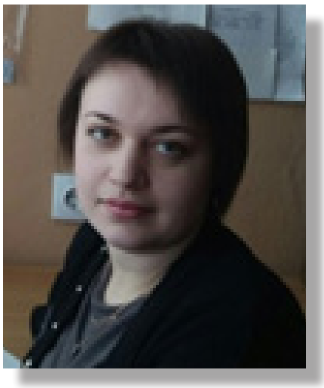
ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ В ШКОЛЕ



Титова Наталия Александровна,
учитель математики
ГУО «Средняя школа № 42 г. Витебска»

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СО ШКОЛЬНИКАМИ

Решая логические занимательные задачи, школьники учатся рассуждать и начинать понимать красоту и изящество рассуждений. Каждый культурный человек должен быть знаком с логическими задачами, головоломками, играми, известными уже сотни лет во многих странах мира.

О принципе Дирихле. В математике существует множество различных принципов. Некоторые из них достаточно просты и понятны даже учащемуся начальной школы, а некоторые требуют глубоких знаний для их объяснения и доказательства. Однако все принципы достаточно эффективны и их можно применять на практике. Одним из таких принципов является принцип Дирихле (известный также как принцип голубей или кроликов). Это довольно простое утверждение, способное помочь в решении многих математических задач.

Любой человек понимает, что рассадить n+1 зайца в n клеток так, чтобы в каждой клетке было не больше одного зайца, нельзя. Иначе говоря, если в n клетках находится n+1 заяц, то по крайней мере в одной клетке сидит не меньше двух зайцев (рис. 1).

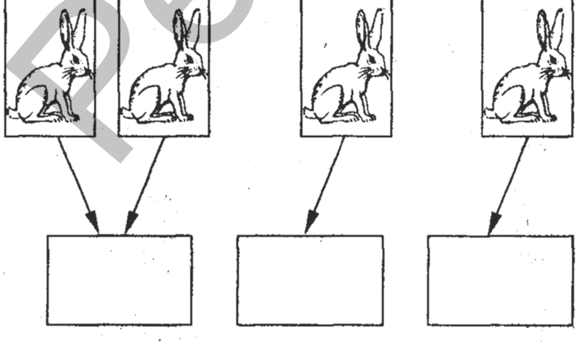


Рисунок 1

Это утверждение и называют принципом Дирихле. В основе принципа Дирихле лежит понятие множества. Этот принцип утверждает, что если множество из N элементов разбито на n подмножеств, не имеющих общих элементов, где N>n, то по крайней мере в одном подмножестве будет более чем один элемент. (Или если есть n ящиков, в которых находится в общей сложности не менее n+1 предмета, то непременно есть ящик, в котором лежат по крайней мере 2 предмета.)

Задачи, которые решаются с помощью принципа Дирихле, я использую на факультативных занятиях с учащимися 6-х, 7-х классов.

Обучение решению задач с использованием принципа Дирихле на факультативе начинаю с рассмотрения простых задач. После решения каждой задачи предлагаю учащимся придумать, как можно наглядно показать решение той или иной задачи. Наглядности изготавливаем вместе с учениками.

Примеры задач

Задача 1. Доказать, что если 21 человек собрал 200 орехов, то есть 2 человека, собравшие поровну орехов.

Решение. Если у всех разное число орехов, то всего было бы собрано не меньше 0+1+2+3+...+20=210 орехов, что противоречит условию задачи.

После решения данной задачи обсуждаем с ребятами вопрос о том, каким образом можно наглядно продемонстрировать решение. Приходим к выводу, что для наглядного объяснения решения нам необходимо вырезать из бумаги 210 орехов. На первый взгляд это может показаться очень трудоемким процессом, но учащиеся с удовольствием берутся за выполнение данного поручения.

Задача 2. В мешке лежат шарики двух разных цветов – белого и зеленого. Какое наименьшее количество шариков нужно вынуть из мешка, чтобы среди них точно два шарика оказались одного цвета?

Для наглядной демонстрации решения данной задачи использую теннисные шарики белого и зеленого цвета, которые складываю в мешок. Предлагаю учащимся по очереди вытянуть сначала два, а затем три шарика. Вместе сделать вывод о полученных результатах.

Решение. Понятно, что, взяв три шарика, мы обнаружим, что два из них одного цвета. В данном случае роль кроликов играют шарики, а роль клеток – зеленый и белый цвета. А так как клеток меньше, чем кроликов, то по принципу Дирихле найдется клетка, в которой сидят хотя бы два кролика. То есть два шара одного цвета. Легко заметить, что, вытащив два шара, мы можем получить шары разных цветов.

Постепенно предлагаю ученикам для решения более сложные задачи. Одной из таких задач является задача про послов и флаги.

Задача 3. На краю круглого стола расположены на одинаковом расстоянии друг от друга n флагов стран, за столом сидят n послов этих стран, причем каждый посол сидит рядом с чужим флагом. Доказать, что существует такое вращение стола, после которого хотя бы два посла окажутся рядом с флагом своей страны.

Учащиеся 7 «В» класса ГУО «Средняя школа № 42 г. Витебска» обсуждают наглядную демонстрацию задач

Решение. Существует n–1 способов вращения стола, после каждого из них взаимное расположение флагов и послов изменится. Каждому послу сопоставим вращение, после которого он окажется рядом со своим флагом. Согласно принципу Дирихле при каком-то вращении два (может, и больше) посла окажутся рядом со своим флагом. В решении задачи роль «зайцев» играют, естественно, послы, а роль «клеток» – положения стола при различных вращениях. Посол попадает в «клетку», если при соответствующем этой «клетке» вращении стола он оказывается рядом с флагом своей страны. Таким образом, «клеток» у нас n–1, а «зайцев» – n. Замечание: Условие о том, что вначале ни один из послов не находится рядом со своим флагом, существенно. На самом деле первоначальное положение также является «клеткой», но эта «клетка» по условию заведомо окажется пустой. Так что можно считать, что всего «клеток» имеется n–1.

Решение данной задачи у некоторых учащихся вызывает затруднение в связи с тем, что количество флагов и послов обозначено через n. Для того чтобы облегчить понимание этой задачи, я предлагаю им рассмотреть частный случай: на краю круглого стола расположены на одинаковом расстоянии друг от друга 8 флагов стран, за столом сидят 8 послов этих стран, причем каждый посол сидит рядом с чужим флагом. Доказать, что существует такое вращение стола, после которого хотя бы два посла окажутся рядом с флагом своей страны.

Также я наглядно демонстрирую решение этой задачи с помощью двух дисков, которые имеют один центр, но разный диаметр. Диски могут вращаться относительно друг друга. По краю обоих приклеены квадратики разных цветов, которые играют роль послов и флагов. Посол оказывается рядом с флагом своей страны, если цвета на двух дисках совпадают.

Учащимся 7-го класса, которые уже знакомы с геометрией, различными теоремами и аксиомами, я предлагаю решать задачи с геометрическим содержанием. Например:

Задача 4. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника (рис. 2).

Решение. Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через α1 и α2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут «зайцами», а полуплоскости α1 и α2 – «клетками». Каждый «заяц» попадает в какую-нибудь «клетку» (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек

A, B, C). Так как «зайцев» три, а «клеток» только две, то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку»; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости (рис. 2).

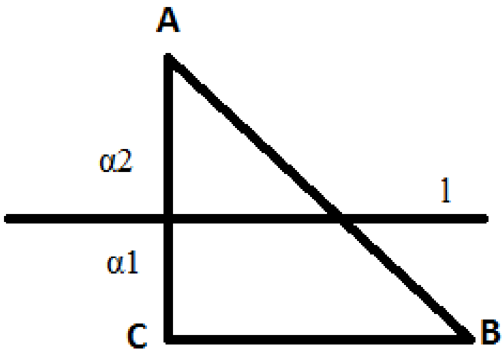


Рисунок 2

Пусть, скажем, точки C и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок CB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Данная тема очень увлекает детей, и они самостоятельно пробуют составить задачи, аналогичные тем, которые с ними решали на уроке. Для составления данных задач учащимся недостаточно взять любые числа, необходимо продумать соотношение исходных данных, а также грамотно и четко выстроить решение. После того как задача составлена и решена, ученики предлагают одноклассникам решить свою задачу. Используют при этом наглядный материал, который изготовили сами.

Вот некоторые задачи, составленные моими учениками:

Задача 5. В саду растет 10 яблонь. Общее количество плодов на них 43. Доказать, что найдется две яблони, на которых растет по одинаковому числу плодов (на каждом дереве растет хотя бы по одному яблоку).

Решение. За «клетки» примем яблони, а за «кроликов» плоды. Применяя принцип Дирихле, чтобы не было двух «клеток», в которых сидят по одинаковому числу «кроликов», всего «кроликов» должно быть не менее 55. По условию задачи их 43, значит найдутся две «клетки» в которых сидят по одинаковому числу кроликов. А это и означает, что в саду растет две яблони, имеющие по одинаковому числу плодов.

Задача 6. На полке стоит 7 папок, в них всего 8 документов. Доказать, что найдется папка, в которой хранится два документа.

Решение. Пусть «кроликами» будут документы, а «клетками» – папки. Применяя принцип Дирихле, получим, что в одной из «клеток» будет не менее двух «кроликов», так как «кроликов» больше, чем «клеток». А это значит, что найдется папка, в которой хранится два документа.

Задача 7. В тире стреляли в квадрат 3×3 и произвели 8 выстрелов. Найдется ли в этой фигуре квадрат 1×1, в котором нет дырки от пули?

Решение. Всего без наложений квадрат 3×3 можно покрыть 9 квадратиками 1×1. Возьмем за «клетки» квадратики 1×1 (их 9), а за «кроликов» – выстрелы (их 8). А это и значит,

Учащиеся 7 «В» класса ГУО «Средняя школа № 42 г. Витебска» изготавливают наглядный материал для демонстрации задач, которые составили сами

Учащаяся 7 «В» класса ГУО «Средняя школа № 42 г. Витебска» Конах Ульяна разбирает решение своей задачи с учащимися

что найдется квадратик 1×1, в котором нет дырки от пули.

Учащиеся привыкли к тому, что математика – наука строгая, что есть задачи, которые требуют глубоких знаний и умения проводить логические рассуждения. Но многое можно объяснить доступно и интересно даже для тех детей, которым математика дается нелегко, вовлекая их в процесс решения яркими и запоминающимися моментами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безлюдова, Т.С. Факультативные занятия «Математика после уроков» 6 класс: пособие для учащихся общего среднего образования с бел. и рус. яз. обучения / Т.С. Безлюдова. – Мозырь: Белый ветер, 2016.
2. Безлюдова, Т.С. Факультативные занятия «Математика после уроков» 7 класс: пособие для учащихся общего среднего образования с бел. и рус. яз. обучения / Т.С. Безлюдова. – Мозырь: Белый ветер, 2014.
3. Струк, Г.И. Решение олимпиадных и конкурсных задач по математике. 7–9 классы: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / Г.И. Струк. – Мозырь: Белый ветер, 2015.
4. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы: в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь: Выснова, 2018. – Ч. 1: Пособие для учителей учреждений общего среднего образования.
5. Андреев, А.А. Принцип Дирихле: учеб. издание / А.А. Андреев [и др.]. – Самара, 1999. – Сер. А.