

Министерство образования Республики Беларусь


Учреждение образования  
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»  
(ВГУ имени П.М. Машерова)

УДК 512.542

№ госрегистрации 20170835

Инв. № \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Ректор университета  
И. М. Прищела  
11 марта 2019 г.



ОТЧЕТ


о научно-исследовательской работе

Конечные группы с заданными свойствами инжекторов

согласно договору с БРФФИ № Ф17М-064 от 18.04.2017

(заключительный)

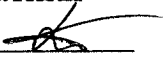
Руководитель НИР



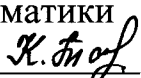
А. В. Марцинкевич  
« 11 » марта 2019 г.

Витебск 2019

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,  
аспирант кафедры  
алгебры и методики преподавания математики  
ВГУ имени П.М. Машерова 11.03.2019 

А. В. Марцинкевич  
(введение, заключение,  
разделы 1, 2, 3, 7)

Исполнитель темы,  
аспирант кафедры  
алгебры и методики преподавания математики  
ВГУ имени П.М. Машерова 11.03.2019 

Т. Б. Караулова (Василевич)  
(разделы 4, 5, 6)

Нормоконтролер

11.03.19 

Т. В. Харкевич

## РЕФЕРАТ

Отчет 35 с., 1 ч., 33 источника, 2 прил.

КЛАСС ФИТТИНГА, ПРОИЗВЕДЕНИЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА, РЕШЕТОЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ КЛАССОВ ФИТТИНГА, МНОЖЕСТВО ФИТТИНГА,  $H$ -ФУНКЦИЯ,  $\mathfrak{F}$ -ИНЪЕКТОР.

Объектом исследования являются классы Фиттинга с заданными свойствами инъекторов.

Цель работы – изучение структуры конечных групп с заданными свойствами инъекторов на основе исследования свойств локальной нормальности классов Фиттинга.

Используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, в частности методы теории классов Фиттинга.

Получены следующие новые научные результаты:

– доказан критерий  $\pi$ -нормальности решеточных объединений классов Фиттинга и найдены его приложения для классов Фиттинга, удовлетворяющих свойству  $(\beta_\pi)$ ;

– доказано существование  $\pi$ -нормальных произведений классов Фиттинга, факторизуемых не  $\pi$ -нормальными сомножителями;

– описаны общие методы построения подрешеток решетки локально нормальных классов Фиттинга;

– установлено, что существуют  $\mathfrak{X}$ -нормальные классы Фиттинга, которые не  $\mathfrak{X}$ -квазинормальны, и  $\mathfrak{X}$ -квазинормальные классы Фиттинга, которые не  $\mathfrak{X}$ -нормальны ( $\mathfrak{X}$  – класс групп);

– разработаны локальные методы исследования подгруппового строения группы посредством ее множеств Хартли;

– доказано существование и сопряженность  $\mathfrak{F}$ -инъекторов  $\pi$ -разрешимой группы для класса  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{X}$ , где  $\mathfrak{X}$  – непустой класс Фиттинга и описано строение  $\mathfrak{F}$ -инъекторов;

– доказано существование и сопряженность  $\mathcal{H}$ -инъекторов для множеств Хартли  $\mathcal{H}$  разрешимой и частично  $\pi$ -разрешимой групп, а также описано их строение;

– описаны свойства радикалов для множеств Хартли конечной группы.

Полученные результаты исследований могут быть использованы при исследованиях классов групп и канонических подгрупп, проводимых в Витебском государственном университете имени П.М. Машерова, Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины, Институте математики НАН Беларуси, а также могут найти применение в совместных международных проектах с Институтом математики НАН Украины, Сибирского отдела РАН, Сюйчжоуским нормальным университетом (КНР), Университетом Науки и Технологий Китая, Наваррским университетом (Испания), Тюбингенским университетом (Германия) и со Школой Науки Цзяннаньского университета (КНР).

Результаты исследований могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, для написания курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	6
1 О решеточных объединениях классов Фиттинга .....	8
2 $\pi$ -Нормальные произведения классов Фиттинга с заданными свойствами.....	12
3 Квазинормальные классы Фиттинга конечных групп .....	14
4 О локальных заданиях множеств Хартли .....	17
5 Множества Хартли и инъекторы конечной группы.....	19
6 О факторах, покрываемых инъекторами конечной группы.....	23
7 Перспективы дальнейшего развития исследований и практического использования полученных результатов.....	24
Заключение.....	25
Список использованных источников.....	27
Приложение А.....	30
Приложение Б .....	34

## ВВЕДЕНИЕ

В теории классов конечных групп одним из важных объектов в исследовании их структуры являются так называемые нормальные классы Фиттинга, которые впервые были определены Блессенолем и Гашюцом [1] в 1970 году. Как оказалось, в последующем, нормальные классы Фиттинга являются весьма полезным инструментом как для характеристики классов, так и для описания радикалов групп, что нашло свое отражение в серии крупных работ Бейдельмана [2], Хаука [3], Кусака [4] и Гашюца [5].

Первоначально теория нормальных классов Фиттинга развивалась в классе всех конечных разрешимых групп. Основополагающей в этом направлении исследований является теорема Блессеноля и Гашюца [1], в которой установлено, что пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга, и доказано существование наименьшего нетривиального нормального класса Фиттинга.

В 1977 году Лауэ [6] расширил понятие нормальности и определил локально нормальные классы Фиттинга. Таким образом, весьма актуальна задача исследования свойств локально нормальных классов Фиттинга. В связи с этим мы расширяем понятие нормального класса Фиттинга, определяя  $\pi$ -нормальный класс Фиттинга, где  $\pi$  – непустое множество простых чисел. Нами построены примеры нетривиальных не  $\pi$ -нормальных классов Фиттинга таких, что их произведение является  $\pi$ -нормальным классом Фиттинга; получен критерий  $\pi$ -нормальности решеточных объединений классов Фиттинга; описано построение подрешетки решетки всех  $\pi$ -нормальных классов Фиттинга; установлено, что существуют  $\mathfrak{X}$ -нормальные классы Фиттинга, которые не  $\mathfrak{X}$ -квазинормальны, и  $\mathfrak{X}$ -квазинормальные классы Фиттинга, которые не  $\mathfrak{X}$ -нормальны ( $\mathfrak{X}$  – класс групп): найдены новые канонические классы сопряженных инъекторов в частично  $\pi$ -разрешимой группе для множества Хартли, определяемого постоянной  $H$ -функцией и описано их строение; разработаны новые

локальные методы исследования подгруппового строения группы посредством ее множеств Хартли; решена проблема Хартли об описании главных факторов, покрываемых инъекторами, для случая  $\pi$ -локальных множеств Фиттинга частично разрешимых групп.

Все рассматриваемые в работе группы конечны, если не оговорено противное.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – № 118 (1). – S. 1–8.
- 2 Beidleman, J. C. On products and normal Fitting classes / J. C. Beidleman // Arch. Math. – 1977. – № 28 (4). – P. 347–356.
- 3 Hauck, P. On products of Fitting classes / P. Hauck // J. London Math. – 1979. – Soc. 2, № 20. – P. 423–434.
- 4 Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – №. 167. – P. 37–47.
- 5 Gaschütz, W. Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen / W. Gaschütz // J. Algebra. – 1974. – Vol. 30. – P. 277–278.
- 6 Laue, H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45, no. 2. – P. 274–283.
- 7 Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-N. Y. : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
- 8 Воробьев, Н. Т. Конечные  $\pi$ -группы с нормальными инъекторами / Н. Т. Воробьев, А. В. Марцинкевич // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 790–797.
- 9 Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – № 141. – P. 289–295.
- 10 Марцинкевич, А. В. Произведения и объединения локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 152–157.
- 11 Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Vol. 130. – P. 67–72.
- 12 Мазуров, В. Д. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 18 / В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2014.



13 Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 11. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1990.

14 Vorob'ev, N. T. On the factorization of local and non-local products of finite groups of non-local formations / N. T. Vorob'ev // Proc. 7th Reg. Sci. Sess. Math., Sect. Algebra and Number Theory, Pedagogical University of Zielona Góra. – Kalsk (Poland), 1990. – P. 9–13.

15 Ведерников, В. А. О локальных формациях конечных групп / В. А. Ведерников // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, вып. 6. – С. 32–37.

16 Воробьёв, Н. Т. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, А. Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1995. – № 8. – С. 55–58.

17 Lockett, F. P. The Fitting class  $\mathfrak{F}^*$  / F. P. Lockett // Math. Z. – 1974. – № 137. – P. 131–136.

18 Makan, A. R. Fitting classes with the wreath product property are normal / A.R. Makan // J. London Math. Soc. – 1974. – № 8. – P. 245–246.

19 Hauck, P. Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen: Dis. ... Doctor der Naturwissenschaft / P. Hauck. – Mainz, 1977. – 153 p.

20 Марцинкевич, А. В. О проблеме Дёрка-Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 90–97.

21 Gaschütz, W. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / W. Gaschütz, B. Fischer, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – № 102. – P. 337–339.

22 Семенов, М. Г. Формула инъектора конечной  $\pi$ -разрешимой группы / М. Г. Семенов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 77–88.

23 Yang, N. On  $\mathcal{F}$ -injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – № 1 (46). – С. 217–229.

24 Воробьёв, Н. Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н. Т. Воробьёв, Т. Б. Караулова // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С.

214–227. (Vorob`ev, N. T. Hartley Sets and Injectors of a Finite Group / N. T. Vorob`ev, T. B. Karaulova // Math. Notes. – 2019. – Vol. 105, № 2. – P.214–227.)

25 Караулова, Т. Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Т. Б. Караулова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 29–38.

26 Шеметков, Л. А. О подгруппах  $\pi$ -разрешимых групп / Л. А. Шеметков // Конечные группы. – 1975. – С. 207–212.

27 Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N. T. Vorob`ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

28 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М: Наука, 1978.

29 Воробьёв, Н. Т. Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы / Н. Т. Воробьёв, М. Г. Семёнов // Матем. заметки. – 2015. – № 4 (97). – С. 516–528.

30 Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – № 3 (2). – P. 193–207.

31 D'Arcy, P. Locally defined Fitting classes / P. D'Arcy // J. Austral. Math. Soc. – 1975. – № 1 (20). – P. 25–32.

32 Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

33 Yang, N. On Injectors of a Hartley Set of a Finite Group / N. Yang, N. T. Vorob`ev, T. B. Vasilevich // Algebra Colloquium. – 2018. – №4 (25). – P. 671–680.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Перечень публикаций исполнителей НИР

#### Статьи в научных журналах

1 Марцинкевич, А. В. Произведения и объединения локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьев // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 152–157.

2 Марцинкевич, А. В. О проблеме Дёрка-Хоукса для локально нормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – №. 4 (37). – С. 90–97.

3 Караулова, Т. Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Т. Б. Караулова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 29–38.

4 Yang, N. On Injectors of a Hartley Set of a Finite Group / N. Yang, N. T. Vorob'ev, T. B. Vasilevich // Algebra Colloquium. – 2018. – №4 (25). – P. 671–680.

5 Воробьев, Н. Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н. Т. Воробьев, Т. Б. Караулова // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 2. – С. 214–227. (Vorob'ev, N. T. Hartley Sets and Injectors of a Finite Group / N. T. Vorob'ev, T. B. Karaulova // Math. Notes. – 2019. – Vol. 105, № 2. – P.214–227.)

#### Тезисы докладов конференций

1 Martsinkevich, A. V.  $\pi$ -Normal products of Fitting classes with given properties / A. V. Martsinkevich // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 3–7, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – P. 84.

2 Марцинкевич, А. В. О свойствах  $\pi$ -квазинормальных классов Фиттинга / А. В. Марцинкевич // XI Машеровские чтения : материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2017 г. / Витебский гос. ун-т им. П. М. Машерова ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 27–28.

3 Марцинкевич, А.В. О характеристике локально нормальных классов Фиттинга / А.В. Марцинкевич // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIII(70) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февраля 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – Т. 1. – С. 15.

4 Marcinkevich, A. V. On properties of quasinormal Fitting classes / A. V. Marcinkevich // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; editorial board: I. M. Prischepa [and others]. – Vitebsk, 2018. – P. 16–17.

5 Воробьев, Н. Т. О классах сопряженных инъекторов  $\pi$ -разделимых конечных групп / Н. Т. Воробьев, Т. Б. Василевич // Наука – образованию, производству, экономике : материалы XXII(69) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10 февраля 2017 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – Т. 1. – С. 10–11.

6 Vorob'ev, N. T. On Hartley sets and injectors of a finite group / N. T. Vorob'ev, T. B. Vasilevich // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko, July 3–7, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv : Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – P. 141.

7 Василевич, Т. Б. О локальных заданиях множеств Хартли / Т. Б. Василевич // XI Машеровские чтения : материалы международной

научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол. : И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 10–11.

8 Воробьев, Н. Т. Инъекторы  $\pi$ -разрешимых групп / Н. Т. Воробьев, Т. Б. Василевич // Мальцевские чтения : материалы международной конференции, Новосибирск, 20-24 ноября 2017 г. – Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет. – Новосибирск, 2017. – С. 66.

9 Vasilevich, T. On the cover-avoid property of injectors of finite group / T. Vasilevich // The Youth of the 21th Century : Education, Science, Innovations : materials of the International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 6, 2017 / Vitebsk State University; Editorial board : I.M. Prishepa (editor in chief.) [and others.]. – Vitebsk, 2017. – P. 18 –19.

10 Воробьев, Н.Т. Локальные задания множеств Хартли конечной группы / Н.Т. Воробьев, Т.Б. Василевич // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIII(70) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 15 февраля 2018 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – Т. 1. – С. 7–8.

11 Василевич, Т. Б. О факторах, покрываемых инъекторами конечной группы / Т. Б. Василевич // Материалы XII школы-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А.Махнева «Теория групп и ее приложения», Краснодар, Россия, 13–20 мая 2018 г. – Кубанский государственный университет и Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН. – Краснодар, 2018. – С. 60–61.

12 Воробьев, Н. Т. О главных факторах, покрываемых инъекторами частично  $\pi$ -разрешимой группы / Н. Т. Воробьев, Т. Б. Василевич // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со

дня рождения профессора А. Г. Куроша (1908–1971). Москва, Россия, 23–25 мая 2018 г. – МГУ – Москва, 2018. – С. 63–65.

13 Караулова, Т. Б. О характеристике иньекторов для множеств Фишера / Т. Б. Караулова // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIV(71) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – Т. 1. – С. 13–14.