0)}{a_1^2\zeta(0)-a_1\xi(0)+\theta(0)}.$$

Если условие согласования (7) выполняется, то эти разности равны нулю. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Когда f зависит только от x или t и непрерывна, тогда теорема 1 верна без требований гладкости (10) (см. следствия 2 и 3 в [2]).*

Замечание 1. Когда коэффициенты граничного режима (3) не зависят от t, тогда обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (9) с постоянными коэффициентами всегда имеет в виде экспоненты $v(\rho)=e^{\lambda\rho}\in C^2[0,\infty[$ частное решение, удовлетворяющее свойствам: $v(\rho)\neq0,\ v'(\rho)\neq0,\ \rho\in[0,\infty[,$ из теоремы 1, и не только в случае простых вещественных характеристических корней $\lambda\neq0$ уравнения (9). Когда коэффициенты граничного режима (3) зависят от t, тогда примерами частных решений, удовлетворяющих этим свойствам, некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений (9) служат известные функции Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра [1].

Замечание 2. В частном случае факторизованных нехарактеристических вторых производных в граничном режиме задача (1)–(3) изучена в [6]. В ее теореме 3.1 для правой части $f\in C(G_\infty)$ вместо наших функций F_1, F_2 вида (8) с гладкостью (10) использована функция F вида (14) с достаточными условиями

$$\int_0^t f(|x+(-1)^p a_p(t-\tau)|,\tau)d\tau \in C^1(G_\infty),\ p=1,\,2. \tag{25}$$

В этой же теореме 3.1 говорится, что в случае $a_1 = a_2 > 0$ условия (25) являются и необходимыми для дважды непрерывной дифференцируемости функции F в G_∞. Доказательство теоремы 1 работы [2] тоже подтверждает, что эти достаточные условия (25) при $a_1 = a_2$ являются и необходимыми для того, чтобы функция F вида (14) была классическим решением уравнения (1) в G_+. Поэтому в задаче (1)–(3) при $a_1 \neq a_2$ вместо одного частного классического решения F уравнения (1) на G_∞ надо использовать классические решения F_1 на G_- и F_2 на G_+ из [2], которые очевидно дважды непрерывно дифференцируемы на $x = a_1 t$ для всех гладких правых частей $f \in C^1(G_\infty)$. Затем дважды непрерывная дифференцируемость этих функций F_1 и F_2 на $x = a_1 t$ предельным переходом по f распространяется на все указанные в теореме 1 правые части f уравнения (1). Для обобщенных непрерывно дифференцируемых решений F и F_1, F_2 этого уравнения в G_∞ не нужны требования (25) и (10) соответственно, так как, очевидно, необходимо и достаточно одной непрерывности правой части $f \in C(G_\infty)$.

Пример. Пусть в задаче (1)–(3) коэффициенты $b_1 = b_2 = 0,\ \zeta(t) \equiv 1,\ \xi(t) \equiv \theta(t) \equiv \alpha(t) \equiv\ \beta(t) \equiv \gamma(t) \equiv 0$ и исходные данные $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0,\ \ \mu(t) \equiv 0,\ \ f(x,t) = a_1 t - x$ для $a_1 t \geq x$ и $f(x,t) = 0$ для $x > a_1 t.$ Покажем, что при этих коэффициентах и исходных данных для всех $t > 0$ разрывны на $x = a_1 t$ первые частные производные от функций J_2 и J_3 из (10). С этой целью в J_3 подставляем данную функцию f. Сначала выясняем, где в J_3 подинтегральная функция не тождественна нулю. Ответ на подобный вопрос для первого интеграла из J_3 дает решение $\tau > a_2(t - x/a_1)/(a_1 + a_2),\ \ \{x,t\} \in G_+,$ неравенства $a_2(t - \tau - x/a_1) < a_1\tau.$ Потом вычисляем первый интеграл

$$Z_1(x,t) = \frac{-a_2}{a_1}\int_0^{t_2(x)} f(a_2(t_2(x)-\tau),\tau)d\tau = \frac{a_2}{a_1}\int_{\frac{a_2(a_1 t - x)}{a_1(a_1+a_2)}}^{t-x/a_1} [a_2 t_2(x) - (a_1+a_2)\tau]d\tau = -\frac{a_2(a_1 t - x)^2}{2a_1(a_1+a_2)}.$$

С помощью неравенства $x - a_1(t-\tau) < a_1\tau,$ которое эквивалентно неравенству $x < a_1 t$ для всех $\{x,t\} \in G_+,$ в J_3 находим значение второго интеграла

$$Z_2(x,t) = \int_{t_2(x)}^{t} f(x - a_1(t-\tau),\tau)d\tau = \int_{t-x/a_1}^{t} [a_1\tau - x + a_1(t-\tau)]d\tau = \frac{(a_1 t - x)x}{a_1}.$$

Функции $J_2(x,t) \equiv 0$ и $J_3(x,t) = Z_1(x,t) + Z_2(x,t)$ очевидно непрерывны на $x = a_1 t$, но их первая частная производная по t, которая в G_+ равна

$$\left.\frac{\partial J_3(x,t)}{\partial t}\right|_{x=a_1 t} = \left.\left[\frac{\partial Z_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Z_2(x,t)}{\partial t}\right]\right|_{x=a_1 t} = \left.\left[\frac{a_2(x - a_1 t)}{a_1 + a_2} + x\right]\right|_{x=a_1 t} = a_1 t \neq 0,$$

разрывна на $x = a_1 t$ для всех $t > 0$. Более того, не трудно убедиться еще в разрыве на $x = a_1 t$ для всех $t > 0$ их первых частных производных по x, равной в G_+ функции

$$\left.\frac{\partial J_3(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a_1 t} = \left.\left[\frac{\partial Z_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial Z_2(x,t)}{\partial x}\right]\right|_{x=a_1 t} = \left.\left[\frac{a_2(a_1 t - x)}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_1 t - 2x}{a_1}\right]\right|_{x=a_1 t} = -t \neq 0.$$

Поэтому не все вторые частные производные от решения смешанной задачи (1)–(3) при указанных выше данных должны быть непрерывными на характеристике $x = a_1 t$. Найдем решение u_- вида (11) и u_+ вида (12) этой смешанной задачи. Для подстановки правой части $f(x,t) = a_1 t - x$ на G_+ и $f(x,t) = 0$ на G_- в функцию F_2 из (8) при $i = 2$ определяем координаты точки $Q_2\left(\frac{a_2(a_1 t - x)}{a_1 + a_2}, \frac{a_2(a_1 t - x)}{a_1(a_1 + a_2)}\right)$ пересечения характеристик $s + a_2\tau = a_2(t - x/a_1)$ и $s = a_1\tau$, а также точки $Q_3\left(\frac{a_1(x + a_2 t)}{a_1 + a_2}, \frac{x + a_2 t}{a_1 + a_2}\right)$ пересечения характеристик $s + a_2\tau = x + a_2 t$ и $s = a_1\tau$. После подстановки указанной выше правой части имеем

$$F_2(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{MQQ_1Q'} f(x,t)\,dxdt = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{MQ_2Q_3Q'} f(x,t)\,dxdt = (H_1 + H_2 + H_3)(x,t),$$

где координаты точек $M(x,t)$, $Q(x + a_2 t, 0)$, $Q_1(a_2(t - x/a_1), 0)$, $Q'(0, t - x/a_1)$ (см. трапецию MQQ_1Q' на рис. 2, б в [2]). Здесь двойные интегралы сводим к повторным:

$$H_1(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{\frac{a_2(a_1 t - x)}{a_1(a_1 + a_2)}}^{t - x/a_1} \int\limits_{a_2(t - \frac{x}{a_1} - \tau)}^{a_1\tau} [a_1\tau - s]\,ds\,d\tau = \frac{(a_1 t - x)^3}{6(a_1 + a_2)^2},$$

$$H_2(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{t - x/a_1}^{\frac{x + a_2 t}{a_1 + a_2}} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{a_1\tau} [a_1\tau - s]\,ds\,d\tau = \frac{(x - a_1 t)^2}{2(a_1 + a_2)}\left[\frac{x + a_2 t}{a_1 + a_2} - t + \frac{x}{a_1}\right],$$

$$H_3(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{\frac{x + a_2 t}{a_1 + a_2}}^{t} \int\limits_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} [a_1\tau - s]\,ds\,d\tau = \frac{(x - a_1 t)^3}{6(a_1 + a_2)^2} + \frac{(x - a_1 t)^2}{2(a_1 + a_2)}\left[t - \frac{x + a_2 t}{a_1 + a_2}\right].$$

В нашем примере решением задачи (1)–(3) служит функция $u_-(x,t) = F(x,t) \equiv 0$ в G_- и $u_+(x,t) = F_2(x,t) = \frac{(x - a_1 t)^2 x}{2a_1(a_1 + a_2)}$ в G_+. Это решение непрерывно дифференцируемо на $x = a_1 t$ для всех $t \geq 0$. В G_+ вычисляем вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u_+(x,t)}{\partial t^2} = \frac{a_1 x}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\partial^2 u_+(x,t)}{\partial t \partial x} = \frac{a_1 t - 2x}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\partial^2 u_+(x,t)}{\partial x^2} = \frac{3x - 2a_1 t}{a_1(a_1 + a_2)},$$

которые для всех $t > 0$ отличаются от нуля на $x = a_1 t$. Таким образом, в приведенном примере решение u задачи (1)–(3) лишь непрерывно дифференцируемо на $x = a_1 t$, потому что функции J_2 и J_3 не являются непрерывно дифференцируемыми на критической характеристике $x = a_1 t$.

Заключение. Нами введено понятие характеристических вторых частных производных в граничном режиме. Мы предложили «*метод погружения в решения с фиксированными значениями*», который значительно упрощает вычисление решений систем дифференциальных уравнений. Теорема 1 содержит явное классическое решение и критерий корректности (по Адамару) задачи (1)–(3) с нехарактеристическими вторыми производными в нестационарном граничном режиме. Она имеет характер *глобальной теоремы* из [9], потому что в ней входные данные f, φ, ψ, μ не продолжаются вне множеств их задания. Теорема, полученная продолжениями этих данных, может не давать необходимые условия корректности, является частным случаем теоремы 1 и поэтому названа *локальной теоремой* в [9]. Необходимость условий корректности такой теоремы требует более тщательного обоснования. Промежуточным результатам настоящей работы посвящены доклады [10; 11]. Глобальная теорема с классическим решением и критерием корректности первой смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний ограниченной струны дана в замечании 2.6 диссертации [6]. Все три теоремы и три следствия из [2] о методе корректировки пробных решений без доказательств приведены в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
2. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
3. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
4. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных первой косой и второй производной по x в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, В.В. Шоломицкая // Вестник БГУ. – 2016. – Сер. 1, № 2. – С. 95–102.
5. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
6. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е.Н. Новиков; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.
7. Юрчук, Н.И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н.И. Юрчук, Е.Н. Новиков // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 116–120.
8. Моисеев, Е.И. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии / Е.И. Моисеев, Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
9. Ломовцев, Ф.Е. О глобальных теоремах с явными решениями и условиями корректности начально-краевых задач для уравнения колебаний ограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Материалы междунар. конф. «ВЗМШ С.Г. Крейна-2016», Воронеж, 25–31 янв. 2016 г. – Воронеж, 2016. – С. 276–279.
10. Лысенко, В.В. Решение краевой задачи для уравнения колебаний в четверти плоскости с нехарактеристическими вторыми производными в граничном условии / В.В. Лысенко, Ф.Е. Ломовцев // Сборник материалов междунар. конф., посвященной 100-летию С.Г. Крейна, Воронеж, 13–19 нояб. 2017 г. – Воронеж, 2017. – С. 136–137.
11. Лысенко, В.В. Решение и критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны при нехарактеристических и нестационарных вторых производных на границе / В.В. Лысенко, Ф.Е. Ломовцев // Еругинские чтения–2019: материалы междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г.: в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2019. – Ч. 2. – С. 30–32.
12. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки решений общего одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части / Ф.Е. Ломовцев // Сборник материалов междунар. конф., посвященной 100-летию С.Г. Крейна, Воронеж, 13–19 нояб. 2017 г. – Воронеж, 2017. – С. 131–134.

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [The Equations of Mathematical Physics] // Moscow: Nauka, 2004, 798 p.
2. Lomautsau F.E. *Zhurnal Belorusskogo gos. universiteta. Matematika. Informatika* [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Information Science], 2017, 3, pp. 38–52.
3. Yoshida K. *Funktsionalniy analiz* [Functional Analysis] // Moscow: Mir, 1967, 624 p.
4. Lomovtsev F.E., Sholomitskaya V.V. *Vestnik BGU* [Bulletin of BSU], 2016. Ser. 1, 2, pp. 95–102.
5. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191. Doi:10.1134/S0012266109080126.
6. Novikov E.N. *Smeshanniye zadachi dlia uravneniya vynuzhdennykh kolebaniy ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosoi proizvodnymi: Avtoref. dis. … kan-ta fiz.-mat. nauk* [Mixed problems for the Forced Oscillation Equation of a Bounded String in the Unsteady Boundary Conditions with the First and Second Oblique Derivatives. Abstract of PhD (Physics and mathematics) Thesis]. Minsk, Institute of Mathematic of National Academy of Sciences of Belarus, 2017, 25 p.
7. Yurchuk N.I., Novikov E.N. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk.* [Journal of NAS of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2016, 4, pp. 116–120.
8. Moiseyev E.N., Lomovtsev F.E., Novikov E.N. *Doklady Akademii Nauk* [Academy of Sciences Reports], 2014, 5(459), pp. 544–549.
9. Lomovtsev F.E. *Materiali mezhdunar. konf. «VZMSh S.G. Kreina-2016»* [Proceedings of Intern. Conf. «VZMSH S.G. Krein-2016» (Voronezh, January 25 – January 31, 2016)], Voronezh, 2016, pp. 276–279.
10. Lysenko V.V., Lomovtsev F.E. *Sbornik materialov mezhdunar. konf., posviashchennoi 100-letiyu S.G. Kreina (Voronezh 13 noyabria – 19 noyabria 2017 g.)* [Collected Materials of Intern. Conf., Dedicated to the 100th Anniversary of S.G. Crane (Voronezh, November 13 – November 19, 2017)], Voronezh, 2017, pp. 136–137.
11. Lysenko V.V., Lomovtsev F.E. *Materiali Mezhdunar. nauch. konf. (Yeruginskiye chteniya – 2019) Mogilev 14 maya – 17 maya 2019 g.)* [Proceedings of Intern. Scientific Conf. (Yerugin Readings–2019) Mogilyov, May 14 – May 17, 2019], Mn.: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2019, pp. 30–32.
12. Lomovtsev F.E. *Sbornik materialov mezhdunar. konf. posviashchennoi 100-letiyu S.G. Kreina (Voronezh 13 noyabria – 19 noyabria 2017 g.)* [Collected Materials of Intern. Conf., Dedicated to the 100th Anniversary of S.G. Crane (Voronezh, November 13 – November 19, 2017)], Voronezh, 2017, pp. 131–134.

Поступила в редакцию 23.05.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.