Трубников Юрий Валентинович

Математический анализ

Курс лекций

для специальностей

1-02 05 04-01. Физика. Математика.
1-31 04 01-03 30. Физика. Методика преподавания физики и информатики.
1-02 05 04-02. Физика. Информатика.

Содержание

ЛЕКЦИЯ 1

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение и основные примеры. Одной из важнейших операций математического анализа является операция предельного перехода. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты математического анализа не связаны с алгебраической природой рассматриваемых объектов, а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной физики и математики.

Множество X *называется метрическим пространством, если каждой паре элементов* $x, y \in X$ *поставлено в соответствие действительное число* $\rho(x, y)$, *называемое метрикой или расстоянием, так что выполняются следующие три аксиомы:*

1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

2) *аксиома симметрии:* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) *аксиома треугольника:* $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Подчеркнём, что множество X в таком случае называется метрическим пространством, его элементы – точками, функция ρ – метрикой на множестве X, а число $\rho(x,y)$ – расстоянием между x и y. Условие 1) означает, что расстояние между двумя разными точками положительно и что каждая точка находится на нулевом расстоянии от самой себя. Условие 2) утверждает, что расстояние не зависит от порядка точек x и y. Условие 3), называемое неравенством треугольника, утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника, составленного из элементов множества X, не меньше третьей стороны.

Таким образом, из определения метрического пространства следует, что метрическим пространством является пара (X, ρ), но этот объект иногда обозначают одним символом, например, $R = (X, \rho)$.

Приведем примеры метрических пространств.

1. Положив для элементов произвольного множества X

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

мы получим метрическое пространство. Его называют пространством изолированных точек.

Действительно, выполнение первых двух аксиом очевидно, а неравенство $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ сводится к одному из следующих случаев:

$0 \leq 0 + 0 = 0 \, (x = y = z)$; $0 \leq 1 + 1 = 2 \, (x = y, x \neq z, z \neq y)$;

$1 \le 1+0=1(x \ne y,\ y=z);\ 1 \le 0+1=1(x \ne y,\ x=z);\ 1 \le 1+1=2(x, y, z-\textit{попарно различны}).$

2.Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y)=|x-y|$$

образует метрическое пространство R^1.

3.Множество упорядоченных наборов из *n* действительных чисел

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

с расстоянием

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \tag{1}$$

называется $n-$мерным арифметическим евклидовым пространством R^n. Справедливость аксиом 1) и 2) очевидна. Проверим выполнение аксиомы 3). Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, тогда аксиома треугольника запишется в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}. \tag{2}$$

Полагая $z_k-x_k=a_k$, $y_k-z_k=b_k$, получаем, что $a_k+b_k=(z_k-x_k)+(y_k-z_k)=y_k-z_k$, а неравенство (2) принимает следующий вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \tag{3}$$

Для доказательства неравенства (3) введем понятие нормы элемента пространства R^n:

$$\|x\|:=\rho(x,0)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}, \tag{4}$$

тогда неравенство (3) можно короче переписать в виде:

$$\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|. \tag{5}$$

Следует обратить внимание, что: $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ для любого $x \in R^n$ и любого действительного числа λ.

Для элементов пространства R^n (в силу алгебраической структуры множества R^n их естественно называть векторами) можно ввести понятие косинуса и синуса угла между векторами $x, y \in R^n$:

$$\cos\angle(x, y):=\frac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}; \tag{6}$$

где $(x, y):=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$;

$$\sin\angle(x, y):=\frac{1}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|. \tag{7}$$

Л е м м а 1. Справедливо тождество

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2. \tag{8}$$

◊ Применяя равенство (4), получаем:

$$\| x+y\|^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2+2x_ky_k+y_k^2\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2=\| x\|^2+2\left(x,y\right)+\| y\|^2. \quad \blacklozenge$$

Л е м м а 2. Справедливо тождество

$$\cos^2 \angle\left(x,y\right)+\sin^2 \angle\left(x,y\right)\equiv 1. \tag{9}$$

◊ Применяя тождество (8), получаем

$$\frac{(x,y)^2}{\| x\|^2\cdot\| y\|^2}+\frac{1}{4}\left\|\frac{x}{\| x\|}+\frac{y}{\| y\|}\right\|^2\cdot\left\|\frac{x}{\| x\|}-\frac{y}{\| y\|}\right\|^2=\frac{(x,y)^2}{\| x\|^2\cdot\| y\|^2}+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\left\|\frac{x}{\| x\|}\right\|^2+2\left(\frac{x}{\| x\|},\frac{y}{\| y\|}\right)+\left\|\frac{y}{\| y\|}\right\|^2\right]\left[\left\|\frac{x}{\| x\|}\right\|^2-2\left(\frac{x}{\| x\|},\frac{y}{\| y\|}\right)+\left\|\frac{y}{\| y\|}\right\|^2\right]=$$

$$=\frac{\left(x,y\right)^2}{\| x\|^2\| y\|^2}+\frac{1}{4}\left[\left(\left\|\frac{x}{\| x\|}\right\|^2+\left\|\frac{y}{\| y\|}\right\|^2\right)-\frac{4\left(x,y\right)^2}{\| x\|^2\| y\|^2}\right]=$$

$$=\frac{\left(x,y\right)^2}{\| x\|^2\| y\|^2}-\frac{\left(x,y\right)^2}{\| x\|^2\| y\|^2}+\frac{1}{4}\left(1+1\right)^2=1. \quad \blacklozenge$$

Умножая обе части равенства (9) на $\| x\|^2\| y\|^2$, получаем тождество

$$\| x\|^2\| y\|^2=\left(x,y\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\| x\|^2\| y\|^2}\left\| x\| y\|+y\| x\|\right\|^2\cdot\left\| x\| y\|-y\| x\|\right\|^2. \tag{10}$$

Запишем тождество (10) в координатной форме:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2+\sum_{k<j}\left(x_ky_j-x_jy_k\right)^2. \tag{11}$$

Тождество (11) представляет собой известное тождество Лагранжа, а его геометрический смысл содержится в формуле (9). Приведем некоторые частные случаи тождества (11). Пусть $x,y\in R^2$, тогда тождество (11) принимает следующий вид:

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2. \tag{12}$$

Если же $x,y\in R^3$, то

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2+$$

$$+\left(x_1y_3-x_3y_1\right)^2+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)^2. \tag{13}$$

Если вспомнить, что числа $x_2y_3-x_3y_2$, $-(x_1y_3-x_3y_1)$, $x_1y_2-x_2y_1$ являются координатами векторного произведения $\left[x,y\right]$, то равенство (13) можно представить в виде

$$\| x\|^2\| y\|^2=\|\left[x,y\right]\|^2+\left(x,y\right)^2. \tag{14}$$

Тождество Лагранжа, записанное в виде (14), применяется в некоторых задачах физики и астрономии.

Из тождества (14) очевидным образом следует неравенство Коши-Буняковского

$$|\left(x,y\right)|\le\| x\|\cdot\| y\|. \tag{15}$$

Вернемся к доказательству неравенства (5).

Л е м м а 3. Пусть $a,b\in R^n$. Справедливо неравенство (5).

◊ Применяя тождество (8) и неравенство (15), получаем

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2(a,b)\le\|a\|^2+\|b\|^2+2|(a,b)|\le$$

$$\le\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\cdot\|b\|=(\|a\|+\|b\|)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получаем требуемый результат.

4. Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, с метрикой

$$\rho(f,g):=\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)| \tag{16}$$

также образует метрическое пространство. Это пространство играет очень важную роль в математическом анализе.

ЛЕКЦИЯ 2

МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

При рассмотрении основных понятий математического анализа можно заметить, что такие понятия, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, фундаментальная последовательность, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками соответствующих множеств и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах.

Последовательность $x_n\,(n=1,2,...)$ *точек метрического пространства* X *называется сходящейся, если существует такой элемент* $a\in X$, *что* $\rho(x_n,a)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $N(\varepsilon)$, *что для* $n\ge N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $\rho(x_n,a)<\varepsilon$. *Точка* $a\in X$ *называется пределом последовательности* $x_n\,(n=1,2,...)$.

В этом случае записываем $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ или $x_n\to a$.

Л е м м а 1. В метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

◊ Если $x_n\to a$ и $x_n\to b$, то по неравенству треугольника будем иметь

$$\rho(a,b)\le\rho(a,x_n)+\rho(x_n,b)\to 0$$

при $n\to\infty$, т.е. $\rho(a,b)=0$, и в силу аксиомы 1) метрики $a=b$. ♦

Отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ *называется непрерывным в точке* $x_0\in X$, *если*

$$\forall\varepsilon(>0)\exists(\delta>0)\forall x\{\rho(x,x_0)<\delta\to\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon\}. \tag{1}$$

Отображение f *называется непрерывным на* X *(на множестве* $M\subset X$*), если оно непрерывно в каждой точке* $x_0\in X\,(x_0\in M)$.

Отображение f называется равномерно непрерывным на множестве $M \subset X$, если

$$\forall \varepsilon(>0) \exists(\delta>0) \forall x(\in M) \forall y(\in M)\{\rho(x, y)<\delta \rightarrow \rho(f(x), f(y))<\varepsilon\}. \qquad (2)$$

Последовательность $x_n(n=1,2,\ldots)$ точек метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши) в метрическом пространстве (X, ρ) если

$$\forall \varepsilon(>0) \exists N=N(\varepsilon) \forall n(\geq N) \forall m(\geq N) \rho(x_n, x_m)<\varepsilon. \qquad (3)$$

Рассмотрим связь между фундаментальными и сходящимися последовательностями.

Л е м м а 2. В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность является фундаментальной.

◊ Пусть $x_n \rightarrow x_0$. Тогда $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. ♦

Шары, сферы, диаметр. В теории метрических пространств удобно пользоваться геометрическим языком, на который наталкивает классическая геометрия. Этот язык позволяет придать результатам анализа максимальную наглядность и дать наиболее простые и наиболее отражающие суть дела доказательства.

Если дано метрическое пространство (X, ρ), точка $a \in X$ и действительное число $r>0$, то открытый шар (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$B(a, r):=\{x \in X: \rho(a, x)<r\} \qquad (4)$$

соответственно

$$\bar{B}(a, r):=\{x \in X: \rho(a, x) \leq r\}. \qquad (5)$$

Сфера с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$S(a, r):=\{x \in X: \rho(a, x)=r\}. \qquad (6)$$

Открытые и замкнутые шары с центром в точке a всегда содержат точку a, но сфера с центром в точке a может оказаться пустой.

На действительной числовой прямой открытый (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть интервал $(a-r, a+r)$ (соответственно отрезок $[a-r, a+r]$); сфера с центром a и радиусом r состоит из двух точек : $a-r$ и $a+r$.

Пусть $A, B-$ два непустых подмножества пространства (X, ρ). Расстояние от A до B, по определению, есть положительное число

$$\rho(A, B)=\inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$

Если A состоит из одной точки x, то вместо $\rho(A, B)$ пишут также $\rho(x, B)$. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то $\rho(A, B)=0$, но обратное может и не иметь места. Вообще если $\rho(A, B)=t$, то не обязательно существует такие две точки $x \in A, y \in B$, для которых $\rho(x, y)=t$. Пусть например, на числовой прямой

$A-$ множество натуральных чисел, а $B-$множество всех чисел вида $n-\dfrac{1}{n}$ $(n=2,3,...)$. Хотя A и B не имеют общих точек, но расстояние $\rho\left(n,\, n-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому $\rho(A,B)=0$.

Л е м м а 3. *Если точка x не принадлежит открытому шару $B(a,\, r)$ (соответственно замкнутому шару $\bar{B}(a,\, r)$), то выполняется неравенство*

$$\rho(x,B(a,r))\geq\rho(a,x)-r$$

(соответственно $\rho(x,\bar{B}(a,r))\geq\rho(a,x)-r$).

◊ Действительно, из условия леммы следует, что $\rho(a,x)\geq r$. Для любой точки $y\in B(a,r)$ (соответственно $y\in\bar{B}(a,r)$) в силу неравенства треугольника

$$\rho(x,y)\geq\rho(a,x)-\rho(a,y)\geq\rho(a,x)-r. \ ♦$$

Л е м м а 4. Если A - непустое множество в метрическом пространстве (X,ρ), и $x,y-$две произвольные точки из (X,ρ), то выполняется неравенство

$$|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leq\rho(x,y). \tag{7}$$

◊ Для любой точки $z\in A$ имеем

$$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

поэтому

$$\rho(x,A)=\inf_{z\in A}\rho(x,z)\leq\inf_{z\in A}\left(\rho(x,y)+\rho(y,z)\right)=$$
$$=\rho(x,y)+\inf_{z\in A}\rho(y,z)=\rho(x,y)+\rho(y,A).$$

Точно так же $\rho(y,A)\leq\rho(x,y)+\rho(x,\, A)$. ♦

Диаметр произвольного непустого множества $A\subseteq X$, по определению, есть $d(A)=\sup\limits_{x\in A,\, y\in A}\rho(x,y)$; он может быть положительным действительным числом или равен $+\infty$. Из $A\subseteq B$ следует неравенство $d(A)\leq d(B)$. Равенство $d(A)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $A-$одноточечное множество.

Л е м м а 5. *Для любого шара* $d(\bar{B}(a,\, r))\leq 2r$.

◊ В самом деле, если $\rho(a,x)\leq r$ и $\rho(a,y)\leq r$, то в силу неравенства треугольника $\rho(x,y)\leq\rho(x,a)+\rho(a,y)\leq r+r=2r$. ♦

Ограниченным множеством в (X,ρ) называется непустое множество, диаметр которого конечен.

Л е м м а 6. *Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.*

◊ В самом деле, если $a\in A, b\in B$ и $x,y-$ две любые точки объединения $A\cup B,$ то возможны три случая: 1) $x,y\in A,$ и тогда $\rho(x,y)\leq d(A)$; 2) $x,y\in B,$ и тогда $\rho(x,y)\leq d(B)$; 3) $x\in A, y\in B,$ и тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(x,y)\le\rho(x,a)+\rho(a,b)+\rho(b,y),$$

поэтому

$$d(A\cup B)\le\rho(a,b)+d(A)+d(B).$$

Поскольку это верно для любых $a\in A,\ b\in B,$ то

$$d(A\cup B)\le\rho(A,B)+d(A)+d(B).$$

Из доказанного следует, что если множество A ограничено, то, какова бы ни была точка $x_0\in(X,\rho),$ множество A содержится в замкнутом шаре с центром x_0 и с радиусом $\rho(x_0,A)+d(A).$ ♦

Открытые множества. Окрестности. Открытым множеством в метрическом пространстве (X,ρ) называется подмножество $A\subseteq(X,\rho),$ обладающее следующим свойством: для любой точки $x\in A$ существует такое $r>0,$ что $B(x,r)\subset A.$

Л е м м а 7. *Любой открытый шар является открытым множеством.*

◊ *Если $x\in B(a,r),$ то по определению открытого шара $\rho(a,x)<r;$ поэтому из неравенства $\rho(x,y)<r-\rho(a,x)$ следует неравенство*

$$\rho(a,y)\le\rho(a,x)+\rho(x,y)<r,$$

которое доказывает включение

$$B(x,r-\rho(a,x))\subset B(a,r).\ ♦$$

Л е м м а 8. *Объединение любого семейства $A_\lambda\ (\lambda\in L)$ открытых множеств открыто.*

◊ Если $x\in A_\mu$ для некоторого $\mu\in L$, то существует такое $r>0,$ что

$$B(x,r)\subset A_\mu\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda.\ ♦$$

Л е м м а 9. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

◊ Достаточно доказать, что открыто пересечение двух открытых множеств $A_1,A_2,$ а затем провести шаг индукции. Если $x\in A_1\cap A_2,$ то существуют такие $r_1>0$ и $r_2>0,$ что $B(x,r_1)\subset A_1$ и $B(x,r_2)\subset A_2;$ очевидно, что $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$, где $r=\min(r_1,r_2).$ ♦

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не будет открытым. Например, пересечение интервалов $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ на числовой прямой — одноточечное множество {0}, которое не является открытым.

Если *A* – непустое множество в метрическом пространстве (X,ρ), то открытой окрестностью множества *A* называется любое открытое множество, содержащее *A,* а окрестностью множества *A* – любое множество, содержащее открытую окрестность *A*. В случае, когда *A* является одноточечным множеством $\{x\}$, обычно говорят об окрестностях точки x, а не множества $\{x\}$.

Л е м м а 10. *Для любого непустого множества* $A\subset X$ *и любого* $r>0$ *множество* $V_r(A)=\{x\in X : \rho(x,A)<r\}$ *является открытой окрестностью A.*

◊ Если $\rho(x,A)<r$ и $\rho(x,y)<r-\rho(x,A)$, то из неравенства (7) следует, что $\rho(y,A)-\rho(x,A)\leq\rho(x,y)$, но тогда $\rho(y,A)<\rho(x,A)+r-\rho(x,A)=r$; поэтому $V_r(A)$ открыто и содержит A.

Замкнутые множества. *Множество A в метрическом пространстве* (X,ρ) *называется замкнутым, если его дополнение является открытым множеством.* Пустое множество замкнуто, замкнуто и всё пространство (X,ρ). Промежутки $[a,\infty)$ и $(-\infty,a]$ и множество Z целых чисел – замкнутые множества на действительной прямой. Промежутки $[a,b)$ и $(a,b]$ не являются ни открытыми ни замкнутыми множествами.

Л е м м а 11. *Замкнутый шар есть замкнутое множество; сфера есть замкнутое множество.*

◊ В силу леммы 3 из $x\notin\bar{B}(a,r)$ следует неравенство

$$\rho(x,\bar{B}(a,r))\geq\rho(a,x)-r>0.$$

Поэтому открытый шар с центром в точке x и радиусом $\rho(a,x)-r$ содержится в дополнении шара $\bar{B}(a,r)$; тем самым доказано, что это дополнение открыто. Дополнение сферы $S(a,r)$ является объединением шара $B(a,r)$ и дополнения шара $\bar{B}(a,r)$ и в силу леммы 8 является открытым. ♦

Л е м м а 12. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

◊ Так как дополнение пересечения любого семейства множеств совпадает с объединением дополнений, а оно (объединение дополнений) в силу леммы 8 является открытым множеством, то пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Вторая часть леммы также доказывается переходом к дополнениям. ♦

В частности, одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.

ЛЕКЦИЯ 3

ПОЛНОТА. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $A-$ непустое подмножество метрического пространства (X,ρ). Сужение на декартово произведение $A\times A$ отображения $(x,y)\to\rho(x,y)$, очевидно является расстоянием в A, называемым расстоянием, индуцированным в A метрикой ρ пространства (X,ρ). Метрическое пространство, определяемое этим индуцированным расстоянием, называется подпространством метрического пространства (X,ρ).

Если в метрическом пространстве (X,ρ) *любая фундаментальная последовательность сходится (к точке пространства* (X,ρ) *), то это пространство называется полным.* Действительная прямая R^1 является полным метрическим пространством.

Полнота евклидова пространства R^n является следствием полноты R^1. Действительно, пусть $\left(x_{p,1}, x_{p,2},..., x_{p,n}\right) = x_p\left(p=1,2,...\right)$ – фундаментальная последовательность точек из R^n; это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{p,k}-x_{q,k}\right)^2 < \varepsilon^2$$

при $p,q\geq N$. Тогда для каждого $k=1,2,...,n$ получаем соответствующее неравенство для компоненты $x_{p,k}-x_{q,k}$:

$$\left|x_{p,k}-x_{q,k}\right| < \varepsilon$$

при $p,q\geq N$. Таким образом, $x_{p,k}\left(p=1,2,...\right)$ – фундаментальная числовая последовательность. Положим

$$x_k=\lim_{p\to\infty}x_{p,k} \quad и \quad x=\left(x_1, x_2,...,x_n\right).$$

Тогда $\lim\limits_{p\to\infty}x_p=x.$

Докажем полноту пространства $C_{[a,b]}$. Пусть $x_n(t)\left(n=1,2,...\right)$ – некоторая фундаментальная последовательность в $C_{[a,b]}$. Это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $N=N(\varepsilon)$, что

$$\forall m(\geq N)\forall n(\geq N)\forall t(a\leq t\leq b)\,|\,x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Неравенство (1) означает, что при фиксированном t_0 последовательность $x_n(t_0)$ является фундаментальной числовой последовательностью, т.е. сходится. Пусть $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$. Непрерывность функции $x(t)$ в точке t_0 следует из неравенства

$$|\,f(t_0+\delta)-f(t_0)|\leq|\,f(t_0+\delta)-f_n(t_0+\delta)|+|\,f_n(t_0+\delta)-f_n(t_0)|+|\,f_n(t_0)-f(t_0)|.$$

Устремляя в неравенстве (1) m к бесконечности, получим

$$\forall n(\geq N)\forall t(a\leq t\leq b)\,|\,x_n(t)-x(t)|\leq\varepsilon,$$

а это и означает что последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C_{[a,b]}$.

Рассмотрим множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho(x,y)=\left\{\int_a^b\left[x(t)-y(t)\right]^2\right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Такое метрическое пространство обозначается $C^2_{[a,b]}$ и называется пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства очевидны, а аксиома треугольника вытекает из интегральной формы неравенства Коши – Буняковского

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt,$$

которое может быть получено из легко проверяемого тождества

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left[x(s)\,y(t)-y(s)\,x(t)\right]^2 ds\,dt.$$

Убедимся в том, что пространство $C^2_{[a,b]}$ не полно. Рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1 \;\; при \; -1\le t\le -\dfrac{1}{n},\\ nt \;\;\; при \; -\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{1}{n},\\ 1 \;\;\; при \; -\dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

Она фундаментальна в $C^2_{[-1,1]}$, так как

$$\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right]^2 dt \le \frac{2}{\min(m,\, n)}.$$

Однако эта последовательность $\varphi_n(t)$ не сходится ни к какой функции из $C^2_{[a,b]}$. Действительно, пусть f - некоторая функция из $C^2_{[-1,1]}$ и $\omega -$ разрывная функция, равная — 1 при $t<0$ и + 1 при $t\ge 0$.

В силу интегрального неравенства Минковского имеем:

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\omega(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} \le \left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} + \left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Так как функция f непрерывна, то интеграл в левой части последнего неравенства отличен от нуля. Далее ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2\right\}^{1/2} = 0.$$

Поэтому интеграл $\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2\right\}^{1/2}$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Л е м м а 1. Для любых четырёх точек x, y, z, w в метрическом пространстве справедливо неравенство четырёхугольника

$$|\,\rho(x,y)-\rho(z,w)| \le \rho(x,z)+\rho(y,w).$$

◊ Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y),$$

откуда

$$\rho(x,y)-\rho(z,w)\le \rho(x,z)+\rho(y,w). \tag{3}$$

В неравенстве (3) поменяем местами пары точек (x,y) и (z,w). Тогда

$$-\left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le \rho(x,z)+\rho(y,w).$$

Из неравенств (3)-(4) получаем

$$-\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right]\le \left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right],$$

что, конечно, означает выполнение неравенства четырёхугольника. ♦

Принцип сжимающих отображений. Пусть $F:X\to X$ - отображение (оператор) метрического пространства X в себя. Точка $a\in X$ называется неподвижной точкой отображения F, если $F(a)=a.$

Одним из общих результатов, дающих достаточные условия существования неподвижной точки, является теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора.

Оператор $F:X\to X$ *называется сжимающим, если существует константа* $0\le q<1$ *такая, что для любых* $x,y\in X$ *выполнено неравенство*

$$\rho\big(F(x),\ F(y)\big)\le q\rho(x,y). \tag{5}$$

Т е о р е м а 1 (Банах). *В полном метрическом пространстве сжимающий оператор имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

◊ Рассмотрим на X неотрицательную функцию

$$\varphi(x):=\rho\big(x,F(x)\big). \tag{6}$$

Пусть x_n – некоторая минимизирующая $\varphi(x)$ последовательность:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\inf_{x\in X}\varphi(x)=\alpha.$$

Очевидно,

$$\alpha\le\varphi\big(F(x_n)\big)=\rho\big(F(x_n),F\big(F(x_n)\big)\big)\le q\rho\big(x_n,F(x_n)\big)=q\varphi(x_n),$$

откуда следует, что $\alpha\le q\alpha$. Таким образом, $\alpha=0$.

Так как

$$\rho(x_n,x_m)\le\rho\big(x_n,F(x_n)\big)+\rho\big(F(x_n),F(x_m)\big)+\rho\big(F(x_m),x_m\big)\le$$
$$\le\varphi(x_n)+q\rho(x_n,x_m)+\varphi(x_m),$$

то

$$\rho(x_n,x_m)\le\frac{\varphi(x_n)+\varphi(x_m)}{1-q}\to 0\quad (n,m\to\infty),$$

т.е. последовательность x_n фундаментальна. Её предел x_* в силу полноты пространства X принадлежит X. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, так как применяя неравенство четырёхугольника, получаем

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\rho(x,F(x))-\rho(y,F(y))|\le\rho(x,y)+\rho\big(F(x),F(y)\big)\le(1+q)\rho(x,y).$$

Поэтому $\varphi(x_*)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=0,$ а это означает, что x_* есть решение уравнения

$$x=F(x). \tag{7}$$

Пусть y_* также является решением уравнения (7), принадлежащим X. Тогда

$$\rho(x_*,\, y_*) = \rho\big(F(x_*),\ F(y_*)\big) \le q\rho(x_*,\, y_*)$$

и, следовательно, $\rho(x_*,\, y_*) = 0,$ т.е. $x_* = y_*.$ ♦

Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения (7), принцип сжимающих отображений даёт и фактический метод приближенного нахождения этого решения – метод последовательных приближений. Рассмотрим следующие примеры.

1.Пусть f – функция, которая определена на отрезке $[a,\, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|\, f(x_2) - f(x_1)| \le q\,|\, x_2 - x_1| \tag{8}$$

с константой $q<1$ и отображает отрезок $[a,\, b]$ в себя. Тогда f – сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, уравнение (7) имеет на отрезке $[a,\, b]$ единственное решение. В частности, условие (8) выполнено, если функция f имеет на отрезке $[a,\, b]$ производную $f'(x),$ причем

$$|\, f'(x)| \le q < 1.$$

2. Рассмотрим отображение F пространства R^n в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При каких же условиях отображение F будет сжимающим? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве R^n. Рассмотрим три случая.

а) Пространство R_0^n, т.е. $\rho(x,\, y) := \max\limits_{1\le i\le n}\{|\, x_i - y_i\,|\},$ тогда

$$\rho(y',\, y'') = \max_i |\, y_i' - y_i''| = \max_i |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right)| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,||\, x_j' - x_j''\,| \le$$

$$\le \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|\right) \max_j\{|\, x_j' - x_j''\,|\} = \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|\right) \rho(x',\, x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \le q < 1.$$

б) Пространство R_1^n, т.е. $\rho(x,\, y) := \sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i - y_i\,|,$ тогда

$$\rho(y',\, y'') = \sum_{i=1}^{n} |\, y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,||\, x_j' - x_j''\,| \le \left(\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}\,|\right) \rho(x',\, x'') .$$

Таким образом, условием сжатости является условие

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \le q < 1. \tag{9}$$

в) Пространство R^n, т.е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x'_j - x''_j\right)\right]^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \le q < 1. \tag{10}$$

ЛЕКЦИЯ 4

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные и частные дифференциалы. Пусть на некотором открытом множестве $D \subseteq R^3$ задана функция $f = f(x, y, z)$. Если точка $(x_0, y_0, z_0) \in D$, то, изменяя переменную x при постоянных y_0, z_0 в окрестности значения x_0, мы получим функцию одной переменной x.

Приращение

$$\Delta_x f = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

называют частным приращением функции f по переменной x, поскольку оно вызвано изменением значения лишь одной переменной x. По определению производной она представляет собой предел

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)\right].$$

Эта производная называется *частной производной* функции f по переменной x в точке (x_0, y_0, z_0) и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x},\ f'_x,\ f'_x(x_0, y_0, z_0),\ D_x f,\ D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

Заметим, что символ x внизу в этих обозначениях лишь указывает, по какой из переменных берется производная, и не связан с тем, в какой точке (x_0, y_0, z_0) она вычисляется.

Круглым ∂ (вместо прямого d) в обозначении именно частной производной предложил пользоваться Якоби (C. G. Jacobi).

Аналогично, считая x и z постоянными, а y – переменной величиной, можно рассматривать предел

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\, f\left(x_0\,, y_0\,+\,\Delta y,\, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)\right].$$

Предел этот называется частной производной функции f по переменной y в точке $\left(x_0, y_0,\, z_0\right)$ и обозначается символами, аналогичными предыдущим:

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ \ \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y},\ \ f'_y,\ \ f'_y\left(x_0, y_0, z_0\right),\, D_y f,\, D_y f\left(x_0, y_0, z_0\right).$$

Точно так же определяется и частная производная функции f по переменной z в точке $\left(x_0, y_0,\, z_0\right)$.

Рассмотрим несколько примеров нахождения частных производных.

1.Пусть $f = x^y\left(x>0\right)$, тогда $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y\cdot\ln x.$ Первая из них находится как производная степенной функции от x (при $y = const$), а вторая — как производная показательной функции от y (при $x = const$).

2. Если $f = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2};\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+\,y^2}.$$

3. Для $f = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)};\ \ \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}.$$

Произведение частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на произвольное приращение Δx называется частным дифференциалом по x функции f; его обозначают символом $d_x \neq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta$; если же хотят подчеркнуть, что частный дифференциал находится в точке $\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$, то пишут

$$d_x f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x}\Delta x. \tag{1}$$

Если переменная x является независимой, то $\Delta x = dx$ и равенство (1) запишется так:

$$d_x f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x}dx.$$

Аналогично,

$$d_y f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y}dy;\ d_z f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial z}dz.$$

Таким образом, мы видим, что можно было бы и частные производные представить в виде дробей $\frac{d_x f}{dx}, \frac{d_y f}{dy}, \frac{d_z f}{dz}$, но обязательно указывать, по какой переменной берётся дифференциал.

Полное приращение функции. Если, исходя из значений $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ независимых переменных, придать все трем переменным некоторые приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z,$ то функция f получит приращение

$$\Delta f = \Delta f\left(x_0, y_0, z_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right),$$

которое называется *полным приращением* функции.

В случае функции $f(t)$ от одной переменной, в предположении существования конечной производной, для приращения функции имеет место формула

$$\Delta f\left(t_0\right) = f'\left(t_0\right)\Delta t + \alpha\left(\Delta x\right)\cdot \Delta x,$$

где $\alpha\left(\Delta x\right) \to 0$ при $\Delta x \to 0.$

Далее установим аналогичную формулу для приращения функции $f(x, y, z)$:

$$\Delta f\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right) = f_x'\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)\cdot \Delta x + f_y'\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)\cdot \Delta y + \\ + f_z'\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)\cdot \Delta z + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta z, \qquad (2)$$

где α, β, γ зависят от $\Delta x,\, \Delta y,\, \Delta z$ и вместе с ними стремятся к нулю.

Т е о р е м а 1. Если частные производные $f_x'\left(x, y, z\right)$, $f_y'\left(x, y, z\right)$, $f_z'\left(x, y, z\right)$ существуют не только в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, но и в некоторой ее окрестности, и кроме того непрерывны (как функции от x, y, z) в этой точке, то имеет место равенство (2).

◊ Представим полное приращение функции Δf в виде:

$$\Delta f = \left[\, f\left(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y,\, z_0 + \Delta z\right) - f\left(x_0, y_0 + \Delta y,\, z_0 + \Delta z\right)\right] + \\ \left[\, f(x_0, y_0 + \Delta y,\, z_0 + \Delta z) - f\left(x_0, y_0, z_0 + \Delta z\right)\right] + \left[\, f\left(x_0, y_0, z_0 + \Delta z\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)\right].$$

Каждая из этих разностей представляет собой частное приращение функции лишь по одной переменной. Так как мы предположили существование частных производных в окрестности точки $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, то — при достаточной малости $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — к этим разностям по отдельности можно применить формулу конечных приращений (формулу Лагранжа), тогда

$$\Delta f = f_x'\left(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right)\cdot \Delta x + \\ + f_y'\left(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y, z_0 + \Delta z\right)\cdot \Delta y + f_z'\left(x_0, y_0,\, z_0 + \theta_3\Delta z\right)\cdot \Delta z.$$

Если в последнем равенстве положить:

$$f_x'\left(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right) = f_x'\left(x_0, y_0,\, z_0\right) + \alpha,$$
$$f_y'\left(x_0,\, y_0 + \theta_2\Delta y, z_0 + \Delta z\right) = f_y'\left(x_0, y_0, z_0\right) + \beta,$$
$$f_z'\left(x_0, y_0, z_0 + \theta_3\Delta z\right) = f_z'\left(x_0, y_0, z_0\right) + \gamma,$$

то придем к выражению (2) для Δf. При $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ аргументы производных в левых частях этих равенств стремятся к x_0, y_0, z_0, следовательно, сами производные, ввиду предположенной непрерывности их для этих значений переменных, стремятся к производным в правых частях, а величины $\alpha,\ \beta, \gamma -$ к нулю. ♦

Доказанная теорема дает возможность установить, что из существования и непрерывности в данной точке частных производных вытекает непрерывность в этой точке самой функции.

Полный дифференциал. В случае функции многих переменных (например, трех переменных) естественно поставить вопрос о представимости приращения функции в виде

$$\Delta f\left(x_0, y_0, z_0\right) = a\cdot\Delta x + b\cdot\Delta y + c\cdot\Delta z + o(\rho), \tag{3}$$

где $a, b, c -$ постоянные, а $\rho - \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Покажем, что если имеет место разложение (3), то в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ существуют частные производные по каждой из переменных, причем

$$f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right) = a,\ \ f_y^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right) = b,\ \ f_z^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right) = c.$$

Действительно, полагая в (3) $\Delta y = \Delta z = 0$ и $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta x} = a + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x},$$

откуда и следует, что существует

$$f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta x} = a.$$

Таким образом, соотношение (3) всегда осуществляется только в виде

$$\Delta f\left(x_0, y_0, z_0\right) = f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta x + f_y^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y + f_z^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta z + o(\rho). \tag{4}$$

Однако, в то время как в случае функции одной переменной существования производной $f'\left(x_0\right)$ в рассматриваемой точке было достаточно для наличия соотношения (3), в нашем случае существование частных производных

$$f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right),\ \ f_y^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right),\ \ f_z^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

еще не обеспечивает разложения (4). В теореме 1 были указаны достаточные условия для выполнения равенства (4): это — существование частных производных в окрестности точки $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и их непрерывность в этой точке.

При наличии формулы (4) функция $f(x, y, z)$ *называется дифференцируемой в точке* $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ *и (только в этом случае) выражение*

$$f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta x + f_y^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y + f_z^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta z,$$

т.е. линейная часть приращения функции называется ее полным дифференциалом и обозначается символом $df\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Под дифференциалами независимых переменных понимаются произвольные приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z;$ поэтому можно написать

$$df\left(x_0, y_0, z_0\right) = f_x^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot dx + f_y^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot dy + f_z^{'}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot dz.$$

Таким образом, полный дифференциал оказывается равным сумме частных дифференциалов.

ЛЕКЦИЯ 5

ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию $f(x,y,z)$, определенную в некоторой области D, причем каждая из переменных x,y,z в свою очередь является функцией от переменной t, принимающей значения в некотором интервале:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\zeta(t).$$

Пусть, кроме того, при изменении t точки (x,y,z) не выходят за пределы области D. Взяв в качестве аргументов функции f значения $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\zeta(t)$, получим сложную функцию $f\left[\varphi(t),\psi(t),\zeta(t)\right]$. Предположим, что f имеет по x, y, z непрерывные частные производные и что x_t', y_t', z_t' существуют. Докажем, что в этом случае существует производная сложной функции и найдем правило для ее вычисления.

Действительно, придадим переменной t некоторое приращение Δt, тогда x, y и z получат соответственные приращения $\Delta x, \Delta y$ и Δz, а функция f получит приращение Δf. Представим приращение Δf в виде

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f_x'(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x + f_y'(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + $$
$$+ f_z'(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y + \gamma\cdot\Delta z,$$

где величины $\alpha,\beta,\gamma\to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z\to 0$. Разделив обе части последнего равенства на Δt, получим

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x'\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + f_z'\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Устремим теперь приращение Δt к нулю; тогда $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ будут стремиться к нулю, так как функции x, y и z от t непрерывны (мы предположили существование производных x_t', y_t' и z_t'), а потому α, β и γ также будут стремиться к нулю. В пределе получим:

$$\frac{df\left[x(t), y(t), z(t)\right]}{dt} = f_x'\cdot x_t' + f_y'\cdot y_t' + f_z'\cdot z_t'. \qquad (1)$$

Далее рассмотрим тот случай, когда x, y и z зависят не от одной переменной t, а от нескольких переменных; например,

$$x=x(t,s),\ y=y(t,s),\ z=z(t,s).$$

Кроме существования и непрерывности частных производных функции $f(x,y,z)$, мы предполагаем здесь существование производных от функций x, y и z по переменным t и s.

После подстановки функций $x=x(t,s),\ y=y(t,s)$ и $z=z(t,s)$ в выражение для функции f мы будем иметь некоторую функцию от двух переменных t и s, и возникает вопрос о существовании и вычислении частных производных этой функции по переменным t и s. Но этот случай не отличается существенно от уже изученного, так как при вычислении частной производной функции от двух переменных t и s мы одну из переменных фиксируем, и у нас остаётся функция только от одной переменной. Следовательно, для этого случая формула (1) остается без изменения:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Пример 1. Рассмотрим степенно-показательную функцию $f=x^y$. Положив $x=x(t)$, $y=y(t)$ и продифференцировав по только что выведенному правилу дифференцирования сложной функции, получим следующий результат:

$$\frac{df}{dt}=y\cdot x^{y-1}\cdot x_t' + x^y\cdot\ln x\cdot y_t'.$$

Пример 2. Пусть $f(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные, и вместо x, y и z подставлено:

$$x=\eta-\zeta,\ y=\zeta-\xi,\ z=\xi-\eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z},\ \frac{\partial f}{\partial \zeta}=-\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Пример 3. Если (при тех же предположениях относительно функции f), сохраняя x независимой переменной, положить

$$y=y(x),\ \ z=z(x),$$

где функции $y(x)$, $z(x)$ дифференцируемы по x, то f, как сложная функция от x, будет иметь производную:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

или более подробно

$$\frac{df}{dx}=f_x'\left[x,\,y(x),\,z(x)\right]+f_y'\left[x,\,y(x),\,z(x)\right]\cdot y'(x)+f_z'\left[x,\,y(x),\,z(x)\right]\cdot z'(x).$$

Пример 4. Если же обе переменные x, y оставить независимыми, а вместо z подставить функцию $z=z(x,y)$, то для сложной функции

$$u=u(x,\,y)=f\left[x,\,y,\,z(x,\,y)\right]$$

будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'\left[x,y,\,z(x,y)\right]+\,f_z'\left[x,y,\,z(x,y)\right]\cdot z_x'(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_y'\left[x,y,\,z(x,y)\right]+\,f_z'\left[x,y,\,z(x,y)\right]\cdot z_y'(x,y).$$

Пример 5. Рассмотрим вопрос о дифференцировании определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

в предположении, что элементы его $a_{ik}\left(i,k=1,2,\dots,n\right)$ являются функциями некоторого параметра t, для которых существуют производные по $t: \dfrac{da_{ik}}{dt}$.

Вспоминая разложение определителя по элементам k – го столбца

$$\Delta = A_{1k}\cdot a_{1k} + A_{2k}\cdot a_{2k} + \dots + A_{nk}\cdot a_{nk},$$

где алгебраические дополнения элемента a_{ik} не содержат, приходим к заключению, что

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\cdot\frac{da_{ik}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\frac{da_{ik}}{dt}.$$

Заметим, что сумма $\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\cdot\dfrac{da_{ik}}{dt}$ дает разложение определителя, отличающегося от данного лишь тем, что элементы его k – го столбца заменены их производными по переменной t.

Формула конечных приращений. Пусть функция $f\left(x,y,z\right)$ определена и непрерывна на выпуклом множестве D и имеет непрерывные частные производные f_x', f_y', f_z' внутри этого множества (т.е. во всякой внутренней его точке). Рассмотрим две точки из множества D

$$M_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right) \;и\; M_1\left(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y,\, z_0++\Delta z\right),$$

которые можно соединить отрезком M_0M_1, целиком лежащим в области D.

Тогда имеет место формула:

$$\begin{gathered}\Delta f\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right) = f\left(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y,\, z_0+\Delta z\right) - f\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right) = \\ = f_x'\left(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y,\, z_0+\theta\Delta z\right)\cdot\Delta x + f_y'\left(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y,\, z_0+\theta\Delta z\right)\cdot\Delta y + \\ + f_z'\left(x_0+\theta\Delta x,\, y_0+\theta\Delta y,\, z_0+\theta\Delta z\right)\cdot\Delta z \quad \left(0<\theta<1\right),\end{gathered} \tag{2}$$

вполне аналогичная формуле конечных приращений (формуле Лагранжа) для функции одной переменной.

Для доказательства ее положим в функции $f\left(x,y,z\right)$

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\;\; y=y_0+t\cdot\Delta y,\;\; z=z_0+t\cdot\Delta z \quad \left(0\le t\le 1\right),$$

т.е. рассмотрим функцию $f\left(x,y,z\right)$ именно в точках отрезка M_0M_1. Сложная функция от t

$$F\left(t\right) = f\left(x_0+t\cdot\Delta x, y_0+t\cdot\Delta y, z_0+t\cdot\Delta z\right)$$

непрерывна на всем промежутке $\left[0,\,1\right]$, а внутри него имеет производную по переменной t, которая в силу формулы (1) равна

$$\frac{dF}{dt} = f_x'\left(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y, z_0 + t\cdot\Delta z\right)\cdot\Delta x +$$

$$+ f_y'\left(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y,\ z_0 + t\cdot\Delta z\right)\cdot\Delta y + f_z'\left(x_0 + t\cdot\Delta x, y_0 + t\cdot\Delta y,\ z_0 + t\cdot\Delta z\right)\cdot\Delta z, \qquad (3)$$

так как

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x,\ \frac{dy}{dt} = \Delta y,\ \frac{dz}{dt} = \Delta z.$$

Применим к функции $F(t)$ в промежутке $[0,1]$ формулу конечных приращений (формулу Лагранжа):

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

для некоторого $\theta \in (0, 1)$. Если заметить, что, по определению функции $F(t)$,

$$F(1) - F(0) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z\right) - f\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right),$$

и подставить вместо производной $F'(\theta)$ выражение (3) (при $t = \theta$), то получим формулу (2).

В качестве простого примера приложения доказанной формулы сформулируем и докажем следующий факт: если функция $f(x, y, z)$, непрерывная в выпуклой области D, внутри области имеет частные производные, равные нулю: $f_x' = f_y' = f_z' = 0$, то эта функция во всей области D является постоянной.

◊ Пусть $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $M(x, y, z)$ – произвольные точки области D. Ввиду предположенной выпуклости области D, эти точки можно соединить отрезком, расположенным в области D. Тогда, применяя к разности Δf равенство (2), получаем требуемый результат. ♦

Производная по заданному направлению. Частные производные по x, по y, по z выражают скорость изменения функции по направлению координатных осей. Между тем, во многих физических вопросах может представить интерес также скорость изменения функции $f(x, y, z)$ и по другим направлениям. Так будет, например, если дано поле температуры, т.е. если задана температура $f(M)$ в каждой точке M рассматриваемого тела.

Любое направление l на плоскости R^2 или в пространстве R^3 можно задать единичным вектором $\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}^{\,0}$ с координатными осями.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки M_0, радиус-вектор которой $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. если существует конечный предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{f\left(\vec{r}_0 + t\vec{l}^{\,0}\right) - f\left(\vec{r}_0\right)}{t}, \qquad (4)$$

то он называется производной функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению l и обозначается $\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial l}$. Получим координатную форму производной по направлению. Для этого возьмем луч, выходящий из точки M_0 в направлении l, параметрические уравнения которого имеют вид

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ \ y = y_0 + t\cos\beta,\ \ z = z_0 + t\cos\gamma,\ \ t \ge 0.$$

В точках этого луча получим функцию

$$F(t) = f\left(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma\right).$$

Тогда, согласно равенству (4), имеем

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial l} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\Big[\, f\left(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma\right)\Big] =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\big[F(t) - F(0)\big] = F'(+0).$$

Таким образом, производная $\dfrac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial l}$ совпадает с производной $F'(0)$. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в точке M_0, то, применив формулу (1), получим

$$\frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial l} = \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (5)$$

Пример. Температура тела в пространстве задается функцией

$$T = x^2 y + yz - e^{xy}.$$

Найти скорость изменения температуры в точке $M(1,1,1)$ в направлении от этой точки к началу координат.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{l}$ заданного направления. Очевидно, $\vec{l} = (-1, -1, -1)$. Тогда $\vec{l}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Далее

$$\frac{\partial T\left(M_0\right)}{\partial x} = \left(2xy - ye^{xy}\right)\Big|_{M_0} = 2 - e;$$

$$\frac{\partial T\left(M_0\right)}{\partial y} = \left(x^2 + z - xe^{xy}\right)\Big|_{M_0} = 2 - e;\quad \frac{\partial T\left(M_0\right)}{\partial z} = y\Big|_{M_0} = 1.$$

Тогда по формуле (5) получаем

$$\frac{\partial T\left(M_0\right)}{\partial \vec{l}} = (2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (2-e)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2e-5}{\sqrt{3}}.$$

Градиент функции. Градиентом дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ в точке M называется вектор, имеющий координаты

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \frac{\partial f(M)}{\partial z}$$

и обозначаемый символом $\mathbf{grad}\, f$ или ∇f. Выражение ∇f читается «набла f». Таким образом, по определению

$$\mathbf{grad}\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Из определения производной по направлению и формулы (5) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\mathbf{grad}\, f, \vec{l}^{\,0}\right) = \left(\nabla f, \vec{l}^{\,0}\right),$$

т.е. производная по направлению $\vec{l}$ в точке M равна скалярному произведению вектора $\mathbf{grad}\, f(M)$ и единичного вектора $\vec{l}^{\,0}$ направления $\vec{l}$.

ЛЕКЦИЯ 6

ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Однородными многочленами называются многочлены, состоящие из членов одного и того же измерения. Например, выражение

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

есть однородный многочлен второй степени. Если умножить здесь x и y на некоторый множитель t, то весь многочлен приобретет множитель t во второй степени. Подобное обстоятельство имеет место для любого однородного многочлена.

Однако и функции более сложной природы могут обладать таким же свойством; если взять, например, выражение

$$x \cdot \frac{\sqrt[4]{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

то и оно приобретает множитель t^2 при умножении обоих аргументов x и y на t. Подобную функцию естественно также назвать однородной функцией второй степени.

Дадим общее определение.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *от* n *переменных, определенная в области* D, *называется однородной функцией* $m-$*ой степени, если при умножении всех её аргументов на множитель* t *функция приобретает этот же множитель в* $m-$*ой степени, т.е. если тождественно выполняется равенство*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1}$$

Для простоты мы ограничимся предположением, что $x_1, x_2, ..., x_n$ *и* t здесь принимают лишь положительные значения. Область D, в которой мы рассматриваем функцию f, вместе с любой своей точкой $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ предполагается содержащей и все точки вида $M(tx_1, tx_2, ..., tx_n)$ при $t > 0$, т.е. весь луч, исходящий из начальной точки и проходящий через точку M.

Степень однородности m может быть любым действительным числом; так, например, функция

$$x^{\pi} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y^{\pi} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

является однородной функцией степени π от аргументов x и y.

Получим далее общее выражение для однородной функции степени m. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является однородной функцией нулевой степени, тогда

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Положив $t = \dfrac{1}{x_1}$, получим

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если ввести функцию от $n-1$ аргументов

$$\varphi(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) = f(1, u_1, ..., u_{n-1}),$$

то окажется, что

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Итак, всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них. Обратное очевидно также верно, так что предшествующее равенство дает общее выражение однородной функции нулевой степени.

Если $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть однородная функция m-й степени (и только в этом случае), отношение ее к x_1^m будет однородной функцией нулевой степени, так что

$$\frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Таким образом, мы получили общий вид однородной функции степени m. :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Формула Эйлера. Предположим теперь, что однородная (степени m) функция $f(x, y, z)$ имеет в открытой области D непрерывные частные производные по всем аргументам. Фиксируя произвольную точку (x_0, y_0, z_0) из D, по определению однородной функции будем иметь для любого $t > 0$:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) \equiv t^m f(x_0, y_0, z_0).$$

Продифференцируем теперь это равенство по t: левую часть равенства – по правилу дифференцирования сложной функции, правую – как степенную функцию. Получим

$$f_x'(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f_y'(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 +$$
$$f_z'(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0 \equiv mt^{m-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Если положить здесь $t = 1$, то придем к следующей формуле:

$$f_x'(x, y, z) \cdot x + f_y'(x, y, z) \cdot y + f_z'(x, y, z) \cdot z = m \cdot f(x, y, z).$$

Это равенство носит название формулы Эйлера.

Производные высших порядков. Если функция $f(x, y, z)$ имеет в некоторой области D частную производную по одной из переменных, то названная производная, сама являясь функцией от x, y, z, может в свою очередь в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) иметь частные производные по той же или по любой другой переменной. Для исходной функции $f(x, y, z)$ эти последние производные будут частными производными второго порядка (или вторыми частными производными).

Если первая производная была взята, например, по x, то ее производные по x, y, z обозначаются так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}$$

или

$$f''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \ f''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0), \ f''_{xz}(x_0, y_0, z_0).$$

Заметим, что дифференциальные обозначения следует рассматривать как цельные символы: квадрат ∂x^2 заменяет обозначение $\partial x \partial x$ и указывает на дифференцирование дважды по x; точно так же обозначение x^2 внизу заменяет xx.

Аналогичным образом определяются производные 3-го, 4-го и т.д. порядков (третьи, четвертые, … производные).

Заметим, что частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \ldots$$

называется смешанной частной производной.

Приведем примеры нахождения частных производных при помощи пакета Maple.

```
> g11:= factor(diff(arctan(x/y),x));
```

$$g11 := \frac{y}{y^2 + x^2}$$

```
> g12:= factor(diff(arctan(x/y),y));
```

$$g11 := -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

```
> g13:= factor(diff(arctan(x/y),x$2));
```

$$g13 := -\frac{2\,y\,x}{(y^2 + x^2)^2}$$

```
> g14:= factor(diff(arctan(x/y),x,y));
```

$$g14 := \frac{(-y + x)\,(y + x)}{(y^2 + x^2)^2}$$

```
> g15:= factor(diff(arctan(x/y),y$2));
```

$$g15 := \frac{2\,y\,x}{(y^2 + x^2)^2}$$

ЛЕКЦИЯ 7

ТЕОРЕМА О СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

При рассмотрении многих примеров бросается в глаза совпадение смешанных частных производных, взятых по одним и тем же переменным, но в разном порядке. Нужно сразу же отметить, что это вовсе не вытекает с необходимостью из определения смешанных производных, так что существуют случаи, когда упомянутого совпадения нет.

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \ \text{если} \ x^2+y^2>0, \\ 0, \ \text{если} \ x=0, \ y=0. \end{cases}$$

Имеем

$$f'_x(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right], \text{если}\, x^2+y^2>0, \ f'_x(0,0)=0.$$

Придав x частное значение, равное нулю, будем иметь при любом y (в том числе и при $y=0$): $f'_x(0,y)=-y.$ Продифференцировав эту функцию по $y,$ получим $f''_{xy}=-1.$ Отсюда следует, в частности, что в точке $(0,\,0)$ будем иметь $f''_{xy}(0,0)=-1.$ Вычислив таким же образом f''_{yx} в точке $(0,\,0)$, получим $f''_{yx}(0,0)=1.$ Итак, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$

Тем не менее, подмеченное на примерах совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирований, не случайно: оно имеет место в широком классе случаев – при соблюдении определенных условий.

Теорема. Предположим, что 1) $f(x,y)$ определена в открытой области $D,$ 2) в этой области существуют первые частные производные f'_x и $f'_y,$ а также вторые смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} и, наконец, 3) эти последние производные f''_{xy} и f''_{yx}, как функции x и $y,$ непрерывны в некоторой точке (x_0,y_0) области $D.$ Тогда в этой точке

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{1}$$

◊ Рассмотрим выражение

$$W=\frac{1}{hk}\left[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)\right],$$

где h,k отличны от нуля, например, положительны, и притом настолько малы, что в D содержится весь прямоугольник $[x_0,x_0+h;\ y_0,y_0+k];$ такими мы их фиксируем до конца рассуждения.

Введем теперь вспомогательную функцию от x:

$$\varphi(x)=\frac{1}{k}\left[f(x,y_0+k)-f(x,y_0)\right],$$

которая в интервале (x_0,x_0+h) в силу 2) имеет производную

$$\varphi'(x)=\frac{1}{k}\left[f_x'(x,y_0+k)-f_x'(x,y_0)\right]$$

и, следовательно, непрерывна. С помощью этой функции выражение W, которое равно

$$W=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{k}\left[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)\right]-\frac{1}{k}\left[f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\right]\right\}, \qquad (2)$$

можно переписать в виде:

$$W=\frac{1}{h}\left[\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\right].$$

Так как для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0,x_0+h]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа, то мы можем по формуле Лагранжа преобразовать выражение W так:

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{1}{h}\left[f_x'(x_0+\theta h,\ y_0+k)-f_x'(x_0+\theta h,\ y_0)\right]\ (0<\theta<1).$$

Пользуясь существованием второй производной $f_{xy}''(x,y)$ снова применим формулу конечных приращений, на этот раз — к функции от y: $f_x'(x_0+\theta h,y)$ в промежутке $[y_0,y_0+h]$. Таким образом,

$$W=f_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)\ (0<\theta,\theta_1<1). \qquad (3)$$

Но выражение W содержит x и y, с одной стороны, и h и k, с другой, одинаковым образом. Поэтому можно обменять их роли и, введя вспомогательную функцию

$$\psi(y)=\frac{1}{h}\left[f(x_0+h,y)-f(x_0,y)\right],$$

путем аналогичных рассуждений получить результат:

$$W=f_{yx}''(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k)\ (0<\theta_2,\theta_3<1). \qquad (4)$$

Из сопоставления (3) и (4) находим:

$$f_{xy}''(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)=f_{yx}''(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k).$$

Устремив теперь h и k к нулю, перейдем в этом равенстве к пределу. Ввиду ограниченности множителей $\theta,\theta_1,\theta_2,\theta_3,$ аргументы и справа и слева стремятся к x_0,y_0. А тогда в силу свойства 3) получим

$$f_{xy}''(x_0,\ y_0)=f_{yx}''(x_0,\ y_0).$$

Заметим, что общая теорема о смешанных производных формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть функция $f(x_1,\ x_2,...,x_n)$ от n переменных определена в некоторой открытой области D и имеет в этой области всевозможные частные производные до $(k-1)-$го порядка включительно и смешанные производные $k-$го порядка, причем все эти производные непрерывны в D.

При этих условиях значение любой $k-$ой смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

◊ Для $k=2$ теорема уже доказана, так что, например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Действительно, чтобы свести этот случай к первой теореме, достаточно заметить, что при вычислении этих производных можно всем прочим переменным (кроме x_i и x_j) приписать постоянные значения, причем названные производные, непрерывные по всей совокупности переменных, будут непрерывны и по переменным x_i и x_j при фиксированных остальных. Пусть теперь $k>2$.

Докажем сначала нашу теорему для того случая, когда при вычислении производной $k-$го порядка произведена перестановка только между двумя последовательными дифференцированиями, т.е. докажем справедливость равенства

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_h} \partial x_{i_{h+1}} \ldots \partial x_{i_k}}=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{h+1}} \partial x_{i_h} \ldots \partial x_{i_k}}. \qquad (5)$$

Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_h, i_{h+1}, \ldots, i_k$ есть некоторое размещение из n значков 1, 2,…, n по k, с возможными повторениями.

Произведя последовательно необходимые для вычисления этих производных дифференцирования, видим, что производные $(h-1)$ - го порядка в обоих случаях одинаковы. Применив к ним уже доказанную для $k=2$ теорему, получим, что и производные $(h+1)$-го порядка равны. Дальше в обоих случаях нужно производить одинаковые операции, которые и приведут к одинаковым результатам.

Итак, равенство (5), действительно, справедливо, и теорема для этого случая доказана. Но так как всякая перестановка элементов может быть достигнута рядом перестановок двух последовательных элементов, то теорема доказана и в общем случае: при условии непрерывности соответствующих производных всегда можно переставлять между собою дифференцирования по различным переменным.

Дифференциалы высших порядков. Пусть в области D задана некоторая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда полным дифференциалом первого порядка называется выражение

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

где $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n -$ произвольные приращения независимых переменных.

Мы видим, что df также является некоторой функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то df будет иметь непрерывные частные производные первого порядка, и можно говорить о полном дифференциале от этого дифференциала, который называется дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции f. Он обозначается символом $d^2 f$.

Важно подчеркнуть, что приращения $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ при этом рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему.

Таким образом,

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + ... + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot dx_n$$

или, раскрывая,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_n\right)\cdot dx_1 +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}\right)\cdot dx_2 + ...$$

$$... + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n\right)\cdot dx_n =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1 dx_3 + ... + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3 f$ и т.д. Вообще, если дифференциал $(k-1)$-го порядка $d^{k-1} f$ уже определен, то дифференциал $k-$го порядка $d^k f$ определяется как полный дифференциал от дифференциала $(k-1)$-го порядка.

Если для функции существуют непрерывные частные производные всех порядков до $k-$го порядка включительно, то существование этого $k-$го дифференциала обеспечено. Но развернутые выражения последовательных дифференциалов становятся все более и более сложными. В целях упрощения их записи прибегают к следующему приему.

Прежде всего в выражении первого дифференциала условно «вынесем f за скобки»; тогда его символически можно будет записать следующим образом:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f.$$

Теперь замечаем, что если в выражении для второго дифференциала также «вынести f за скобки», то остающееся в скобках выражение формально представляет в раскрытом виде квадрат выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n,$$

поэтому второй дифференциал символически можно записать так:

$$d^2 f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f.$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т.д. Это правило — общее: при всяком k будем иметь символическое равенство

$$d^k f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f,$$

которое можно понимать так: сначала многочлен, стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены действуют на f. Мы видели, что это правило справедливо при $k=1,2;$ поэтому будет достаточно доказать, что если оно верно для $d^k f,$ то оно будет также верно и для $d^{k+1}f.$ Допустив, что этот закон для $d^k f$ выполняется, будем иметь в развернутом виде:

$$d^k f=\sum C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\cdot\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}...dx_n^{\alpha_n},$$

где суммирование распространяется на всевозможные группы неотрицательных целых чисел $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,$ удовлетворяющих условию

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=k,$$

а

$$C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}=\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!}-$$

полиномиальные коэффициенты.

В предположении, что существуют непрерывные частные производные $(k+1)$– го порядка, продифференцируем предыдущую формулу; мы получим

$$d^{k+1}f=\sum C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\Big(\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_1^{\alpha_1+1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1+1}dx_2^{\alpha_2}...dx_n^{\alpha_n}+$$

$$+\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2+1}...\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2+1}...dx_n^{\alpha_n}+\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n+1}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}...dx_n^{\alpha_n+1}\Big).$$

Заметим, что то же самое мы могли бы получить, формально перемножив символические выражения:

$$\sum C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}...dx_n^{\alpha_n}\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)$$

и применив полученный оператор к функции $f.$ Но это «произведение» есть не что иное, как

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k\times\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{k+1} f,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $k-$й дифференциал является однородным целым многочленом степени k, или формой $k-$ой степени относительно дифференциалов независимых переменных, коэффициентами при которых служат частные производные $k-$го порядка, умноженные на целочисленные постоянные (полиномиальные коэффициенты).

Например, если $f=f(x,y)$, то

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3,$$

$$d^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}dxdy^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}dy^4,$$

и т.д.

ЛЕКЦИЯ 8

Формула Тейлора. Как известно, функция $F(t)$ при условии существования ее $n+1$ первых производных может быть следующим образом разложена по формуле Тейлора:

$$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)\cdot(t-t_0)+\frac{1}{2!}F''(t_0)\cdot(t-t_0)^2+...$$

$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

Эту формулу, положив

$$t-t_0=\Delta t=dt,\quad F(t)-F(t_0)=\Delta F(t_0),$$

можно переписать так:

$$\Delta F(t_0)=dF(t_0)+\frac{1}{2!}d^2F(t_0)+...+\frac{1}{n!}d^nF(t_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\Delta t).$$

Именно в последней форме формула Тейлора распространяется и на случай функции от нескольких переменных. Ограничимся случаем двух переменных.

Предположим, что в окрестности точки (x_0,y_0) эта функция имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)-$го порядка включительно. Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx и Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0,y_0) $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки (x_0,y_0).

Требуется доказать, что при сделанных предположениях относительно функции $f(x,y)$ справедливо следующее равенство:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y), \qquad (1)$$

причем участвующие справа в различных степенях дифференциалы dx и dy равны приращениям Δx и Δy.

Для доказательства введем в рассмотрение новую независимую переменную t, положив

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\quad y=y_0+t\cdot\Delta y\ (0\le t\le 1). \qquad (2)$$

Подставив эти значения x и y в функцию $f(x,y)$, получим сложную функцию от одной переменной t:

$$F(t)=f(x_0+t\cdot\Delta x,\ y_0++t\cdot\Delta y).$$

Теперь мы видим, что вместо приращения

$$\Delta f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0),$$

мы можем рассматривать приращение вспомогательной функции:

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0),$$

так как оба приращения равны. Но $F(t)$ является функцией от одной переменной и имеет $n+1$ непрерывных производных; следовательно, применив к ней уже выведенную ранее формулу Тейлора для функции одного аргумента, получим

$$\Delta F(0)=F(1)-F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0)+...+\frac{1}{n!}d^nF(0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta)(0<\theta<1); \quad (3)$$

при этом дифференциал dt, входящий в различных степенях в правую часть равенства (3), равен $\Delta t=1-0=1$.

Далее, пользуясь тем, что при линейной замене переменных свойство инвариантности формы имеет место и для высших дифференциалов, можем написать, что

$$dF(0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot dx+f'_y(x_0,y_0)\cdot dy=df(x_0,\ y_0),$$
$$d^2F(0)=f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot dx^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot dxdy+f''_{y^2}(x_0,y_0)\cdot dy^2=d^2f(x_0,y_0),$$

и т.д. Наконец, для $(n+1)$-го дифференциала будем иметь

$$d^{n+1}F(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y).$$

Подставив выражения для дифференциалов в правую часть равенства (3), мы придем к требуемому разложению (1).

Следует отметить, что хотя в форме дифференциалов формула Тейлора для случая функции нескольких переменных имеет такой же простой вид, как и для случая одной переменной, - но в развернутом виде она гораздо сложнее. Вот так выглядят первые три ее члена даже для функции лишь двух переменных:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=\frac{1}{1!}\left[f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\Big[f'''_{x^3}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^3+3f'''_{x^2y}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^2\Delta y+3f'''_{xy^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\Delta y^2+f'''_{y^3}(x_0,y_0)\cdot\Delta y^3\Big]+\dots .$$

Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения. Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ определена в области D и $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ является внутренней точкой этой области.

Точка $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ называется точкой локального максимума (минимума), если ее можно окружить такой окрестностью

$$U=\{x:\|x-x_0\|<\delta\},$$

чтобы для всех точек этой окрестности выполнялось неравенство

$$f(x_1,x_2,..,x_n)\le f(x_{10},x_{20},..,x_{n0})$$

для случая локального максимума и неравенство

$$f(x_1,x_2,..,x_n)\ge f(x_{10},x_{20},..,x_{n0})$$

для случая локального минимума.

Если эту окрестность можно взять настолько малой, чтобы знак равенства был исключен, т.е. чтобы в каждой точке ее, кроме самой точки $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$, выполнялось строгое неравенство

$$f(x_1,x_2,..,x_n)<f(x_{10},x_{20},..,x_{n0})\ \big(f(x_1,x_2,..,x_n)>f(x_{10},x_{20},..,x_{n0})\big),$$

то говорят, что в точке $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ имеет место собственный максимум (минимум); в противном случае, максимум (минимум) называется несобственным.

Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин – экстремум.

Предположим, что функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в некоторой точке $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ имеет экстремум.

Покажем, что если в этой точке существуют частные производные:

$$f'_{x^1}(x_{10},x_{20},...,x_{n0}),...,f'_{x^n}(x_{10},x_{20},...,x_{n0}),$$

то все эти частные производные равны нулю, *так что обращение в нуль частных производных первого порядка является необходимым условием существования экстремума.*

С этой целью положим $x_2=x_{20},...,x_n=x_{n0}$, сохраняя x_1 переменным, тогда у нас получится функция от одного аргумента x_1:

$$u=f(x_1,x_{20},...,x_{n0}).$$

Так как мы предположили, что в точке $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ существует экстремум (для определенности – пусть это будет максимум), то, в частности, отсюда следует, что в некоторой окрестности $(x_{10}-\delta,x_{10}+\delta)$ точки $x_1=x_{10}$ необходимо должно выполняться неравенство

$$f(x_1,x_{20},..,x_{n0})\le f(x_{10},x_{20},..,x_{n0}),$$

так что функция одной переменной $u=f(x_1,x_{20},...,x_{n0})$ в точке $x_1=x_{10}$ будет иметь максимум, а отсюда по теореме Ферма следует, что

$$f'_{x_1}(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = 0.$$

Таким же образом можно показать, что в точке $x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}$ и остальные частные производные также равны нулю. Координаты тех точек, в которых частные производные равны нулю, можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Как и в случае функции одной переменной, подобные точки называют стационарными.

ЛЕКЦИЯ 9

Достаточные условия локального экстремума. Как и в случае функции одной переменной, в стационарной точке вовсе не обеспечено наличие экстремума. Например, функция $f(x, y) = xy$ имеет стационарную точку $(0,0)$. В то же время непосредственно ясно, что в любой окрестности этой точки функция принимает, как положительные, так и отрицательные значения, и экстремума нет.

Таким образом, возникает вопрос об условиях, достаточных для существования (или отсутствия) экстремума в стационарной точке, т.е. о том исследовании, которому эта точка должна быть дополнительно подвергнута.

Мы рассмотрим сначала случай функции двух переменных $f(x, y)$. Предположим, что эта функция определена, непрерывна и имеет частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), которая является стационарной, т.е. удовлетворяет условиям

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Чтобы установить, действительно ли наша функция имеет в точке (x_0, y_0) экстремум или нет, естественно обратиться к рассмотрению разности

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0). \tag{2}$$

Разложим эту разность по формуле Тейлора, ограничиваясь двумя дифференциалами. Впрочем, так как точка (x_0, y_0) предположена стационарной, то первый дифференциал равен нулю, и следовательно,

$$\Delta = \frac{1}{2!}\left(f''_{x^2} \cdot \Delta x^2 + f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y^2} \cdot \Delta y^2 \right). \tag{3}$$

При этом роль приращений $\Delta x, \Delta y$ играют разности $x - x_0, y - y_0$ и все производные вычислены в некоторой точке

$$(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)\ (0 < \theta < 1).$$

Введем в рассмотрение значения этих производных в самой точке (x_0, y_0):

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0,y_0),\ a_{12}=f''_{xy}(x_0,y_0),\ a_{22}=f''_{y^2}(x_0,y_0)$$

и положим

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=a_{11}+\alpha_{11};\ f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=a_{12}+\alpha_{12};$$

$$f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=a_{22}+\alpha_{22};$$

так что, ввиду непрерывности вторых производных все $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0.$ Разность Δ запишется в виде:

$$\Delta=\frac{1}{2!}\left(a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2+\alpha_{11}\Delta x^2+2\alpha_{12}\Delta x\Delta y+\alpha_{22}\Delta y^2\right).$$

Как мы установим, поведение разности Δ зависит от знака выражения $a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$ Введем полярные координаты, взяв за полюс исходную точку (x_0,y_0) и проведя через нее полярную ось параллельно оси $Ox.$ Пусть $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ есть расстояние между точками (x_0,y_0) и $(x,y),$ а φ означает угол, составленный соединяющим их отрезком с полярной осью, так что

$$\Delta x=\rho\cos\varphi,\ \Delta y=\rho\sin\varphi.$$

Тогда величина Δ запишется так:

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left\{a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0.$ В этом случае $a_{11}a_{22}>0,$ так что $a_{11}\neq 0$ и справедливо равенство

$$a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=$$

$$=\frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)\sin^2\varphi\right]. \qquad (4)$$

Из равенства (4) ясно, что выражение в квадратных скобках всегда положительно, так что правая часть этого равенства сохраняет знак коэффициента $a_{11}.$ Абсолютная величина выражения в квадратных скобках, как непрерывная на промежутке $[0,\,2\pi]$ функция от $\varphi,$ имеет в силу теоремы Вейерштрасса наименьшее (очевидно, положительное) значение m:

$$|a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi|\geq m>0.$$

С другой стороны

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi|\leq|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|<\frac{m}{2}$$

сразу для всех $\varphi,$ если только ρ достаточно мало. Но тогда все выражение Δ будет сохранять тот же знак, что и правая часть равенства (4), т.е. знак величины a_{11}.

Итак, если $a_{11}>0,$ то и $\Delta>0,$ т.е. функция в рассматриваемой точке (x_0,y_0) имеет минимум, а при $a_{11}<0$ будет и $\Delta<0,$ т.е. функция $f(x,y)$ в рассматриваемой точке (x_0,y_0) будет иметь максимум.

Предположим теперь, что $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$ Остановимся на случае, когда $a_{11}\neq 0,$ тогда можно и здесь использовать преобразование (4). При $\varphi=0$

выражение $a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$ будет положительно, ибо сведется к a_{11}^2. Если же определить φ из условия

$$a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = 0,$$

то это выражение сведется к $\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\sin^2\varphi$ и будет отрицательно. При достаточно малом ρ второй трехчлен в скобках $\{...\}$ будет сколь угодно мал, и знак Δ определится знаком первого трехчлена.

Таким образом, величина Δ будет принимать значения разных знаков и, следовательно, в точке (x_0, y_0) экстремума быть не может. Если $a_{11} = 0$, то первый трехчлен в скобках $\{...\}$ примет вид:

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \sin\varphi\left(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi\right), \tag{5}$$

и тогда можно определить угол φ_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$|a_{22}||\sin\varphi_1| < 2|a_{12}||\cos\varphi_1|.$$

Тогда при $\varphi = \varphi_1$ и при $\varphi = -\varphi_1$ выражение (5) будет иметь разные знаки, и, следовательно, экстремума не будет.

Итак, если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, *то в стационарной точке* (x_0, y_0) *функция* $f(x, y)$ *имеет экстремум, имеено, собственный максимум при* $a_{11} < 0$ *и собственный минимум при* $a_{11} > 0$. *Если же* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, *то экстремума нет.*

В случае выполнения равенства $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для решения вопроса приходится привлекать высшие производные.

ЛЕКЦИЯ 10

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Важным инструментом исследования функций нескольких переменных являются определители, составленные из частных производных. Пусть даны n функций от n переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n); \end{cases} \tag{1}$$

которые определены в некоторой области D и имеют в ней непрерывные частные производные по всем переменным. Составим из этих производных определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется обычно функциональным определителем Якоби или якобианом системы (1). Обозначают его для краткости символом

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)},$$

сходным с обозначением производной.

Умножение якобианов. Кроме системы функций (1), возьмем систему функций

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_n), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_n); \end{cases} \qquad (2)$$

определенных и имеющих непрерывные частные производные в области P. Пусть при изменении точки $(t_1, t_2, ..., t_n)$ в области P соответствующая точка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ не выходит из области D, так что $y_1, y_2, ..., y_n$ можно рассматривать как сложные функции от $(t_1, t_2, ..., t_n)$ через посредство $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Умножим теперь якобиан системы (1) на якобиан системы (2):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Из теории определителей известна теорема об умножении определителей, выражающаяся формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

где общий элемент последнего определителя такой:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} \quad (i, k = 1, ..., n).$$

Применяя эту формулу к функциональным определителям, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Замечая, что по формуле для производной сложной функции, общий элемент этого определителя есть

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k} \left(i, n = 1, 2, \dots, n\right)$$

мы можем последний определитель переписать в виде

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Доказанное только что первое свойство якобиана в кратких обозначениях можно переписать так:

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)}. \qquad (3)$$

Если бы мы имели одну функцию y от x, где x есть функция от t, то получили бы известную формулу для производной сложной функции:

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt};$$

таким образом, выведенное свойство якобиана является обобщением формулы для производной сложной функции.

ЛЕКЦИЯ 11

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие неявной функции от одной переменной. Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое, если все его члены перенести налево, имеет вид

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x в некотором промежутке существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (1), то этим определяется однозначная функция (или многозначное отображение) $y = f(x)$, для которой равенство

$$F\left[x,\ f(x)\right] \equiv 0 \tag{2}$$

имеет место тождественно относительно x.

Возьмем, например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \tag{3}$$

оно определяет y как двузначное отображение от x в промежутке $[-a, a]$, именно

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}.$$

И, если вместо y подставить в уравнение (3) эту функцию, то получится тождество.

Здесь удалось найти для y простое аналитическое выражение через x. Так обстоит дело далеко не всегда. Если взять уравнение

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \ (0 < \varepsilon < 1),$$

то этим уравнением y определяется как однозначная функция от x, хотя в конечном виде она через элементарные функции и не выражается.

Функция $y = f(x)$ называется неявной, если она задана неразрешенным (относительно y) уравнением (1); она становится явной, если рассматривается непосредственная зависимость y от x. Заметим, что эти термины характеризуют лишь способ задания функции $y = f(x)$ и не имеют отношения к ее природе. Строго говоря, противопоставление неявного и явного задания функции с полной четкостью возможно лишь, если под явным заданием понимать явное аналитическое задание; если же, в качестве явного, допускать задание с помощью любого правила, то задание функции y от x с помощью уравнения (1) ничем не хуже всякого другого.

В том случае, когда уравнение (1) — алгебраическое, т.е. когда функция $F(x, y)$ есть целый относительно x и y многочлен, определяемая им неявная функция $y(x)$ называется алгебраической. Если степень уравнения (относительно y) не выше четырех, то алгебраическая функция допускает явное выражение в радикалах, при степени выше четырех такое выражение возможно лишь в виде исключения.

Сейчас нас будет интересовать лишь вопрос о существовании и однозначности функции, заданной уравнением (1), независимо от возможности представить ее в явном виде аналитическим выражением.

Одним из медотов доказательства теорем существования неявной функции является метод, основанный на применении принципа сжимающих отображений.

Теорема. Пусть функция $F(x, y)$: а) непрерывна по совокупности переменных при $|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b$ и $F(x_0, y_0)=0.$

б) При тех же значениях аргументов существует непрерывная частная производная $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\ne 0.$

Тогда существуют такие числа $\alpha, \beta>0,$ что для каждого x из отрезка $|x-x_0|\le\alpha|$ уравнение (1) имеет на отрезке $|x-x_0|\le\alpha|$ единственное решение $y(x)$. Функция $y(x)$ непрерывна.

◊ Уравнение

$$y = y - \frac{F(x,y)}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}} \equiv G(x,y) \tag{4}$$

эквивалентно уравнению (1). Покажем, что непрерывная по (x,y) функция $G(x,y)$ является сжимающим отображением на множестве

$$|x-x_0|\le\alpha|,\ \ |y-y_0|\le\beta\,. \tag{5}$$

Отсюда будет следовать существование и непрерывность функции $y=y(x)$.

Так как

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 1 - \frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}},$$

то $\dfrac{\partial G(x_0,y_0)}{\partial y}=0$ и, следовательно, можно указать такое $\beta>0,$ что при $|x-x_0|\le\beta, |y-y_0|\le\beta$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right| \le q<1. \tag{6}$$

Так как $G(x_0,y_0)=y_0,$ то можно указать такое положительное $\alpha\le\beta,$ что при $|x-x_0|\le\alpha$ будет выполнено неравенство

$$|G(x,y_0)-y_0|=|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)|\le(1-q)\beta. \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что при $|x-x_0|\le\alpha$ функция $G(x,y)$ преобразует отрезок $|y-y_0|\le\beta$ в себя. Действительно, $|G(x,y)-y_0|=|G(x,y)-G(x_0,y_0)|=|G(x,y)-G(x,y_0)+G(x,y_0)-G(x_0,y_0)|\le$

$$\le |G(x,y)-G(x,y_0)|+|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)|\le q\beta+(1-q)\beta=\beta.$$

Из неравенства (6) вытекает, что для тех же значений y

$$|G(x,y_1)-G(x,y_2)|\le q\,|y_1-y_2|\;\left(|x-x_0|\le\alpha, |y-y_1|\le\beta, |y-y_2|\le\beta\right).$$

Таким образом, существование единственного значения $y=y(x)$ вытекает из принципа сжимающих отображений.

Непрерывность можно получить следующим образом. Пусть

$$y_1=y(x_1)=G(x_1,y_1),\; y_2=y(x_2)=G(x_2,y_2),$$

тогда

$$|y(x_1)-y(x_2)|=|G(x_1,y_1)-G(x_2,y_2)|=$$

$$=|G(x_1,y_1)-G(x_1,y_2)+G(x_1,y_2)-G(x_2,y_2)|\le$$

$$\le q\,|y_1-y_2|+\frac{1}{|\partial G(x_0,y_0)/\partial y|}\,|F(x_1,y_2)-F(x_2,y_2)|.$$

Вычисление производных неявных функций. Дифференцируя тождество $F\left[x,\, y(x)\right]\equiv 0,$ получаем

$$F_x'\left[x,y(x)\right]+F_y'\left[x,y(x)\right]y_x'=0,$$

откуда

$$y_x'=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}. \tag{8}$$

Если функция $F(x,y)$ имеет непрерывные производные второго порядка, то выражение в правой части равенства (8), может быть продифференцировано по x, следовательно, существует и вторая производная y_{x^2}''. Выполняя дифференцирование и подставляя вместо y_x' ее выражение (8), получаем

$$y_{x^2}''=-\frac{\left(F_{x^2}''+F_{xy}''y_x'\right)F_y'-F_x'\left(F_{yx}''+F_{y^2}''y_x'\right)}{(F_y')^2}=$$

$$=\frac{\left(F_{xy}''-\dfrac{F_{y^2}''F_x'}{F_y'}\right)F_x'-\left(F_{x^2}''+F_{xy}''\dfrac{-F_x'}{F_y'}\right)F_y'}{\left(F_y'\right)^2}=$$

$$\frac{F_{xy}''F_x'F_y'-F_{y^2}''\left(F_x'\right)^2-F_{x^2}''\left(F_y'\right)^2+F_{xy}''F_x'F_y'}{\left(F_y'\right)^3}=$$

$$=\frac{2F_{xy}''F_x'F_y'-F_{y^2}''\left(F_x'\right)^2-F_{x^2}''\left(F_y'\right)^2}{\left(F_y'\right)^3}.$$

Пример. Пусть y связано с x уравнением

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=arctg\,\frac{y}{x}.$$

Дифференцируя последовательно по x (причем y считаем функцией от x), получим

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2} \tag{9}$$

или

$$x+yy'=xy'-y.$$

Таким образом,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

Далее дифференцируя равенство (9) по переменной x, получаем

$$1+(y')^2+yy''=xy''.$$

Из последнего равенства (если подставить найденное значение y') находим

$$y''=\frac{1+(y')^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3},$$

и т.д.

ЛЕКЦИЯ 12

РЯДЫ С ПОСТОЯННЫМИ ЧЛЕНАМИ

Основные понятия. Пусть задана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{1}$$

Составленный из этих чисел символ

$$a_1+a_2+...+a_n+... \tag{2}$$

называется рядом, а сами числа — членами ряда. Выражение (2) можно записать короче с использованием символа суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Станем последовательно складывать члены ряда, составляя (в бесконечном количестве) суммы:

$$A_1=a_1,\ A_2=a_1+a_2, ...,\ \ A_n=a_1+a_2+...+a_n, ...; \tag{3}$$

их называют частичными суммами (или отрезками) ряда. Эту последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ мы будем сопоставлять с рядом (2): роль этой конструкции и заключается в порождении упомянутой последовательности.

Конечный или бесконечный предел A частичной суммы A_n ряда (2) при $n\to\infty$: $A=\lim A_n$ называют суммой ряда и пишут

$$A=a_1+a_2+...+a_n+... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

придавая тем самым символу (2) однозначный смысл. Если ряд имеет конечную сумму, его называют сходящимся, в противном же случае (т.е. если сумма равна $\pm\infty$, либо предела не существует) — расходящимся.

Таким образом, вопрос о сходимости ряда (2) равносилен вопросу о существовании конечного предела для последовательности (3). Обратно, какую бы последовательность $x=x_n\,(n=1,2,...)$ наперед ни взять, вопрос о наличии для нее конечного предела может быть сведен к вопросу о сходимости ряда

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots, \qquad (4)$$

для которого частичными суммами как раз и будут значения $/\,x_k\,(k=1,2,\ldots)$. При этом сумма ряда (4) совпадает с пределом последовательности.

Иными словами, рассмотрение бесконечного ряда и его суммы есть новая форма изучения последовательности и ее предела, но эта форма представляет неоценимые преимущества как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Это обстоятельство делает ряды важнейшим инструментом исследования в математическом анализе и его приложениях.

Пример 1. Простейшим примером ряда является сумма геометрической прогрессии: $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$. Частичная сумма такого ряда имеет вид

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}\ \ (a\neq 1).$$

Если $|q|<1$, то последовательность s_n имеет предел

$$s=\frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд сходится, и s будет его суммой.

При $|q|\geq 1$ та же прогрессия дает пример расходящегося ряда.

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(n+1)-\ln n\right]$$

расходится, так как $\ln(n+1)\to+\infty$ при $n\to\infty$.

Пример 3. На той же идее построены следующие ряды (где α обозначает произвольное число, отличное от $-1,-2,-3,\ldots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{\alpha+n+1}\right)=\frac{1}{\alpha+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}-\frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right]=\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

и, вообще, при любом целом $p\geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n+p)}=\frac{1}{p(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+p)}.$$

Пример 4. Легко установить расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

В самом деле, так как члены его убывают, то его $n-$ я частичная сумма

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

и растет до бесконечности вместе с n.

Основные теоремы. Если в ряде (2) отбросить первые m членов, то получится ряд:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{5}$$

называемый остатком ряда (2) после $m-$ го члена.

Теорема. Если сходится ряд (2), то сходится и любой из его остатков (5); обратно, из сходимости остатка (5) вытекает сходимость исходного ряда (2).

◊ Фиксируем m и обозначим $k-$ ю частичную сумму ряда (5) через $A_k^{'}$:

$$A_k^{'} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}.$$

Тогда

$$A_k^{'} = A_{m+k} - A_m. \tag{6}$$

Если ряд (2) сходится, так что $A_n \to A,$ то — при безграничном возрастании $k-$ существует конечный предел

$$A^{'} = A - A_m \tag{7}$$

и для суммы $A_k^{'}$, что и означает сходимость ряда (5).

Обратно, если дано, что сходится ряд (5), так что $A_k^{'} \to A^{'}$, то перепишем равенство (6), полагая в нем $k = n - m$ (при $a > m$), так:

$$A_n = A_m + A_{n-m}^{'};$$

отсюда можно усмотреть, что при $n \to \infty$ частичная сумма A_n имеет предел

$$A = A_m + A^{'}, \tag{8}$$

т.е. сходится ряд (2). ♦

Таким образом, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда (в смысле его сходимости или расходимости).

Сумму ряда (5), если он сходится, обозначим символом α_m, указывая индексом, после какого члена берется остаток. Тогда формулы (8) и (7) перепишутся следующим образом:

$$A = A_m + \alpha_m, \;\; \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

Если $m \to \infty$, то $A_m \to A, \alpha_m \to 0.$

Теорема. Если члены сходящегося ряда (2) умножить на один и тот же множитель $c,$ то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на c) .

◊ В самом деле, частичная сумма S_n ряда

$$ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$$

очевидно, равна

$$ca_1 + ca_2 + ... + ca_n = c\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right) = cA_n$$

и имеет пределом $cA.$ ♦

Теорема. Два сходящихся ряда

$$A = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

и

$$B = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$$

можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд

$$\left(a_1 \pm b_1\right) + \left(a_2 \pm b_2\right) + ... + \left(a_n \pm b_n\right) + ...$$

также сходится, и его сумма равна, соответственно, $A \pm B.$

◊ Если A_n, B_n и C_n означают частичные суммы упомянутых рядов, то, очевидно,

$$C_n = \left(a_1 \pm b_1\right) + \left(a_2 \pm b_2\right) + ... + \left(a_n \pm b_n\right) = \left(a_1 + ... + a_n\right) + \left(b_1 + ... + b_n\right) = A_n \pm B_n.$$

Переходя к пределу, найдем, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} B_n,$ что и доказывает наше утверждение. ♦

Теорема. Необходимое условие сходимости ряда. Общий член a_n сходящегося ряда стремится к нулю.

◊ Это может быть доказано совершенно элементарно: так как A_n имеет конечный предел, то

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0. \; ♦$$

В этом утверждении содержится необходимое условие сходимости ряда, которым мы будем часто пользоваться. При нарушении его ряд заведомо расходится. Однако важно подчеркнуть, что это условие не является само по себе достаточным для сходимости ряда. Иными словами, даже при выполнении его ряд может расходиться. Примерами этого служат ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ЛЕКЦИЯ 13

СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Вопрос об установлении сходимости или расходимости ряда проще всего решается для рядов, члены которых неотрицательны; для краткости такие ряды мы будем называть положительными.

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

будет положительным, т.е. $a_n \geq 0 (n = 1, 2, 3\ldots)$. Тогда, очевидно,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

т.е. последовательность A_n оказывается возрастающей. Вспоминая теорему о пределе монотонной последовательности, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. Положительный ряд (А) всегда имеет сумму: эта сумма ьудет конечной (и, следовательно, ряд — сходящимся), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (а ряд — расходящимся) в противном случае.

Все признаки сходимости (и расходимости) положительных рядов, в конечном счете, основаны на этой простой теореме. Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере ряда. Приведем примеры этого рода.

1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

известный под названием гармонического ряда. Имеем очевидное неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Если, отбросив первые два члена, остальные члены гармонического ряда разбить на группы по 2, 4, 8,…, $2^{k-1},\ldots$ членов в каждой

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8},\ \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16};\ldots \tag{2}$$

то каждая из этих сумм в отдельности будет больше $\frac{1}{2}$; в этом легко убедиться, полагая в (1) поочередно $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$. Обозначим $n-$ю частичную сумму гармонического ряда через H_n; тогда, очевидно,

$$H_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что частичные суммы не могут быть ограничены сверху: ряд имеет бесконечную сумму.

Заметим, что H_n с возрастанием n возрастает очень медленно. Еще Эйлер вычислил, что

$$H_{1000}=7,48..., \quad H_{1000000}=14,39... .$$

Теоремы сравнения рядов. Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая простая теорема.

Теорема. Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (B)$$

Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для $n > N$), выполняется неравенство: $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) или — что то же — из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

◊ На основании того, что отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \le b_n$ при всех значениях $n = 1, 2, ...$. Обозначив частичные суммы рядов (A) и (B), соответственно, через A_n и B_n, будем иметь $A_n \le B_n$.

Пусть ряд (B) сходится, тогда суммы B_n ограничены: $B_n \le l\,(n = 1, 2, ...)$. В силу предыдущего неравенства это означает, что и $A_n \le l$, а это в свою очередь влечет за собой сходимость ряда (A).

Теорема. Если существует предел

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = k\,(0 \le k \le \infty),$$

то из сходимости ряда (B) при $k < \infty$, вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (B), при $k > 0$, вытекает расходимость ряда (A).

Таким образом, при $0 < k < \infty$ оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.

◊ Пусть ряд (B) сходится и $k < \infty$. Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, по определению предела для достаточно больших n будем иметь

$$\frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon, \quad \textit{откуда} \quad a_n < (k + \varepsilon) b_n.$$

В силу первой теоремы сравнения одновременно с рядом (B) будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon) b_n$, полученный умножением ряда (B) на постоянное число $k + \varepsilon$. Отсюда, по предыдущей теореме вытекает сходимость ряда (A).

Если же ряд (B) расходится и $k > 0$, то в этом случае обратное отношение $\frac{a_n}{b_n}$ имеет конечный предел; ряд (A) должен быть расходящимся, ибо если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (B). ♦

Теорема. Если, хотя бы начиная с некоторого места выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{3}$$

то из из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) или — что то же — из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B).

◊ Без ограничения общности можно счиать, что неравенство (3) справедливо для всех значений $n = 1, 2, 3 ...$ В таком случае будем иметь:

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1},\ \ \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, ...,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \quad или \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n = 1, 2, ...).$$

Пусть ряд (B) сходится; вместе с ним сходится ряд $\sum \frac{a_1}{b_1} b_n$, полученный умножением его членов на постоянный множитель a_1/b_1. А тогда сходится и ряд (A).

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n} \ \ (0 < x < 3\pi),$$

сходится, так как

$$2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) < x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

и ряд $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится, то это же справедливо и для данного ряда.

Пример 2. Рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и сопоставим его с заведомо расходящимся рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\ln(n+1) - \ln n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Применяя к функции $\ln x$ в промежутке $[n, n+1]$ формулу Лагранжа, найдем, что

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta} \ \ (0 < \theta < 1).$$

В таком случае гармонический ряд, члены которого соответственно больше, и подавно расходится.

Пример 3. Аналогично можно установить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} \ \ (\sigma > 0),$$

сопоставляя его с заведомо сходящимся рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}} - \frac{1}{n^{\sigma}}\right].$$

Применяя к функции $\frac{1}{x^{\sigma}}$ в промежутке $[n-1, n]$ формулу Лаганжа, найдем:

$$\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}=\frac{\sigma}{(n-\theta)^{1+\sigma}} \quad (0<\theta<1),\ \textit{т.е.}\ \frac{1}{n^{1+\sigma}}<\frac{1}{(n-\theta)^{1+\sigma}}=\frac{1}{\sigma}\cdot\left[\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right],$$

откуда по первой теореме сравнения и вытекает сходимость исследуемого ряда.

Пример 4. Чтобы подобным приемом получить новый результат, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},$$

члены которого еще меньше, чем соответствующие члены гармонического ряда. Сопоставим его с заведомо расходящимся рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\ln(n+1)-\ln\ln(n)\right].$$

Применяя формулу Лагранжа к функции $\ln\ln x$ в промежутке $[n,n+1]$, получим

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln n=\frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)} \quad (0<\theta<1),$$

откуда, применяя первую теорему сравнения, получаем, что данный ряд, члены которого соответственно больше и подавно расходится.

ЛЕКЦИЯ 14

ПРИЗНАКИ КОШИ И ДАЛАМБЕРА

Сравнение данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \tag{A}$$

с различными стандартными рядами, заведомо сходящимися или расходящимися, может быть проведено и в другой форме. Возьмем для сравнения, в качестве ряда (B), с одной стороны, сходящуюся геометрческую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n = q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots \quad (0<q<1),$$

а с другой стороны — расходящуюся прогрессию 1+1+1+…+1+… .

Сравнивая испытуемый ряд (A) с этими рядами по схеме первой теоремы сравнения, получим следующий признак.

Теорема (признак Коши). Составим для ряда (A) последовательность

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Если, при достаточно больших n, выполняется неравенство $c_n \le q$, где q – постоянное число, меньшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $c_n \ge 1$, то ряд расходится.

◊ Действительно, неравенства $\sqrt[n]{a_n} \le q$ или $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ равносильны, соответственно, таким: $a_n \le q^n$ или $a_n \ge 1$; после чего остается применить первую теорему сравнения. ♦

Чаще, однако, этот признак применяют в другой, предельной, форме.

Пусть последовательность $\sqrt[n]{a_n}$ имеет предел (конечный или нет):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

◊ Если $q < 1$, то возьмем положительное число $\varepsilon < 1 - q$, так что $q + \varepsilon < 1$. По определению предела, для $n > N$ будет:

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon.$$

Число $q + \varepsilon$ играет роль числа q в предыдущей формулировке: ряд сходится.

Если же $q > 1$ (и конечно), то, взяв $\varepsilon = q - 1$, так что $q - \varepsilon = 1$, для достаточно больших значений n будем иметь $\sqrt[n]{a_n} > 1$: ряд расходится. Аналогичный результат получаем и при $q = \infty$.

В случае, когда $q = 1$, этот признак не дает возможности судить о поведении ряда.

Если сравнение ряда (А) с указанными стандартными рядами производить по теореме 3, то придем к такому признаку.

Теорема (признак Даламбера). Рассмотрим для ряда (А) последовательность $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Если, при достаточно больших n, выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, то ряд расходится.

И в этом случае удобнее пользоваться предельной формой признака: пксть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

Доказательство — такое же, как и в случае признака Коши.

И этот признак ничего не дает, ели оказывается, что $q = 1$.

Интегральный признак Маклорена-Коши. Пусть рассматриваемый ряд имеет форму

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \qquad (1)$$

где $f(n)$ есть значение при $x = n$ некоторой функции $f(x)$, определенной на множестве $[a, \infty)$; функцию эту предположим непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Теорема (интегральный признак Маклорена – Коши). При сделанных предположениях ряд (1) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

◊ Рассмотрим какую-либо первообразную функцию $F(x)$ для $f(x)$; та как ее производная $F'(x) = f(x) > 0,$ то $F(x)$ возрастает вместе с x и, при $x \to \infty$, имеет предел, конечный или нет. В первом случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[F(n+1) - F(n)\right] \qquad (3)$$

сходится, а во втором — расходится. С этим рядом мы и сравним исследуемый ряд.

По формуле Лагранжа, общий член ряда (3) представится в виде:

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta) \quad (0 < \theta < 1),$$

так что вследствие монотонности функции $f(x)$

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n. \qquad (4)$$

В случае сходимости ряда (3) сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1),$ члены которого меньше соответственных членов ряда (3); значит сходится и ряд (1). В случае расходимости ряда (3), расходится и данный ряд (1), так как его члены больше соответственных членов ряда (3). ♦

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\sigma} n} \quad (\sigma > 0).$$

Здесь

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\sigma} x}; \; F(x) = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x}; \int\limits_2^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} 2};$$

т.е. ряд сходится.

ЛЕКЦИЯ 15

СХОДИМОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

Обратимся к вопросу о сходимости рядов, члены которых могут иметь произвольные знаки. Так как, по определению, сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

приводит к сходимости последовательности

$$A_1, A_2, \ldots,\ A_n, \ldots, \qquad (1)$$

составленной из частичных сумм ряда, то естественно применить к этой последовательности необходимое и достаточное условие сходимости последовательности. Если вспомнить, что

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m},$$

то принцип сходимости применительно к ряду можно перефразировать так:

Для того чтобы ряд (A) сходился, необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ соответствовал такой номер N, что при $n > N$ неравенство

$$|\, a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} \,| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполняется при любом $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Нужно сказать, однако, что проверка выполнения приведенного общего условия сходимости ряда в конкретных случаях обычно бывает затруднительна. Поэтому представляет интерес изучение класса случаев, когда вопрос решается с помощью более простых методов.

Абсолютная сходимость. Если члены ряда не все положительны, но начиная с некоторого места становятся положительными, то отбросив достаточное количество начальных членов ряда, сведем вопрос о сходимости к исследованию положительного ряда. Если члены ряда отрицательны или, по крайней мере, с некоторого места становятся отрицательными, то мы вернемся к уже рассмотренным случаям при помощи изменения знаков всех членов. Таким образом, существенно новым случаем будет тот, когда среди членов ряда есть бесконечное количество как положительных, так и отрицательных членов. Здесь часто бывает полезна следующая общая

Теорема. Пусть дан ряд (A) с членами произвольных знаков. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,| = |\, a_1 \,| + |\, a_2 \,| + \ldots + |\, a_n \,| + \ldots, \qquad \left(A^*\right)$$

составленный из абсолютных величин его членов, то и данный ряд также сходится.

◊ сразу получается из принципа сходимости: неравенство

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+m}| \le |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+...+|a_{n+m}| \qquad (3)$$

показывает, что если условие сходимости выполняется для ряда (A^*), то оно тем более выполняется для ряда (A). ♦

Если ряд (A) сходится вместе с рядом (A^*), составленным из абсолютных величин его членов, то про ряд (A) говорят, что он абсолютно сходится.

Как увидим далее, возможны случаи, когда ряд (A) сходится, а ряд $\left(A^*\right)$ — нет. Тогда ряд (A) называют неабсолютно сходящимся рядом.

Степенной ряд, его промежуток сходимости. Рассмотрим степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (4)$$

Выясним, какой вид имеет область сходимости данного ряда, т.е. множество тех значений x, для которых ряд (4) сходится.

Лемма. Если ряд (4) сходится для значения $x=\bar{x}$, отличного от нуля, то он абсолютно сходится для любого значения x, удовлетворяющего неравенству: $|x|<|\bar{x}|$.

◊ Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1\bar{x} + ... + a_n\bar{x}^n + ...$$

вытекает, что его общий член стремится к нулю, а следовательно, — ограничен, т.е.

$$\left|a_n\bar{x}^n\right| \le M \qquad (n=0,1,2,...). \qquad (5)$$

Возьмем теперь любое x, для которого $|x|<|\bar{x}|$, и составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + ... + \left|a_n x^n\right| + ... \qquad (6)$$

Так как

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n \bar{x}^n\right| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

и члены ряда (6) оказываются меньшими соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии, то, в силу первой теоремы сравнения, ряд (4) сходится, причем абсолютно. ♦

При $x=0$ сходится, очевидно, всякий ряд (4). Но есть степенные ряды, которые — помимо этого — не сходятся ни при одном значении x. Примером такого всюду расходящегося ряда может служить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n,$$

как в этом легко убедиться с помощью признака Даламбера.

Предположим же, что для ряда (4) вообще существуют такие отличные от 0 значения $x=\bar{x}$, при которых он сходится, и рассмотрим множество этих значений $\{\bar{x}\}$. Это множество может оказаться либо ограниченным сверху, либо нет.

В последнем случае, какое бы значение x ни взять, необходимо найдется такое $\bar{x}$, что $|x|<|\bar{x}|$, а тогда, по лемме, при взятом значении x ряд (4) абсолютно сходится.

Пусть теперь множество $\{|\bar{x}|\}$ сверху ограничено, и R будет его точная верхняя граница. Если $|x|>R$, то сразу ясно, что при этом значении x ряд (4) расходится. Возьмем теперь любое x, для которого $|x|<R$. По определению точной границы, найдется такое $\bar{x}$, что $|x|<|\bar{x}|\le R$; а это, по лемме, снова влечет за собой абсолютную сходимость ряда (4).

Итак, в открытом промежутке $(-R,R)$ ряд (4) абсолютно сходится; для $x>R$ и $x<-R$ ряд заведомо расходится, и лишь о концах промежутка общего утверждения сделать нельзя — там, смотря по случаю, может иметь место и сходимость и расходимость.

Далее вспомним лемму Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности всегда можно выделить такую частичную подпоследовательность, которая сходилась бы к конечному пределу.

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$, будь она ограничена или нет, существуют частичные пределы. Оказывается, что среди этих частичных пределов необходимо найдутся наибольший и наименьший; они называются наибольшим и наименьшим пределами последовательности $\{x_n\}$ и обозначаются

$$\overline{\lim}\, x_n \quad и \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

Теорема. Наибольший и наименьший пределы для последовательности $\{x_n\}$ всегда существуют. Их равенство есть условие, необходимое и достаточное для существования предела последовательности.

Выражение радиуса сходимости через коэффициенты. Рассмотрим последовательность

$$\rho_1 = |a_1|, \ \rho_2 = \sqrt{|a_2|}, \ \ldots, \ \rho_n = \sqrt[n]{a_n}, \ldots . \qquad (7)$$

Обозначим наибольший предел этой последовательности, который всегда существует, через p, так что

$$p = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Теорема Коши-Адамара. Радиус сходимости ряда (4) есть величина, обратная наибольшему пределу p последовательности (7).

ЛЕКЦИЯ 16

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакопеременными называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки. Знакопеременный ряд удобнее записывать так, чтобы знаки членов были выявлены, например,

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \quad (c_n > 0). \qquad (1)$$

По отношению к знакопеременным рядам имеет место

Теорема Лейбница. Если члены знакопеременного ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине:

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

и стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0,$$

то ряд сходится.

◊ Частичную сумму четного порядка C_{2m} можно записать в виде

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Так как каждая скобка, в силу (2), есть положительное число, то отсюда ясно, что с возрастанием m сумма C_{2m} также возрастает. С другой стороны, если переписать сумму C_{2m} так:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

то легко усмотреть, что C_{2m} остается сверху ограниченной: $C_{2m} < c_1$. В таком случае, по теореме о монотонной последовательности частичная сумма C_{2m} имеет конечный предел

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C.$$

Переходя к частичной сумме нечетного порядка C_{2m+1}, имеем, очевидно,

$$C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}.$$

Так как общий член стремится к нулю, то и

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m+1} = C.$$

Отсюда следует, что C и будет суммой данного ряда. ♦

Мы видели, что частичные суммы четного порядка C_{2m} приближаются к сумме C ряда, возрастая. Написав C_{2m-1} в виде

$$C_{2m-1}\ c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

легко установить, что суммы нечетного порядка стремятся с C, убывая. Таким образом, всегда $C_{2m} < C < C_{2m-1}$. В частности можно утверждать, что

$$0 < C < c_1.$$

Это позволяет дать весьма простую и удобную оценку для остатка рассматриваемого ряда (который и сам представляет собою такой же знакопеременный ряд). Именно, для

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \ldots,$$

очевидно, имеем:

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1};$$

наоборот, для

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \ldots = -(c_{2m} - c_{2m+1}) - \ldots$$

будет:

$$\gamma_{2m-1} < 0, \ |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}.$$

Таким образом, во всех случаях остаток ряда лейбницевского типа имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Примерами рядов лейбницевского типа служат ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots; \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots. \tag{4}$$

В то же время ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся: для ряда (3) это будет гармонический ряд, для ряда (4) получится ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$, расходимость которого ясна из того, что его частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_n.$$

Ряд Тейлора. Мы уже рассматривали степенные ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots . \quad (5)$$

Рассматривают и степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+\ldots+a_n\left(x-x_0\right)^n+\ldots . \quad (6)$$

Отрезками степенного ряда являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. В связи со всем этим приобретает большую важность вопрос о возможности разложить заданную функцию по степеням $x-x_0$ (в частности по степеням x), т.е. представить ее в виде суммы ряда (6) или (5).

Путь к решению поставленного вопроса открывает формула Тейлора. Предположим, что рассматриваемая функция $f(x)$ имеет производные всех порядков. Тогда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \quad (7)$$

где остаток $r_n(x)$ чаще всего стремится к нулю при $n\to\infty$. Это естественно приводит к мысли о бесконечном разложении

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots . \quad (8)$$

Такой ряд — независимо от того, сходится ли он и имеет ли, на самом деле, своей суммой $f(x)$,– называется рядом Тейлора для функции $f(x)$. Он имеет вид (6), причем коэффициенты его:

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$$

носят название коэффициентов Тейлора.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $n+1-$ го слагаемого ряда Тейлора, ввиду (7), есть как раз $r_n(x)$, то, очевидно: для того чтобы при некотором значении x имело место разложение (8), необходимо и достаточно, чтобы остаток $r_n(x)$ формулы Тейлора — при этом значении x — стремился к нулю с возрастанием *n.*

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0=0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(x)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n+\ldots . \quad (9)$$

ЛЕКЦИЯ 17

Разложение в ряд основных элементарных функций. Докажем сначала следующее предложение, которым будет охвачен ряд важных случаев.

Если функция $f(x)$ в промежутке от $[0,b]$ имеет производные всех порядков, и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются по абсолютной величине ограниченными одним и тем же числом:

$$|f^{(n)}(x)| \le l \tag{1}$$

(где l не зависит от n), то во всем промежутке имеет место разложение

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(x)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + \ldots . \tag{2}$$

Это предложение применимо к функциям

$$f(x) = e^x, \; f(x) = \sin x, \; f(x) = \cos x$$

в любом промежутке $[-b,b]$, ибо производные их, соответственно, равные

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \; f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

будут в нем по абсолютной величине ограничены числом e^b – для функции e^x, и единицей — для $\sin x$ и $\cos x$.

Таким образом, мы сразу можем написать разложения

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots, \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \tag{5}$$

Все они имеют место при любом значении x.

Нетрудно подобным же образом получить разложения и для гиперболических функций, но проще, вспомнив их определение:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

вывести эти разложения при помощи почленного сложения и вычитания соответствующих рядов. Таким путем мы находим:

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots,$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots .$$

К функции $f(x) = arctg\, x$ сформулированное вначале предложение не приложимо. Действительно, общее выражение для ее $n-$ой производной имеет вид:

$$\left(arctgx\right)^{(n)}=\left(n-1\right)!\cos^{n}\left(arctgx\right)\cdot\sin n\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)$$

не гарантирует существование общей границы для всех производных.

Так как соответствующий ряд Тейлора имеет вид

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\left(-1\right)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+...$$

и сходится лишь в промежутке $[-1,1]$, то вне этого промежутка не приходится говорить о выражении функции $arctgx$ этим рядом. Для $|x|\le 1$ имеем по формуле Лагранжа

$$|r_n(x)|\le\frac{\left|\cos^{n+1}y_\theta\cdot\sin\left(n+1\right)\left(y_0+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1}\le\frac{1}{n+1},$$

где $y_\theta=arctg\theta x.$ Отсюда ясно, что для всех значений x в промежутке $[-1,1]$ имеет место разложение

$$arctgx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\left(-1\right)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+... . \qquad (6)$$

Заметим, что хотя $arctgx$ и вне этого промежутка имеет определенный смысл, но разложение (6) вне этого промежутка не действительно, поскольку ряд (6) не имеет суммы.

Из ряда (6) при $x=1,$ в частности, получается ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+\left(-1\right)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+...$$

— один из рядов, дающий разложение числа π.

Биномиальный ряд. Пусть $f(x)=(1+x)^m$, где $m-$ любое действительное число, отличное от нуля и от всех натуральных чисел (при натуральном m получается известное конечное разложение по формуле Ньютона). В этом случае ряд Тейлора имеет вид:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot...\cdot\left[m-(n-1)\right]}{n!}x^n+...;$$

его называют биномиальным рядом, а коэффициенты его — биномиальными коэффициентами. При сделанных относительно m предположениях ни один из этих коэффициентов не будет нулем (наоборот, если бы m было натуральным числом, то коэффициент при x^{m+1} и все следующие обратились бы в нуль).

С помощью признака Даламбера легко установить, что при $|x|<1$ биномиальный ряд (абсолютно) сходится, а при $|x|>1$ расходится.

Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда, отвечающие, например, $m=-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+... \qquad (-1<x<1)$$

(обыкновенная геометрическая прогрессия), затем

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots\quad(-1\le x\le 1)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\ldots+(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots\,(-1<x\le 1).$$

ЛЕКЦИЯ 18

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Предположим, что дана последовательность, элементами которой являются функции

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots \tag{1}$$

от одной и той же переменной x, определенные на отрезке $[a,\,b]$. Пусть для каждого $x\in[a,b]$ эта последовательность имеет конечный предел; так как он вполне определяется значением x, то также представляет собой функцию от x:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{2}$$

которую мы будем называть предельной функцией для последовательности (1).

Теперь мы будем интересоваться не одним лишь существованием предела при каждом отдельном значении x, но функциональными свойствами предельной функции. Например, пусть элементы последовательности (1) являются непрерывными функциями; гарантирует ли это непрерывность предельной функции ? Как видно из следующих примеров, свойство непрерывности иногда переносится и на предельную функцию, иногда же нет.

Примеры. Во всех случаях $x\in[0,\,1]$.

1) $f_n(x)=x^n$, тогда предельная функция $f(x)=0$ *при* $x<1$ *и* $f(1)=1$ (*разрыв при* $x=1$);

2) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$, $f(x)=0$ *при* $x>0$ *и* $f(0)=1$ (*разрыв при* $x=0$);

3) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x)=0$ *при всех* x (*везде непрерывна*).

Естественно возникает задача — установить условия, при которых предельная функция сохраняет непрерывность. Как окажется, функциональные свойства предельной функции $f(x)$ существенно зависят от самого характера приближения $f_n(x)$ к $f(x)$ при различных значениях x.

Равномерная и неравномерная сходимости. Допустим, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место равенство (2). По самому определению предела это значит следующее: лишь только фиксировано значение $x \in [a, b]$ (для того, чтобы иметь дело с определенной числовой последовательностью), по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

где под x разумеется именно то значение, которое было заранее фиксировано.

Если взять другое значение $x \in [a, b]$, то получится другая последовательность, и — при том же ε — найденный номер N может оказаться уже непригодным; тогда его пришлось бы заменить большим. Но x принимает бесконечное множество значений, так что перед нами бесконечное множество различных числовых последовательностей, сходящихся к, вообще говоря, разным пределам. Для каждой из них в отдельности найдется свое N; возникает вопрос: существует ли такой номер N, который (при заданном ε) подходил бы для всех этих последовательностей одновременно ?

Покажем на примерах, что в одних случаях такой номер N существует, а в других — его нет.

1) Пусть

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \le x \le 1).$$

Так как здесь

$$0 \le f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n},$$

то сразу ясно, что для осуществления неравенства $\left| f_n(x) - 0 \right| < \varepsilon$ достаточно, каково бы ни было x, взять $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Таким образом, например, число $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1$ в этом случае годится одновременно для всех x.

2) Положим теперь

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \le x \le 1).$$

Для любого фиксированного $x > 0$ достаточно взять $n > \frac{1}{x\varepsilon}$, чтобы выполнялось неравенство: $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$. Но, с другой стороны, сколь большим ни взять n, для функции $f_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$ всегда найдется точка, именно точка $x = \frac{1}{n}$, в которой ее значение равно $\frac{1}{2}$, т.е. $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, за счет увеличения n сделать $f_n(x) < \frac{1}{2}$ для всех значений $x \in [0, 1]$ сразу — никак нельзя. Иными словами, уже для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ не существует такого номера N, который годился бы для всех $x \in [0, 1]$ одновременно.

Таким образом, является мотивированным следующее определение:

Если 1) последовательность (1) имеет при $x \in [a, b]$ *предельную функцию* $f(x)$ *и 2) для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой не зависящий от* x *номер* N, *что при* $n > N$ *неравенство (3) выполняется сразу для всех* $x \in [a, b]$, *то говорят, что последовательность (1) сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a, b]$.

Таким образом, в первом из приведенных примеров последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю равномерно относительно x в промежутке $[0, 1]$, а во втором — нет.

Перенесем теперь все сказанное выше о сходимости функций на случай функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots . \tag{4}$$

Предполагая данный ряд сходящимся, обозначим через $f(x)$ его сумму, через $f_n(x)$ его частичную сумму и, наконец, его остаток после $n-$го члена

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

При любом фиксированном x

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Если частичная сумма $f_n(x)$ стремится к сумме ряда $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$ (или, что то же самое, остаток ряда $\varphi_n(x)$ равномерно стремится к нулю), то говорят, что ряд (4) равномерно сходится в этой области.

Это определение равносильно следующему.

Ряд (4), сходящийся для всех значений $x \in [a, b]$, называется равномерно сходящимся в этой области, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой независящий от x номер N, что при $n > N$ неравенство

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

выполняется одновременно для всех $x \in [a, b]$.

Рассмотрим далее несколько примеров.

Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ сходится в открытом промежутке $(-1, 1)$. Для любого $x \in (-1, 1)$ остаток после $n-$го члена имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Если зафиксировать значение n, то

$$\lim_{x\to -1+0}\left|\varphi_n(x)\right| = \frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 1-0}\varphi_n(x)=\infty.$$

И то, и другое доказывает, что осуществить для всех x одновременно неравенство

$$\left|\varphi_n(x)\right| < \varepsilon \quad \left(если\ \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$$

при одном и том же номере n невозможно. Сходимость прогрессии в промежутке (-1, 1) неравномерна; это же относится к промежуткам $(-1, 0]$ и $[0, 1)$ по отдельности.

Следующий пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$$

при любом значении $x\in(-\infty, +\infty)$ сходится, так как он удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. По замечанию, сделанному после доказательства теоремы, остаток ряда оценивается, по абсолютной величине, своим первым членом:

$$\left|\varphi_n(x)\right| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда ясно, что во всем бесконечном промежутке ряд сходится равномерно.

Признаки равномерной сходимости рядов

Признак Вейерштрасса. Если члены функционального ряда (4) удовлетворяют при $x\in[a, b]$ неравенствам

$$\left|u_n(x)\right| \le c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где c_n являются членами некоторого сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots ,$$

то ряд (4) сходится на отрезке $[a, b]$ равномерно.

Таким образом, например, в любом промежутке равномерно сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$ если только ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Ведь

$$\left|a_n \sin nx\right| \le |a_n|,\quad \left|a_n \cos nx\right| \le |a_n|,$$

так что роль мажорантного здесь играет ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$

ЛЕКЦИЯ 19

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СУММЫ РЯДА

Непрерывность суммы ряда. Мы переходим теперь к изучению функциональных свойств суммы ряда, составленного из функций, в связи со свойствами этих функций. Введенное выше понятие равномерной сходимости в данном вопросе будет играть решающую роль. Начнем с вопроса о непрерывности суммы ряда.

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ определены на отрезке $[a,\, b]$ и все непрерывны в некоторой точке $x=x_0$ этого промежутка. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

в промежутке $[a,\, b]$ сходится равномерно, то и сумма ряда в точке x_0 будет непрерывна.

◊ Сохраняя прежние обозначения, имеем при любом $n=1,2,3,...$ и любом $x\in[a,\, b]$:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x)$$

и, в частности,

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

откуда

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \le \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| + \left|\varphi_n(x)\right| + \left|\varphi_n(x_0)\right|. \tag{1}$$

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon>0$. Ввиду равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n так, чтобы неравенство

$$\left|\varphi_n(x)\right| < \varepsilon \tag{2}$$

выполнялось для всех значений $x\in[a,\, b]$. Отметим, что при фиксированном n функция $f_n(x)$ есть сумма определенного конечного числа функций $u_k(x)$, непрерывных в точке $x=x_0$. Поэтому она также непрерывна в этой точке, и по заданному $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ будет

$$\left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Тогда, ввиду (1)-(3), неравенство $|x-x_0|<\delta$ влечет за собой

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < 3\varepsilon,$$

что и доказывает теорему. ♦

Естественно, если функции $u_n(x)$ непрерывны во всем промежутке $[a,\, b]$, то при наличии равномерной сходимости и сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{4}$$

будет непрерывна во всем промежутке.

Почленное интегрирование рядов. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об интегрировании суммы сходящегося функционального ряда.

Теорема. Если функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ непрерывны в промежутке $[a,\, b]$, и составленный из них ряд (4) сходится в этом промежутке равномерно, то интеграл от суммы $f(x)$ ряда (4) представляется следующим образом:

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots \,. \tag{5}$$

◊ Ввиду непрерывности функций $u_n(x)$ и $f(x)$, существование всех этих интегралов очевидно. Проинтегрировав тождество

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots u_n(x) + \varphi_n(x)$$

в промежутке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Таким образом, сумма n членов ряда (5) отличается от интеграла $\int_a^b f(x)dx$ дополнительным членом $\int_a^b \varphi_n(x)dx.$ Для доказательства разложения (5) нужно лишь установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = 0. \qquad (6)$$

В силу равномерной сходимости ряда (4), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x в рассматриваемом промежутке. Тогда для тех же значений n будет:

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \le \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon,$$

что и доказывает предельное соотношение (6).